REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Probabilités et Statistique

Thème

Comparaison des fiabilités des systèmes non réparables

Présenté par :

BOUBERTAKH Somia

TADJINE Souaad

Devant le jury :

Président : Dr.CHEKRAOUI LAOUDJ Farida

Encadreur : Mme.YAKOUBI Fatima

Examinateur : Mme.MADI Meriem

Promotion 2015/2016

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Option : Probabilités et Statistique

Thème

Comparaison des fiabilités des systèmes non réparables

Présenté par :

BOUBERTAKH Somia

TADJINE Souaad

Devant le jury :

Président : Dr.CHEKRAOUI LAOUDJ Farida

Encadreur : Mme.YAKOUBI Fatima

Examinateur : Mme.MADI Meriem

Promotion 2015/2016

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Dieu, le tout puissant et le maitre de l'univers qui nous a donné la nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail et qui nous a toujours guidé vers le bon chemin.

Nos remerciements les plus sincères d'abord à notre encadreur Mme. YAKOUBI Fatima qui nous a suivis tout ou long de ce travail et à le remercier pour ces conseils avisés, pour sa disponibilité continuelle et pour son encadrement capacité déterminé.

Nous remercions Mme. CHEKRAOUI LAOUDJ Farida qui a fait l'honneur de présider ce jury, et Mme.MADI Meriem qui a accepté d'examiner ce travail et consacré de son temps pour son évaluation. Sans oublier les enseignants qui m'a bien formé tout le long des cinq ans.

A tous les travailleurs de notre université.

Table des matières

Introduction

A l'époque de la préparation de la seconde guerre mondiale, les techniques industrielles étaient relativement peu avancées et, pratiquement, il n'existait aucune demande de fiabilité. Les appareils de l'époque étaient simples et utilisaient peu de composants. Les conditions climatiques, vibratoires et de choc n'étaient pas excessifs. La fiabilité pouvait donc être considérée comme acceptable.

Pendant la deuxième guerre mondiale, à la suite des changements rapides, et dû au fait que la guerre se déroulait dans le désert et dans les zones humides, l'équipement devint plus sophistiqué, tandis que la probabilité d'apparition des défaillances augmentait rapidement, quelques données statistiques publiées par l'administration de l'armée américaine, montrent la gravité de la situation, la plupart de l'équipement électronique n'était en état de fonctionner que pendant 30% du temps et les frais de réparation et de maintenance du parc étaient dix fois plus grands que les coûts payés à l'achat.

Ce n'est que depuis les années 70 qu'on a commencé à s'intéresser au problème de fiabilité comme conséquences logiques de la complexité des équipements.

Dans le passé, il n'y avait pas de spécification concernant la fiabilité, car on ne savait pas quels sont les paramètres qui déterminent la fiabilité des installations et des équipements. Cela explique pourquoi les fabriquants n'ont eu longtemps, aucun moyen d'apprécier le comportement dans le temps des équipements qu'ils livraient.

La fiabilité s'intéresse à l'ensemble des mesures à prendre pour qu'un produit, un système ou une entité fonctionne sans défaillance ou avec une fréquence de défaillance suffisamment faible pour être acceptable dans l'usage prévu.

Un système est constitué de plusieurs composants assurant diverses fonctions. Une des plus importantes mesures de sa performance est sa fiabilité. La fiabilité d'un système est définie comme étant la probabilité que le système fonctionne durant une période de temps sous des conditions spécifiées.

Un objectif de la théorie de la fiabilité est de trouver le moyen d'évaluer la fiabilité d'un système complexe à partir de la connaissance des fiabilités des composants le constituant, d'où l'évaluation de la fiabilité d'un système est une caractéristique importante.

Parmi les travaux scientifiques qui ont été réalisés sur ce type des systèmes, on trouve deux catégories d'articles. Dans la première, les auteurs s'intéressent au calcul exact ou approximatif de la probabilité du système et ce en utilisant des méthodes algorithmiques , ou des techniques probabilistes, ou bien devant la complexité des hypothèses, ils s'intéressent à chercher un encadrement de la valeur de la probabilité du système. Dans la seconde, les chercheurs ont traité le problème du comportement asymptotique du temps de panne du système sous différentes hypothèses sur les lois des temps de panne des composants.

L'objet de ce travail est de comparer la fiabilité des systèmes du type k-sur-n dans le cas où les composants sont indépendants mais non nécessairement identiques et le cas où les composants sont indépendants et identiques, soit stochastiquement un système est plus grande que la durée de vie d'un autre et la fiabilité est décrite par des lois mathématiques.

Ce mémoire se compose de trois chapitres. Le chapitre 1 est un ensemble des rappels de notions de base de la théorie de fiabilité qui vous être utiles dans la suite de ce travail. Le chapitre 2 est consacré à la présentation des différents types d'ordres stochastiques et on établira quelques relations qui existent entre ces différents types d'ordres stochastiques . Le chapitre 3 est une application aux systèmes k-sur-n, on a établit un comparaison entre la fiabilité d'un système k-sur-n dont les composants sont indépendants non identiques et la fiabilité de son équivalent dont les composants ne sont pas identiques.

Chapitre 1

Rappels sur la théorie de la fiabilité

La fiabilité est l'une des composantes essentielles de la qualité d'un produit et elle est retenue en tant que critère fondamental pour leur élaboration. Elle est prise en considération dés le stade de la conception.

La fiabilité est la caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité que ce dispositif accomplisse une fonction requise dans des conditions d'utilisation et pour une période de temps déterminée.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions que nous utiliserons dans ce mémoire.

1.1 Définitions

Comme on l'a vu, un système non réparable est un système qui est mis au rebut dès qu'il tombe en panne. Les considérations sur les réparations ou corrections n'ont donc pas lieu d'être ici. Le seul point important est la date de panne, appelée aussi instant de défaillance, durée de vie ou durée de bon fonctionnement du système. Comme celle-ci n'est pas prévisible avec certitude à l'avance, on la modélise par une variable aléatoire, que l'on note T. Une durée étant un réel positif, cette variable aléatoire prend ses réalisations dans $\mathbb{R}^+$.

Si on s'intéressait à des systèmes pour lesquels le temps est exprimé par un nombre entier, comme un nombre de transactions, T serait à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pourrait aussi prendre en compte la possibilité que le système soit en panne à l'instant initial, ce qui voudrait dire que $P(T = 0) \neq 0$. Nous ne nous placerons ici dans aucun de ces deux cas. Par conséquent, T sera une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Sa loi de probabilité est définie par :

•sa fonction de répartition

$$F(t) = P(T \leq t) \tag{1.1}$$

•sa densité

$$f(t) = F'(t) \tag{1.2}$$

Plus la durée de fonctionnement est grande, meilleure est la fiabilité du système. Donc on choisit de définir la fiabilité du système a l'instant t comme la probabilité que le système ne soit pas encore tombé en panne à l'instant t ou encore comme la probabilité que le système fonctionne sans défaillance entre 0 et t.

Définition 1.1.1 *La fiabilité d'un système non réparable est la fonction du temps R (R pour Reliability) définie par :*

$$\forall t \geq 0 \qquad R(t) = P(T > t) \tag{1.3}$$

On a évidemment $R(t) = 1 - F(t)$ et $R'(t) = -f(t)$. R est donc une fonction décroissante. Cela traduit le fait naturel que l'aptitude au bon fonctionnement d'un système non réparable diminue avec le temps. Mais la monotonie de cette fonction fait que la fiabilité n'est pas suffisamment souple pour pouvoir clairement prendre en compte la diversité des types d'usure. Aussi la principale mesure de fiabilité n'est pas la fonction de fiabilité mais le taux de défaillance.

Définition 1.1.2 *Le taux de défaillance ou taux de panne ou taux de hasard d'un système non réparable est la fonction du temps λ définie par :*

$$\forall t \geq 0 \qquad \lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t) \tag{1.4}$$

Dans cette expression, la probabilité considérée est la probabilité que le système tombe en panne entre t et $(t + \Delta t)$ sachant qu'il a bien fonctionné entre 0 et t. Notons que la fiabilité est une probabilité mais que le taux de défaillance n'en est pas une : $\lambda(t)$ peut être supérieur à 1.

L'interprétation du taux de défaillance est liée à celle de la densité de la façon suivante.

On sait que :

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[P(T \leq t+\Delta t) - P(T \leq t)\right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq T \leq t+\Delta t) \end{aligned}$$

On a donc, pour Δt petit :

$$f(t)\Delta t \approx P(t \leq T \leq t+\Delta t)$$

La quantité $f(t)\Delta t$ peut donc être considérée comme la probabilité de défaillance juste après l'instant t alors que $\lambda(t)\Delta t$ peut être considérée comme la probabilité de défaillance juste après l'instant t sachant que le système n'est pas tombé en panne avant t. Il y a donc une notion d'instantanéité dans $f(t)$ et une notion de durée dans $\lambda(t)$ (comme dans $R(t)$).

On peut illustrer cette différence en comparant :

- la probabilité qu'un homme meure entre 100 et 101 ans.

- la probabilité qu'un homme meure entre 100 et 101 ans sachant qu'il a vécu jusqu'à 100 ans.

La première (liée à la densité) est très faible : on a de très fortes chances de mourir avant 100 ans. La seconde (liée au taux de défaillance) est évidemment très forte.

On conçoit donc que le taux de défaillance est une mesure pratique de l'usure ou du vieillissement. Un taux de défaillance croissant correspond à un système qui se dégrade, tandis qu'un taux de défaillance décroissant correspond à un système qui s'améliore avec le temps.

Il est facile d'établir les liens entre le taux de défaillance et la fiabilité :

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t \cap T > t)}{P(T > t)} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} \\
&= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [F(t + \Delta t) - F(t)] \\
&= \frac{f(t)}{R(t)} \\
&= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)} \\
&= -\frac{d}{dt} lnR(t) \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

En intégrant et en prenant comme condition initiale $R(0) = 1$, car on a supposé que le système fonctionne à l'instant initial, on obtient la formule d'exponentiation :

$$R(t) = exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right] \qquad (1.6)$$

Définition 1.1.3 *Le taux de défaillance cumulé ou taux de hasard cumulé d'un système non réparable est la fonction du temps H définie par :*

$$\forall t > 0, \qquad H(t) = \int_0^t \lambda(u)du = -lnR(t) \qquad (1.7)$$

La formule d'exponentiation s'écrit donc aussi $R(t) = exp(-H(t))$.

