



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

N° de séries :

Mémoire de fin de cycle

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

Présenté par :

- Khemissa Nora
- Guenoun Abir

Devant le jury :

Présidente	: Boudjerda Khawla	M.C.B Université de Jijel
Encadreuse	: Yakoubi Fatma	M.A.A Université de Jijel
Examinatrice	: Djeridi Zahra	M.A.A Université de Jijel
Invitation pour M^r . Gherda Mebrouk		

Remerciements

*Louange a **Allah**, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être, nous remercions le bon dieu qui nous a orienté au chemin de savoir et les portes de la science.*

*Nous témoignons une reconnaissance particulière pour notre encadreur **M^{me} YAKOUBI FATMA**, reçoive l'expression de tout notre reconnaissance pour ces conseils et orientation ainsi que son aimable disponibilité et le temps et la patience qu'elle nous a accordés. Nous étions très touchés par la confiance qu'elle nous a témoignée tout au long de notre travail.*

*Nous nous adressons également à remercier les membres de jurys **M^{me} Djeridi Zahra** et **M^{elle} Boudjerda Khawla** qu'elles pu se libérer de leurs obligations pour avoir accepté de juger notre mémoire en tant que présidente et examinatrice.*

Nous remercions aussi tous les enseignants qui ont contribué à notre formation. Nous remercions énormément nos collègues et copines pour leurs sincères conseils et encouragements avec amour et amitié durant la réalisation de ce mémoire.

Enfin, tenant à remercier tout ce qu'ont contribué de près et de loin a la réalisation de ce projet de fin de cycle.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail ;

A mes parents SAÏD et OUMESAAD, ce travail est le fruit de votre dur labour, je sais que les paroles ne suffiront jamais à décrire ce que je ressens envers vous...je ne trouve pas mieux à dire que : " O mon seigneur, fais leur a tous de miséricorde comme ils m'ont élevé tout petit "

A mon frère ALI et ma sœur SARA pour leurs aide et encouragement durant la réalisation de ce mémoire.

A mes nièces INES et MAHDI, ma sœur AMINA et leur conjoint SAÏD.

A ma sœur ZINEB et leur conjoint KARIM.

A ma grande mère et mon grand père.

A tous mes proches et mes amis d'étude pour les bons et les mauvais moments qu'on sacrifié ensemble.

Et enfin pour ceux qui ne sont pas sur les lignes mais dans le cœur.

NORA

Table des matières

Introduction	i
1 Concepts généraux	1
1.1 Rappels sur la théorie de la fiabilité	1
1.2 Les Lois usuelles utilisées en fiabilité	8
1.2.1 La loi exponentielle	8
1.2.2 La loi normale (Laplace-Gauss)	10
1.2.3 La loi log-normale (ou de Galton)	11
1.2.4 La loi de Weibull	11
1.3 les différents essais utilisés en fiabilité	13
1.3.1 Essais dans le cycle de développement d'un produit	13
1.3.2 Essais aggravé	15
1.3.3 Essais d'estimation de la fiabilité	16
1.3.4 Les essais de déverminage	17
2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés	19
2.1 Généralités sur les essais accélérés :	19
2.2 Le modèle Standard de Vie Accélérée	20
2.3 Théorie des essais accélérés et facteur d'accélération :	22

2.4	Plans d'essai accélérés par régression	23
2.4.1	Application des modèles S.V.A	24
2.4.2	Application du modèle S.V.A paramétrique	24
2.4.3	Application du modèle S.V.A non paramétrique	32

Introduction générale

La fiabilité est une science relativement récente dont on peut situer approximativement les débuts vers les années 1960. La fiabilité est un néologisme introduit pour traduire le terme anglo-saxon de "RELIABILITY". Ce terme désigne la science des défaillances.

Un système est fiable lorsque la probabilité de remplir sa mission sur une durée donnée correspond à celle spécifiée dans le cahier des charges. Donc le fiabiliste définit la fiabilité comme une étude des défaillances des systèmes, essentiellement des produits manufacturés (mécanique, électronique, génie civil...), et en particulier d'un point de vue statistique.

La fiabilité est développée très rapidement, elle a des applications dans de nombreux domaines : économique, scientifique, technique et industriel, ... Elle est étroitement liée à des notions de sécurité de fonctionnement, de qualité, d'efficacité ou de performance.

L'étude de fiabilité est nécessaire à différents niveaux de la vie du système : aux niveaux de la conception ou de la fabrication, afin de pouvoir élever le degré de fiabilité selon les normes spécifiées, au niveau de l'exploitation.

De plus, le calcul de fiabilité d'un système complexe demande de savoir estimer les durées de fonctionnement de ces composants, de pouvoir analyser l'enchaînement logique des pannes du système selon les défaillances des composants, de proposer des modèles conduisant à une évaluation quantitative des différentes mesures de performance.

L'objectif de ce mémoire est de présenter l'estimation de la fiabilité par les essais accélérés dans les deux cas : **paramétrique** et **non paramétrique**.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Le premier chapitre : est intitulé : "Concepts généraux" ; ce chapitre contient trois sections représentent l'essentielles pour la suite de ce mémoire.

Le deuxième chapitre : est intitulé : "Estimation de la fiabilité par les essais accélérés" ; ce chapitre traite trois sections dont le contenu est basé sur l'estimation paramétrique et l'estimation non paramétrique.

Chapitre 1

Concepts généraux

La théorie de la fiabilité sert à étudier des systèmes à fonctionner correctement durant une période donnée. La fiabilité est l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit et elle est retenue en tant que critère fondamental pour leur élaboration, elle est prise en considération dès le stade de la conception.

Un système est un ensemble des composants en interaction destiné à accomplir une tâche donnée, on peut distinguer deux types des systèmes :

[1] **Système non réparable** : est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne c'est le cas des petites systèmes (par exemple : des ampoules, des cartes à puce...)

Système réparable : est un système qui après sa défaillance, peut être remis en état de marche par des actions de réparation. C'est le cas de tous les systèmes complexes (par exemple : des radars, des voitures...).

Dans ce chapitre, on donne un rappel des notions élémentaires de la théorie de la fiabilité.

1.1 Rappels sur la théorie de la fiabilité

La durée de vie

L'intervalle de temps entre la mise en marche ($t = 0$) et la 1^{ère} défaillance ou bien le temps entre deux défaillances consécutives après remise à neuf est une variable T continue et positive.

Le temps t associé à chaque dispositif, définit une variable aléatoire T qui doit être traitée selon les méthodes usuelles du calcul des probabilités sachant que T représente la durée

de vie d'un système avant défaillance.

La Fonction de défaillance :

La fonction de défaillance (ou la fonction de répartition) représente la probabilité pour qu'il survienne au moins une panne jusqu'au temps t et qu'on appelle aussi probabilité cumulative de défaillance, c'est-à-dire ;

$$F(t) = P(T \leq t) ; t > 0.$$

et $F(t)$ est une fonction croissante.

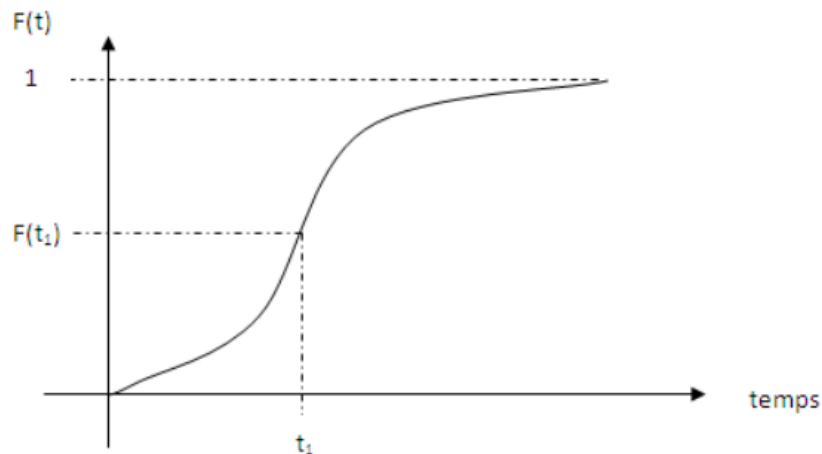


FIGURE 1.1 – courbe de fonction de défaillance

La fonction de fiabilité :

La fonction de fiabilité, notée par $R(t)$ est définie comme étant la probabilité de fonctionnement sans défaillance du matériel pendant un temps t mathématiquement, on écrit :

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \quad R(t) &= 1 - F(t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= P(T > t) \end{aligned}$$

On a évidemment :

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} &= \frac{d[1 - F(t)]}{dt} \\ &= \frac{-dF(t)}{dt} \\ &= -f(t); \end{aligned}$$

où : $f(t)$ est la densité.

La fonction de fiabilité est en général présentée dans la forme suivant :

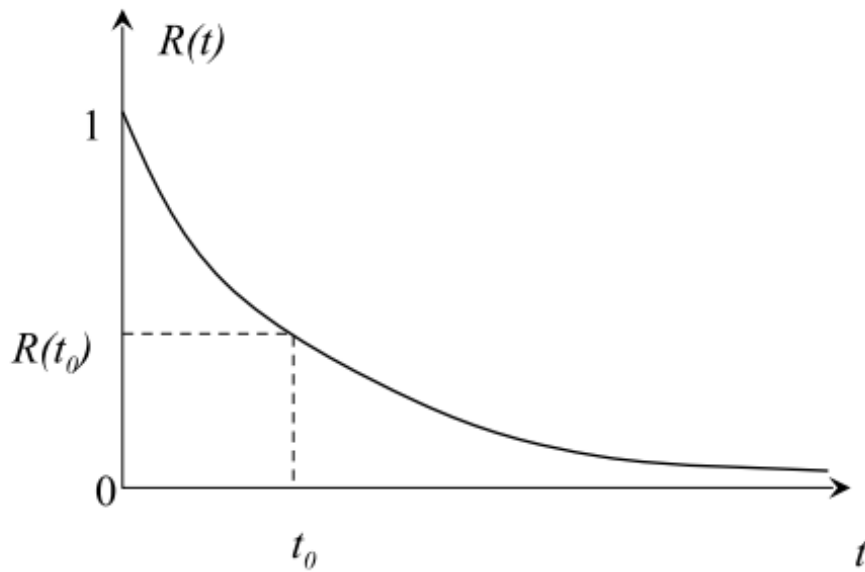


FIGURE 1.2 – Courbe de la fonction de fiabilité.

