République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA-JIJEL

N^{0}d'ordre :..................

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat de Troisième Cycle

Spécialité

Analyse fonctionnelle

Par

Bouternikh Salih

Thème

Étude des propriétés de la solution méromorphe de certaines équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dans un corps ultramétrique

Soutenue publiquement le 04/03/2023, devant la commission d'examen :

Président :	A. Bouchair	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Directeur :	T. Zerzaihi	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
Examinateurs :	N. Touafek	Prof	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)
	M-S. Abdelouahab	Prof	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
	S. Kaouache	M.C.A	Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf Mila
	R. Belhadef	M.C.A	Univ. Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel)

Remerciements

Je ne peux commencer sans dire Merci à mon Dieu qui m'a donné la volonté, la santé et le courage me permettant de mener mon travail jusqu'au bout de cette thèse.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à mon Directeur de thèse, le Professeur **Zerzaihi Tahar**. Tout au long de ce travail, il a su m'apporter un soutien constant, une disponibilité, une écoute, une confiance et des conseils précieux et avisés à la hauteur de ses compétences et de ses réelles qualités humaines. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Je souhaite remercier Monsieur **Bouchair Abderrahmane**, Professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel), qui m'a fait l'honneur par la présidence du jury.

J'exprime mes plus vifs remerciements à Monsieurs **Nouressadat Touafek**, Professeur à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel), **Mohammed-Salah Abdelouahab**, Professeur à l'université Abdelhafid Boussouf (Mila), **Smail Kaouache**, Maître de Conférences A à l'université Abdelhafid Boussouf (Mila) et **Rafik Belhadef**, Maître de Conférences A à l'université de Mohamed Seddik Ben Yahia (Jijel), pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant d'examiner et de juger cette thèse.

Bien évidemment, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans l'enseignement de qualité dont j'ai bénéficié tout au long de ma formation. J'en profite pour remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui y ont contribué. Mes remerciements seraient incomplets si je ne remercierais pas chaleureusement l'équipe des doctorants avec qui j'ai mené ces années de thèse, plus spécialement à ceux du laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) pour la très bonne ambiance qui y règne.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis qui, avec cette question récurrente, «quand est-ce que tu la soutiens cette thèse ?», bien qu'angoissante en période fréquente de doutes, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final.

J'exprime ici toute ma gratitude à ma mère (mon enseignante) qui m'a donné le goût et l'envie d'étudier. C'est avec son soutien, sa patience, en m'écoutant et sa tendresse que je trouve mon équilibre. Sans elle, rien de tout cela n'aurait été possible.

Enfin, je renouvelle toute mon amitié et ma sympathie à ceux qui m'ont accordé du temps, encouragé et m'ont témoigné un soutien constant dans ce long travail de recherche.

Table des matières

Introduction générale

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de certaines propriétés des solutions méromorphes des équations fonctionnelles dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos de caractéristique 0, lequel sera noté $\mathbb{K}$ $\big($peut être $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p\big)$. D'abord, on va étudier des équations aux différences qui découlent de l'étude analogique de l'équation différentielle de type Malmquist et qui ont les formes

$$\sum_{j=1}^{n} A_j y(x + c_j) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{p} a_i(x) y(x)^i}{\sum\limits_{i=0}^{q} b_i(x) y(x)^i}, \tag{1}$$

et

$$\prod_{j=1}^{n} A_j y(x + c_j) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{p} a_i(x) y(x)^i}{\sum\limits_{i=0}^{q} b_i(x) y(x)^i}, \tag{2}$$

où $a_i(x)$ et $b_i(x)$ sont des fonctions rationnelles telles que $a_p(x)b_q(x) \neq 0$, $A_1, \ldots, A_n$ sont des constantes de $\mathbb{K}$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ensuite, on va étudier certaines propriétés de la taille des solutions méromorphes de l'équation aux q-différences de type Schröder de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = \frac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))}, \tag{3}$$

où $q \in \mathbb{K}$, $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fractions rationnelles et P, Q sont des polynômes relativement premiers en f sur le corps des fonctions rationnelles telles que $p = \deg_f P$, $t = \deg_f Q$, $d = p - t \geq 2$.

Dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, il existe beaucoup d'articles $\big($voir par exemple [1, 3, 4, 18, 26, 29, 40, 41, 49, 51]$\big)$ axés sur les propriétés des solutions méromorphes des équations aux q-différences et aux différences où les auteurs ont obtenu de nombreux résultats significatifs sur l'ordre de croissance de leurs solutions. L'objectif principal de notre travail est de généraliser certains de leurs résultats au cas des équations aux q-différences et aux différences d'une classe plus large dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. Nous insistons particulièrement sur l'étude de la solution méromorphe transcendante en général et la solution entière transcendante en particulier. Les caractéristiques de la solution dépendent particulièrement de la nature des coefficients de ces équations qui peuvent être fractions rationnelles ou constantes.

Plus généralement, nos travaux sont en relation avec ceux effectués ces dernières années sur l'étude des solutions méromorphes des équations aux q-différences, qui ont été publiées en 2013 par N. Boudjerida, A. Boutabaa et S. Medjerab (voir [8]) dans le cas ultramétrique et par X. M. Zheng et Z. X. Chen en 2010 (voir [51]) dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, aussi en relation avec les solutions méromorphes des équations aux différences complexes, qui ont été publiée par M. J. Ablowitz, R. Halburd et B. Herbstet en 2000 (voir [1]) et par J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo et K. Tohge en 2001 (voir [29]).

La méthode la plus utilisée dans ce travail est la *Théorie de Nevanlinna ultramétrique* qui est devenue, récemment, un domaine mathématique très attractif. C'est l'une des méthodes utilisées dans les problèmes de distribution des valeurs complexes ou ultramétriques. La théorie classique de Nevanlinna a été développée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna en 1925. Puis, en 1988, H. H. Khoái et M. V. Quang ont introduit l'analogue de la théorie de Nevanlinna dans le disque unité de $\mathbb{K}$ (voir [36]). Ensuite, en 1989, A. Boutabaa a prouvé l'analogue p-adique de deux théorèmes principaux et les relations de la théorie classique de Nevanlinna dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (voir [12, 13]). En 2001, A. Boutabaa et A. Escassut ont étendu cette théorie aux fonctions dans $\mathcal{M}(D^{-}(0, R))$ (voir [15]).

Comme on a déjà signalé, il existe deux théorèmes fondamentaux qui occupent une place importante dans la théorie de Nevanlinna. Le premier théorème principal de Nevanlinna est tout simplement, une reformulation de la formule de Jensen pour les fonctions méromorphes. Le deuxième théorème principal de Nevanlinna joue un rôle majeur dans la théorie de Nevanlinna. C'est l'un des théorèmes les plus utilisés dans la théorie de distribution des valeurs. Grâce à ce théorème, la théorie de Nevanlinna devient une très importante théorie.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à quelques résultats préliminaires concernant l'analyse ultramétrique. D'abord, on va donner quelques rappels sur les corps ultramétriques et ses propriétés fondamentales analytiques et topologiques. Aussi, on va décrire les méthodes de construction du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, ainsi que l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Ensuite, on va définir le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. Puis, on va donner quelques propriétés classiques liées aux fonctions analytiques et méromorphes dans un corps complet et algébriquement clos $\mathbb{K}$ $\big($ex : $\mathbb{K} = \mathbb{C}_p\big)$ et dans un disque. Finalement, on va présenter une partie importante et connue en analyse ultramétrique par le polygone de valuation, qui joue un rôle majeur pour déterminer la distribution des zéros des fonctions analytiques, aussi pour établir l'analogue ultramétrique de la formule de Jensen.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la théorie de Nevanlinna ultramétrique. Pour cela, nous avons besoin de définir l'analogue ultramétrique de la formule de Jensen et quelques notations classique connue dans la théorie de Nevanlinna ; $N(r, f)-$la fonction de comptage des pôles de f avec leurs multiplicités, $m(r, f)-$la fonction de compensation de f et $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)-$la fonction de Nevanlinna $\big($appelé aussi la fonction caractéristique de $f\big)$. Puis, on présentera l'analogue de la théorie de Nevanlinna (deux théorèmes fondamentaux), et on donnera quelques propriétés élémentaires liées à cette théorie, lesquelles sont assez semblables à celles connues dans le cas classique. Ensuite, on donnera quelques estimations de la croissance des fonctions méromorphes, plus particulièrement, on va présenter un théorème très important qui joue un rôle majeur dans le dernier chapitre, c'est le Théorème de Valiron-Mokhon'ko ultramétrique. À la fin de ce chapitre, on va définir l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe $\rho(.)$ et on donnera quelques-unes de ses propriétés.

Enfin, Le dernier chapitre est composé de deux parties. Dans la première partie, on étudiera l'ordre de croissance des solutions méromorphes des équations aux différences de type Malmquist (1) et (2), on présentera certains résultats qui nous donnent la relation entre les degrés n, p et q des équations (1) et (2) et l'ordre de croissance de leurs solutions. Puis, on étudiera une équation plus générale que (1). Il s'agit de l'équation de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x)y(x + c_j) = \sum_{i=0}^{m} q_i(x)y^i(x), \tag{4}$$

où $c_1, \ldots, c_n$ sont des éléments de $\mathbb{N}^*$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $q_0(x), \ldots, q_m(x)$ sont des fonctions rationnelles et $m > 1$. On va donner aussi une estimation de la solution de cette équation.

On expliquera la différence entre notre solution et la solution de l'équation (4) dans le cas classique complexe. La deuxième partie est essentiellement consacrée à l'étude des solutions méromorphes des équations aux q-différences (3) de type Schröder. On donnera la taille des solutions méromorphes de ces équations et on étudiera le comportement et l'ordre de croissance de ces solutions.