Enfin, puisque $-f(t) = R'(t)$, la densité de T s'exprime à l'aide du taux de défaillance sous la forme :

$$f(t) = \lambda(t)exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right] \qquad (1.8)$$

Toutes les grandeurs caractéristiques de la loi de probabilité de T s'expriment à l'aide de la fonction λ. Le taux de défaillance caractérise donc la loi d'une durée de vie. C'est pourquoi, en pratique, construire un modéle de fiabilité de systèmes non réparables revient à se donner une forme particulière pour le taux de défaillance.

Le choix de cette forme est basé sur des considérations de modélisation ou des constatations expérimentales. De nombreuses études pratiques ont montré que le graphe du taux de défaillance d'un système non réparable simple a trés souvent une forme de baignoire, comme dans la figure 1.1. En effet, λ se décompose dans ce cas en 3 parties :

• la période de jeunesse : quand un système est neuf, on observe souvent des défaillances précoces, dues à des défauts intrinsèques ou des fautes de conception. Le risque de défaillance est donc assez fort au tout début de la vie du système. Ensuite il diminue car, s'il y a des défauts initiaux, ils vont se manifester tôt. λ est donc d'abord décroissant. C'est le rodage pour les matériels mécaniques et le déverminage pour les matériels électroniques.

• la vie utile : pendant cette pèriode, le taux de défaillance est constant et les défaillances sont purement accidentelles.

• le vieillissement : λ se remet à croître car le risque de défaillance va finir par augmenter à cause de l'usure du système.

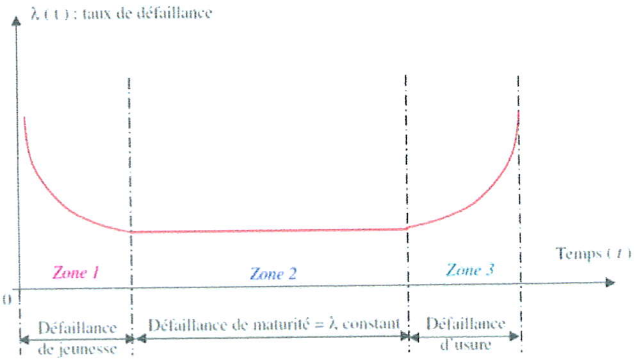

Figure 1.1 : *Taux de défaillance en forme de baignoire*

Du point de vue du consommateur cherchant à s'assurer contre les pannes du système, il est impératif d'avoir une garantie à court terme pour se prémunir contre les défauts de jeunesse. On peut souhaiter avoir une garantie à long terme contre le vieillissement, mais cela va coûter cher et les contrats ne garantissent en général pas les problèmes d'usure.

En revanche, une garantie à moyen terme n'est pas forcément utile car, si le système a passé la période de jeunesse, il subira en général peu de défaillances en période de vie utile. Naturellement, pour pouvoir fixer de façon optimale les durées de garantie, il faut connaître ou estimer les dates de transition entre les différentes périodes, ce qui est généralement difficile.

La dernière mesure fondamentale de fiabilité est le $MTTF$.

Définition 1.1.4 *Le temps moyen de panne $MTTF$ (Mean Time To Failure) d'un système non réparable est la durée moyenne de bon fonctionnement avant sa défaillance :*

$$MTTF = E\left[T\right] = \int_0^{+\infty} tf(t)dt \tag{1.9}$$

Une intégration par parties aboutit alors :

$$MTTF = \left[-tR(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} R(t)dt$$

En supposant que $R(t)$ tend vers 0 plus vite que $\frac{1}{t}$, ce qui sera toujours le cas, on obtient une formule plus usuelle pour le $MTTF$:

$$MTTF = \int_0^{+\infty} R(t)dt \tag{1.10}$$

Remarque 1.1.1 *La transformée de Laplace de R est :*

$$\overline{R}(s) = \int_0^{+\infty} R(t) + exp(-st)dt$$

Par conséquent

$$MTTF = \overline{R}(0)$$

Définition 1.1.5 *Le temps moyen résiduel de panne MRTF (Mean Residual Time to Failure),est l'espérance de la durée de survie :*

$$\begin{aligned} m(t) &= E[T > t + x \backslash T > t] = \frac{1}{R(t)} \int_t^{+\infty} R(x)dx, pour\ tout\ x \geq 0 \\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)} \\ &= exp\left\{-\int_t^{t+x} \lambda(u)du\right\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Définition 1.1.6 *La fonction de structure traduit les relations fonctionnelles entre les composants du système et son état de panne ou fonctionnement.*

Considérons un système binaire à n composants pour chaque composant i on désigne une variable X_i à valeur dans $\{0, 1\}$ avec la convention suivante :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le composant } i \text{ est en bon état} \\ 0 & \text{si le composant } i \text{ est en panne.} \end{cases}$$

Soit $X = (X_1, X_2, ...X_n) \in \{0, 1\}^n$ le vecteur décrivant conjointement les états des composants. On définit une fonction $\phi(X)$ décrivant l'état du système à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec la convention suivante :

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si le système est en bon état.} \\ 0 & \text{si le système est en panne.} \end{cases}$$

Définition 1.1.7 *La disponibilité d'un système non réparables est la fonction du temps $A(t)$ telle que :*

$$R(t) = A(t) \tag{1.12}$$

1.2 Lois usuelles

1.2.1 La loi exponentielle

On appelle loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), la probabilité sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f(t) = \lambda exp(-\lambda t)$$

et de fonction de répartition

$$F(t) = 1 - exp(-\lambda t)$$

et sa fonction de fiabilité est définit par :

$$R(t) = exp(-\lambda t) \tag{1.13}$$

Le taux de défaillance

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \lambda\frac{exp(-\lambda t)}{exp(-\lambda t)} \\ &= \lambda \end{aligned} \tag{1.14}$$

et la durée de vie moyenne

$$\begin{aligned} MTTF &= E[T] \\ &= \int_0^{\infty} R(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} exp(-\lambda t)dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Proposition 1.2.1 *Le seul type de distribution pour une durée de vie vérifiant $R(0) = 1$ et telle que les durées de vie résiduelles ont toutes même loi est la loi exponentielle. C'est pourquoi ces distributions sont dites sans mémoire ou-as good as new.*

1.2.2 La loi de Weibull $W(\eta, \beta)$

L'expression loi de Weibull recouvre en fait toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissent en physique comme conséquence de certaines hypothèses. C'est en particulier, le cas de la loi exponentielle ($\beta = 1$)

Ces lois constituent surtout des approximations particulièrement utiles dans des techniques diverses alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. Une distribution à valeurs positives (ou, plus généralement mais moins fréquemment, à valeurs supérieures à une valeur donnée) a presque toujours la même allure. Elle ne part d'une fréquence d'apparition nul, croît jusqu'à un maximum et décroît plus lentement. Il est alors possible de trouver dans la famille de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant β et à partir de la moyenne et la variance observées.

Une variable aléatoire T est de loi de Weibull de paramètre d'échelle $\eta > 0$ et de paramètre de forme $\beta > 0$, notée $W(\eta, \beta)$, si et seulement si sa fonction de répartition est :

$$F(t) = 1 - exp(-(\frac{t}{\eta})^{\beta})$$

La fiabilité est :

$$R(t) = exp(-(\frac{t}{\eta})^{\beta}) \tag{1.16}$$

La densité est :

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1} exp(-(\frac{t}{\eta})^{\beta}) \end{aligned}$$

La durée de vie moyenne est :

$$MTTF = \int_0^\infty exp(-(\frac{t}{\eta})^{\beta})dt \tag{1.17}$$

Le taux de défaillance est :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Le taux de panne est croissant si $\beta > 1$ et décroissant si $\beta < 1$.

1.2.3 La loi normale

La loi normale est la loi statistique la plus répandue et la plus utile, elle est utilisée afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Elle représente beaucoup de phénomènes aléatoires. De plus, de nombreuses autres lois statistiques peuvent être approchées par la loi normale, tout spécialement dans le cas des grands échantillons.

La loi normale, à deux paramètres, est utilisée aussi pour modéliser la durée de vie d'un système, sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2)$$

où μ la moyenne et σ l'écart-type.

Si la durée de vie d'un dispositif obéit à une loi normale alors le taux de panne est une fonction monotone croissante du temps.

1.3 Systèmes multicomposants

La distinction entre système à structure élémentaire et système à structure complexe est trés utile en fiabilité. Les systèmes à structure élémentaire concernent la structure série et la structure parallèle, ou plus précisément la structure k-sur-n qui est une généralisation des deux précédents.

1.3.1 Système en série

Un système série est un système qui ne fonctionne que si tous ses composants fonctionnent.

la panne d'un composant quelconque entraine nécessairement la panne du système.

il en résulte que :

$$T = min\{T_1, ...T_n\}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
R(t) &= P(T > t) \\
&= P(T_1 > t, T_2 > t, ..., T_n > t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(T_i > t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} R_i(t)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

où, $R_i(t)$ c'est la fiabilité du $i^{ème}$ composant.

On constate qu'un système en série est plus fiable que le composante le moins fiable.

La fonction de structure d'un système en série est donnée par :

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \min(x_1, ..., x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned} \tag{1.20}$$

1.3.2 Système en parallèle

Un système en parallèle fonctionne si au moins, un de ses composants fonctionne. La panne du système ne se produit donc que si tous les composants sont en panne.

Il en résulte que :

$$T = max\{T_1, ..., T_n\}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
R(t) &= 1 - F(t) \\
&= 1 - P(T \leq t) \\
&= 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, ..., T_n \leq t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(T_i \leq t) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)] .
\end{aligned} \tag{1.21}$$

La fiabilité d'un système en parallèle est donc supérieure à celle du composant le plus fiable. La fonction de structure d'un système en parallèle est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= max(x_1, ..., x_n) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \end{aligned} \tag{1.22}$$

1.3.3 Système k-sur-n

Un système k-sur-n fonctionne si au moins k parmi n composants fonctionnent.