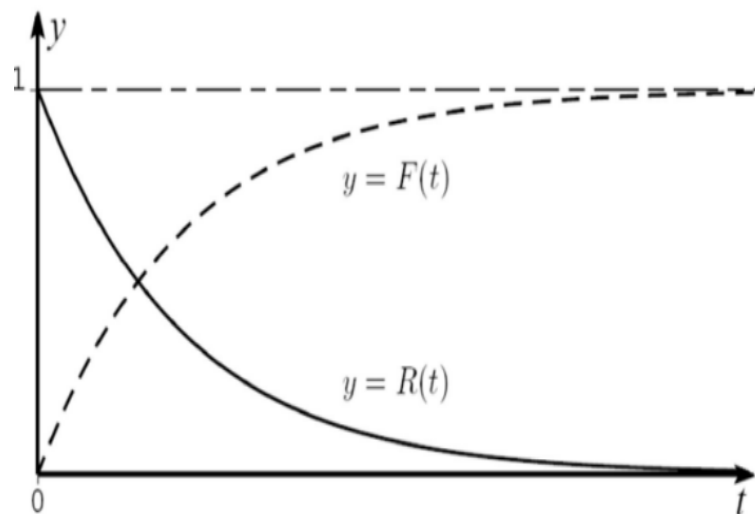


FIGURE 1.3 – Relation entre la fonction de défaillance $F(t)$ et la fonction de fiabilité $R(t)$.

La Disponibilité :

On appelle disponibilité $A(t)$ la probabilité que le système est en état de bon fonctionnement à l'instant t . On a donc :

$$A(t) = P(\text{système non défaillant à l'instant } t)$$

La Maintenabilité :

La maintenabilité, désignée par $M(t)$, est l'aptitude d'un système à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits, elle est caractérisée par la probabilité $M(t)$ que le système soit en état à l'instant t ; d'accomplir ses fonctions sachant que le système était en panne à l'instant 0.

$$M(t) = P(\text{système réparé sur } [0, t])$$

Le Taux de défaillance instantané

Le taux de défaillance $\lambda(t)$ est la probabilité pour qu'un élément tombe en panne au cours de $[t, t + x]$ sachant qu'il fonctionne sans défaillance jusqu'à la date t . Et est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{R(t) - R(t+x)}{R(t)} \right) \right] \end{aligned}$$

En tout point de continuité des densités on a les relations :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} \\ &= -\frac{d}{dt} \ln R(t) \geq 0 \end{aligned}$$

Inversement, pour chercher la fonction de fiabilité et de répartition à partir du taux de défaillance, on utilise les fonctions suivantes :

$$R(t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right)$$

et

$$\begin{aligned}
 F(t) &= 1 - R(t) \\
 &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)
 \end{aligned}$$

Dans la plupart des cas, la courbe représentant le taux de défaillance d'un matériel ou d'un composant, en fonction de son âge, a une forme caractéristique, c'est la courbe en baignoire.

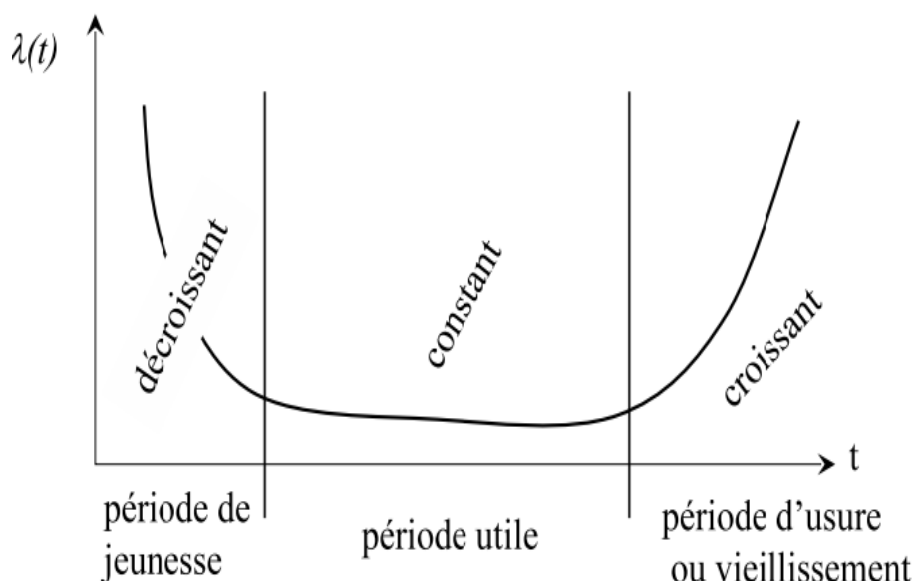


FIGURE 1.4 – Courbe en baignoire

On distingue les trois périodes suivantes :

- Une première période dite de "jeunesse" ou période de mortalité infantile due à des erreurs de fabrication ou de conception.

Le taux de défaillance d'abord très élevé décroît rapidement.

- Une deuxième période où le taux de défaillance est pratiquement constant et peu élevé. Cette période correspond à des défaillances apparaissant aléatoirement, sans cause systématique.
- La troisième période est caractérisée par un taux de défaillance croissant très rapidement, les défaillances sont dues à l'usure, elle marque la fin de la vie utile du matériel.

Exemple

A partir de cet exemple simple, on introduit les principales notions intervenant dans la théorie de la fiabilité.

On met en service, au temps $t = 0$, 200 matériels identiques fonctionnant dans les mêmes conditions. On relève à intervalles réguliers, toutes les 50 heures par exemple, le nombre $N(t)$ de matériels survivants à cette date. On obtient les résultats suivants :

<i>Dates</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$N(t)$	200	195	175	150	110	75	50	20	0

A partir de ces observations, on peut déterminer :

- le nombre de matériels défectueux à chaque date t :

$$\Delta N(t) = N(t - 1) - N(t)$$

- le pourcentage de survivants à chaque date t ou fréquence relative des survivants :

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)}$$

- la proportion de défectueux dans l'intervalle $(t-1, t)$ ou fréquence relative des défectueux :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{N(t - 1) - N(t)}{N(0)} \\ &= R(t - 1) - R(t) \end{aligned}$$

- le taux moyen de défaillance :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{N(t - \Delta t) - N(t)}{N(t - \Delta t)} \\ &= \frac{R(t - \Delta t) - R(t)}{R(t - \Delta t)} \end{aligned}$$

Le tableau suivant donne les résultats :

<i>Dates</i>	$N(t)$	$\Delta N(t)$	$R(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
0	200	0	1	0	
1	195	5	0.975	0.025	0.025
2	175	20	0.875	0.10	0.102
3	150	25	0.75	0.125	0.143
4	110	40	0.55	0.20	0.266
5	75	35	0.375	0.175	0.318
6	50	25	0.25	0.125	0.333
7	20	30	0.10	0.15	0.66
8	0	20	0	0.10	1

Temps moyens :

• L'espérance de la durée de vie joue un grand rôle en fiabilité ; c'est le temps moyen de panne ou (**M.T.T.F : Mean Time To Failure**), Nous le notons m :

$$MTTF = E(T)$$

$$= m$$

C'est une mesure importante de la qualité d'un système. pour la calculer, il est préférable d'utiliser la formule d'intégration suivante :

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

• L'espérance de fiabilité à la date t est appelée durée moyenne de vie résiduelle, ou temps moyen résiduel de panne (**M.R.T.F : Mean Residual Time To Failure**).

$$m(t) = E(T - t | T > t)$$

$$= \frac{1}{R(t)} \int_0^{+\infty} R(u)du$$

• **M.T.T.R (Mean Time To Restauration)** : La durée moyenne avant remise en service, égale à la durée moyenne de séjour en état de panne :

$$MTTR = \int_0^{+\infty} [1 - M(t)]dt$$

- **M.T.B.F (Mean Time Between Failure)** : c'est la durée moyenne entre deux pannes.

1.2 Les Lois usuelles utilisées en fiabilité

1.2.1 La loi exponentielle

La loi exponentielle a de nombreuses applications dans le domaine de l'ingénierie en particulier dans l'étude de fiabilité d'un équipement ou d'un composant. Elle présente également diverses applications dans l'étude des phénomènes d'attentes, secteur important du génie industriel et de la recherche opérationnelle.

Voici quelques exemples de variables aléatoires continues qui bënissent à cette loi de probabilité.

la durée de vie utile d'un composant électronique (tube, transistor, dispositif ...);

le temps entre deux arrivées consécutives à un guichet automatique;

le temps entre deux défaillances consécutives d'un système informatique;

le temps de service à un guichet de pièces détachées d'une usine, ...

On dit que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$$

sa fonction de fiabilité est définie par :

$$R(t) = \exp(-\lambda t)$$

et le taux de défaillance est constant dans le temps :

$$\lambda(t) = \lambda$$

Propriétés sans mémoire de la loi exponentielle

Une propriété principale de la loi exponentielle est d'être sans mémoire ou "Memoryless property" en anglais :

$$\begin{aligned} P(T \geq t + x | T \geq t) &= \frac{\exp[-\lambda(t + x)]}{\exp(-\lambda t)} \\ &= \exp(-\lambda x) \\ &= P(T \geq x) ; \forall t > 0, \forall x > 0 \end{aligned}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
 P(T > t + x / T > t) &= \frac{P(T > t + x \cap T > t)}{P(T > t)} \\
 &= \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} \\
 &= \frac{R(t + x)}{R(t)}
 \end{aligned}$$

Si $T \sim \exp(\lambda)$ donc :

$$\begin{aligned}
 P(T > t + x / T > t) &= \frac{\exp[-\lambda(t + x)]}{\exp(-\lambda t)} \\
 &= \exp(-\lambda x) \\
 &= P(T > x) \\
 &= R(x)
 \end{aligned}$$

Comme l'indique la FIG (1.5), ce résultat montre que la loi conditionnelle de la durée de vie d'un dispositif qui fonctionne sans tomber en panne jusqu'à l'instant t est identique à la loi de la durée de vie d'un nouveau dispositif. Ceci signifie qu'à l'instant t le dispositif est considéré comme neuf (ou "as new" en anglais), de durée de vie exponentielle de paramètre λ .

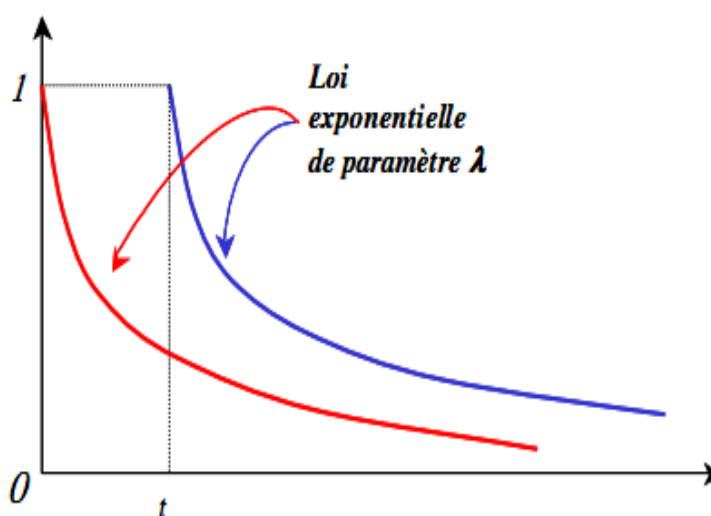


FIGURE 1.5 – Propriété sans mémoire de la loi exponentielle

1.2.2 La loi normale (Laplace-Gauss)

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) car le taux de défaillance est toujours croissant. On ne l'utilisera que si la moyenne des durées de vie est supérieur à trois fois l'écart type. En effet, t est toujours positif, alors que la variable normale est définie de $(-\infty)$ à $(+\infty)$; la restriction imposée réduit la probabilité théorique de trouver une durée de vie négative à environ 0.1 %.