Chapitre 1

Notions de base en analyse ultramétrique

Sommaire

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques propriétés et notions fondamentales sur l'analyse ultramétrique dont on aura besoin dans les prochains chapitres. Au début, on va présenter quelques rappels sur les corps ultramétriques. Puis, on construit les corps des nombres

p-adiques ($\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$) et on va donner quelques propriétés topologiques et analytiques de ces corps. Ensuite, on va donner quelques définitions et propriétés des fonctions analytiques ultramétriques (dans le corps tout entier ou dans un disque) et leurs applications aux fonctions méromorphes ultramétriques. Finalement, on va étudier le lien qui existe entre le polygone de valuation et les zéros des fonctions analytiques.

À partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera les corps des nombres complexes, réels et rationnels par $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, respectivement.

1.1 Valeurs absolues sur un corps

D'abord, on a besoin de rappeler quelques définitions basiques qui concernent des corps ultramétriques.

Définition 1.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ est une application $|.| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*

1) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$,

2) $|xy| = |x||y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}$,

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}$ $\big($inégalité triangulaire$\big)$.

On dit que la valeur absolue $|.|$ est ultramétrique $\big($ou non-archimédienne$\big)$ si en plus de ces propriétés on a

4) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.

La propriété (4) est connue comme l'inégalité triangulaire forte ; elle est plus forte que la propriété (3).

Lorsque $|x| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0\}$, on dit que la valeur absolue est triviale.

En posant pour $x, y \in \mathbb{K}$, $d(x, y) = |x - y|$, on définit une distance sur $\mathbb{K}$. Dans le cas d'une valeur absolue ultramétrique, on a $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$, pour tous x, y et $z \in \mathbb{K}$.

Lorsque $\mathbb{K}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique complet, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps ultramétrique complet.

Définition 1.1.2. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, une valuation v sur $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. *$v(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$.*
2. *$v(xy) = v(x) + v(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.*
3. *$v(x + y) \geq \min\big\{v(x), v(y)\big\}$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$.*

La proposition suivante est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une norme soit non-archimédienne.

Proposition 1.1.3. *[34, Proposition 1.14] Soit $\mathbb{K}$ un corps muni d'une valeur absolue non-triviale $|.|$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$|x + y| \leq \max\big\{|x|, |y|\big\}$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}$,*
2. *$|n| \leq 1$, pour tout entier n.*

Preuve. On voit facilement par récurrence que (1) implique (2).

Supposons (2) vérifiée. On veut prouver que pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathbb{K}$, nous avons $|x + y| \leq \max\big\{|x|, |y|\big\}$, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$|x + y|^n = |(x + y)^n| = \Big|\sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i\Big| \leq \sum_{i=0}^{n} |C_n^i||x^{n-i}||y^i| \leq \sum_{i=0}^{n} |x^{n-i}||y^i|.$$

Puisque C_n^k est un entier, on a $|C_n^k| \leq 1$, $|x|$ et $|y| \leq \max\big(|x|, |y|\big)$, on a pour $0 \leq i \leq n$, $|x|^{n-i}|y|^i \leq (\max(|x|, |y|))^n$, d'où

$$|x + y|^n \leq \sum_{i=0}^{n} \big(\max(|x|, |y|)\big)^n = (n + 1)\big(\max(|x|, |y|)\big)^n. \tag{1.1}$$

Prenant la n-ième racine sur les deux côtés de (1.1), on a $|x + y| \leq (n + 1)^{1/n} \max(|x|, |y|)$, pour tout entier positif n. Par passage à la limite, on obtient $|x + y| \leq \max\big(|x|, |y|\big)$. □

Proposition 1.1.4. *[34] Une valeur absolue $|.|$ sur un corps $\mathbb{K}$ est dite archimédienne si pour tous $x, y \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|nx| > |y|$.*

Autrement dit, $\sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty$. L'espace $\mathbb{K}$ muni de cette valeur absolue est un espace archimédien.

Définition 1.1.5. *On dit qu'un corps* $(\mathbb{K}, |.|)$ *est non-archimédien ou ultramétrique s'il vérifie les conditions équivalentes de la Proposition 1.1.3.*

Dans le cas contraire, on dit que c'est un corps archimédien.

Proposition 1.1.6. *[34, Proposition 1.15] Soient* x *et* y *deux éléments d'un corps ultramétrique* $(\mathbb{K}, |.|)$*, tels que* $|x| \neq |y|$*, alors* $|x \pm y| = \max(|x|, |y|)$*.*

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{K}$, on suppose que $|x| < |y|$, par l'inégalité triangulaire forte (ou ultramétrique), on a

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |y|,$$

d'autre part,

$$|y| = |x + y - x| \leq \max\{|x + y|, |x|\} = |x + y|.$$

Maintenant, si $|x| > |x + y|$, alors $|y| < |x|$, on a contradiction avec l'hypothèse.
De même $|x - y| = |x + (-y)| = \max(|x|, |-y|) = \max(|x|, |y|)$, lorsque $|x| \neq |y|$. □

Corollaire 1.1.7. *[45] Tous les triangles sont isocèles* $\big($*ou équilatéraux*$\big)$*.*

Dans la partie suivante, on va étudier un exemple très connu de corps ultrametrique

1.2 Le corps des nombres p-adiques

Le corps des nombres réels par complétion de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue usuelle. Nous allons construire les corps des nombres p-adiques en complétant $\mathbb{Q}$ muni de ses valeurs absolues ultramétriques.

Soit p un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7\ldots$ Considérons pour un entier $n \neq 0$, $v_p(n)$ le plus grand entier tel que $p^{v_p(n)}$ divise n, c'est-à-dire $n = p^{v_p(n)}n'$ avec $(n', p) = 1$.

On peut étendre la valuation p-adique v_p au corps $\mathbb{Q}$ de la façon suivante, si $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on pose, $v_p(x) = v_p\left(\dfrac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.2.1. *Soit* $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$*, tels que* $a = 2 + 2p^3 + p^6$*, pour* $p > 2$ *et* $b = 2p^3 + 2p^6$*, pour* $p > 2$*, d'où* $v_p(a) = 0$ *et* $v_p(b) = 3$*, alors* $v_p(x) = -3$*.*

Proposition 1.2.2. *[33, Lemme 1.4] Soient* $a, b \in \mathbb{Z}$*, la valuation* p*-adique vérifie les propriétés suivantes ;*

1) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

2) $v_p(a+b) \geq \min\big(v_p(a), v_p(b)\big)$.

Preuve. Soient a, b deux nombres entiers. On peut écrire

$$a = p^{v_p(a)} n_1 \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_1,$$
$$b = p^{v_p(b)} n_2 \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_2.$$

1) Si $a = 0$ ou $b = 0$ est trivial. On suppose que $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Donc,
$ab = p^{v_p(a)} p^{v_p(b)} n_1 n_2 = p^{v_p(a)+v_p(b)} n_1 n_2$ et p ne divise pas $n_1 n_2$, d'où, $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
2) Si $a = 0$ ou $b = 0$ est trivial. On suppose que $a, b \in \mathbb{Z}^*$, donc
$a + b = p^{v_p(a)}.n_1 + p^{v_p(b)}.n_2$, on distingue trois cas.

Si $v_p(a) < v_p(b)$, nous avons $a + b = p^{v_p(a)}(n_1 + p^{v_p(b)-v_p(a)} n_2)$,
d'où

$$v_p(a+b) \geq v_p(a) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Si $v_p(b) < v_p(a)$, nous avons $a + b = p^{v_p(b)}(p^{v_p(a)-v_p(b)} n_1 + n_2)$,
d'où

$$v_p(a+b) \geq v_p(a) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}.$$

Si $v_p(a) = v_p(b)$, on a $a+b = p^{v_p(a)}(n_1 + n_2)$, d'où $v_p(a+b) = v_p(a) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

$\square$

Remarque. *L'application* $v_p : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est une valuation de* $\mathbb{Q}$, *c'est-à-dire* v_p *satisfait aux axiomes* $1), 2)$ *et* $3)$ *de la Définition 1.1.2.*

Remarque. *Soient* a, b *deux nombres entiers. Si* $v_p(a) \neq v_p(b)$, *alors nous avons* $v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

En effet. Si $v_p(a) < v_p(b)$, on a $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, pour tous $a, b \in \mathbb{Z}^*$, c'est-à-dire $v_p(a+b) \geq v_p(a)$. Il reste à démontrer que $v_p(a) \geq v_p(a+b)$. On a

$$v_p(a) = v_p(a - b + b) \geq \min\{v_p(a+b), v_p(b)\}.$$

Si $\min\{v_p(a+b), v_p(b)\} = v_p(b)$, alors $v_p(a) \geq v_p(b)$. Contradiction avec les hypothèses, d'où $v_p(a) \geq v_p(a+b)$. Donc on a montré l'égalité.

1.2.1 Valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$

On définit une fonction $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ si $x \neq 0$, et $|0|_p = 0$ $\big($ce qui correspond à $v_p(0) = +\infty\big)$. Cette application est une valeur absolue de $\mathbb{Q}$, appelée valeur absolue p-adique.