Un système de n composants qui fonctionne si et seulement si au moins k composants parmi n fonctionnent s'appelle k - sur - n : G.

Un système de n composants qui tombe en panne si et seulement si au moins k composants parmi n tombent en panne s'appelle k - sur - n : F.

Le nombre de composants à l'instant t obéit à une distribution binomiale de paramètres n et p et l'ontrouve que :

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) p^i q^{n-i}$$

tel que :

p : la fiabilité du chaque composant

$q = (1 - p)$: la défiallance de chaque composant

Si tous les composants du système k-sur-n out la même fiabilité $R_i(t)$ donc :

La fiabilité du système $k - sur - n : F$ est :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) R_1^{n-i}(t)(1 - R_1(t))^i \tag{1.23}$$

et la fiabilité du système $k - sur - n : G$ est :

$$R(t) = \sum_{i=k}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) R_1^i(t)(1 - R_1(t))^{n-i} \tag{1.24}$$

Notons que les systèmes k-sur-n admettent comme cas particulier les systèmes en série ($k = n$), et les systèmes en parallèle ($k = 1$)

Si les composants ne sont pas identiques, on peut exprimer la fonction de la fiabilité du système comme suite :

$$R(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{C_n^i} \prod_{m=1}^{n} R_m^{\delta_{m,j}}(t)\,(1 - R_m(t))^{\overline{\delta}_{m,j}}, \qquad k = 1, ..., n \tag{1.25}$$

tel que :

$$\sum_{m=1}^{n} \delta_{m,j} = n - k \qquad , \sum_{m=1}^{n} \overline{\delta}_{m,j} = k$$

et

$$\delta_{m,j} = \begin{cases} 1 \text{ si m composants fonctionnent.} \\ 0 \text{ si m composants panne.} \end{cases}$$

La fonction de structure d'un système k-sur-n est donnée par :

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & si \sum x_i \geq k \\ 0, & autrement. \end{cases} \tag{1.26}$$

1.4 Notions sur les fonctions symétriques

Une fonction de plusieurs variables est symétrique si sa valeur ne change pas quand on permute les variables. Considéron une équation de degré n : $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)...(x - x_n) = 0$ à n racines réelles ou complexes $x_1, x_2, ..., x_n$; Si nous développons le membre de gauche, nous obtenons :

$$x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - S_3 x^{n-3} + S_4 x^{n-4} - S_5 x^{n-5} + ... + (-1)^n S_n = 0$$

où $S_1, S_2, ..., S_n$ sont des polynomes homogènes et symétriques en $x_1, x_2, ..., x_n$ pour être plus rigoureux, on pourra les noter $S_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, ou $S_i^{(n)}$(si on veut seulement préciser le nombre de racines), ou encore $S_i(f)$, f étant le polynôme : $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Ces polynomes S_i sont appelés : fonction symétriques élémentaires des racines.

Pour une équation de degré 2 (n=2 ; racines : x_1 et x_2), on a :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = x_1 + x_2 \\ S_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

Pour une équation de degré 3 ($n = 3$, racines : x_1,x_2 et x_3), on a :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ S_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

Pour une équation de degré 4 ($n = 4$, racines : x_1, x_2, x_3 et x_4), on a :

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ S_3 = x_1x_2x_3x_4 \end{cases}$$

La formule générale est :

$$S_m(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i_1+i_2+...+i_n=m} (x_1, x_2, ..., x_n) \quad , \ avec\ i_1, i_{2,...}, i_n = 0 \ ou\ 1. \tag{1.27}$$

$S_m^{(n)}$est donc la somme de tous les produits distincts qu'on peut former en prenant au plus une fois chaque racine; c'est un polynome formé de C_n^m monomes de degré n. ($C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$)

$S_m^{(n)}$ s'annule pour m>n.

Définition 1.4.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n. Soit $k \in [1.n]$ la k-ième fonction symétrique élémentaire en n indéterminées indépendantes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est par la définition :*

$$S_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} \tag{1.28}$$

pour $p, q \in \{1, ..., n\}$ et $X^p = (x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_n) \in (0, \infty)^{n-1}$
on a :

$$S_k(X^p) = \sum_{\substack{i_1,...,i_k \in \{1,...,n\}/\{p\} \\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n}} x_{i_1}x_{i_2}, ..., x_{i_k} \tag{1.29}$$

On appelle k-ième fonction symétrique élémentaire sans le composant x_p la fonction :

$$S_k(X^{p,q}) = \sum_{\substack{i_1,...,i_k \in \{1,...,n\}/\{p,q\} \\ 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n}} x_{i_1}x_{i_2}, ..., x_{i_k} \tag{1.30}$$

entre ces fonction on a les relations élémentaires suivants :

$$\begin{aligned} S_k(X) &= x_p S_{k-1}(X^p) + S_k(X^p) \\ &= x_p x_q S_{k-2}(X^{p,q}) + (x_p + x_q) S_{k-1}(X^{p,q}) + S_k(X^{p,q}) \quad (1.31) \end{aligned}$$

Définition 1.4.2 *La k-ième moyenne symétrique est définit comme suit :*

$$\begin{aligned} m_i(x_1, x_2, ..., x_n) &= \left(\binom{n}{i}^{-1} S_i(x_1, x_2, ..., x_n) \right)^{\frac{1}{i}} \\ &= \left(\binom{n}{i}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in J} x_i x_j \right)^{\frac{1}{i}} \qquad \forall\ i = 1, ..., n \quad (1.32) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 *On a :*

$$S_k^{(n+1)} = x_{n+1} S_{k-1}^{(n)} + S_k^{(n)}$$

et

$$S_k^{(n)} = x_n S_{k-1}^{(n-1)} + x_{n-1} S_{k-1}^{(n-2)} + ... + x_{n-i} S_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + x_k S_{k-1}^{(k-1)}$$

Preuve

1) On a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} S_{k-1}^{(n)} + S_k^{(n)} &= x_{n+1} \left(\sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} \right) + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k-1} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} x_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} x_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_n+1=k-1+1=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} x_{n+1}^1 + \sum_{i_1+i_2+...+i_n+0=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} x_{n+1}^0 \\ &= \sum_{i_1+i_2+...+i_{n+1}=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} x_{n+1}^{i_n+1}, \qquad i_{n+1} = 0 \vee 1. \\ &= S_k^{(n+1)} \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= x_n S_{k-1}^{(n-1)} + S_k^{(n-1)} \\ &= x_n S_{k-1}^{(n-1)} + x_{n-1} S_{k-1}^{(n-2)} + S_k^{(n-2)} \\ &= x_n S_{k-1}^{(n-1)} + x_{n-1} S_{k-1}^{(n-2)} + x_{n-2} S_{k-1}^{(n-3)} + S_k^{(n-3)} \\ &= x_n S_{k-1}^{(n-1)} + x_{n-1} S_{k-1}^{(n-2)} + x_{n-2} S_{k-1}^{(n-3)} + ... + x_{n-i} S_{k-1}^{(n-i-1)} + ... + x_k S_{k-1}^{(n-1)} \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.4.1 *Soient* $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ *et* $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ *tel que :* $\alpha \leq \frac{y_i}{x_i} \leq \beta, i = 1, ..., n$ *et* $0 < \alpha < \beta$*, alors pour* $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$*, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\alpha \frac{S_r(Y)}{S_r(X)} \leq \frac{S_{r+1}(Y)}{S_{r+1}(X)} \leq \beta \frac{S_r(Y)}{S_r(X)} \tag{1.33}$$

et au moins l'un des deux inégalités est stricte.

Chapitre 2

Comparaison stochastique

Un des principaux objectifs de la statistique est la comparaison de variables aléatoires. Une comparaison basée sur les distributions est plus informative que celle basée uniquement sur deux statistique.La méthode utilisée pour comparer deux distributions est nommée « ordre stochastique».

Dans ce chapitre,on donne des définitions et quelques résultats théoriques sur la comparaison stochastique

2.1 Généralités

2.1.1 L'ordre intégral

Définition 2.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires intégrable. Un ordre stochastique "$\leq$ " pour lequel il existe une famille de fonctions mesurables F telle que :*
$X \leq_F Y$ si et seulement si $E[f(X)] \leq E[f(Y)], \forall f \in F$. quand les espérances existent, est appelé un ordre intégral.
La famille F est appelé générateur de l'ordre $\leq_F$

2.1.2 L'ordre ensembliste

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux variables aléatoires intégrable. Un ordre stochastique "$\leq_{\mathcal{C}}$ "défini sur les fonctions de répartition sur un de sous-ensembles (mesurables) $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ i.e $\mathcal{S}$ un espace arbitraire vérifiant :*

$$X \leq_{\mathcal{C}} Y \text{ si et seulement si } P(X \in C) \leq P(Y \in C), \forall C \in \mathcal{C}$$

On peut remarquer que chaque ordre ensembliste est également un ordre intégral. En effet :

soit C un ordre ensembliste généré par une famille $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de $\mathcal{S}$, définissons la famille $\mathcal{F}$ de toutes les fonctions indicatrices des ensembles $C \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{F} = \{1_C : C \in \mathcal{C}\}$$

Alors, l'ordre C est un ordre intégral généré par la famille $\mathcal{F}$, cela provient directement de

$$P_X(C) = E[1_C(X)]$$

2.1.3 L'ordre stochastique fort (usuel)

L'ordre stochastique usuel est l'ordre le plus naturel pour comparer deux variables aléatoires réelles. Il consiste à comparer leurs fonctions de répartition (ou leurs fonctions de survie). Cet ordre est souvent appelé ordre stochastique usuel selon Shaked et Shanthikumar (2007) et ordre stochastique fort selon Szekli (1995).

Soient $F_X(t)$ et $F_Y(t)$, respectivement, les fonctions de répartition des v. a. X et Y.

Si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ pour tout réel t, alors, avec une probabilité plus grande, X prend des petites valeurs que Y, ou avec une probabilité plus faible X prend des grandes valeurs que Y.