La densité de probabilité d'une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right)^2\right) ; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sa fonction de répartition s'écrit :

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

Sa fiabilité est donnée par :

$$R(t) = 1 - \phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right);$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale centrée ($\mu = 0$) réduite ($\sigma = 1$) :

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{-\mu^2}{2} d\mu ; \forall t > 0.$$

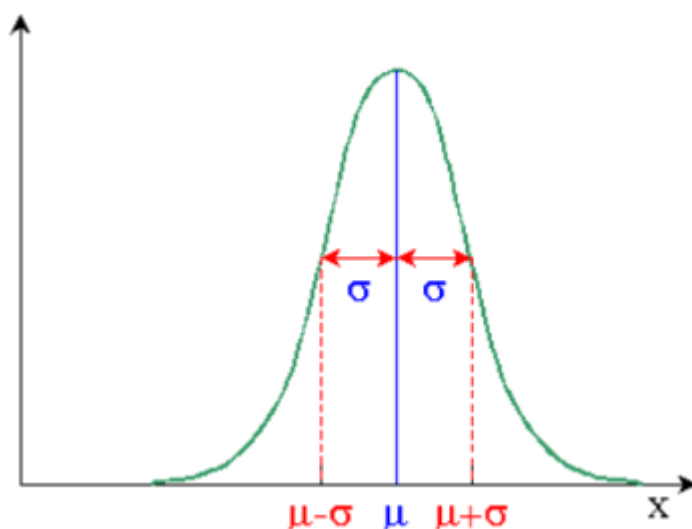


FIGURE 1.6 – Densité de probabilité de la loi normale

1.2.3 La loi log-normale (ou de Galton)

Une variable aléatoire continue et positive T est distribuée selon une loi log-normale si son logarithme népérien est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est largement utilisée pour modéliser des données de vie, en particulier les défaillances par fatigue en mécanique.

La densité de probabilité d'une loi log-normale de paramètres positifs μ et σ (μ : est la moyenne, σ : est l'écart-type) est :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right)^2\right) ; t > 0.$$

La fonction de fiabilité est donnée par :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right);$$

alors

$$R(t) = 1 - \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

Φ : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Le domaine de définition n'étant jamais négatif, il n'a aucune limitation à l'emploi de la distribution log-normale en fiabilité. Le taux de défaillance est croissant dans le début de vie puis décroissant en tendant vers zéro et la distribution est très dissymétrique.

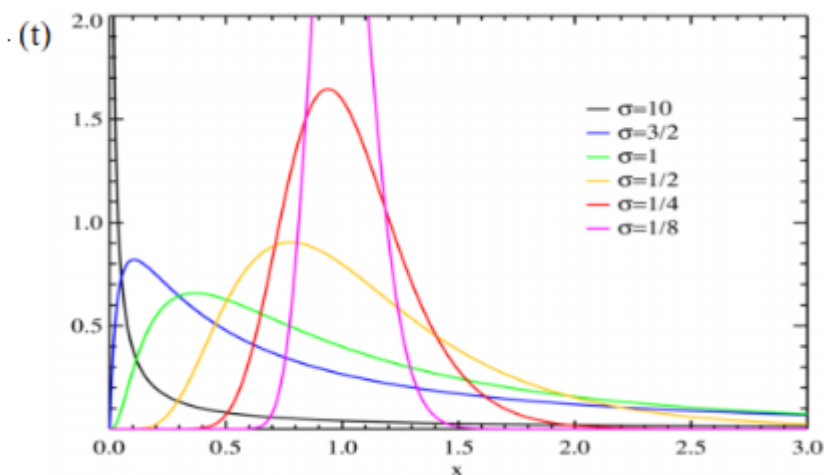


FIGURE 1.7 – La courbe théorique de la densité de la loi log-normale

1.2.4 La loi de Weibull

C'est la plus populaire des lois, utilisée dans plusieurs domaines (électronique, mécanique,...) elle permet de modéliser en particulier de nombreuses situations d'usure de

matériel. Elle caractérise le comportement du système dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement. Dans sa forme la plus générale, la densité de probabilité d'une loi de Weibull a pour expression :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left(-\frac{t - \gamma}{\eta} \right) ; t \geq \gamma.$$

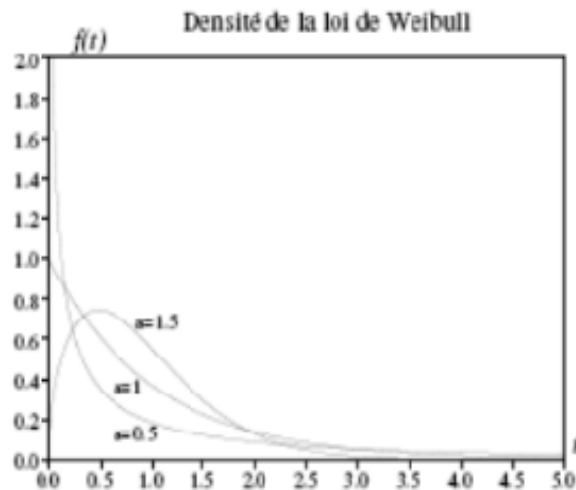
où : λ est le paramètre de forme ($\beta > 0$), η est le paramètre d'échelle ($\eta > 0$), γ est le paramètre de position ($\gamma \geq 0$). La fonction de fiabilité s'écrit comme suit :

$$R(t) = \exp \left(-\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^\beta$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{t} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

suivant les valeurs de β , le taux de défaillance est soit décroissant ($\beta < 1$) soit constant ($\beta = 1$), soit croissant ($\beta > 1$). La distribution de Weibull permet donc de représenter les trois périodes de la vie d'un dispositif décrites par la courbe en baignoire. le cas $\gamma > 0$ correspond à des dispositifs dont la probabilité de défaillance est nulle jusqu'à un certain âge γ .



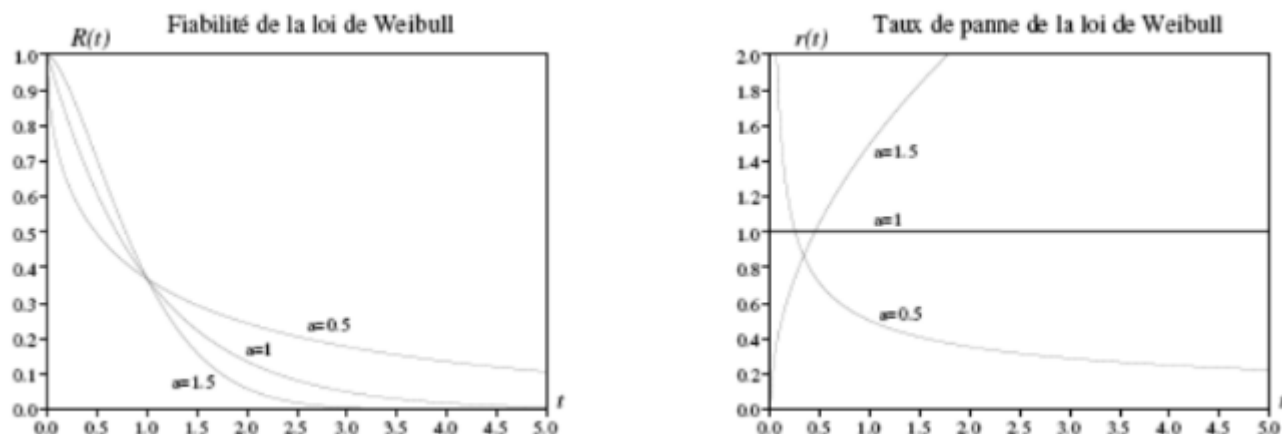


FIGURE 1.8 – Densité, Fiabilité et Taux de panne da la loi de Weibull

1.3 les différents essais utilisés en fiabilité

La première chose à faire lorsqu'on veut savoir si un système est fiable c'est de l'essayer au préalable pour voir qu'il fonctionne. Pour être mis sur le marché, il doit subir des essais afin d'assurer sa résistance. Les essais permettent le suivi de son évolution afin de le rendre plus mature.

Les essais de fiabilité sont réalisables au cours du cycle de vie du produit, ils interviennent dans les études conceptuelles, les programmes de développement et les processus de fabrication et les dernières techniques d'essais développées consistent à accélérer cette croissance de fiabilité par l'utilisation **d'essais accélérés, essais aggravés (essais de robustesse) et les essais de déverminages**. L'ensemble de ces essais de fiabilité contribue largement à la croissance de la fiabilité du produit au cours de son développement et de sa production.

1.3.1 Essais dans le cycle de développement d'un produit

Dans un contexte industriel très compétitif, les pressions exercées sur les fabricants conduisent à des produits de plus en plus fiable et de moins en moins coûteux, dans des délais de plus en plus réduits.

Ces défis ont incité les fabricants à développer des programmes de fiabilité efficaces. Ce dernier se compose d'une série de tâche de fiabilité, mise en application dans tout le cycle

de vie du produit (planification, la conception et le développement, la vérification et la validation, la production et l'exploitation).

La figure suivante permet de distinguer le positionnement relatif des différents essais de robustesse et de fiabilité, réalisables au cours du cycle de développement du produit, elle souligne aussi l'importance des études issues du retour d'expérience, qui contribuent au dimensionnement des essais jugés nécessaires.

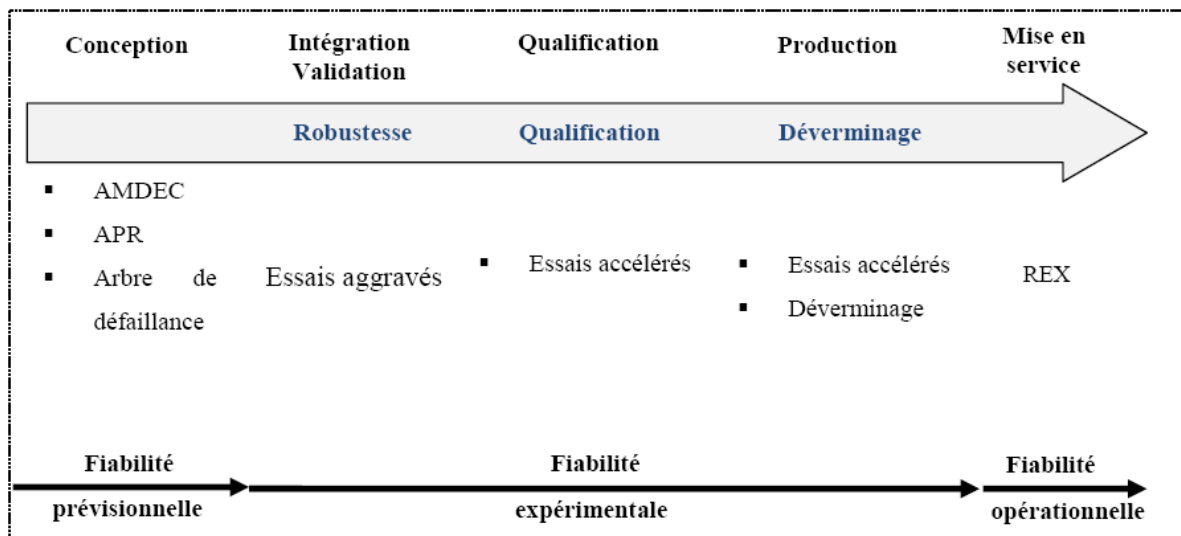


FIGURE 1.9 – Position des essais dans le cycle de développement d'un produit.