Proposition 1.2.3. *[6, Proposition 1] L'application $|.|_p$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.*

Preuve. À partir des propriétés de v_p, on peut démontrer que $|x|_p = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. Vérifions l'inégalité triangulaire forte. Soient $x, y \in \mathbb{Q}^*$ $\big($le cas $x = 0$ ou $y = 0$ est trivial$\big)$. On pose $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ tels que a, b, c et $d \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$\begin{aligned}
v_p(x+y) &= v_p\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \\
&= v_p\left(\frac{ad+cb}{bd}\right) \\
&= v_p(ad+cb) - v_p(bd) \\
&= v_p(ad+cd) - v_p(b) - v_p(d) \\
&\geq \min\{v_p(ad), v_p(cb)\} - v_p(b) - v_p(d) \\
&= \min\{v_p(a)+v_p(d), v_p(c)+v_p(b)\} - v_p(b) - v_p(d) \\
&= \min\{v_p(a)+v_p(d)-v_p(b)-v_p(d), v_p(c)+v_p(b)-v_p(b)-v_p(d)\} \\
&= \min\{v_p(a)-v_p(b), v_p(c)-v_p(d)\} \\
&= \min\left\{v_p\left(\frac{a}{b}\right), v_p\left(\frac{c}{d}\right)\right\} \\
&= \min\{v_p(x), v_p(y)\}.
\end{aligned}$$

Donc, $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
-v_p(x+y) &\leq -\min\{v_p(x), v_p(y)\} \\
&= \max\{-v_p(x), -v_p(y)\}.
\end{aligned}$$

Supposons que $\max\{-v_p(x), -v_p(y)\} = -v_p(x)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(x)$. Donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Par conséquent, l'application $|x|_p$ est une norme ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. $\square$

Remarque. *On note que* $|.|$ *ne peut prendre qu'un ensemble "discret" de valeurs, à savoir,* $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Proposition 1.2.4. *[6, Proposition 2] Pour tout* x *non nul dans* $\mathbb{Q}$, $|x|_p$ *est égal à un sauf pour un nombre fini de valeurs de* p, *et on a* $|x|_\infty \prod |x|_p = 1$. *(Cette formule est la "formule du produit").*

Théorème 1.2.5. *(Théorème d'Ostrowski)[21, Théorème 2.2] Toute valeur absolue non triviale* $|.|$ *sur* $\mathbb{Q}$ *est équivalente soit à* $|.|_p$ *pour un nombre premier* p, *soit à la valeur absolue usuelle notée* $|.|_\infty$.

1.2.2 Construction de $\mathbb{Q}_p$

Il est clair que le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet et que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valeur absolue usuelle. La même méthode s'applique pour une norme p-adique ultramétrique $|.|_p$. La complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à cette valeur absolue $|.|_p$ nous donne un corps ultramétrique appelé corps des nombres p-adiques et se note $\mathbb{Q}_p$. Ainsi les éléments de $\mathbb{Q}_p$ sont les classes d'équivalences des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, muni de la relation suivante

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ si et seulement si } \lim_{n \to +\infty} |a_n - b_n|_p = 0.$$

Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$. Soit x un élément de $\mathbb{Q}_p$ et x_n une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$, de limite x pour la distance p-adique. On vérifie que $|x_n|_p$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, la quelle admet une limite $|x|$ indépendante de la suite (x_n). On pose alors $|x|_p = \lim |x_n|_p$ (voir [6]).

Dans la suite, on commence par définir l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$, puis on construit le corps des fractions de cet anneau pour obtenir le corps des nombres p-adiques.

Définition 1.2.6. *Soit* p *un nombre premier. Le complété* $\mathbb{Q}_p$ *de*$(\mathbb{Q}, |.|_p)$ *est appelé le corps des nombres* p-*adiques. Son anneau* $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p / |a|_p \leq 1\}$ *est l'anneau des entiers* p-*adiques.*

Proposition 1.2.7. *[34, Lemme 1.29] Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $|x|_p \leq 1$, alors pour tout entier i, il existe un entier tel que $|\alpha - x|_p \leq p^{-1}$. L'entier a peut être choisi dans l'ensemble $\alpha \in \{0, 1, 2, ..., p^i - 1\}$ et est unique s'il est choisi dans cette ensemble.*

Preuve. Soit $x = \frac{a}{b}$ où a et b sont relativement premiers $\big($ceci est noté $(a, b) = 1\big)$. Puisque $|x|_p \leq 1$, on obtient que p ne divise pas b. Donc b et p^i sont relativement premiers. Ainsi, on peut trouver des entiers m et n tel que $mb + np^i = 1$. Soit $\alpha = am$. On a

$$\begin{aligned}|\alpha - x|_p = |am - \frac{a}{b}|_p &= |\frac{a}{b}|_p |mb - 1|_p \\ &\leq |mb - 1|_p = |np^i|_p = |n|_p |p^i|_p \leq p^{-i}\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.8. *[6, Proposition 7] Tout élément de $\mathbb{Z}_p$ admet un unique développement sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n$$

avec $a_n \in \{0, ..., p - 1\}$ pour tout n. Ce développement s'appelle le développement de Hensel de x.

Proposition 1.2.9. *[34, Proposition 1.31] Si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n$ avec $a_n = 0$ pour $0 \leq n < k$ et $a_k \neq 0$, alors $|x|_p = p^{-k}$, et si $x = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n p^n$, où $a_{-m} \neq 0$, alors $|x|_p = p^m$.*

Définition 1.2.10. *Soit x un nombre p-adique. L'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}_p$ est $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p ; |x|_p = 1\} = \{\sum_{n \geq 0} a_n p^n, a_0 \neq 0\}$ et l'ensemble des éléments non inversibles dans $\mathbb{Z}_p$ est $\{x \in \mathbb{Z}_p ; |x|_p < 1\}$.*

Proposition 1.2.11. *[34, Proposition 1.37] Soit x un nombre p-adique de norme p^{-n}. Alors, on peut écrire x comme le produit $x = p^n u$, où $u \in \mathbb{Z}_p^*$.*

Proposition 1.2.12. *[2, Corollaire 1.4.4] L'anneau des entiers p-adiques est un anneau intègre.*

Preuve. On veut démontrer que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}_p$ tel que $xy = 0$, on a $x = 0$ ou $y = 0$. Soient $x, y \in \mathbb{Z}_p$, tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, d'où $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) \neq +\infty$, donc $xy \neq 0$. □

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a des propriétés topologiques importants.

Proposition 1.2.13. *[6, Proposition 10] L'anneau $\mathbb{Z}_p$ muni de la topologie associée à la distance p-adique est un ensemble compact.*

Théorème 1.2.14. *[21, Théorème 2.5] Tout élément $a \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement unique sous forme de série convergente dans $\mathbb{Q}_p$: $a = \sum_{n \geq j_0} a_n p^n$ où $j_0 = v_p(n)$ et $0 \leq a_n \leq p-1$, pour tout entier $n \geq j_0$.*

Remarques.

1. *$\mathbb{Z}_p$ est l'ensemble des nombres p-adiques dont le développement de Hensel ne contient que des puissances positives de p.*
2. *$\mathbb{Z}_p$ représente le disque unité de $\mathbb{Q}_p$ de rayon 1 et de centre 0. On l'appelle anneau des entiers p-adiques.*
3. *$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \geq 0\}$ et $\mathbb{Q}_p = \left\{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}_p \text{ et } b \neq 0\right\}$.*
4. *L'inverse de p n'est pas un entier p-adique.*
5. *$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.*

1.2.3 Propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$

Dans cette partie, on va présenter quelques propriétés topologiques importantes de $\mathbb{Q}_p$. Nous allons d'abord introduire des notations et faire une étude des propriétés des disques de $\mathbb{Q}_p$. On note $D^+(a, r)$ le disque "fermé" de centre a et rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des x dans $\mathbb{Q}_p$ tels que $|x-a|_p \leq r$, et $D^-(a, r)$ le disque "ouvert", c'est-à-dire l'ensemble des x dans $\mathbb{Q}_p$ tels que $|x-a|_p < r$, et on note $C(a, r)$ le cercle de centre a et rayon r, c'est-à-dire l'ensemble des x dans $\mathbb{Q}_p$ tels que $|x-a|_p = r$, c'est-à-dire $C(a, r) = D^+(a, r) \backslash D^-(a, r)$. La notation $D(a, r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux ensembles $D^+(a, r)$ ou $D^-(a, r)$.

Proposition 1.2.15. *[34, Proposition 2.2] le cercle $C(a, r)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve. Soit $x \in C(a, r), \epsilon < r$. Nous allons montrer que $D^-(x, \epsilon) \subset C(a, r)$. Soit $y \in D^-(x, \epsilon)$. Alors $|x-y|_p < |x-a|_p = r$, et par la propriété de triangle isocèle (la Proposition 1.1.6), on a $|y-a|_p = |x-a|_p = r$. Ce qui signifie que $y \in C(a, r)$. D'où $C(a, r)$ est un ensemble ouvert. □

C'est très forte comme propriété puisque dans $\mathbb{R}^n$ (en particulier dans $\mathbb{R}$) les sphères ne sont pas toujours des ensembles ouverts.

Proposition 1.2.16. *[25, Proposition 2.3.7] Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r, \rho \in \mathbb{R}_+$ On a les propriétés suivantes*

i) Un disque $D(a, r)$ est un ensemble ouvert et fermé à la fois.

ii) Si $b \in D(a, r)$, alors on a $D(b, r) = D(a, r)$ (tout point d'un disque est un centre de ce disque).

iii) Soient $D(a, r)$ et $D(b, \rho)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$, alors ils sont ou disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Preuve. i) On sait que tout disque ouvert $D^-(a, r)$ est un ensemble ouvert dans un espace métrique. D'autre part, pour démontrer que $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé dans $\mathbb{Q}_p$, nous allons montrer que son complémentaire dans $\mathbb{Q}_p$ est un ensemble ouvert, c'est-à-dire, on va montrer que l'ensemble L est ouvert où

$$L = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \middle| |x - a|_p \geq r \right\}.$$

Mais $L = C(a, r) \cup D$ où

$$D = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \middle| |x - a|_p > r \right\}.$$

L'ensemble D est ouvert puisque D est le complémentaire d'un ensemble fermé dans $\mathbb{Q}_p$. Par conséquence L est un ensemble ouvert $\big($puisque L, c'est l'union du complémentaire de D et le cercle $C(a, r)$ on a déjà vu ci-dessous dans la Proposition 1.2.15 que le cercle est un ensemble ouvert$\big)$. D'où, le disque ouvert $D^-(a, r)$ est un ensemble fermé dans $\mathbb{Q}_p$. Donc, on a montré que tout disque ouvert est un ensemble ouvert et fermé à la fois. Il reste de montrer que tout disque fermé est un ensemble ouvert et fermé à la fois.