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 2.1.3 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre stochastique usuel, noté " $\leq_{st}$ " si :*

$$F_X(t) \geq F_Y(t), \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

L'inéquation (2.1) est équivalente aux inéquations suivantes :

$$\overline{F}_X(t) \leq \overline{F}_Y(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

où, $\overline{F}_X(t) = P(X > t)$ est la fonction de survie de X, ainsi on a :

$$P(X > t) \leq P(Y > t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Théorème 2.1.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires. Les énoncés suivants sont équivalents :*
1) $X \leq_{st} Y$.
2) Il existe un espace de probabilité (Ω, A, P) sur lequel sont définies deux variables aléatoires X', Y' de même lois que X et Y telles que :

$$P[X' \leq Y'] = 1 \qquad c-\grave{a}-d \qquad X' \leq Y' \text{ prèsque sûrement } (p.s.) \quad (2.2)$$

Preuve
1 => 2 :

Notons par F^{-1} l'inverse généralisé de la fonction de répartition F défini par :

$$F^{-1}(u) = inf\{x : F(x) \leq u\} \text{ pour } 0 < u < 1$$

Soit U une variable aléatoire uniformément distribuée sur $\{0, 1\}$, et soient

$$X' = F_X^{-1}(U), \quad Y' = F_Y^{-1}(U)$$

Alors X'et Y' sont des variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y respectivement, et

$$P[X' \leq Y'] = \int P[F_X^{-1}(u) \leq F_Y^{-1}(u) \mid U = u]du = 1$$

car $F_X \geq F_Y \Leftrightarrow F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$
$\Leftrightarrow X' \leq Y'$ *prèsque sûrement*

2 => 1

C'est évident. ∎

Notons que cet ordre est également appelé ordre « croissant » du fait de la caractérisation suivante.

Théorème 2.1.2 *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
1) $X \leq_{st} Y$.
2) Pour toute fonction f croissante définie sur $\mathbb{R}$

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)]$$

pourvu que $E[f(X)] < \infty$ et $E[f(Y)] < \infty$.

Preuve

1 => 2.

D'après le théorème précédent, on peut supposer sans perte de généralité que $X \leq_{st} Y$presque sûrement.

Ainsi, si f est croissante, alors $f(X) \leq f(Y)$ et puisque l'espérance E (.) est une fonction monotone, alors $E[f(X)] \leq E[f(Y)]$.

2 => 1.

On a que

$$P(X > u) = E[1_{(u,\infty)}(X)],$$

où, $1_{(u,\infty)}(t)$ est la fonction indicatrice croissante définie par :

$$1_{(u,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > u \\ 0 & \textit{autrement.} \end{cases}$$

Or, pour toute fonction croissante ϕ, il existe une suite de fonctions ϕ_m définie par :

$$\phi_m = \sum_{i=1}^{m} a_{m,i} 1_{A_{m,i}}(x) - b_m, \qquad A = (u, \infty), u \in \mathbb{R} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

telle que $\phi_m(x) \longrightarrow \phi(x)$ quand $m \longrightarrow \infty$

Ainsi, si $X \leq_{st} Y$, alors $E[\phi_m(X)] \leq E[\phi_m(Y)]$

et par conséquent, $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ ■

Propriétés

Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances finies.

1) Si $X \leq_{st} Y$ alors $E[X] \leq E[Y]$.

2) Si $X \leq_{st} Y$ et $E[X] = E[Y]$ alors $X =_{st} Y$ (X et Y ont la même distribution).

3) Soient $X_1, ..., X_n$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que :

$$X_i \leq_{st} Y_i, i = 1, ..., n.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction croissante alors :

$$\varphi(X_1, ..., X_n) \leq_{st} \varphi(Y_1, ..., Y_n)$$

4) Soient $X_1, ..., X_n$ *et* $Y_1, ..., Y_n$ des variables aléatoires indépendantes telle que $X_i \leq_{st} Y_i, i = 1, ..., n$.

Et soient

$$X_{(1:n)} \leq_{st} X_{(2:n)} \leq_{st} \ldots \leq_{st} X_{(n:n)}$$

et

$$Y_{(1:n)} \leq_{st} Y_{(2:n)} \leq_{st} \ldots \leq_{st} Y_{(n:n)}$$

les statistiques d'ordres qui correspondent aux variables $X_1, ..., X_n$ *et* $Y_1, ..., Y_n$ respectivement. Alors

$$X_{(i:n)} \leq_{st} Y_{(i,n)}, i = 1, ..., n.$$

5) Si $X \leq_{st} Y$ alors $f(X) \leq_{st} f(Y)$ si f est croissante.

6) Stabilité par convergence : Si $X_n \overset{dist}{\rightarrow} X, Y_n \overset{dist}{\rightarrow} Y$ et $X_n \leq_{st} Y_n \forall n \in \mathbb{N}$,alors $X \geq_{st} Y$. $\overset{dist}{\rightarrow}$dénote la convergence en loi.

Remarque 2.1.1 *La propriété (1) peut être généralisée à la comparaison des moments. Ainsi, on écrit, si* $X \leq_{st} Y$ *alors* $E[X^n] \leq E[Y^n]$, *pour* $n = 1, 3, 5, ...$*ou encore si* $X \leq_{st} Y$ *où* X *et* Y *sont des variables aléatoires non-négatives alors* $E[X^n] \leq E[Y^n]$, $n = 1, 2, 3, ...$

On pourrait penser que l'ordre usuel est le plus précis des ordres stochastiques

2.1.4 Ordre de variabilité

Le concept de la variabilité est une base en statistique et de nombreux autres domaines connexes, tels que la théorie de fiabilité, l'économie et la science actuarielle.

Au cours des deux dernières décennies, plusieurs ordres stochastiques plus raffinés qui permettent de comparer les variabilités de variables aléatoires en fonction de leurs fonctions de répartition ont été introduits dans la littérature.

Par exemple, Müller et Stoyan (2002) présentent des résultats approfondis sur la plupart de ces concepts et leurs propriétés. Pour leur part, Shaked et Shanthikumar (2007) en donnent une description générale et détaillée en faisant la comparaison entre des risques. Ainsi, les ordres de variabilité sont d'un intérêt particulier dans le contexte de la prise de décision en situation de risque.

Ordres convexe et concave

Définition 2.1.4 *Une fonction f définie sur l de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. est dite convexe si $\forall(x_1, x_2) \in l^2$*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall t \in [0,1] \tag{2.3}$$

Définition 2.1.5 *Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y par rapport à l'ordre stochastique convexe, noté par $X \leq_{cx} Y$, si pour toute fonction convexe φ à valeurs réelles et lorsque les espérances sont bien définies*

$$E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)] \tag{2.4}$$

Définition 2.1.6 *Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y ou sens de l'ordre stochastique concave, noté par $X \leq_{cv} Y$, si pour toute fonction concave φ à valeur réelles et lorsque les espérances sont bien définies $E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$.*

En se basant sur le fait que la fonction $\varphi(x)$ est convexe si et seulement si $-\varphi(x)$ est concave, nous avons que $X \leq_{cv} Y \Leftrightarrow Y \leq_{cx} X$.

Ordre convexe croissant et ordre concave croissant

Définition 2.1.7 *Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'espérances finies. On dit que*

a) X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe croissant, noté "$\leq_{icx}$" si pour toute fonction convexe f

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)] \tag{2.5}$$

b) X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave croissant, noté "$\leq_{icv}$" si pour toute fonction concave f

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)] \tag{2.6}$$

propriété la fonction $f(x)$ est convexe croissante si et seulement si la fonction $[-f(-x)]$ est concave croissante.

D'où :

$$X \leq_{icx} Y \Longleftrightarrow -Y \leq_{icv} -X$$

2.1.5 Relations entre les ordres stochastiques

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors on a les relations suivantes :
1) $X \leq_{st} Y \Rightarrow X \leq_{icx} Y$ et $X \leq_{icv} Y$
2) $X \leq_{cx} Y \Longrightarrow X \leq_{icx} Y$
3) $X \leq_{icx} Y$ et $E[X] = E[Y] \Longrightarrow X \leq_{icv} Y$
4) $X \leq_{cv} Y \Longrightarrow X \leq_{icv} Y$

2.2 Comparaison des durées de vie

Le but est de comparer le bon fonctionnement de deux systèmes $S_i\,\{i = 1, 2\}$ de durées de vie respectives $T_i\{i = 1, 2\}$.

Ces différentes notions d'ordre stochastique sont utilisables dans d'autre domaines que la théorie de la fiabilité, mais elles répondent ici à une préoccupation naturelle : quand peut-ondire qu'un système est plus fiable qu'un autre ?.

Définition 2.2.1 *Toutes les variables que nous manipulons sont des variables positives et les moments sont supposés finis. Le fait qu'un système de durée de vie aléatoire T_1, est dit plus fiable qu'un autre de durée de vie T_2, peut s'exprimer selon les quatre relations d'ordre suivantes liées aux quatre notions que nous avons introduites au chapitre précédent.*

$T_1 \geq_m T_2$	en moyenne moins fiable	si $MTTF_1 \geq MTTF_2$.
$T_1 \geq_{st} T_2$	stochastiquement moins fiable	si $R_1(t) \geq R_2(t) \quad \forall t \geq 0$.
$T_1 \geq_{mr} T_2$	moins fiable à l'usage	si $m_1(t) \geq m_2(t) \quad \forall t \geq 0$.
$T_1 \geq_\lambda T_2$	plus vite défaillant	si $\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \quad \forall t \geq 0$.

Proposition 2.2.1 *Les ordres partiels ci-dessus vérifient les inclusions suivantes :*

$$\lambda \Longrightarrow st \Longrightarrow m$$

$$\lambda \Longrightarrow mr \Longrightarrow m$$

De plus, ces inclusions sont toutes distinctes dans le sens où aucune de ces relations d'ordre n'est équivalente à une autre. Il n'y a pas d'inclusion entre ordres st et mr.

Preuve
Nous supposons que deux systèmes de durées de vie T_1, T_2 vérifient :

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \quad \forall t \geq 0$$

Puisque $R(t) = exp(-\int_0^t \lambda(u)du)$, donc $R_1(t) \geq R_2(t)$, d'où $T_1 \geq_{st} T_2$, d'autre part $R_1(t) \geq R_2(t) \implies \int_0^\infty R_1(t)dt \geq \int_0^\infty R_2(t)dt$ d'où : $T_1 \geq_m T_2$. Pour la relation mr, nous pouvons exprimer $m(t)$ à partir de $\lambda(t)$:

$$\begin{aligned} m(t) &= E[T > t + x \backslash T > t] = \frac{1}{R(t)} \int_t^{+\infty} R(x)dx, pour\ tout\ x \geq 0 \\ &= \frac{R(t+x)}{R(t)} \\ &= exp\left\{-\int_t^{t+x} \lambda(u)du\right\} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure : $m_1(t) \geq m_2(t)$ d'où : $T_1 \geq_{mr} T_2$.