AMDEC : Analyse des Modes de Défaillance de leurs Effets et Criticité.

APR : Analyse des Risques Préliminaire.

REX : Retour d'Expérience.

Le processus de fiabilité comporte trois grandes phases : **la fiabilité prévisionnelle**, **La fiabilité expérimentale** et **la fiabilité opérationnelle** dans lesquelles on utilise plusieurs méthodes et outils pour le développement d'un produit :

1. Évaluation prévisionnelle de la fiabilité : Consiste à prévoir la fiabilité dès le début du projet, à partir d'une analyse qualitative ou quantitative. Elle s'exécute dès la première phase du projet sous forme de prévisions schématique puis de façon plus détaillée lorsque la définition des composants est réalisée, elle permet ainsi de prendre des orientations optimales en matière de conception.

2. Évaluation expérimentale de la fiabilité : Cette phase permet de quantifier la fiabilité à partir d'essais ou calculs. Dès que l'on dispose de pièces prototypes, il est possible de réaliser des essais dits de robustesse pour connaître les faiblesses de conception du produit. Lorsque le produit est suffisamment robuste, des essais de quantification ou

de validation de la fiabilité sont réalisés.

3. Évaluation opérationnelle de la fiabilité : Consiste à évaluer la fiabilité en service à partir des données du retour d'expérience (REX). Elle se pratique dès les premières mises en service et permet ainsi de corriger des défauts de conception.

1.3.2 Essais aggravé

Présentation d'un essai aggravé

Un synonyme d'essai aggravé est Essai Hautement Accéléré (E.H.A). L'exécution d'un essai aggravé ; c'est solliciter un système (stabilisée) jusqu'à ses limites (destruction ou au moins une limite atteinte), tout en procédant ainsi :

solliciter en augmentant progressivement ou non la sévérité des sollicitations (parfois avec des paliers) mais toujours relativement assez vite (il n'y a pas affinage des sollicitations) jusqu'à l'apparition : au moins d'une défaillance ou d'un dysfonctionnement ou d'une destruction, irréversible et solliciter un nombre limité d'entités, le plus tôt possible dans son développement, au moins avant les phases de qualification ou validation, si possible en phase de conception. Un essai aggravé est un essai qui se veut de courte durée.

Principe directeur et caractéristiques

Le principe directeur d'un essai aggravé n'est pas de vouloir aux exigences d'une spécification.

D'autre part le principe directeur d'un essai aggravé est d'amener un système à une limite de ses capacités, voire à la casse, en lui appliquant ce qu'il faut, comme il faut ; où il faut, quand il faut ...

A priori, si un essai est bien préparé et bien surveillé, il doit y avoir apparition d'au moins une limite. Un même essai aggravé peut devoir être répété plusieurs fois pour être plus sûr d'un potentiel point faible, mais il ne demande pas en soi, un appui statistique. Un essai aggravé impose un changement de perception sur le rôle et la nature des essais.

1.3.3 Essais d'estimation de la fiabilité

Ces essais consistent à mesurer la fiabilité en phase de conception et de production, la détermination des paramètres d'une loi de fiabilité pour un système nécessite de connaître les temps de défaillance d'un échantillon de taille n de système en nombre suffisant, or dans ce cas d'un système très faibles, il sera nécessaire d'attendre très longtemps pour obtenir tous les temps de défaillance, dans un application industrielle, il est inconcevable d'avoir une durée d'essai aussi importante.

Les essais d'estimation de la fiabilité : Consistent à vérifier que les objectifs de fiabilité sont respectés en reproduisant les conditions d'utilisation du produit (cycle de marche/arrêt, température, l'humidité ...) pour cela, on dispose de deux stratégie d'essai :

Les essais de détermination :

Les essais de détermination consistent à déterminer la valeur d'une caractéristique (Taux de défaillance $M.T.T.F$, probabilité de défaillance ...) ou les paramètres de la loi de mortalité (à la période de vieillisse) d'un système .

Dans ce cas, on considère pour différents plans d'essai l'estimation ponctuelle et par intervalle de confiance des paramètres de la fiabilité.

Détermination d'un taux de défaillance λ constante ou d'un :

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$

Lorsque lors d'un essai de durée cumulée T , on constant k défaillance, par la méthode du noyaux les estimations ponctuelles du taux de défaillance λ et du $M.T.T.F$ sont données par :

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{T}$$

ou

$$\widehat{MTTF} = \frac{T}{k}$$

Les limites : $\hat{\lambda}_{inf}$ et $\hat{\lambda}_{sup}$ de l'intervalle de confiance sur le taux de défaillance λ peuvent être obtenues par :

$$\hat{\lambda}_{inf} = \frac{\chi_{2k, \gamma/2}^2}{2T}$$

et

$$\hat{\lambda}_{sup} = \frac{\chi_{2k+2, 1-\gamma/2}^2}{2T}$$

avec $\chi_{2k+2,1-\frac{\gamma}{2}}^2$ déduit de la loi du χ^2 pour le degré de liberté $(2k + 2)$ et le niveau de confiance $(1 - \frac{\gamma}{2})$ les limites correspondant au $M.T.T.F$ sont données par :

$$\widehat{MTTF}_{inf} = \frac{2T}{\chi_{2k+2,1-\frac{\gamma}{2}}^2}$$

et

$$\widehat{MTTF}_{sup} = \frac{2T}{\chi_{2k,\gamma/2}^2}$$

Les essais de démonstration

Le plan d'essai consiste à déterminer le temps cumulé d'essai assurant un $M.T.T.F$ d'un système supérieur à une valeur objective $M.T.T.F_0$ (en considérant un faible nombre de défaillance (si possible $k = 0$)) pour un niveau de confiance donné $(1 - \gamma)$ la règle pour un plan de démonstration est : pour un $M.T.T.F_0$ et $1 - \gamma$ donnés de calculer l'entier le plus petit k et le temps cumulé d'essai T qui satisfont :

$$\begin{aligned} prob(MTTF \geq MTTF_0) &= 1 - \gamma \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{T/MTTF_0}{i!} \exp(-T/MTTF_0) \end{aligned}$$

1.3.4 Les essais de déverminage

Le déverminage est un qualitatif ayant pour objectif d'éliminer tous les défauts latents de période de jeunesse, pour cela on soumet les produits sortant de fabrication à des sollicitations d'environnement (climatiques, vibratoires ...) pendant une durée donnée de manière à faire apparaître les défauts de jeunesse (composants faibles, défauts latents de fabrication, faiblesses de conception pour les produits nouveaux) et à éliminer on réparer les entités fragiles, afin que la valeur du taux de défaillance prévue pour la durée de vie utile soit atteinte rapidement FIG(1.10).

Il faut noter que le profil de déverminage doit être adapté à la nature du matériel et à son cycle de vie.

A l'issue de l'opération de déverminage tous les produits de la production triée se trouvent dans la période utile FIG(1.11).

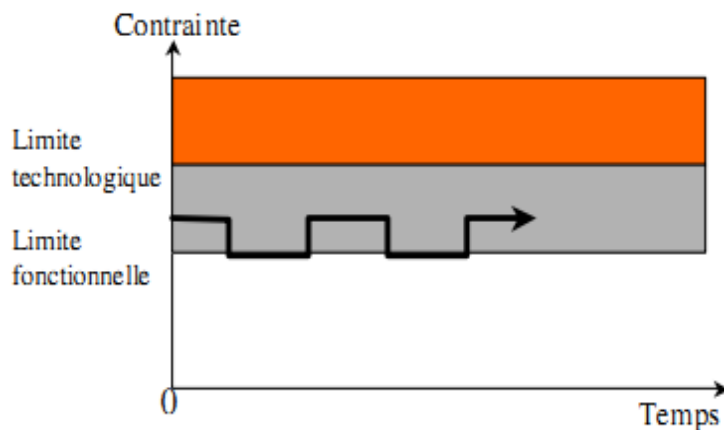


FIGURE 1.10 – Profile d’essai de déverminage

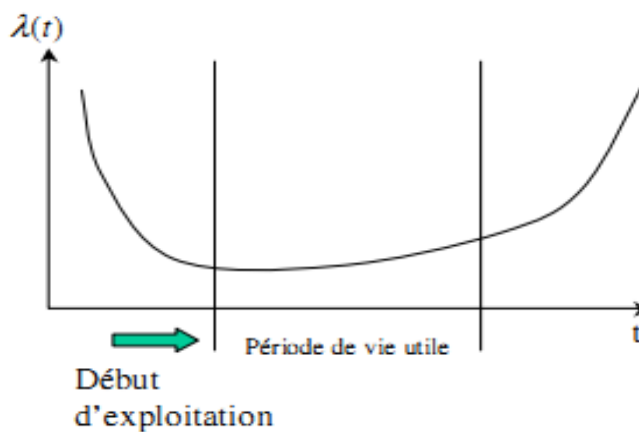


FIGURE 1.11 – Principe de déverminage

Il existe deux types de déverminage

- **Le déverminage classique**

Consiste à accélérer l’échelle de temps pour raccourcir les défauts de jeunesse au maximum application des contraintes dans les limites de la spécification produit

- **Le déverminage aggravée**

Consiste à soumettre le composant à des contraintes aggravées pour éliminer des faiblesse, application des contraintes au-delà de la spécification.

Chapitre 2

Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

Les essais accélérés sont les approches les plus communes pour obtenir la loi de fiabilité ou le taux de défaillance de système ou de composants dans des délais plus courts. Ces essais consistent à réduire les durées de vie des produits par l'accélération des dégradations provoquant la défaillance. Pour ce faire, les niveaux des stress subis par le produit sont sévères afin d'obtenir des données plus rapidement ; pour obtenir la loi de fiabilité dans les conditions nominales, il est nécessaire d'utiliser un modèle de vie accélérés. Il existe différentes classes de modèles de vie accélérée, on sélectionnent les modèles statistiques caractérisés par des approches paramétrique et non paramétrique.