Tout disque fermé est un ensemble fermé dans tout espace métrique. D'autre part, on a $D^+(a, r) = D^-(a, r) \cup C(a, r)$ et l'union de deux ensembles ouverts est ouvert, alors $D^+(a, r)$ est un ensemble ouvert.

ii) Soit $x \in D^-(b, r)$. D'après notre hypothèse, on a

$$|a - b|_p < r \text{ et } |b - x|_p < r,$$

et par l'inégalité triangulaire forte, on a

$$|a-x|_p = \big|(a-b)+(b-x)\big|_p \leq \max\left(|a-b|_p, |b-x|_p\right) < r,$$

donc $D^-(b,r) \subset D^-(a,r)$. Puisque la condition $|a-b|_p < r$ pour que b se trouve dans $D^-(a,r)$ est identique à celle pour que a se trouve dans $D^-(b,r)$, on obtient aussi $D^-(a,r) \subset D^-(b,r)$, d'où, on a $D^-(a,r) = D^-(b,r)$. De la même manier, on montre que $D^+(a,r) = D^+(b,r)$.

iii) Soient $D(a,r)$ et $D(b,\rho)$ deux disques de $\mathbb{Q}_p$. On montre que si $D(a,r) \cap D(b,\rho) \neq \phi$, alors

$$D(a,r) \subset D(b,\rho) \text{ où } D(b,\rho) \subset D(a,r).$$

Supposons que $r < \rho$, et pour $x \in D(a,r) \cap D(b,\rho)$, D'après la propriété (ii), on a $D(a,r) = D(x,r)$ et $D(b,\rho) = D(x,\rho)$, mais $D(x,r) \subset D(x,\rho)$, d'où $D(a,r) \subset D(b,\rho)$. Lorsqu'on suppose que $\rho < r$, on trouve que $D(b,\rho) \subset D(a,r)$. □

Corollaire 1.2.17. *[34, Proposition 2.6.] le cercle $C(a,r)$ est ouvert et fermé à la fois.*

Preuve. On a vu déjà dans la Proposition 1.2.15 que $C(a,r)$ est ouvert. D'autre part, nous savons aussi que $D^+(a,r)$ est fermé, et puisque $D^-(a,r)$ est ouvert, son complémentaire, $\left\{x \in \mathbb{Q}_p \big| |x-a|_p \geq r\right\}$ est fermé. Mais $C(a,r)$ est l'intersection de ces deux ensembles fermés, et en tant que tel il est fermé. Notez que la preuve qu'une sphère est fermée fonctionne dans tous les espaces métriques. □

Proposition 1.2.18. *[25, Corollaire 4.2.7] $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

1.2.4 Propriétés analytiques de $\mathbb{Q}_p$

Le corps des nombres p-adiques est analogue au corps des nombres réels sur plusieurs aspects, mais il possède des propriétés différentes de celles du corps des réels $\mathbb{R}$. Le point le plus intéressant dans cette partie est la convergence des suites et des séries dans le corps $\mathbb{Q}_p$.

Notons que $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est un espace complet, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy est convergente. On va donner un résultat qui caractérisais les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 1.2.19. *[25, Lemme 5.1.1] Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. On a $(a_n)_n$ est de Cauchy, si et seulement si elle satisfait*

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve. Supposons que $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0\,;\ |a_m - a_n|_p < \varepsilon,$$

d'où, quand $m = n + 1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\,;\ |a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon,$$

donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq 0$ on a $|a_{n+1} - a_n|_p < \varepsilon$. Pour tout $m > n > n_0$ on a

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|_p &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - \ldots + a_{n+1} - a_n|_p \\ &\leq \max\left\{|a_m - a_{m-1}|_p, \ldots, |a_{n+1} - a_n|_p\right\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, pour tout entier $k \geq n$, on a $|a_{k+1} - a_k|_p < \varepsilon$. D'où $|a_m - a_n|_p < \varepsilon$, pour tout entier $m \geq n$. Par suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. $\square$

Remarque. *Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite. On a, $(a_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$.*

Proposition 1.2.20. *[34, Ch. 3, Sec. 1] Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors, $\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_n|_p = 0$, ou bien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$; $|a_n|_p = |a_{n_0}|_p$, pour $n \geq n_0$ (la suite $(|a_n|_p)_{n \geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang n_0).*

Preuve. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$, telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ $(|a_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ puisque, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, tel que $m > n$, on a

$$0 \leq \big||a_m|_p - |a_n|_p\big| \leq |a_m - a_n|_p \longrightarrow 0,$$

donc $\left(|a_n|_p\right)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet. D'où $\left(|a_n|_p\right)_n$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p \neq 0$ et l sa limite, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p = l > 0$. Pour $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$ fixé, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $\big||a_n|_p - l\big| < \frac{l}{2}$, d'où

$$\frac{-l}{2} < |a_n|_p - l < \frac{l}{2},$$

ainsi, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq 1$, on a $|a_n|_p > \dfrac{l}{2}$. De même, d'après la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, on obtient que $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N_2$ on a $|a_n - a_m|_p < \dfrac{l}{2}$.
D'où, quand $n, m \geq \max(N_1, N_2) = n_0$, on a

$$|a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\left\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\right\} = |a_n|_p.$$

Si $n = n_0$, on obtient $|a_m|_p \leq |a_{n_0}|_p$ pour tout $m \geq n_0$. De même

$$|a_n|_p = |a_n - a_m + a_m|_p \leq \max\left\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\right\} = |a_m|_p,$$

alors $|a_{n_0}|_p \leq |a_m|_p$ pour tout $m \geq n_0$. D'où, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ on a $|a_n|_p = |a_{n_0}|_p$. Ce qui termine la démonstration. □

Maintenant, on considère une série $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ dans $\mathbb{Q}_p$. Par définition, on dit que cette série converge si la suite de ses sommes partielles, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$, converge dans $\mathbb{Q}_p$. La série $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ converge absolument dans $\mathbb{Q}_p$ si $\sum\limits_{i\geq 0} |a_i|_p$ converge (dans $\mathbb{R}$).

Proposition 1.2.21. *[34, Proposition 3.2] Si la série $\sum\limits_{i\geq 0} |a_i|_p$ converge dans $\mathbb{R}$, alors $\sum\limits_{i\geq 0} a_i$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.*

Preuve*.* Puisque $\sum\limits_{i\geq 0} |a_i|_p$ converge (dans $\mathbb{R}$), la suite de ses sommes partielles ; $\sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|_p$ est une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$), c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que pour tout n, m satisfaisant $m > n > N$, on a

$$\sum_{i=n+1}^{m} |a_i|_p < \varepsilon.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|S_m - S_n|_p = \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right|_p \leq \max_{n+1 \leq i \leq m} |a_i|_p < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $(S_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. $\square$

Proposition 1.2.22. *[34, Proposition 3.3] Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série dans $\mathbb{Q}_p$. On a, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dans ce cas, on a aussi*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n\geq 1} |a_n|_p.$$

Preuve. La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge dans $\mathbb{Q}_p$. Donc $(S_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, d'où $\lim_{n\to\infty} |S_{n+1} - S_n| = 0$. Mais, $a_n = S_n - S_{n-1}$, ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ tend vers zéro dans $\mathbb{Q}_p$. De même, supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, on a le résultat (évident). Sinon, d'après la Proposition 1.2.20, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on a $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{n_0} a_n \right|_p$. D'autre part, on a $\max_{1\leq n\leq n_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|_p\}$. D'où, on obtient

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right|_p = \left| \sum_{n=1}^{n_0} a_n \right|_p \leq \max_{1\leq n\leq n_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|_p\}.$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Bien sûr, nous avons la Proposition 1.2.22 est fausse dans $\mathbb{R}$. L'exemple le plus célèbre d'une série dans $\mathbb{R}$ dont le terme général tend vers 0, mais qui ne converge pas, est la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Il y a d'autres, plus subtils, par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log n$, et $\sum_{\text{tous premiers } p} \frac{1}{p}$.

Remarque. *L'estimation de la Proposition 1.2.22 peut être considérée comme la propriété la plus forte pour une série convergente.*

L'exemple suivant nous donne quelques cas sur la convergence des séries dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$, et la différence entre eux

Exemple 1.2.23. *1. La série de terme général* p^n *(p premier* ≥ 2*) converge trivialement dans* $\mathbb{Q}_p$*. Par définition de la valeur absolue p-adique, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$*. En effet, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p},$$

d'autre part, $\lim_{n\to+\infty} p^{n+1} = 0$ *au sens de la valeur absolue p-adique, d'où*

$$\sum_{n\geq 0} p^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{1}{1-p}.$$

Mais cette série diverge dans $\mathbb{R}$*, puisqu'il est clair d'après la condition nécessaire de la convergence, on obtient*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n| = p^n = +\infty$$

2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *diverge dans* $\mathbb{Q}_p$*. En effet*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^{v_p(x)} \neq 0,$$

car $p^{v_p(n)} \geq 1$*, mais cette série est convergente dans* $\mathbb{R}$ *d'après la règle de Leibniz.*

3. $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{p^n}$ *diverge dans* $\mathbb{Q}_p$*, puisque* $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{p^n}\right|_p = \lim_{n\to+\infty} p^n \neq 0.$

1.3 Le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Pour construire le corps $\mathbb{C}_p$, on a besoin de rappeler les définitions algébriques suivantes.