Si $T_1 \geq_{mr} T_2$, alors dans la définition, $t = 0$ donne le même ordre pour la relation m.

Les deux ordres $\leq_{st}$ et $\leq_\lambda$ permettent, dans le cas de taux de panne bornés, de contrôler la fiabilité d'un système en utilisant les lois exponentielles. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de cette relation $T_1 \geq_\lambda T_2 \implies T_1 \geq_{st} T_2$. ■

Proposition 2.2.2 *Si les durées de vie T_1 et T_2 sont classées selon l'ordre en moyenne résiduelle ($T_1 \leq_{mr} T_2$) et si le rapport $\frac{m_1(t)}{m_2(t)}$ est une fonction croissante de t alors elles sont dans le même ordre pour la vitesse de défaillance : $T_1 \leq_\lambda T_2$.*

Preuve
Premièrement nous écrivons la fonction $\lambda(t)$ en fonction de $m(t)$.

On a :

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \int_t^\infty R(x)dx$$

donc

$$m(t)R(t) = \int_t^\infty R(x)dx$$

par dérivation, on obtient :

$$m'(t)R(t) + m(t)R'(t) = -R(t)$$

et comme $\lambda(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}$, alors : $\lambda(t) = \frac{1+m'(t)}{m(t)}$

Le fait de supposer, à la fois, $\frac{m_1(t)}{m_2(t)}$ croissante, $m_1(t) \leq m_2(t)$ implique l'inégalité suivante, dans le cas des fonctions de répartition dérivables :

$$\frac{1+m_1'(t)}{m_1'(t)} \geq \frac{1+m_2'(t)}{m_2'(t)}$$

d'où $T_1 \leq_\lambda T_2$. ■

Lemme 2.2.1 *Pour $n > 1$, soit $\psi : (0, \infty)^n \to (0, \infty)$ une application symétrique et continûment différentiable, soit k un entier, $1 \leq k \leq n$. Supposons que, pour un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$ avec*
$x_p = \min x_i$, $x_q = \max x_i$, nous avons :

$$x_p < x_q \Rightarrow \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_p}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(X)} < \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_q}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(X)} \tag{2.7}$$

alors pour un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$, nous avons :

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \psi(m_k(X), ..., m_k(X)) \tag{2.8}$$

Preuve

Pour $k = 1$, alors $\frac{\partial S_1}{\partial x_i}(X) = 1, \forall i = 1, ..., n$; pour montrer

$$\left[x_p < x_q \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x_p}(x) < \frac{\partial \psi}{\partial x_q}(x)\right] \Rightarrow \psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \psi(m_1(X), ..., m_1(X)),$$

où $m_1(X) = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$, on aura besoin des propriétés suivantes :

1)Soient $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, où $X, Y \in (0, \infty)^n$, on dit que le vecteur X majore Y, on écrit

$X > Y$, si $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \geq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, k = 1, ..., n-1$

et $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$,tel que $x_{[i]}$ designe la $i^{éme}$ plus grand élément de X.

2)Une application réelle f définie sur $A \subset R^n$ est dite Schur-convexe si

$$X > Y \;\; sur \;\; A \Rightarrow f(X) \geq f(Y)$$

3)Soit $f : A \subset R^n \to R$ une application continûment différentiable, f est Schur-convexe si et seulement si

$$\begin{cases} f \text{ est symétrique sur } A \\ (x_i - x_j)(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial xj}) \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n \end{cases}$$

On peut vérifie facilement que si $yi = m_1(X)\ \forall\ i = 1, ..., n$ alors $X > Y$, de plus on a la fonction $\psi : (0, \infty)^n \to (0, \infty)$ est une application symétrique et continûment différentiable, donc d'après la troisième propriété la fonction ψ est Schur-convexe, la deuxième propriété implique que $\psi(X) \geq \psi(Y)$ c'est à dire $\psi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq (m_1(X), ..., m_1(X))$. Supposons que $k > 1$, pour un vecteur $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, \infty)^n$ considérons : $a = minx_i$, $b = maxx_i$et $\mathbf{m} = (m, ..., m)$, tel que :$m = m_k(X)$

Si $a = b \Rightarrow \psi(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi(m_k(X), ..., m_k(X))$.

Maintenant supposons que: $a < b$ donc $m \in (a, b)$, soit $K \subset (0, \infty)^n$ un compact tel que :

$K = \{t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in [a, b]^n\ / m_k(t) = m\}$

Il est claire que, X, m$\in$ K, d'après le théorème de Weierstrass l'application continue atteint une valeur minimale sur le compact K au point $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) \in K$.

Posons :$\mathbf{u} \neq \mathbf{m}$, dans ce cas, il existe $p, q \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que :

$a \leq u_p = min\ u_i < u_q = max\ u_i \leq b$ réécrit la condition $m_k(u) = m$ de la relation(1.31), c'est à dire :

$$u_p u_q S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + (u_p + u_q) S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k$$

L'équation :

$$z^2 S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + 2z S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k$$

admet une solution positive notée $z_1, a < z_1 < b$, pour $t \in [u_p, z_1)$, considérons la fonction $g(t)$ définie sur $[u_p, z_1]$ par la relation :

$$t g(t) S_{k-2}(\mathbf{u}^{p,q}) + (t + g(t)) S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q}) + S_k(\mathbf{u}^{p,q}) = \binom{n}{k} m^k$$

nous avons $g(u_p) = u_q$ et :

$$g(t) = \frac{\binom{n}{k} m^k - t S_{K-1}(\mathbf{u}^{p,q}) - S_k(\mathbf{u}^{p,q})}{t S_{K-2}(\mathbf{u}^{p,q}) - S_{k-1}(\mathbf{u}^{p,q})} \in (z_1, u_p], \forall t \in [u_p, z_1).$$

Notons par : $u(t)$ le vecteur de composants : $u_p(t) = t$, $u_q(t) = g(t)$, et $u_i(t) = u_i \ \forall\, i \in \{1, ..., n\} \backslash \{p, q\}$. nous avons $\mathbf{u}(t) \in K$ et

$$S_k(\mathbf{u}(t)) = \binom{n}{k} m^k, \forall t \in [u_p, z_1)$$

la fonction g est différentiable et décroissante et s'écrite comme suit :

$$g'(t) = -\frac{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}$$

Maintenant, nous considérons une fonction continûment différentiable :
$\varphi : [u_p, z_1) \longrightarrow, \varphi(t) = \psi\left(\mathbf{u}(t)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial \psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t)) + \frac{\partial \psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t)) g'(t) \\ &= \frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t)) \left(\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))} \right) > 0 \end{aligned}$$

d'aprés (3.8) $\varphi'(t) < 0$, d'où il existe $\zeta > 0$ tel que : $u_p + \zeta < z_1$ et $\varphi'(t) < 0$,

$\forall t \in [u_p, u_p + \zeta)$ et par conséquent : $\psi(\mathbf{u}(t)) < (u(u_p)) = \psi(\mathbf{u})$, ceci donne la contradiction ■

2.3 Condition suffisante pour la comparaison stochastique

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour la comparaison stochastique entre les mêmes statistiques d'ordres de deux séquences de variables aléatoires indépendantes.

Théorème 2.3.1 *Soient $U_1, U_2, ..., U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées d'une fonction de distribution commune F, ayant un taux de hasard positif et non décroissant $h(x) = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$, $x \in (0, \infty)$. Pour un vecteur $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que : $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, ..., n$ et $k \in \{1, ..., n\}$, $m_k(\lambda) = \left(\binom{n}{k}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in J} \lambda_i \right)^{\frac{1}{K}}$ est la $k^{ième}$ moyenne symétrique de λ , définissons $X_i = \frac{U_i}{\lambda_i}$ et $Y_i = \frac{U_i}{m_k(\lambda)}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$, notons par $X_{k:n}$ (resp.$Y_{k:n}$)*

la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $(X_1, ..., X_n)$ (resp.$(Y_1, ..., Y_n)$). Si $\frac{F(x)}{x(1-F(x))}$ est une fonction décroissante sur $(0, \infty)$ alors : $X_{k:n} \geq Y_{k:n}$.

Preuve Soient un système k-sur-n :F et $X_{k:n}$ sa durée de vie, nous avons :

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(t) &= P(X_i \leq t) \\
&= P(\frac{U_i}{\lambda_i} \leq t) \\
&= P(U_i \leq \lambda_i t) \\
&= F_{U_i}(\lambda_i t) \\
&\Longrightarrow F_{X_i}(t) = F(\lambda_i t),\ i = 1, ..., n \\
F_{Y_i}(t) &= F(m_k(\lambda)t).
\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, nous trouvons que :$\overline{F}_{X_{1:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t)$ et $\overline{F}_{Y_{1:n}}(t) = \left[\overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right)\right]^n$, et comme$\left[\log \overline{F}\right]' = -h$ est une fonction croissante, alors $\log \overline{F}$ est convexe. Or on sait que si f est dérivable sur un intervalle I, f est convexe si est seulement si f'est croissante. D'aprés l'inégalité de Jensen, nous avons : $\overline{F}_{X_{1:n}}(t) \geq \overline{F}_{Y_{1:n}}(t)$, $\forall\ t \geq 0$, en effet :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{Y_{1:n}}(t) &= \left[\overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right)\right]^n \\
\log \overline{F}_{Y_{1:n}}(t) &= n \log \overline{F}\left(\frac{\lambda_1 + ... + \lambda_n}{n} t\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log \overline{F}(\lambda_i t) = \log \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) = \log \overline{F}_{X_{1:n}}(t) \\
&\Longrightarrow \overline{F}_{Y_{1:n}}(t) \leq \overline{F}_{X_{1:n}}(t) \text{ c'est-à-dire : } X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n}.
\end{aligned}$$

supposons que : $k > 1$, la fonction de survie de $X_{k:n}$ est :

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_{k:n}}(t) &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|J|=j}\left(\prod_{i\in J}F(\lambda_i t)\right)\left(\prod_{i'\notin J}\overline{F}(\lambda_{i'} t)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|J|=j}\left(\prod_{i\in J}F(\lambda_i t)\right)\frac{\prod\limits_{i'\notin J}\overline{F}(\lambda_{i'} t)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)}\\
&= \prod_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|J|=j}\left(\prod_{i\in J}F(\lambda_i t)\right)\frac{\prod\limits_{i'\notin J}\overline{F}(\lambda_{i'} t)}{\prod\limits_{i\in J}\overline{F}(\lambda_i t)\prod\limits_{i'\notin J}\overline{F}(\lambda_{i'} t)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad \overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\overline{F}(\lambda_i t)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{|J|=j}\prod_{i\in J}\frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)}\right)$$

Considérons la fonction : $y : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $y(x) = \frac{F(x)}{\overline{F}(x)}$ et

$\Psi : (0,\infty)^n \to (0,1)$,

$$\Psi(x_1,...,x_n) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} S_j((y(x_1),...,y(x_n))}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+y(x_i))}$$

Pour $t > 0$, nous avons : $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \Psi(\lambda_1 t,...,\lambda_n t)$ et $\overline{F}_{Y_{k:n}}(t) = \Psi(\underbrace{m_k(\lambda)t,...,m_k(\lambda)t}_{n\ fois})$.