2.1 Généralités sur les essais accélérés :

Le principe des essais accélérés est de soumettre le produit à des sollicitations d'utilisation ou d'environnement amplifiées par rapport au valeurs attendues en utilisation opérationnelle, afin d'estimer les caractéristiques comportementales (loi de fiabilité, performances opérationnelles, ...) du produit dans des conditions normales d'emploi, à partir des conditions accélérées d'utilisation.

Le passage des conditions accélérées aux conditions normales s'effectue ; en ce qui concerne la durée de vie, à l'aide d'une loi appelée loi d'accélération. Les conditions nécessaires à la réalisation des essais accélérés, sont les suivantes :

- Les contraintes à appliquer et leurs niveaux doivent être choisis pour que les niveaux de

contraintes restent inférieurs aux valeurs limites technologiques.

- Le phénomène physique de dégradation doit être connu et les mécanismes de défaillances impliqués dans la dégradation doivent être représentatifs de ceux des conditions normales d'emploi.
- Le modèle analytique reliant la vitesse de dégradation à l'amplitude des sollicitations appliquées doit être connu ou supposé (connaître la loi d'accélération).
- La valeur des paramètres intervenant dans ces modèles (estimation des modèles et de leurs paramètres) doit être connue.[7]

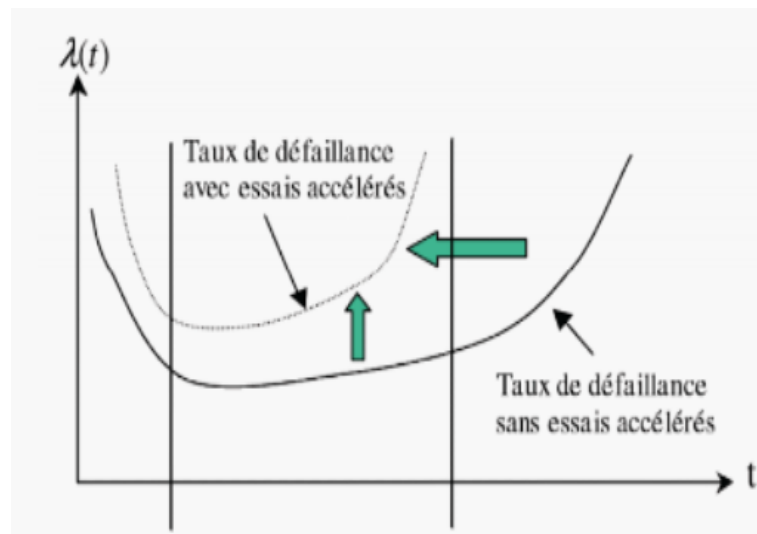


FIGURE 2.1 – Effet des essais accélérés sur la courbe "en baignoire"

2.2 Le modèle Standard de Vie Accélérée

Le modèle Standard de Vie Accélérée (S.V.A) ; est un modèle basé sur une fonction de transfert et qui permette d'obtenir les fonctions de fiabilité à partir des résultats d'essais effectués à des niveaux de contraintes plus élevés que les conditions nominales d'utilisation FIG (2.2). Ce qui permet a priori de réduire la durée de l'essai (d'où son accélération).

On considère un ensemble de contraintes, pour lequel on dit que plus la contrainte augmente, plus la fiabilité devient faible.

L'objectif des essais accélérés est de déterminer l'évolution de la fonction de fiabilité en fonction de l'évolution de la contrainte.

On suppose que la durée de vie T_s d'un produit sous le stress (s) est une variable aléatoire

de fonction de fiabilité :

$$R_s(t) = P(T_s > t) ; t > 0$$

et R_{s_0} est la fiabilité au niveau d'effort nominal s_0 et R_s la fiabilité sous un stress constant (s), le modèle S.V.A décrit :

$$R_S(t) = R_{S_0}(r(s).t)$$

où $r(s)$ représente la fonction de transfert.

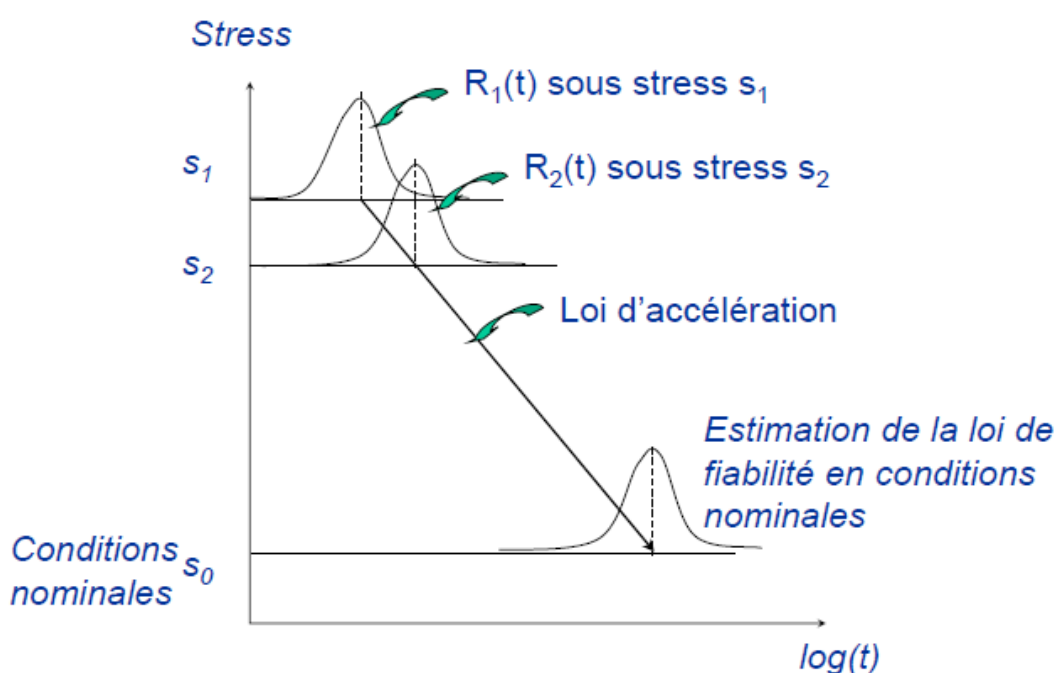


FIGURE 2.2 – Principe d'un essai Accéléré

Dans le cas général; les stress (s) peuvent évoluer en fonction du temps et peuvent être multidimensionnel, on a :

$$s = s(\tau) ; \tau \geq 0$$

Supposons que la durée de vie $T_{s(.)}$ d'un produit sous le stress $s(.)$ soit une variable aléatoire de fonction de fiabilité :

$$R_{s(.)}(t) = P(T_{s(.)} > t) ; t \geq 0$$

Soit R_{s_0} la fiabilité sous le stress usuel, $s_0 \in \xi_0 \in \xi$ (ξ ensemble de stress), $R_{s_0}^{-1}$ sa fonction inverse.

La fonction de transfert est définie par :

$$f : [0, +\infty[\times \xi \longrightarrow [0, +\infty[$$

$$(t, s(\cdot)) \longrightarrow f(t, s(\cdot)) = (R_{s_0}^{-1} \circ R_{s(\cdot)})(t)$$

cette fonction permet d'évaluer la fiabilité d'un produit, sous des stress expérimentalement indisponibles, à partir de la fiabilité du même produit sous des conditions particulières d'utilisation.

le modèle Standard de Vie Accéléré (S.V.A) vérifie sur ξ s'il existe une fonction $r : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour $s(\cdot) \in \xi$:

$$\frac{df_{s(\cdot)}(t)}{dt} = r[s(t)] \quad (2.1)$$

Le modèle (S.V.A) signifie que la vitesse d'utilisation de la ressource au moment t ne dépend que de la valeur du stress appliqué au moment t . D'après les formules précédentes on peut écrire :

$$R_{s(\cdot)}(t) = R_{s_0} \left(\int_0^t r[s(\tau)] d\tau \right) \quad (2.2)$$

Dans le cas où $s(t)$ est constant l'équation (2.2) devient :

$$R_s(t) = R_{s_0}(r(s).t) \quad (2.3)$$

Donc le stress ne change que l'échelle du temps, notons que $r(s_0) = 1$.

La fonction $r(\cdot)$ représente le taux d'accroissement de la vitesse de dégradation r . [8]

2.3 Théorie des essais accélérés et facteur d'accélération :

Ces essais s'appuient principalement sur la théorie du modèle Standard de Vie Accélérée (S.V.A) qui fait l'hypothèse qu'un stress ou une combinaison de plusieurs stress ne change que l'échelle de la courbe de fiabilité, comme l'illustre FIG (2.3)

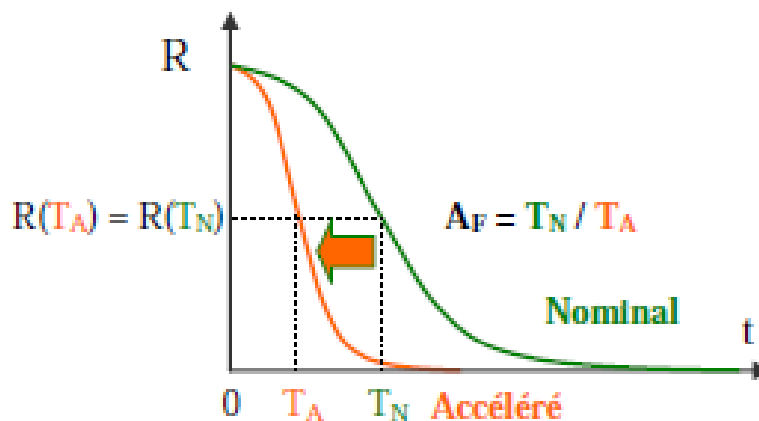


FIGURE 2.3 – Modèle Standard de Vie Accélérée

Le facteur d'accélération est défini par :

$$F_A = \frac{T_N}{T_A}$$

Avec :

T_N : le temps Nominal.

T_A : le temps Accéléré.

Pour une même fiabilité, le facteur d'accélération F_A permet alors de passer d'une durée de fonctionnement en conditions accélérées à celle en conditions normales, et inversement. telle que :

$$R(t) = R_{s_0}(F_A t)$$

où $R(t)$ c'est la fonction de fiabilité avec des conditions accélérées à des conditions de référence.[4]

2.4 Plans d'essai accélérés par régression

Ce plan consiste à déterminer les paramètres de la fonction r à partir des résultats d'essais effectués uniquement dans les conditions sévères et de déduire par régression la fonction de fiabilité en conditions nominales FIG (2.2).

Ce modèle est appliqué dans le cas de système soumis au phénomène mécanique de fatigue.

On réalise des essais dans les conditions sévères ; $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$; ainsi, les expressions

des modèles (2.2) et (2.3) s'écrivent :

$$R_{s(.)}(t) = R_{s_0} \left[\int_0^t \exp(\beta^T \cdot Z(\tau)) d\tau \right]$$

et

$$R_s(t) = R_{s_0} [\exp(\beta^T Z)t]$$

Avec :

Z : représente le vecteur de primitives associe au niveau de stress.