Définition 1.3.1. *On dit qu'un corps ultramétrique* $\mathbb{K}$ *est algébriquement clos si chaque polynôme* $P(x)$ *dans* $\mathbb{K}[x]$ *admet des racines dans* $\mathbb{K}$*.*

On note que $\mathbb{R}$ n'est pas algébriquement clos. En effet. Soit le polynôme $P(x) = x^2 + 1$, on voit que P a des coefficients dans $\mathbb{R}$, mais n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$. par contre, le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clos, car en considérant par exemple l'équation $x^2 - p = 0 \in \mathbb{Q}_p$, d'où $|x|_p^2 = p^{-1}$, on trouve que $v_p(x) = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc cette équation n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}_p$. Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considérer une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ que l'on note en général $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ $\big($le corps $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ est constitué de toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p\big)$. Malheureusement, cette clôture algébrique n'est pas complète. On est donc amené à compléter de nouveau. On obtient ainsi un corps qui est à la fois complet et algébriquement clos et que l'on note $\mathbb{C}_p$. Ce corps muni d'une valeur absolue ultramétrique qui prolonge celle définie sur $\mathbb{Q}_p$ et que l'on note toujours $|.|_p$ $\big($pour plus de détails voir [6]$\big)$.

Remarque. *De la même façon lorsqu'on a construit $\mathbb{Q}_p$, on prolonge la valeur absolue p-adique de $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ à $\mathbb{C}_p$ comme suit ; pour tout $x \in \mathbb{C}_p$, on a*

$$|x|_p = \lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n|_p \,, \text{ où } (x_n)_{n \geq 0} \text{ est une suite de Cauchy d'éléments de } \widetilde{\mathbb{Q}_p}.$$

Notation. *On note $O\left(\mathbb{C}_p\right)$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de valeur absolue inférieure ou égale à un, c'est-à-dire $O(\mathbb{C}_p) = \{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p \leq 1\}$. C'est un anneau commutatif unitaire qui contient $\mathbb{Z}_p$. On l'appelle l'anneau d'entiers de $\mathbb{C}_p$. L'ensemble de ses éléments inversibles est l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ de module un.*

Proposition 1.3.2. *[25, Proposition 6.8.8] $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos.*

Proposition 1.3.3. *[45, Ch. 3, Sec. 3] Le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.*

Le corps $\mathbb{C}_p$ est cependant le bon domaine pour faire de l'analyse $\big($un corps ultramétrique complet, algébriquement clos$\big)$.

Proposition 1.3.4. *[45, Ch. 3, Sec. 3] Le corps $\mathbb{C}_p$ est un espace métrique séparable.*

Remarque. *L'ensemble des valeurs p-adiques de $\mathbb{C}_p$ est l'ensemble de puissances rationnelles de p, c'est-à-dire, $|\mathbb{C}_p| = \{p^q, q \in \mathbb{Q}\} \cup \{0\}$.*

1.4 Analyse élémentaire sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette section, on essaie de donner un aperçu de ce à quoi ressemble l'analyse dans $\mathbb{C}_p$. Plutôt que d'essayer d'être exhaustif, nous essayons d'aborder quelques points remarquables : le théorème de préparation p-adique de Weierstrass, la description de fonctions entières et la théorie des polygones de valuation. Comme d'habitude, la première étape consiste à se réapproprier tous les résultats que nous avons obtenus précédemment. Nous examinons ensuite comment étendre la valuation p-adique aux polynômes et aux séries entières.

La première observation qu'il convient de mentionner est que tous les résultats précédents mentionnés ci-dessus concernant l'étude de la convergence des suites et des séries dans $\mathbb{Q}_p$ restent vrai en $\mathbb{C}_p$. De plus, la Proposition 1.2.16 reste vraie aussi en $\mathbb{C}_p$.

1.4.1 Fonctions analytiques sur $\mathbb{C}_p$

Dans cette partie, on va donner certains résultats élémentaires des fonctions données sous forme des séries entières.

Considérons maintenant une série entière, de terme général $a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}_p$. Cette série sera donc convergente si et seulement si $a_n x^n$ tend vers zéro dans $\mathbb{C}_p$. Cette propriété est trivialement vraie si $x = 0$ (voir [6]).

Définition 1.4.1. *Soit l'ensemble* $A = \left\{ r \in \left[0, +\infty \right[, |a_n|_p r^n \to 0 \right\}$. *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *la borne supérieure de* A *si* A *est majoré. Sinon on pose* $R = +\infty$. *Par définition, le nombre* R*, ainsi défini, s'appelle le rayon de convergence de cette série entière.*

Les résultats valides dans $\mathbb{C}$ se prolongent sans problèmes :

Proposition 1.4.2. *[6, Proposition 16] Soit* $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *une série entière à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$. *Alors*

1. *Si* a_n *est non nul à partir d'un certain rang et si la limite de* $\dfrac{|a_{n+1}|_p}{|a_n|_p}$ *quand* $n \to \infty$ *existe et égal à* L*, on a* $R = \dfrac{1}{L}$ *(Formule de d'Alembert),*
2. *Si la limite de* $\sqrt[n]{|a_n|_p}$ *quand* $n \to \infty$ *existe et égal* L*, on a* $R = \dfrac{1}{L}$ *(Formule de Cauchy),*
3. *Dans tous les cas, on a* $R^{-1} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}$ *(Formule d'Hadamard).*

Le nombre R *est appelé le rayon de convergence de* f.

Comme dans le cas classique (dans $\mathbb{C}$), les propriétés de R sont aussi les mêmes dans le cas ultramétrique, on a la définition suivante

Définition 1.4.3. *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$ *et* R *le rayon de convergence de* f. *Donc, pour* $x \in \mathbb{C}_p$, *on a*

1. *Si* $|x|_p < R$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p |x|_p^n = 0$ *et la série est convergente.*
2. *Si* $|x|_p > R$, *alors la série est divergente.*
3. *Si* $|x|_p = R$, *alors on peut avoir ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p |x|_p^n = 0$ *et la série est convergente sur la totalité du cercle* $C(0,R)$, *ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p |x|_p^n \neq 0$ *et la série est divergente dans le cercle* $C(0,R)$.

D'autre part, quand $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|_p} = +\infty$, *on a* $R = 0$ *et donc* f *est convergente seulement quand* $x = 0$. *Quand* $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt{|a_n|_p} = 0$, *on a* $R = +\infty$ *et* f *converge pour tout* $x \in \mathbb{C}_p$ *(dans ce cas, on dit que* f *est entière). Le disque* $D^-(0,R)$ *est appelé le disque de convergence.*

Exemple 1.4.4. *Cet exemple est une application directe de la définition et de la proposition ci-dessus*

1. *Soit la série* $\sum_{n\geq 0} p^n x^n$. *D'après la formule d'Hadamard, on a*

$$R^{-1} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|p^n|_p} = \frac{1}{p}.$$

   Donc la série $\sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *est convergente dans le disque* $D^-(0,p)$. *Pour* $|x|_p = p$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} |p^n|_p p^n = 1 \neq 0.$$

   D'où, la série $\sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *est divergente sur la totalité du cercle* $C(0,p)$.

2. *Soit* b *un nombre non nul dans* $\mathbb{C}_p$, *la série* $\sum_{n\geq 0} b^n x^n$ *est convergente dans le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* $R = \dfrac{1}{|b|_p}$, *et pour* $|x|_p = R$, *on a,* $\lim_{n\to+\infty} |b^n|_p R^n \neq 0$, *d'où, la série* $\sum_{n\geq 0} b^n x^n$ *est divergente sur tout le cercle* $C(0, |b|_p^{-1})$.

Proposition 1.4.5. *[6, Proposition 17] Soit* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série à coefficients dans* $\mathbb{C}_p$. *On a*

a) *Si le rayon de convergence* R *de la série* f *est non nul, alors la fonction* f *est dérivable sur son disque de convergence et la fonction dérivée est égale à la somme de la série* *dérivée*

$$g(x) = f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}.$$

De plus, la série dérivée de la série f a exactement le même rayon de convergence que la série f.

b) Plus généralement, si $R > 0$, la série f est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de f, et on a

$$f^{(k)}(x) = g^{(k-1)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} a_n C_n^k x^{n-k}.$$

Preuve. Soit x un élément fixé de $D^+(0, R)$, soit $h \in \mathbb{C}_p$ tel que $x + h \in D^+(0, R)$. D'abord, on a la factorisation de $a^n - b^n$ comme suit ;

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}\right).$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n \Big((x+h)^n - x^n\Big) \\ &= h \sum_{n\geq 1} a_n \Big((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\Big) \\ &= h \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Comme $|C_n^i|_p \leq 1$ (car $i \in \mathbb{Z}$), alors $C_n^i \in \mathbb{Z}_p$. On pose $|x|_p \leq R$ et $|x+h|_p \leq |x|_p$, on a

$$|C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1}|_p \leq |x+h|_p^{n-1} |x|_p^{i-1} \leq R^{n-1}.$$

La somme à droite de la formule (1.2) est majorée en valeur absolue par $\max |a_n|_p R^{n-1}$ qui est fini, car $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p R^{n-1} = 0$, on a

$$\big|f(x+h) - f(x)\big|_p \leq |h|_p \max_{n\geq 1} |a_n|_p R^{n-1} \text{ et } \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)|_p = 0$$