Pour obtenir : $X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n}$, il suffit de montrer la propriété de l'application symétrique et continûment différentiable Ψ , c'est à dire :

$$\Psi\,(x_1,x_2,...,x_n) \geq \Psi(\underbrace{m_k(X),...,m_k(X)}_{n\ fois}), \forall X = (x_1,x_2,...,x_n) \in (0,\infty)^n.$$

Pour $X=(x_1,x_2,...,x_n)\in(0,\infty)^n$, nous utilisons la notation suivante : $y=y\left(X\right)=(y(x_1),...,y(x_n))$ et $y_i=y(x_i)$. Les dérivées partielles de Ψ sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x_s}\left(X\right) &= \frac{y'(x_s)\prod_{i\notin s}(1+y_i)\left\{(1+y_s)\sum_{j=0}^{k-1}S_{j-1}\left(Y^s\right)-\left[1+\sum\left(y_sS_{j-1}\left(Y^s\right)+S_j\left(Y^s\right)\right)\right]\right\}}{\prod_{i=1}^{n}(1+y(x_i))^2}\\ &= \frac{-y'(x_s)}{1+y(x_s)}\frac{S_{k-1}\left(Y^s\right)}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)}\\ &= -h\left(x_s\right)\frac{S_{k-1}\left(Y^s\right)}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)},\ s=1,...,n. \end{aligned}\tag{2.9}$$

Notons par : $x_p=\min x_i$, et $x_q=\max x_i$, et supposons que $k<n$. En utilisant la relation (2.9), nous avons :

$$\begin{aligned}\left[\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x_p}}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}}-\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x_q}}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}}\right](X) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)}\left[h\left(x_q\right)\frac{S_{k-1}\left(Y^q\right)}{S_{k-1}\left(x^q\right)}-h\left(x_p\right)\frac{S_{k-1}\left(Y^p\right)}{S_{k-1}\left(x^p\right)}\right]\\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)}h\left(x_q\right)\frac{y_pS_{k-2}\left(Y^{p,q}\right)+S_{k-1}\left(Y^{p,q}\right)}{x_pS_{k-2}\left(x^{p,q}\right)+S_{k-1}\left(X^{p,q}\right)}\\ &\quad-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)}h\left(x_p\right)\frac{y_qS_{k-2}\left(Y^{p,q}\right)+S_{k-1}\left(Y^{p,q}\right)}{x_qS_{k-2}\left(x^{p,q}\right)+S_{k-1}\left(X^{p,q}\right)}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Comme la fonction : $x\longrightarrow\frac{F(x)}{x(1-F(x))}$ est croissante sur $(0,\infty)$, nous avons :

$$\frac{y_p}{x_p}<\frac{y_q}{x_q}$$

(car $x_p<x_q\Longrightarrow\frac{F(x_p)}{x_p(1-F(x_p))}<\frac{F(x_q)}{x_q(1-F(x_q))}\Longrightarrow\frac{y_p}{x_p}<\frac{y_q}{x_q}$) et : $\frac{y_p}{x_p}<\frac{y_i}{xi}<\frac{y_q}{x_q}$, $\forall\ i\in\{1,...,n\}\setminus\{p,q\}$. Nous pouvons appliquer le corollaire (1) pour $m=n-2$, $r=k-2$, $\alpha=\frac{y_p}{x_p}$, $\beta=\frac{y_q}{x_q}$ donc :

$$\frac{y_p}{x_p}\frac{S_{k-2}\left(Y^{p,q}\right)}{S_{k-2}\left(x^{p,q}\right)}\leq\frac{S_{k-1}\left(Y^{p,q}\right)}{S_{k-1}\left(X^{p,q}\right)}\leq\frac{y_q}{x_q}\frac{S_{k-2}\left(Y^{p,q}\right)}{S_{k-2}\left(x^{p,q}\right)}$$

D'aprés l'inégalité :

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \text{ et } \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

On a :

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c+e}{d+f}$$

tel que : a, b, c, d, e, f sont positifs, alors :

$$\frac{y_p S_{k-2}\left(Y^{p,q}\right) + S_{k-1}\left(Y^{p,q}\right)}{x_p S_{k-2}\left(x^{p,q}\right) + S_{k-1}\left(X^{p,q}\right)} < \frac{y_q S_{k-2}\left(Y^{p,q}\right) + S_{k-1}\left(Y^{p,q}\right)}{x_q S_{k-2}\left(x^{p,q}\right) + S_{k-1}\left(X^{p,q}\right)}$$

mais h est positive non-décroissante donc : $0 < h\left(x_q\right) < h\left(x_p\right)$,par conséquent :

$$\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(X)} < \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(X)}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(X)}$$

Nous déduisons, d'aprés le lemme (1) :

$$\Psi\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \geq \Psi(m_k(X), ..., m_k(X))$$

c'est à dire :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \Psi(\lambda_1 t, ..., \lambda_n t) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t) = \Psi(m_k(\lambda)t, ..., m_k(\lambda)t)$$

c'est à dire :

$$X_{k:n} \geq Y_{k:n}$$

Pour : $k = n$, on ne peut pas utiliser l'équation (2.10), mais dans ce cas, on utilise (2.9) :

$$\left[\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_p}(\mathbf{u}(t))} - \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}{\frac{\partial S_k}{\partial x_q}(\mathbf{u}(t))}\right](X) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+y_i)} \prod_{i \neq p,q} \left[h(x_q)\frac{y_p}{x_p} - h(x_p)\frac{y_q}{x_q}\right] < 0 \ \blacksquare$$

2.4 Condition nécessaire et suffisante pour la comparaison stochastique

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour la comparaison stochastique entre des durées de vie de deux systèmes k - sur - n : F.

Théorème 2.4.1 *Soient $(X_i), i = 1, ..., n$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètres $(\lambda_i), i = 1, ..., n$ $\lambda_i > 0$, et $(Y_i), i = 1, ..., n$ une suite de variables aléatoires iid qui suivent la loi exponentielle de paramètre commun $\mu > 0$. Pour $k \in \{1, ..., n,\}$, notons par : $X_{k:n}$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $X_1, ..., X_n$ et $Y_{k:n}$ la $k^{ième}$ statistique d'ordre de $Y_1, ..., Y_n$ alors*

$$X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n} \text{ si et seulement si } \mu \geq \left[\binom{n}{k}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in j} \lambda_i \right]^{\frac{1}{k}} \tag{2.11}$$

Preuve

Nous notons par $F(x) = 1 - e^{-x}$, $x \geq 0$, la fonction de distribution exponentielle de paramètre 1. Supposons que $X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n}$: c'est à dire $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t)$, la fonction de survie de la variable aléatoire $X_{k:n}$ s'écrite :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - e^{-t\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \sum_{j=k}^{n} S_j(e^{\lambda_1 t} - 1, ..., e^{\lambda_n t} - 1)$$

en effet :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{|J|=j} \prod_{i \in j} \frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)} \right) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=0}^{k-1} S_j(y(x_1), ..., y(x_n))$$

tel que :

$$y(x_i) = \frac{F(\lambda_i t)}{\overline{F}(\lambda_i t)}.$$

où :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \overline{F}(\lambda_i t) \sum_{j=k}^{n} S_j(y(x_1), ..., y(x_n))$$

Si nous prenons :$\overline{F}_{X_{k:n}}(x_i t) = e^{-\lambda_i t}$ et $y(x_i) = e^{-\lambda_i t} - 1$

En utilisant le développement de Taylor au voisinage 0, nous obtenons :

$$\overline{F}_{X_{k:n}}(t) = 1 - S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) t^k + 0(t^k), t \to 0$$

et

$$\begin{aligned}\overline{F}_{Y_{k:n}}(t) &= 1 - e^{-n\mu t}\sum_{j=k}^{n} S_j(e^{\mu t}-1, ..., e^{\mu t}-1)\\ &= 1 - S_k(\mu t, ..., \mu t)t^k + 0(t^k)\\ &= 1 - \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mu^k t^k + 0(t^k), t \to 0\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \mu^k \Rightarrow \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} S_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq \mu^k$$

c'est à dire :

$$\mu \geq \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{|J|=k} \prod_{i \in j} \lambda_i \right]^{\frac{1}{k}}$$

Réciproquement : supposons que $\mu \geq m_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\overline{F}_{Y_{k:n}}(t)$ est décroissante en μ, il suffit de montrer $\overline{F}_{X_{k:n}}(t) \geq \overline{F}_{Y_{k:n}}(t)$ $\forall t > 0$. Pour $\mu = m_k(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la fonction de distribution exponentielle F a un taux de panne constant $h(x) = 1$, $\forall x \geq 0$, d'ailleurs la fonction : $\frac{F(x)}{x(1-F(x))} = \frac{e^x - 1}{xe^x}$ est croissante sur $(0, \infty)$, donc la distribution exponentielle F satisfait les hypothèses du théorème(1), il est claire que

$$F_{X_i}(t) = F(\lambda_i t), t \geq 0, i = 1, ..., n$$

De même nous avons $F_{Y_i}(t) = F(\mu t)$, puis en appliquant le théorème (1), nous obtenons la conclusion

$$X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n} .$$

■

Chapitre 3

Application aux systèmes $k - sur - n$

Le but de ce chapitre est de modéliser les durées de bon fonctionnement de systèmes non réparables. condition , nous avons vu que la loi exponentielle possède la propriété d'absence de mémoire ce qui fait qu'on l'utilise est le plus simple pour trouver les résultats.