β : représente les paramètres du modèle d'accélération.

2.4.1 Application des modèles S.V.A

Lorsqu'on utilise ce plan d'expérience, il est impossible d'estimer R_{s_0} si la fonction r est complètement inconnue, même si l'on connaît la famille de distribution à la quelle elle appartient, donc la fonction r doit être choisie dans une certaine classe de fonction, un choix possible est celui donné par l'équation :

$$r(s) = \exp \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \beta_{ij} z_{ij}(s) \right)$$

avec :

β_{ij} : sont des constantes inconnues

z_{ij} : des fonction connues

et que l'on peut écrire :

$$r(s) = \exp(\beta^T Z(s))$$

par conséquent et pour illustrer ce première plan d'essai, nous allons considérer deux types d'estimations de la fiabilité dans le modèle (2.2)

- estimation de modèle S.V.A paramétrique
- estimation de modèle S.V.A non paramétrique

2.4.2 Application du modèle S.V.A paramétrique

L'estimation paramétrique d'un modèle S.V.A consiste à prendre une loi statistique particulière pour estimer la fiabilité. Dans le cas de la fatigue, la loi la plus appropriée

pour caractériser la fiabilité est la loi normale lorsque l'on considère la distribution des $\log(N)$.

$$R_{s_0}(u) = 1 - \phi \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \quad (2.4)$$

avec :

N : représente le nombre de cycle.

$u_i = \log(N_i)$

ϕ :représente la fonction de répartition de la loi normale standard.

μ : la moyenne des $\log(N)$.

σ : l'écart type des $\log(N)$. [8]

Nous avons d'abord besoin des concepts suivants :

Estimation paramétrique par la méthode de maximum de vraisemblance

Une fois que le type de distribution de durée de vie d'un composant d'un système mécanique (comme la loi exponentielle, loi Weibull, loi Normale, ...) et que les temps de défaillance pour ce composant sont connus, il est nécessaire d'estimer les paramètres associés à la distribution. La méthode du maximum de vraisemblance M.V est la plus utilisée pour effectuer le calcul des paramètres cette méthode est généralement préférée aux autres méthodes car l'estimateur obtenu est sans biais, efficace, convergent et robuste.

On observe les durées successives de fonctionnement de n matériels identiques. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ les temps des défaillances observés, dont la densité de probabilité est $f(x, \theta)$ et la fonction de vraisemblance $L(x, \theta)$ est :

$$\begin{aligned} L(x, \theta) &= L(x_1, \dots, x_n, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \end{aligned}$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ est le vecteur des paramètres recherchés. Si $L(x, \theta)$ est dérivable et si le maximum de la fonction de vraisemblance existe en $\hat{\theta}$, alors il satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_r)}{\partial \theta_i} = 0 ; i = 1, \dots, r$$

ou

$$\frac{\partial \ln(L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_r))}{\partial \theta_i} = 0 ; i = 1, \dots, r$$

Par la méthodes de maximum de vraisemblance, nous déduisons les estimateurs de $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$\hat{R}_{s_0}(u) = 1 - \phi \left(\frac{u - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \quad (2.5)$$

Considérons un essai dans lequel on fixe la durée maximale d'expérience $\log(N_i)$ (exprimé en nombre de cycle pour la fatigue) du $i^{\text{ème}}$ échantillon de taille n_i sous stress sévérée s_i , pour lequel m_i défaillances sont observées (avec $i=1, \dots, k$) et $Z^{(i)} = (z_{i_0}, \dots, z_{i_m})$ donc le modèle (2.2) devient :

$$R_s(u) = 1 - \phi \left(\frac{u - \gamma^T Z}{\sigma} \right) \quad (2.6)$$

avec :

$$u = \log(N)$$

$$\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)$$

$$\gamma_0 = \log(\mu) - \beta_0$$

la vraisemblance de l'échantillon est définie par :

$$L(\gamma, \sigma) = \prod_{i=1}^k \left[\prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{u_{ij} - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma} \right)^2 \right) \right] \left(1 - \phi \left(\frac{\gamma^T Z^{(i)}}{\sigma} \right) \right)^{n_i - m_i}$$

avec :

$u_{ij} = \log(N_{ij})$ les logarithmes des nombres des cycles d'essai de la $j^{\text{ème}}$ unité sous le stress s_i

$u_i = \log(N_i)$ la logarithme du nombre des cycles de la censure sous le stress s_i

par le maximum de de vraisemblance, nous obtenons des estimateurs de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$ permettant d'estimer la fonction de fiabilité dans les conditions nominales :

$$\hat{R}_s(u) = 1 - \phi \left(\frac{u - \hat{\gamma}^T Z^{(0)}}{\hat{\sigma}} \right) \quad (2.7)$$

avec $Z^{(0)}$ représente le vecteur de stress dans les conditions nominales.

Exemple sur le modèle S.V.A paramétrique

Comme l'indique la définition, un essai accéléré est un essai pour lequel les contraintes sont supérieures aux contraintes de référence.

Ainsi, en hydraulique et en pneumatique on effectue des essais accélérés par augmentation de la pression ou de la charge, ...

Les essais accélérés semblent être une bonne alternative à la forte augmentation des durées de vie des composants et à la part de plus importante des essais dans la phase de développement d'un produit.

On va exécuter un essai Standard de Vie Accéléré sur un ensemble des **vérins pneumatiques**, pour cela nous vous expliquerons ce que c'est un vérin pneumatique ?

Un vérin pneumatique est un actionneur linéaire dans lequel l'énergie de l'air comprimé est transformée en travail mécanique, il constitue par ; un piston muni d'une tige se déplace librement à l'intérieure d'un tube. Pour faire sortir la tige, on applique une pression sur la face avant du piston, et sur la face arrière pour faire rentrer la tige.

On peut trouver les vérins pneumatiques à la décomposition d'un Amortisseur ; afin d'obtenir un ralentissement en fin de mouvement de façon à éviter un choc du piston sur le nez ou le fond du vérin.

La figure ci-dessus représente les deux types des vérin pneumatique.

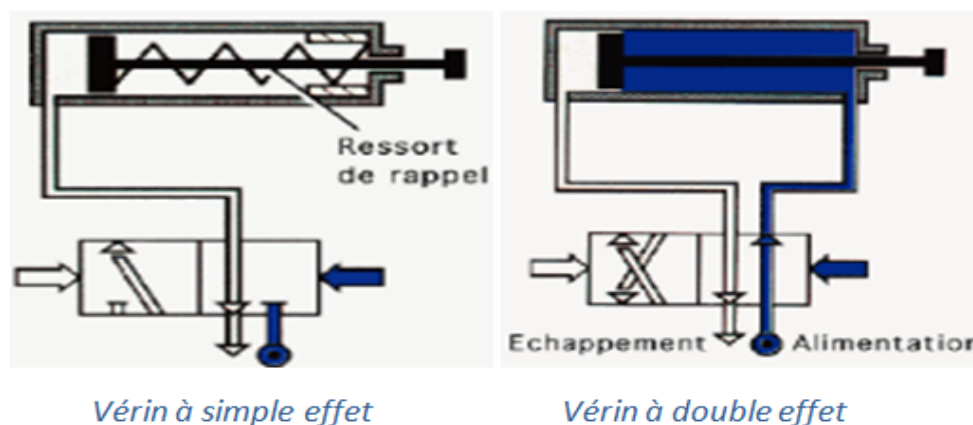


FIGURE 2.4 – différents types des vérins pneumatiques

Conception

Nous avons conçu de manière à pouvoir assurer les conditions d’essais suivantes :

- pression d’essai réglable en fonction de l’essai.
- température de fluide réglable en fonction de l’essai.
- température ambiante en fonction de l’essai.
- fréquence de cyclage réglable.
- interchangeabilité des composantes.
- fonctionnement simultané et indépendant de deux bancs d’essais en parallèle.
- remplissage et vidange complète de l’huile présente dans les vérins pneumatiques.

Nous allons considérer un exemple d’une sévérisation par ; La Pression en (Bar) d’essai étant la pression stabilisée dans la petit chambre du vérin, la Température des fluide en (°C) et la Température ambiante en (°C) et on prendre l’instant des trois défaillances premières pour les trois essais.[2]

Les résultats observées sont résumés dans le tableau suivant :

Essai	Pression (Bar)	Température des fluides (°C)	Température des ambiante (°C)	Défaillances	Instant de défaillance(Cycles)
1	7	47.5	35	défaillance 1	6012
				défaillance 2	2556
				défaillance 3	7650
2	9.4	61	56	défaillance 1	2158
				défaillance 2	4224
				défaillance 3	3728
3	9.4	34	56	défaillance 1	8058
				défaillance 2	7433
				défaillance 3	8487

TABLE 2.1 – résultats observées pendant l’expérience

Les résultats obtenus sont donnés sous forme de tableaux et graphiques. Ce qui nous permet de visualiser les valeurs de R_{s_0} , \hat{R}_{s_0} , le biais et le biais moyen de cet expérience, on peut faire sa à l’aide du logiciel **R**.

<i>Essai</i>	μ	σ	$R_{s_0}(t)$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{R}_{s_0}(t)$	<i>Bias</i>	<i>Bias moyen</i>
1	3.96	0.204	0.331	3.690	0.109	0.236	0.095	0.086
			0.916			0.977	0.061	
			0.171			0.068	0.103	
2	3.51	0.126	0.918	3.499	0.064	0.994	0.076	0.139
			0.181			0.024	0.156	
			0.314			0.13	0.184	
3	3.962	0.002	0.43	3.901	0.014	0.376	0.053	0.078
			0.903			0.984	0.08	
			0.129			0.028	0.10	

TABLE 2.2 – Résultats de simulation par la méthode de M.V pour n=50

D'après la table (2.2) de ces simulation, on voit que les estimateurs de fiabilité sous les conditions nominales sont proches de vraie valeur de la fiabilité sous les conditions nominales pour l'essai 1 et aussi pour l'essai 3 (Baïs moyen = 0.086 respectivement Baïs moyen = 0.078) malgré les changements fait sur la taille d'échantillon n=50, n=100 et n=1000. Ce Baïs est relativement grand pour l'essai 2 (Baïs = 0.139). Parce que les paramètres estimés sont un peu loin de vraie paramètres.