D'où la continuité de f sur $D^+(0, R)$. Maintenant, on pose $g(x) = \sum\limits_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) &= \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1} - \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 1} a_n \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} - nx^{n-1}\right] \\ &= h\left(\text{somme majorée en valeur absolue par } \max_{n\geq 2} |a_n|_p R^{n-2}\right). \end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = g(x) = \sum\limits_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$. On a aussi ; le rayon de convergence de la série g égal exactement à R le rayon de convergence de f, car pour tout $n \geq 1$ on a, $|na_n|_p R^{n-1} \leq |a_n|_p R^{n-1}$. En passant à la limite, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} |na_n|_p R^{n-1} = 0$,

Par récurrence, on montre l'égalité

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= k! \sum_{n \geq k} C_n^k a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n \geq k} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pour $k = 0$, nous avons $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$. Pour $k = 1$, on a f'

$$f'(x) = \sum_{n > 1} n a_n x^{n-1}$$

Maintenant, on suppose que l'égalité(1.3) est vraie pour k et on montre qu'elle reste vraie pour $(\mathrm{k}+1)$. Par dérivation terme à terme de l'égalité (1.3), on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' &= \left(k! \sum_{n \geq k} C_n^k a_n x^{n-k}\right)' \\ &= k! \sum_{n \geq k+1} (n-k) C_n^k a_n x^{n-k-1} \\ &= (k+1)! \sum_{n \geq k+1} (n-k) C_n^{k+1} a_n x^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. $\square$

Définition 1.4.6. *On dira qu'une fonction f est analytique sur le disque $D(a, R)$ si cette fonction est la somme d'une série entière en les puissances de $(x - a)$ sur ce disque, donc de rayon de convergence au moins R.*

Définition 1.4.7. *Soit f une fonction définie de $D^-(a, R)$ dans $\mathbb{C}_p$. On dit que f est une fonction analytique sur $D^-(a, R)$, si pour tout $0 < r < R$, la restriction de f à $D^+(a, r)$ est une fonction analytique sur $D^+(a, r)$.*

Notation. *On note par $\mathcal{A}(D^-(a, R))$ $\big($resp. $\mathcal{A}(D^+(a, R))\big)$ l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $D^-(a, R)$ $\big($resp. $D^+(a, R)\big)$ et par $\mathbb{C}_p[x]$ l'ensemble des polynômes a coefficients dans $\mathbb{C}_p$.*

On note par $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$ $\big($resp. $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p[x]\big)$ l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ $\big($resp. l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$, qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendantes$\big)$.

Proposition 1.4.8. *[22, Proposition 13.3] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in \mathcal{A}\left(D^-(a,R)\right)$.

ii) La série $f(x)$ est convergente pour tout $x \in D^-(a,R)$.

Définition 1.4.9. *Soit f une fonction de $\mathbb{C}_p$ dans $\mathbb{C}_p$. On dit que f est entière si f est analytique sur tout le plan $\mathbb{C}_p$.*

L'exemple suivant nous donne quelque fonctions célèbres qui sont entière dans $\mathbb{C}$, mais ne sont pas entières dans $\mathbb{C}_p$.

Exemple 1.4.10. *Considérons les séries formelles suivantes :*

$$\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!},\ \sin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \cos(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

D'abord, nous avons besoin de la valuation p-adique de $n!$, pour prouver que ces fonctions ne sont pas entière sur $\mathbb{C}_p$, le fait que $v_p(n!) = \dfrac{n - S_p(n)}{p-1}$, où $S_p(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_t$ est la somme des chiffres de n dans la base p $\big($c'est-à-dire $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_t p^t$, le développement p-adique de l'entier $n\big)$.

1. *La fonction $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ n'est pas entière sur $\mathbb{C}_p$. En effet,*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|_p}} = p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

   D'où, f est analytique sur le disque $D^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

   Si $|x|_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$, alors

$$|a_n|_p \left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right)^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{\frac{-n}{p-1}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}},$$

   on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \neq 0$ $\big($puisque $S_p(n)$ est borné$\big)$, d'où la fonction $\exp(x)$ n'est pas convergente sur $C\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$, donc elle n'est pas analytique sur $C\left(0, p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$. Alors la fonction $\exp(x)$ n'est pas entière sur $\mathbb{C}_p$.

2. *Les fonctions* $\sin(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *et* $\cos(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *sont analytiques sur le disque* $D^-\left(0, p^{\frac{-1}{p-1}}\right)$. *Elles ne sont pas analytiques sur le cercle et ne sont pas entières sur* $\mathbb{C}_p$.

Comme un exemple de fonction entière sur $\mathbb{C}_p$, *on considère la série formelle suivante :* $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} p^{n^2} x^n$, *où* $x \in \mathbb{C}_p$, *d'après la formule d'Hadamard, on a*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|_p}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^{-n}} = +\infty,$$

alors $\sum\limits_{n\geq 0} p^{n^2} x^n$ *est convergente sur* $\mathbb{C}_p$, *donc la fonction* f *est analytique sur* $\mathbb{C}_p$, *par conséquence* f *est entière sur* $\mathbb{C}_p$.

1.5 Les zéros des fonctions analytiques

Dans cette partie, on étudiera le comportement des séries entières et des séries de Laurent. Particulièrement, on étudiera le lien qui existe entre le polygone de valuation et leurs zéros.

À partir d'ici et tout au long du reste de ce travail, on notera $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|.|$ $\big($par exemple le corps $\mathbb{C}_p$, muni de la valeur absolue p-adique, où tous les résultats restent vrais$\big)$.

Définition 1.5.1. *Soient* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ $\big($*resp.* $\alpha \in D^-(0,R)\big)$, $r \in [0, +\infty[$ *tel que* $D(\alpha, r) \subset \mathbb{K}$ $\big($*resp.* $r \in]0, R[$ *tel que* $D(\alpha, r) \subset D^-(0,R)\big)$ *et* $f(x) = \sum\limits_{n=q}^{\infty} b_n(x-\alpha)^n$ *pour tout* $x \in D(\alpha, r)$ *où* $b_q \neq 0$, *et* $q > 0$. *On dit dans ce cas que* α *est un zéro de* f *d'ordre de multiplicité* q.

Si f admet α comme zéro d'ordre q, on posera $w_a(f) = q$. Si $f(\alpha) \neq 0$, on posera simplement $w_\alpha(f) = 0$.

Proposition 1.5.2. *[6, Proposition 18] Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est-à-dire que si* b *est un zéro de* f, *il existe un disque de centre* b, *de rayon assez petit, où la fonction* f *n'admet comme zéro que* b.

Preuve. En effet, si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme $f(x) = a_m(x-b)^m + a_{m+1}(x-b)^{m+1} + \ldots$, l'entier m étant ≥ 1 et $a_m \neq 0$. Il en résulte que si $|x-b|$ est assez petit, et non nul, on a $|f(x)| = |a_m|\,|x-b|^m \neq 0$. $\square$

Théorème 1.5.3. *[22, Théorème 14.1] Soit $\gamma \in D^-(0,R)$ et soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ telle que $f(\gamma) = 0$. Alors f peut être factorisé dans $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ sous la forme $(x-\gamma)g$ où $g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. S'il n'existe aucun voisinage V de γ tel que $f(x) = 0$ quand $x \in V$, alors il existe un unique entier $q \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ tel que $f(x) = (x-\gamma)^q h(x)$ et $h(\gamma) \neq 0$.*

Corollaire 1.5.4. *[22, Corollaire 14.2] Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ et soit γ un zéro de f dans $D^-(0,R)$. Alors il existe un disque $D(\gamma,r)$ tel que $f(x) \neq 0$ quand $x \in D(\gamma,r)\backslash\{\gamma\}$ ou bien il existe un disque $D(\gamma,r)$ tel que $f(x) = 0$ dans $D(\gamma,r)$.*

Théorème 1.5.5. *[25, Théorème 5.6.1] (**Théorème de Strassman**) Soit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

une série entière non nulle avec des coefficients dans $\mathbb{K}$. Supposons que $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$ $\big($c'est-à-dire $f(x)$ converge pour tout $x \in D(0,1)\big)$. Soit N l'entier défini par les deux conditions :

1. $|a_N| = \max |a_n|$,
2. $|a_n| < |a_N|$ *pour tout* $n > N$.

Alors la fonction $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ défini par $x \mapsto f(x)$ a au plus N zéros.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence. Pour $N = 0$ et d'après cette assertion $|a_0| > |a_n|$ pour tout $n > 0$, on doit démontrer que f n'a aucun zéro dans $\mathbb{Z}_p$. Si $0 = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, on a $|a_0| = |a_0 + a_1 x + \ldots| \leq \max\limits_{n\geq 1} |a_n| < |a_0|$ contradiction. Maintenant, supposons

$$|a_N| = \max_n |a_n| \text{ et } |a_n| < |a_N| \text{ pour } n > N$$

et soit $f(\alpha) = 0$ pour certain $\alpha \in D(0,1)$. Choisissons $x \in D(0,1)$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x^n - \alpha^n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n x^j \alpha^{n-1-j} \\ &= (x-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j-1}^{\infty} a_n x^j \alpha^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Posons $k = n-1-j$, donc $n = k+1+j$, on obtient,

$$f(x) = (x-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = (x-\alpha)g_1(x), \text{ où } b_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1+k}\alpha^k.$$

Où $g(x)$ une série entière de coefficient b_j. Il est facile de voir que $\lim\limits_{j\to+\infty} b_j = 0$. Notons que

$$|b_j| \le \max_{k\ge 0} |a_{j+1-k}| \le |a_N| \text{ pour tout } j \ge 0.$$

De plus,

$$|b_{N-1}| = \left|a_N + a_{N+1}\alpha + a_{N-2}\alpha^2 + \ldots\right| = |a_N|,$$

et si $j \ge N$, on a

$$|b_j| \le \max_{k\ge 0} |a_{j+1+k}| \le \max_{j\ge N+1} |a_j|_p < |a_N|.$$

D'où, on a

$$\begin{cases} |b_{N-1}| = \max |b_j|, \\ |b_j| < |b_{N-1}|, \forall j > N-1. \end{cases}$$

Si on applique l'induction sur la fonction $g(x)$, on conclut qu'elle possède au plus $(N-1)$ zéros dans $D(0,1)$, d'où $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ possède au plus N zéros dans $D(0,1)$. Ceci termine la démonstration. □

Définition 1.5.6. *Soit* $f(x) = \sum\limits_{n\ge 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}\left(D^-(0,R)\right)\big)$. *On définit le module maximum de* f*, pour* $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *par la formule*

$$|f|(r) = \max_{n\ge 0} |a_n| r^n$$

L'application $r \mapsto |f|(r)$ *définit une fonction réelle sur l'intervalle* $[0,R[\subset \mathbb{R}$.