3.1 Simulations

Dans ce qui suit, on va illustrer ces résultats par des simulations et cela pour différentes valeurs de n,k, et λ_i (dans le logiciel *MATLAB)*.

Système 6-sur-10 : F

Dans ce système en fait un comparaison enter les fiabilités $R_1^*(t)$ avec $\lambda = 0.32$, $R_2^*(t)$ avec$\lambda = 0.62$, $R_3^*(t)$ avec $\lambda = 0.87$,où ses composants sont identiques.Dans ce cas la formule de la fiabilité est :

$$R^*(t) = \sum_{i=0}^{5} \begin{pmatrix} 10 \\ i \end{pmatrix} R_1^{10-i}(t)(1 - R_1(t))^i$$

et l'algorithme qui se trouve les valeurs de $R_1^*(t)$ avec $\lambda = 0,32$:

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.32 0.32 0.32 0.32 0.32];
Fn=1-exp(-lb*t);
Fbn=exp(-lb*t);
for j=0:5
    if j==0
        R=(exp(-0.32*t))^10;
    else
       C(j)= factorial(10)/(factorial(j)*factorial(10-j));

        R(j)=C(j)*(Fbn(j)^(10-j))*(Fn(j)^j);
    end
end
R21(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

le tableau des résultats :

t	R_1^*	R_2^*	R_3^*
1	0.9285	0.7102	0.4149
2	0.6865	0.1327	0.0192
3	0.3246	0.0116	0.0004
4	0.1152	0.0007	0.0000
5	0.0341	0.0000	0.0000
6	0.0089	0.0000	0.0000
7	0.0022	0.0000	0.0000

Tableau 3.1

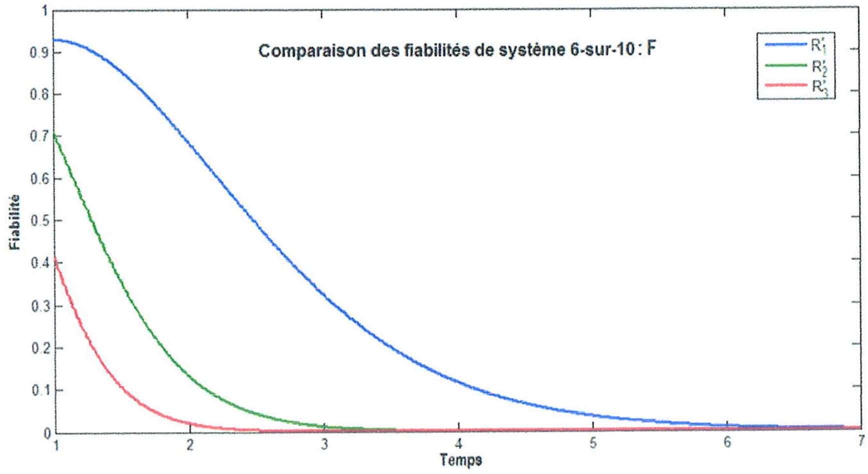

Figure 3.1

Commentaire :

$R(t)$ est décroissant, et le pente de chaque courbe reste toujours chute plus rapidement vers zéro. et $R(t)$ si $\lambda = 0.32$ est la meilleure parmi toutes les fonctions $R(t)$ proposées (calculées pour $\lambda = 0.62$ et $\lambda = 0.87$). Donc on confirme la fiabilité du système est plus fiable si on prend la valeur du λ est petite.

Système 2-sur-3 : F

La formule de la fiabilité de ce système dans le cas identique est :

$$R^*(t) = \sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i} R_1^{3-i}(t)(1 - R_1(t))^i$$

et l'algorithme :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.6];
Fn=1-exp(-lb*t);
Fbn=exp(-lb*t);
for j=0:1
    if j==0
        R=(exp(-0.6*t))^3;
    else
       C(j)= factorial(3)/(factorial(j)*factorial(3-j));

        R(j)=C(j)*(Fbn(j)^(3-j))*(Fn(j)^j);
    end
end
R2(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

Et la fiabilité de système 2-sur-3 : F dans le cas non identique est :

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{C_3^i}\prod_{m=1}^{3} R_m^{\delta_{m,j}}(t)\,(1-R_m(t))^{\overline{\delta}_{m,j}} \\ &= R_1R_2R_3 + (1-R_1)R_2R_3 + R_1(1-R_2)R_3 + R_1R_2(1-R_3) \end{aligned}$$

et l'algorithme :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.8 0.3 0.7];

F=1-exp(-lb*t);
 Fb=exp(-lb*t);
ii=2;
             Pf=1;
        Pfb=prod(Fb);
         R(1)=Pf*Pfb;
for j=0:1
    if j==0
        Pf=1;
    else
        Pf=F(j);
    end
    for J=j+1:2
            Pf1=F(J)*Pf;
            if j==0;
           CC=find(Fb~=Fb(J));
            else
               CC= find(Fb~=Fb(J) & Fb~=Fb(j));
            end
            R(ii)= prod(Fb(CC))*Pf1;
            ii=ii+1;
    end
end
R1(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

Les résultats dans le tableau :

t	R	R*
1	0.4966	0.4077
2	0.2466	01902
3	0.1225	0.0684
4	0.0608	0.0224
5	0.0302	0.0071
6	0.0150	0.0022
7	0.0074	0.0007

Tableau 3.2

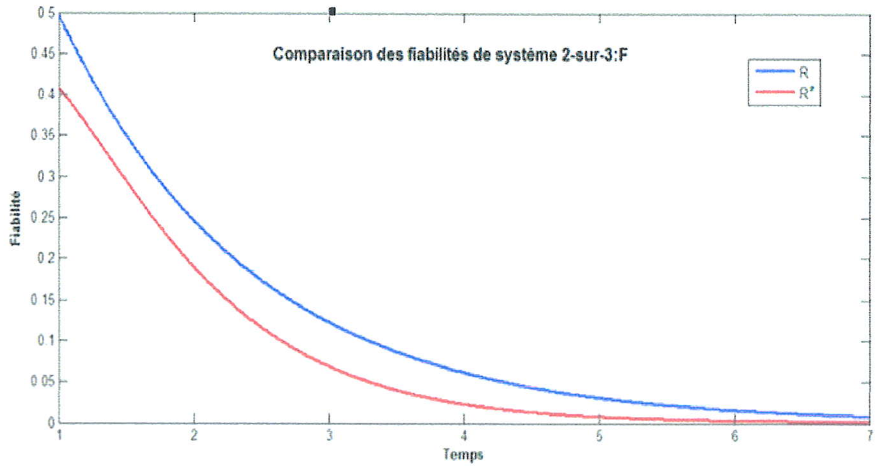

Figure 3.2

Commentaire :

$R(t)$ est d'une qualité exceptionnelle, chute assez rapidement vers zéro et $R(t)$ reste toujours une borne supérieure de $R^*(t)$.

Système 3-sur-4

La fiabilité de système 3-sur-4 dans le cas où ses composants sont IID est :

$$R^*(t) = \sum_{i=0}^{2} \left(\begin{array}{c} 4 \\ i \end{array} \right) R_1^{4-i}(t)(1 - R_1(t))^i$$

et l'algorithme comme suit :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.5 0.5];
Fn=1-exp(-lb*t);
Fbn=exp(-lb*t);
for j=0:2
    if j==0
        R=(exp(-0.5*t))^4;
    else
       C(j)= factorial(4)/(factorial(j)*factorial(4-j));

        R(j)=C(j)*(Fbn(j)^(4-j))*(Fn(j)^j);
    end
end
R2(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

Et la fiabilité de ce système dans le cas non identique est :

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{C_4^i}\prod_{m=1}^{4} R_m^{\delta_{m,j}}(t)\,(1-R_m(t))^{\overline{\delta}_{m,j}} \\
&= R_1R_2R_3R_4 + R_1R_2R_3(1-R_4) + R_1R_2R_4(1-R_3) + R_1R_3R_4(1-R_2) \\
&\quad + R_2R_3R_4(1-R_1) + R_1R_2(1-R_3)(1-R_4) + R_1R_3(1-R_2)(1-R_4) \\
&\quad + R_1R_4(1-R_2)(1-R_3) + R_2R_3(1-R_1)(1-R_4) \\
&\quad + R_2R_4(1-R_1)(1-R_3) + R_3R_4(1-R_1)(1-R_2)
\end{aligned}
$$

et on a l'algorithme :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.1 0.5 0.7 0.9];
F=1-exp(-lb*t);
 Fb=exp(-lb*t);
ii=2;
             Pf=1;
        Pfb=prod(Fb);
         R(1)=Pf*Pfb;
for j=0:3
    if j==0
        Pf=1;
    else
        Pf=F(j);
    end
    for J=j+1:4
            Pf1=F(J)*Pf;
            if j==0;
           CC=find(Fb~=Fb(J));
            else
               CC= find(Fb~=Fb(J) & Fb~=Fb(j));
            end
            R(ii)= prod(Fb(CC))*Pf1;
            ii=ii+1;
    end
end
R1(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

Les résultats dans le tableau suivant :

t	R	R*
1	0.8465	0.6929
2	0.5227	0.4503
3	0.2819	0.2148
4	0.1452	0.0907
5	0.0740	0.0361
6	0.0379	0.0139
7	0.0196	0.0053

Tableau 3.3

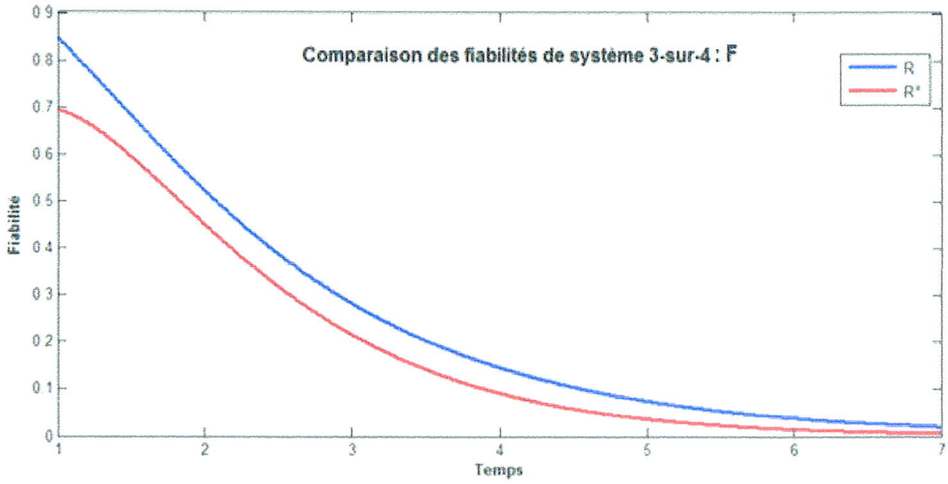

Figure 3.3

Commentaire :

Dans ce système on a même remarque que précédemment, tel que $R^*(t)$ reste une borne inférieure de $R(t)$ d'une trés bonne qualité.