Résultats de simulation : cas où la taille de l'échantillon est fixe

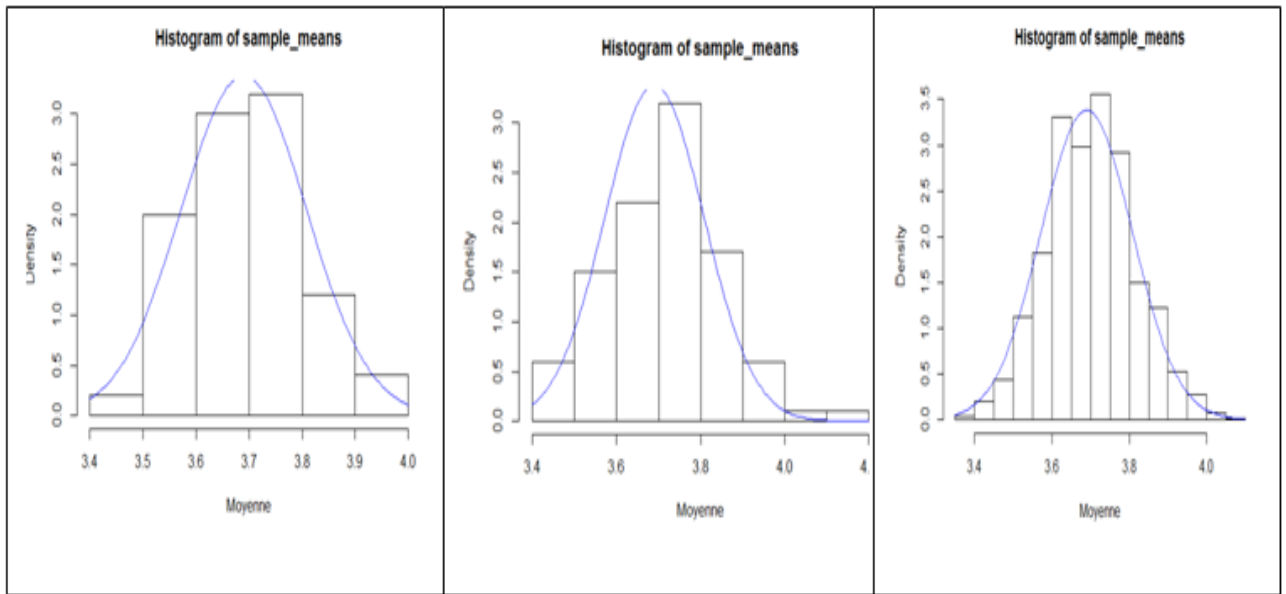


FIGURE 2.5 – Résultats de simulation de l'essai 1 pour n=50 et n=100 et n=1000

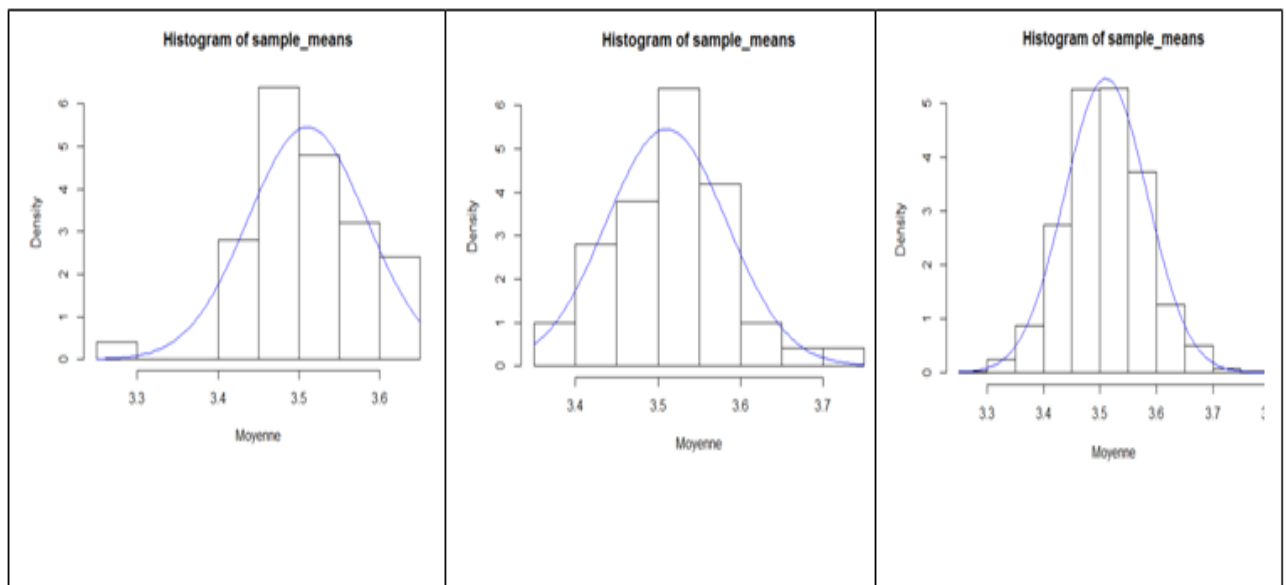


FIGURE 2.6 – Résultats de simulation de l'essai 2 pour n=50 et n=100 et n=1000

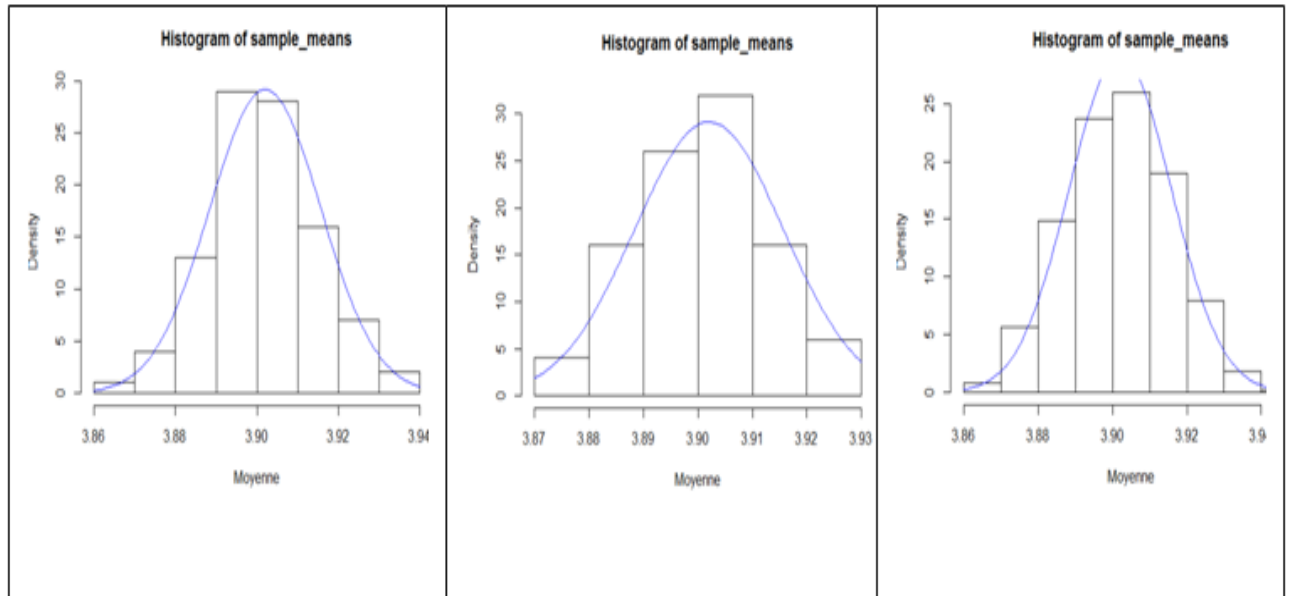


FIGURE 2.7 – Résultats de simulation de l’essai 3 pour $n=50$ et $n=100$ et $n=1000$

Les Figures (2-5) et (2-7) nous montre que nos données qui sont représenté par un histogramme sont bien ajusté à la loi normal qu’est représenté par la courbe. Au raison du Baïs moyen de l’estimation de l’essai 2 nous donné ne sont pas bien ajuster par la loi normal.

2.4.3 Application du modèle S.V.A non paramétrique

Dans la littérature plusieurs auteurs se sont intéressés pour l'estimation de la fonction de fiabilité dans le cas où les données sont censurées dont la plus intéressante est celle de Kaplan-Meier qui ont proposé un estimateur de la fonction de fiabilité R .

Cas des données censurées

La durée de vie n'est pas toujours complètement observée, parce que pour certains observations (composants), la date de début ou de fin n'est pas observable, on parle alors des données censurées. Les données censurées sont des observations pour lesquelles la valeur exacte d'un événement n'est pas toujours connue.

Il existe trois catégories de censures qu'on nomme censure à droite, censure à gauche et censure par intervalle.

Censure à droite : on arrête de suivre la population à un instant donné et à ce moment-là, certains systèmes sont encore en fonctionnement.

étant donné un nombre positif fixé C ; et t_1, t_2, \dots, t_n les durées de vie de n éléments. La durée n'est pas observable au de la d'une durée maximale C ; au lieu d'observer les variables t_1, t_2, \dots, t_n qui nous intéressent, on n'observe (X_i, δ_i) :

$$\begin{cases} X_i = t_i \wedge C \\ \delta_i = \mathbf{1}_{\{t_i \leq C\}} \end{cases}$$

où : $(t_i \wedge C)$ représente le minimum (t_i, C)

Censure à gauche : à un instant t , on constate qu'un certain nombre de systèmes sont défectueux, mais on ne sait pas avec précision à quel moment est survenu la défaillance.

étant donné un nombre positif fixé C ; et t_1, t_2, \dots, t_n les durées de vie de n éléments. La durée n'est pas observable au de la d'une durée minimale C ; au lieu d'observer les variables t_1, t_2, \dots, t_n qui nous intéressent, on n'observe (X_i, δ_i) :

$$\begin{cases} X_i = t_i \vee C \\ \delta_i = \mathbf{1}_{\{t_i \leq C\}} \end{cases}$$

où : $(T_i \vee C)$ représente le maximum (t_i, C)

Censure par intervalle : on sait que des systèmes ont connu une défaillance entre deux

instants t_1 et t_2 , mais on ne sait pas exactement à quel moment dans cet intervalle.

Il existe trois catégories de censures qu'on nomme censure à droite, censure à gauche et censure par intervalle.

- Censure de type I : fixée.
- Censure de type II : attente.
- Censure de type III : censure de type I aléatoire.[12]

Estimateur de Kaplan-Meier

L'estimateur de Kaplan-Meier est un estimateur non paramétrique de la fonction de fiabilité. Le principe de la méthode repose sur l'idée qu'être encore en vie après un instant. Ainsi, la fiabilité à un instant quelconque est le produit de probabilités conditionnelles de fiabilité de chacun des instants précédents.

On utilise le théorème de probabilité conditionnelle :

Soit : $t_j \leq t_{j+1}$

$$\begin{aligned} R(t_j) &= P(X > t_j) \\ &= P(X > t_j, X > t_{j-1}) \\ &= P(X > t_j / X > t_{j-1}) P(X > t_{j-1}) \\ &= P(X > t_j / X > t_{j-1}) P(X > t_{j-1} / X > t_{j-2}) \dots P(X > t_0 = 0) \end{aligned}$$

Nous supposons qu'au début de l'étude tous les sujets étaient vivants, alors

$$P(X > t_0 = 0) = 1$$

La probabilité conditionnelle est :

$$P(X > t_j / X > t_{j-1}) = p_j$$

Qui est la probabilité de survivre pendant l'intervalle de temps $I_i =]t_{j-1}, t_j]$ quand on était vivant au début de cet intervalle.