Le résultat suivant nous donne la relation entre le module maximum d'une fonction analytique et sa dérivée.

Théorème 1.5.7. *[22, Corollaire 13.6] Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$. *Pour tout* $r \in]0,+\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0,R[\big)$, *on a*

$$|f'|(r) \le \frac{1}{r}|f|(r)$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$, soit $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, si $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, alors $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$. D'où,

$$|f'|(r) = \max_{n\geq 1} |na_n| r^{n-1} = \frac{1}{r}\max_{n\geq 1} |\mathrm{n}a_n| r^n \leq \frac{1}{r}\max_{n\geq 0} |a_n| r^n = \frac{1}{r}|f|(r).$$

□

Théorème 1.5.8. *[22, Théorème 13.1] Soit $r \in]0,+\infty[$. Alors $\mathcal{A}(D(0,r))$ est l'ensemble des séries entières $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0$, et*

$$\|f\|_{D(0,r)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| r^n = \lim_{|x|\to r, |x|<r} |f(x)| = |f|(r).$$

De plus, on a $\|.\|$ est une norme ultramétrique multiplicative sur $\mathcal{A}(D(0,r))$. Elle est appelée la norme de Gauss.

Proposition 1.5.9. *[22, lemme 4.2] Soit $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{q} a_j x^j \in \mathbb{K}[x]$ non nul et soit $r \in]0,+\infty[$. Alors $|P(x)|$ admet une limite $|P|(r)$ quand $|x|$ tend vers r mais $|x| \neq r$ et $|P|(r) = \max\limits_{0\leq j\leq q} |a_j| r^j$. De même, pour $a \in D(0,r)$, $|P(x)|$ admet la même limite $|P|(r)$ quand $|x-a|$ tend vers r mais $|x-a| \neq r$. Soit $x \in D(0,r)$. Alors $|P(x)| \leq |P|(r)$. Si P n'a pas de zéros dans la classe de x dans $D(0,r)$, alors $|P(x)| = |P|(r)$. Si P admet au moins un zéro dans cette classe, alors $|P(x)| < |P|(r)$.*

Comme propriétés de la fonction $|f|(r)$ on a :

Proposition 1.5.10. *[6, Proposition 25] On suppose que la fonction $f \in \mathcal{A}(D(0,r))$, $0 < r < R$, f n'est pas nulle. Alors :*

1. *La fonction $|f|(r)$ est croissante ;*
2. *Si la fonction f a un zéro b dans le disque $D(0,r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante si $r > |b|$;*
3. *La fonction $|f|(r)$ est continue.*

Preuve. 1. On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f(x)|$ sur le disque $D^+(0,r)$. On suppose que $r \geq r_2 \geq r_1 \geq 0$, d'où,

$$|f|(r_1) = \max_{x\in D^+(0,r_1)} |f(x)| \leq \max_{x\in D^+(0,r_2)} |f(x)| = |f|(r_2),$$

ce qui donne le résultat recherché.

2. Soit $r_0 > |b|$. On a $|f|(r_0) = |a_s| r_0^s$, pour un $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0, r_0)$. Comme a_s n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s| r^s > |a_s| r_0^s$, donc

$$|f|(r) = \max_{k \geq 0} |a_k| r^k \geq |a_s| r^s > |a_s| r_0^s = |f|(r_0).$$

D'où $|f|(r)$ est strictement croissante pour $r > |b|$.

3. Fixons $\beta \in]0, r[$. Alors $|a_n| \beta^n$ tend vers 0 si $n \to +\infty$ de sorte qu'il existe N entier tel que

$$\max_{n \leq N} |a_n| \beta^n = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \beta^n.$$

Il en résulte que si $t \in [0, \beta]$, on a aussi

$$\max_{n \leq N} |a_n| t^n = \max_{n \in N} |a_n| t^n = |f|(t)$$

Comme la fonction $t \mapsto \max |a_n| t^n$ est clairement continue.

Ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.5.10. □

Le lemme suivant jouera un rôle important dans les prochains chapitres.

Lemme 1.5.11. *[6, Lemme 1] Soit $Q(x) = b_0 + \ldots + b_s x^s$, un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. On suppose que $|b_s| r^s = \max\left\{|b_j| r^j\right\} = \|Q\|$. Alors le polynôme Q a toutes ses racines dans $D^+(0, r)$.*

Preuve. Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ dans le disque $D^+(0, r)$. On factorise $Q(x)$; $Q(x) = b_s(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_s)$, où les α_i $(i = 1, \ldots, s)$ sont dans $\mathbb{K}$ et pas forcément distincts. La valeur absolue de $x - \alpha_i$ sur le disque $D^+(0, r)$ est $\max\{r, |\alpha_i|\}$. Par suite $\|Q\| = |b_s| r^s = |b_s| \prod_{i=1}^{s} \max\{r, |\alpha_i|\}$, comme $\max\{r, |\alpha_i|\} \geq r$ pour tout i, et que le produit est égal à r^s, on a $\max\{r, |\alpha_i|\} = r$ pour tout i, et on conclut que $|\alpha_i| \leq r$ pour tout i. On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0, r)$. □

Proposition 1.5.12. *[6, Lemme 1] Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. Si H et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q, alors $\|H\| \|Q\| \leq \|P\|$ et $\|R\| \leq \|P\|$.*

1.5.1 Théorème de factorisation ou théorème de préparation de Weierstrass

Théorème 1.5.13. *[6, Théorème 1] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\mathbb{K}$, convergente dans le disque $D^+(0,r)$, appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ et s un indice tel que $|a_s|r^s = |f|(r)$, et $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ pour $j > s$. Il existe alors un couple $(Q,H), Q$ étant un polynôme de $\mathbb{K}[x]$, $Q(x) = b_0 + \ldots + b_s r^s$, avec $|b_s|\, r^s = |Q|(r) = |f|(r)$ et $H(x)$ une série entière appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0,r))$ telle que $|H-1|(r) < 1$ et $f(x) = Q(x)H(x)$.*

Nous allons déduire de ce résultat un certain nombre de propriétés qui nous seront utiles

Théorème 1.5.14. *[6, Corollaire 3] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière non nulle à coefficients dans $\mathbb{K}$, convergente dans le disque $D^+(0,r)$, appartenant à $\mathcal{A}(D^+(0,r))$, et s un indice tel que l'on ait $|a_s|r^s = |f|(r)$, et $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ pour $j > s$. On a*

a) Si $s \geq 1$, la fonction f a exactement s zéros dans le disque $D^+(0,r)$, compte tenu des multiplicités ;

b) La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(0,r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.

Preuve. On va utiliser le Théorème 1.5.13. On a $f = QH$, avec les propriétés indiquées.

a) Comme $|H-1|(r) < 1$, nous avons $|H(x)| = 1$, pour tout $x \in D^+(0,1)$, donc $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(0,r)$. D'après le Lemme 1.5.11, f a exactement s zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.

b) Si f n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par a). Si $s = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0. Donc f est une constante c non nulle puisque f est non nulle. Comme $|H-1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$ pour tout $x \in D^+(0,1)$. par conséquence $|f(x)| = |c|$.

D'où, on a montré le Théorème. □

Corollaire 1.5.15. *[6, Corollaire 4] Soit $f(x)$ une série entière vérifiant les hypothèses du théorème précédente ; on suppose de plus que l'entier s est égal à 1. Alors la série $f(x)$ a un unique zéro dans le disque $D^+(0,r)$, et ce zéro est dans $\mathbb{K}$.*

Théorème 1.5.16. *[22, Théorème 23.10] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. Alors f a un nombre fini des zéros dans $D^-(0,R)$ si et seulement s'il existe un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $|a_q| R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| R^n$. De plus, si $t \in \mathbb{N}$ est le plus petit de tous les entiers q tel que $|a_q| R^q \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| R^n$, alors f a exactement t zéros dans le disque $D^-(0,R)$.*

Théorème 1.5.17. *[22, Théorème 23.16] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) f n'a pas de zéros dans le disque $D^-(0,R)$.

ii) $|f(x)|$ est égal à une constante non nulle dans le disque $D^-(0,R)$.

Preuve. Supposons que f n'a pas de zéros dans $D^-(0,R)$. Alors, d'après le théorème précédent, on a $|a_0| > |a_n| r^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ce qui entraîne $|f(x)| = |a_0|$, $\forall x \in D^-(0,R)$ et on obtient ii). Inversement, Supposons que $|f(x)|$ est égal à une constante non nulle dans le disque $D^-(0,R)$. Donc, $|f(x)| = a_0 = |f|(r)$, d'après le Théorème 1.5.14 f n'admet aucun zéro dans le disque $D^-(0,R)$. □

Corollaire 1.5.18. *[33, Corollaire 1.27] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non constante. Alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}$. De plus, si f est transcendante $\big($c'est-à-dire f n'est pas un polynôme$\big)$, alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$.*

Corollaire 1.5.19. *[33, Corollaire 1.28] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Si f n'a aucun zéro dans $\mathbb{K}$. Alors f est une constante.*

Pour énoncer le prochain théorème, on aura besoin de la définition suivante.