Système 3-sur-5 : F

On a la formule de fiabilité de système 3-sur-5 où ses composants sont identiques est :

$$R^*(t) = \sum_{i=0}^{2} \binom{5}{i} R_1^{5-i}(t)(1 - R_1(t))^i$$

et l'algorithme :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.8 0.8];
Fn=1-exp(-lb*t);
Fbn=exp(-lb*t);
for j=0:2
    if j==0
        R=(exp(-0.8*t))^5;
    else
       C(j)= factorial(5)/(factorial(j)*factorial(5-j));

        R(j)=C(j)*(Fbn(j)^(5-j))*(Fn(j)^j);
    end
end
R2(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

La fiabilité de système 3-sur-5 : F où ses composants sont non identiques est :

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{C_5^i}\prod_{m=1}^{5} R_m^{\delta_{m,j}}(t)\,(1-R_m(t))^{\overline{\delta}_{m,j}} \\
&= R_1R_2R_3R_4R_5 + R_1R_2R_3R_4(1-R_5) + R_1R_2R_3R_5(1-R_4) \\
&\quad +R_1R_2R_4R_5(1-R_3) + R_1R_3R_4R_5(1-R_2) + R_2R_3R_4R_5(1-R_1) \\
&\quad +R_1R_2R_3(1-R_4)(1-R_5) + R_1R_2R_4(1-R_3)(1-R_5) \\
&\quad +R_1R_3R_4(1-R_2)(1-R_5) + R_2R_3R_4(1-R_1)(1-R_5) \\
&\quad +R_1R_2R_5(1-R_3)(1-R_4) + R_1R_3R_5(1-R_2)(1-R_4) \\
&\quad +R_2R_3R_5(1-R_1)(1-R_4) + R_1R_4R_5(1-R_2)(1-R_3) \\
&\quad +R_2R_4R_5(1-R_1)(1-R_3) + R_3R_4R_5(1-R_1)(1-R_2)
\end{aligned}
$$

et donc l'algorithme est :

```
clear all
clc
i=1;
for t=1:7
lb=[0.25 0.46 0.8 0.03 0.4];
F=1-exp(-lb*t);
Fb=exp(-lb*t);
ii=2;
 Pf=1;
 Pfb=prod(Fb);
 R(1)=Pf*Pfb;
for j=0:4
    if j==0
        Pf=1;
    else
        Pf=F(j);
    end
    for J=j+1:5
            Pf1=F(J)*Pf;
            if j==0;
           CC=find(Fb~=Fb(J));
            else
               CC= find(Fb~=Fb(J) & Fb~=Fb(j));
            end
            R(ii)= prod(Fb(CC))*Pf1;
            ii=ii+1;
    end
end
R1(i)=sum(R);
T(i)=t;
i=i+1;
end
```

on a le tableau des résultats :

t	R	R*
1	0.8556	0.3873
2	0.5338	0.0591
3	0.2854	0.0065
4	0.1428	0.0006
5	0.0697	0.0001
6	0.0337	0.0000
7	0.0163	0.0000

Tableau 3.4

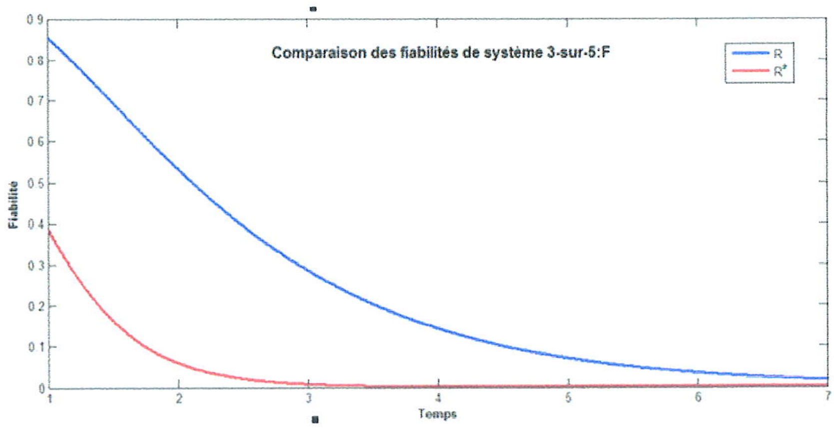

Figure 3.4

Commentaire général :

On confirme aprés les graphes $R^*(t)$ reste toujours une borne inférieure de $R(t)$, c'est-à-dire la fiabilité d'un système $k-sur-n$ où ses composants sont indépendants non identiques est meilleure par rapport à la fiabilité d'un système $k-sur-n$ où ses composants sont indépendants non identiquement distribuées.

Conclusion

Ce travail a été consacré à un étude comparative des fiabilités des systèmes à multi-états non réparables et la majorité de cette étude porte sur les systèmes $k - sur - n$ dont les composants sont indépendants non identiquement et indépendants identiquement distribuées. L'idée est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour établir cette comparaison stochastique. Les résultats établis dans notre travail sont basés essentiellement sur la formule de fiabilité. Notre contribution a été l'établissement d'une condition nécessaire pour l'existence d'un ordre stochastique entre la durée de vie du système indépendant identique et le même système dans le cas indépendant mais non identique. En outre, des simulations ont été comparées avec celles du système $k - sur - n : F$ on a trouvé que le système $k - sur - n : F$ dans le cas non identique étant plus fiable que le système $k - sur - n : F$ dans le cas identique.

Résumé

"La fiabilité" est très importante dans les domaines scientifiques, et surtout pour l'analyse des systèmes. Dans Notre travail, nous avons comparé la fiabilité du système-k-sur-n dans le cas indépendant non identique à son équivalent dans le cas indépendant identique d'après une condition nécessaire et suffisante.

Mots Clés : Fiabilité, Systèmes non réparables, Comparaison Stochastique, Système k - sur - n.

Bibliographie

[1] **A.Aissani**. Modèle Stochastique de la Théorie de Fiabilité, Office des publications universitaire 11-1992.

[2] **J.L.Bon**. Fiabilité des systèmes - Méthodes Mathématiques, Masson, Paris, 1995.

[3] **J.L.Bon and E.Paltanea**. Comparison of Order Statistics in a Random Sequence to the Same Statistics with IID Variables, Academic .

[4] **JP.Chabert**, Equations Algébriques et Fonctions Symétriques, p.1-36.

[5] **Christiane Cocozza-Thivent**. Processus Stochastique et Fiabilité, Springer, 1997.

[6] **E.L.Lehmann**. Ordered Families of Distributions, The Annals of Mathematical Statistics 26, 399–419, 1955.

[7] **Macdonald, I.G.** : Symmetric Functions And Hall polynomials, Clarendon Press, Second edition, Oxford (1995).

[8] **A.Muller and D.Stoyan**. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks, New York, NY, 2002.

[9] **A. Myers**. Complex System Reliability : Multichannel Systems with Imperfect Fault Coverage(Springer, London, 2010).

[10] **T.Nakagawa**. Maintenance Theory of Reliability (Springer, London, 2005).

[11] **P. Pukite, J. Pukite**. Modeling for Reliability Analysis (IEEE, New York, 1998).

[12] **E.M. Scheuer**, Reliability of an m-out-of-n system when component failure induces higher failure rates in survivors. IEEE Trans. Reliab. 37(1), 73–74 (1988).

[13] **M.Shaked and J.G.Shanthikumar**. Stochastic Orders, Springer, 2007.

[14] **B.Ycart**. Notion de Fiabilité et Files d'Attente, Centre de publication universitaire,Tunis,2004.

ملخص:

الموثوقية هي علم مهم جدا في ميادين المعاريف العلمية، وخاصة في تحليل و دراسة الأنظمة و الأجهزة. في هذا العمل قدمنا مقارنة لموثوقية النظام ك- من بين- ن دي المكونات المستقلة والغير متطابقة، وما يعادل في حالة المكونات المستقلة و المتطابقة ،انطلاقا من الشرط الازم والكافي.

كلمات المفاتيح:
الموثوقية ، النظام العاطل، المقارنة العشوائية، نظام ك- من بين- ن.

Résumé :

La fiabilité est une science très importante dans les domaines scientifiques, et surtout pour l'analyse des systèmes. Dans Notre travail, nous avons comparé la fiabilité du système-k-sur-n dans le cas indépendant non identique à son équivalent dans le cas indépendant identique d'après une condition nécessaire et suffisante.

Mots Clés: *Fiabilité, Systèmes non réparables, Comparaison Stochastique, Système k - sur – n.*

Abstract:

Reliability is a very important science in science, and especially for systems analysis. In our work, we compared the reliability of k-out-of-n system in the independent non-identical case to its equivalent in the iid case. After a necessary and sufficient condition.

Keywords: *Reliability, out of work system, Stochastic Comparison, k-out-of-n system.*