Notons :

n_j : est le nombre de survivants juste avant le temps t_j .

d_j : Le nombre des morts à l'instant t_j

$q_j = 1 - p_j$ est la probabilité de mourir pendant l'intervalle I_j sachant que l'on était vivant au début de cet intervalle. Alors l'estimateur naturel de q_j est :

$$\hat{q}_j = \frac{d_j}{n_j}$$

A) Cas où il n'y a pas d'ex-æquo :

Si $\delta_j = 1$, c'est qu'il y a eu un mort en t_j et donc $d_j = 1$.

Si $\delta_j = 0$, c'est qu'il y a eu une censure en t_j et donc $d_j = 0$.

Par suite ;

$$\hat{p}_j = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n_j} & \text{en cas de mort en } t_j \\ 1 & \text{en cas de censure en } t_j \end{cases}$$

l'estimateur de Kaplan-Meier est donc dans ce cas :

$$\hat{R}_{KM}(t) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{k-j+1}\right)^{\delta_j}$$

B) Cas où il y a des ex-æquo :

(a) Si ces ex-æquo sont tous des morts, la seule différence tient à ce que d_j n'est plus égal à 1 mais au nombre des morts et l'estimateur de Kaplan-Meier devient :

$$\hat{R}_{KM}(t) = \prod_{j \leq t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right)$$

(b) Si ces ex-æquo sont des deux sortes, on considère que les observations non censurées ont lieu juste avant les censurées.

Soient t_1, t_2, \dots, t_n un échantillon d'une durée de vie. Soit $(X_j, \delta_j)_{1 \leq j \leq k}$ l'échantillon réellement observé :

$$\begin{cases} X_j = t_j \wedge C \\ \delta_j = \mathbf{1}_{\{t_j \leq C\}} \end{cases}$$

où C_j désignent les instants de censures.

Application de Kaplan-Meier sur le modèle S.V.A non paramétrique Notons

$K_i(\eta)$ le nombre de défaillance observée du i^{me} échantillon dans l'intervalle $[0, \eta]$ et $S_i(\eta)$ le nombre de survivants avant le nombre de cycle η , $N_{i_1}, \dots, N_{i_{m_i}}$ représente les nombres de cycle du $i^{ème}$ échantillon sous stress s_i (avec $m_i = K_i(\log(N_{ij}))$), les variables aléatoires : $e^{\beta^T Z_i} \log(N_{ij}) (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m_i)$ avec la loi de fiabilité R_{s_0} ont été testées et (n_i) parmi elles ont été censurées au moments $e^{\beta^T Z_i} N_i$.

soit le nombre total de défaillance dans l'intervalle $[0, \eta]$:

$$K(\eta, \beta) = \sum_{i=1}^k K_i(e^{-\beta^T Z_i} \eta) \tag{2.8}$$

et le nombre total de survivant avant l'instant η :

$$S(\eta, \beta) = \sum_{i=1}^k S_i(e^{-\beta^T Z_i \eta}) \quad (2.9)$$

la fonction de fiabilité peut être construite par l'estimateur de **Kaplan-Meier** pour tous :

$$x \leq \max_i (e^{\beta^T Z_i} \log(N_i))$$

$$R_{s_0}(x, \beta) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\Delta K(\eta, \beta)}{S(\eta, \beta)} \right) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^k \Delta K_i(e^{-\beta^T Z_i \eta})}{\sum_{j=1}^k S_i(e^{-\beta^T Z_i \eta})} \right) \quad (2.10)$$

où $\Delta K(\eta, \beta) = K(\eta, \beta) - K(\eta^-, \beta)$ et

$\Delta K_i(\eta, \beta) = K_i(\eta) - K_i(\eta^-)$, la fonction de vraisemblance est définie par :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} \left[R_{s_0}(e^{\beta^T Z_i} \log(N_{ij}^-), \beta) - R_{s_0}(e^{\beta^T Z_i} \log(N_{ij}), \beta) \right] * [R_{s_0}(e^{\beta^T Z_i} \log(N_i), \beta)]^{m_i - m_i} \quad (2.11)$$

en approximant la fonction de densité $f_{s_0} = R_{s_0}$, inconnue par :

$$R_{s_0}(e^{\beta^T Z_i} \log(N_{ij}^-), \beta) - R_{s_0}(e^{\beta^T Z_i} \log(N_{ij}), \beta) \quad (2.12)$$

par le maximum de vraisemblance, nous obtenons une estimation de β permettant de construire la fonction de fiabilité dans les conditions nominales.

Exemple

On considère un essai de 21 pièces. Les instants de panne de ces pièces sont consignés dans le tableau suivant : [12]

6	6	6	6 ⁺	7	9 ⁺	10
10 ⁺	11 ⁺	13	16	17 ⁺	19 ⁺	20 ⁺
22	23	25 ⁺	32 ⁺	32 ⁺	34 ⁺	35 ⁺

où les données marquées d'une (+) correspondant à des durées censurées On calcule l'estimateur de Kaplan-Meier. Les résultats obtenus sont donnés sous forme de tableaux et graphiques.

On a $X'_{1:n}, X'_{2:n}, \dots, X'_{k:n}$ la statistique d'ordre associée à les durées de vie observées non-censurées. Alors, l'estimateur de Kaplan-Meier est défini comme suit :

$$\hat{R}_{KM}(t) = \prod_{j=1}^k \left[1 - \frac{d_j}{n_j} \right] ; X'_{k:n} \leq t < X'_{k+1:n} \quad (2.13)$$

En utilisant la formule (2.13), on obtient les résultats ci-dessous :

<i>temps</i>	n_j	d_j	$\widehat{R}_{KM}(t)$	<i>Intervalle</i>
0	21	0	1	$[0, 6[$
6	21	3	$1 \times \left(1 - \frac{3}{21}\right) = 0.857$	$[6, 7[$
7	17	1	$0.857 \times \left(1 - \frac{1}{17}\right) = 0.807$	$[7, 10[$
10	15	1	$0.807 \times \left(1 - \frac{1}{15}\right) = 0.753$	$[10, 13[$
13	12	1	$0.753 \times \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 0.690$	$[13, 16[$
16	11	1	$0.690 \times \left(1 - \frac{1}{11}\right) = 0.627$	$[16, 22[$
22	7	1	$0.627 \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 0.538$	$[22, 23[$
23	6	1	$0.538 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0.448$	≥ 23

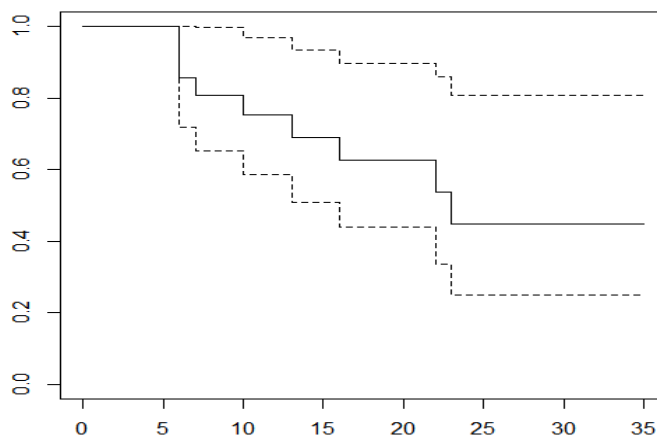


FIGURE 2.8 – Estimateur de Kaplan-Meier

```
> summary(y)
Call: survfit(formula = Surv(durees, censure) ~ 1)

   time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
   ---- - ---- -
      6     21      3   0.857  0.0764    0.720    1.000
      7     17      1   0.807  0.0869    0.653    0.996
     10     15      1   0.753  0.0963    0.586    0.968
     13     12      1   0.690  0.1068    0.510    0.935
     16     11      1   0.627  0.1141    0.439    0.896
     22      7      1   0.538  0.1282    0.337    0.858
     23      6      1   0.448  0.1346    0.249    0.807
```

FIGURE 2.9 – Résultats de calcul de l’estimateur de Kaplan-Meier sous *R*


On peut faire cet exemple à l’aide du logiciel *R*, à partir les étapes suivantes :

Programme sous *R*

```
> durees=c(6,6,6,6,7,9,10,10,11,13,16,17,19,20,22,23,25,32,32,34,35)
> durees
> censure=c(1,1,1,0,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0)
> censure
> y=survfit(Surv(durees,censure) 1)
> y
> plot(y)
> summary(y)
```

Bibliographie

- [1] **Afnor 1988** : afnor (1988). Recueil des normes françaises : Fiabilité , Maintenabilité, et disponibilité, Ed Afnor-Ute/HAL
- [2] **Augé 1998** : Augé, J-C(1998), Application aux Essais Accélérés, thèse Ecole Centrale de lyon.
- [3] **Ayyub and Mccuen, 1997** : ayyub.b, and Mccuen.R.(1997), probability, statistics and Reliability For engineers, CRC press New york.
- [4] **Bagdonavicius et al, 2000** : Bagdonavicius, V. Gerville-Reache.l, Nikoulina.V, and Nikoulin M(2000) Expériences accélérées, analyse statistique du modèle standard de vie accélérée Revue de statistique.
- [5] **Beaumont-P** : optimisation des plans d'essai accélérées, Université Blaise pascal-Clermont-Ferrand II, 2009.
- [6] **CUQUEL Alain**, article 41-2 de la loi n°57-298 du 11 Mars 1957.
- [7] **El Hami Abdelkhalak, Delaux-D et Grzeskowiak-H**, Fiabilité des systèmes mécatroniques de forte puissance 2.
- [8] **Guérin Fabrice**, Estimation de la fiabilité par les essais, Université d'Angers.
- [9] **Jean.M-Christophe**, L'école central de lyon, thèse de doctorat sur modélisation de l'influence de l'environnement sur la fiabilité de vérins hydrauliques et pneumatiques application aux essais accélérés.
- [10] **Kaplan-El and Meier. P (1958)** : non parametric estimation from incomplete observation.
- [11] **Pagès and Gondran 1980** : Fiabilité des systèmes. Ed Eyrolles.
- [12] **Reghis Kenza**, Fiabilité des systèmes mécaniques, Université de Ourgla.
- [13] **Tsiatis 1990** : Tsiatis, A-A (1990) Estimating regression parameter.

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Salah Ben Yakhlef

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
N° d'ordre :
N° de série :

Mémoire de fin de cycle
Présenté pour l'obtention du diplôme de
Master
Spécialité : Mathématiques.
Option : Probabilités et Statistique.

Thème

Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

Présenté par :
• Khemiss Nora
• Ghomem Aïda

Devant le jury :
Président : Boujendia Khalifa M.C.H Université de Djelf
Examinateur : Yabouh Fatima M.A.A Université de Djelf
Examinateur : Djerdj Zahra M.A.A Université de Djelf
Invitation pour M^r. Ghomel Mehrez