Définition 1.5.20. *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]0,R[$ est appelée suite à distance croissante si la suite $|a_{n+1} - a_n|$ est strictement croissante et si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Théorème 1.5.21. *[22, Théorème 23.15] Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. L'ensemble des zéros de f dans le disque $D^-(0,R)$ est une suite de zéros simples à distance croissante si et seulement si la suite $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ l'est aussi. De plus, si la propriété précédente est satisfaite, alors la suite de zéros de f dans le disque $D^-(0,R^-)$ est une suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|\alpha_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ et $\lim_{n\to+\infty} |\alpha_n| = R$.*

Proposition 1.5.22. *[6, Proposition 28] Soit f une fonction entière, que l'on suppose non polynomiale. Alors l'ensemble des zéros non nuls de f forme une suite infinie, que l'on range par ordre de module croissant et que l'on note a_n. La suite $|a_n|$ tend vers l'infini, et on peut écrire f sous la forme d'un produit infini :*

$$f(x) = cx^k \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

ou c est une constante, et $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de $x = 0$ comme zéro de f.

1.6 Polygône de valuation

Supposons que la série entière $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est non constante et de rayon de convergence R non nul (éventuellement infini). On définit la fonction Φ_f comme suit

$\Phi_f : I =]-\infty, \log R[\to \mathbb{R}$

$$\log r \mapsto \Phi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n\geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\},$$

cette fonction est appelée la fonction de valuation de f, c'est une fonction convexe, continue, croissante et affine par morceau.

Le graphe de Φ_f est connue en analyse ultramétrique comme *"le polygone de valuation de la fonction f"*.

Notation. *On note $\nu^+(f, r)$ le plus grand entier j tel que*

$$\log |a_j| + j \log r = \Phi_f(\log r) = \max_{n\geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}.$$

C'est-à-dire que, $|a_j| r^j = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n$. De même, on note $\nu^-(f, r)$ le plus petit entier s tel que

$$\log |a_s| + s \log r = \Phi_f(\log r) = \max_{n\geq 0} \{\log |a_n| + n \log r\}.$$

Théorème 1.6.1. *[6] La fonction Φ_f vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si f a un zéro dans $D^-(0, r)$, la fonction Φ_f est strictement croissante pour $\log r > \log |b|$;*
2. *La fonction Φ_f est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est égale à $\nu^-(f, r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $\nu^+(f, r)$;*

3. *Le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0,r)$, en prenant en compte les multiplicités, est égale à $\nu^+(f,r)-\nu^-(f,r)$, où $\nu^+(f,r)$ (resp. $\nu^-(f,r)$) est le nombre des zéros de f dans le disque $D^+(0,r)$ $\big($resp. $D^-(0,r)\big)$.*

Exemple 1.6.2. *Comme une application de ce que nous avons évoqué précédemment, on considère le polynôme $P(x)=(p^2+p^3)+(p+p^3)x+(p+2p^2)x^2+p^2x^3$, avec ses coefficients dans $\mathbb{C}_p$ et p un nombre premier supérieur strictement à deux. D'abord, on sait que le corps $\mathbb{C}_p$ muni de la valeur absolue p-adique est un corps ultramétrique complet et algébriquement clos. La question est maintenant de savoir où appartiennent ces racines ?*

D'abord, on a $|a_0|_p=p^{-2}$, $|a_1|_p=p^{-1}$, $|a_2|_p=p^{-1}$ et $|a_3|_p=p^{-2}$. Calculons $|P|(r)$.
Pour $r=\dfrac{1}{p^2}$, on a $|a_0|_p\,r^0=p^{-2}$, $|a_1|_p\,r^1=p^{-3}$, $|a_2|_p\,r^2=p^{-5}$ et $|a_3|_p\,r^3=p^{-8}$. D'où $|P|\Big(\dfrac{1}{p^2}\Big)=p^{-2}$. Donc, $\nu^+\Big(P,\dfrac{1}{p^2}\Big)=\nu^-\Big(P,\dfrac{1}{p^2}\Big)=0$, alors P n'a aucun zéro dans le disque fermé de centre zéro et de rayon $r=\dfrac{1}{p^2}$.
Pour $r=\dfrac{1}{p}$, on a $|a_0|_p\,r^0=p^{-2}$, $|a_1|_p\,r^1=p^{-2}$, $|a_2|_p\,r^2=p^{-3}$ et $|a_3|_p\,r^3=p^{-5}$. D'où $|P|\Big(\dfrac{1}{p}\Big)=p^{-2}$. Donc, $\nu^+\Big(P,\dfrac{1}{p}\Big)=1$, alors P admet un zéro dans le disque $D^+\Big(0,\dfrac{1}{p}\Big)$ et $\nu^-\Big(P,\dfrac{1}{p}\Big)=0$, alors P n'a aucun zéro dans le disque $D^-\Big(0,\dfrac{1}{p}\Big)$, il est clair que le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C\Big(0,\dfrac{1}{p}\Big)$ car $\nu^+\Big(P,\dfrac{1}{p^2}\Big)-\nu^-\Big(P,\dfrac{1}{p^2}\Big)=1$.
Pour $r=1$, on a $|a_0|_p\,r^0=p^{-2}$, $|a_1|_p\,r^1=p^{-1}$, $|a_2|_p\,r^2=p^{-1}$ et $|a_3|_p\,r^3=p^{-2}$. D'où $|P|(1)=p^{-1}$. Donc, $\nu^+(P,1)=2$, alors P admet deux zéros dans le disque $D^+(0,1)$ et $\nu^-(P,1)=1$, alors P a un zéro dans le disque $D^-(0,1)$, il est clair que le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,1)$.
pour $r=p$, on a $|a_0|_p\,r^0=p^{-2}$, $|a_1|_p\,r^1=1$, $|a_2|_p\,r^2=p$ et $|a_3|_p\,r^3=p$. D'où $|P|(p)=p$. Donc, $\nu^+(P,p)=3$, alors P admet trois zéros dans le disque $D^+(0,p)$ et $\nu^-(P,p)=2$, alors P admet deux zéros dans le disque $D^-(0,p)$. Il est clair que le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,p)$.

1.7 Fonctions méromorphes ultramétriques

Dans cette partie, on va présenter quelques définitions et propriétés liées aux fonctions méromorphes dans un corps ultramétrique.

Définition 1.7.1. *On dit que le point $a \in \mathbb{K}$ est un point singulier isolé d'une fonction s'il existe un voisinage de a $\big($c'est-à-dire il existe un disque ouvert de centre a et de rayon $r\big)$ tel que f est analytique sur ce voisinage sauf a $\big($c'est-à-dire $f \in \mathcal{A}(D^{-}(a,r)\backslash\{a\})\big)$.*

Définition 1.7.2. *On dit qu'une fonction f est méromorphe sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. f est méromorphe dans $D(0,R)\big)$ si elle est analytique sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. f est analytique dans $D(0,R)\big)$ sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles.*

Notation. *On note $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}(D^{-}(\theta,R))\big)$ le corps des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^{-}(\theta,R)\big)$, c'est-à-dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. de fractions de $\mathcal{A}(D^{-}(\theta,R))\big)$ et $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles a coefficients dans $\mathbb{K}$.*
On note par $\mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fonctions méromorphes transcendantes sur $\mathbb{K}$ $\big($c'est-à-dire les fonctions méromorphes qui ne sont pas des fractions rationnelles dans $\mathbb{K}\big)$.

Remarques. *Si la fonction f est méromorphe dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D(0,R)\big)$, alors, il existe deux fonctions g et h qui sont analytiques sur $\mathbb{K}$ $\big($resp. $g,h \in \mathcal{A}(D(0,R))\big)$, tel qu'on peut écrire $f = \dfrac{h}{g}$, où g et h sans des zéros communs. On a*

1. *Le nombre des pôles de f est fini dans un domaine borné.*
2. *Les zéros de f sont des zéros de h, et les pôles de f sont des zéros de g.*
3. *Toute fonction entière est une fonction méromorphe. Autrement dit $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{K})$.*
4. *Toute fonction rationnelle dans $\mathbb{K}$ est une fonction méromorphe.*

La valeur absolue $|.|$ défini sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. défini sur $\mathcal{A}(D^{-}(0.R))\big)$ quand $r \in [0,+\infty[$ $\big($resp. quand $r \in]0.R[\big)$, étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\mathcal{M}(D^{-}(0.R))\big)$ quand $r \in [0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), en posant $|f|(r) = \dfrac{|h|(r)}{|g|(r)}$ où $f = \dfrac{h}{g}$, tel que $g,h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $g,h \in \mathcal{A}(D^{-}(0,R))\big)$.

Comme généralisation du Théorème 1.5.7, nous avons le résultat suivant

Théorème 1.7.3. *[14, Lemme 4] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. Pour tout $r > 0$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a $|f'|(r) \le \dfrac{1}{r}|f|(r)$.*

Preuve. Posons $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D^-(0,R))$). Pour $r > 0$ (resp. $r \in]0,R[$), nous avons $\dfrac{|f'|\,(r)}{|f|(r)} = \dfrac{|h'g - hg'|(r)}{|hg|(r)}$, mais évidemment $|h'g - g'h|(r) \le \max\{|h'g|(r), |hg'|(r)\}$, ce qui entraine que $\dfrac{|f'|\,(r)}{|f|(r)} \le \max\left\{\dfrac{|h'|\,(r)}{|h|(r)}, \dfrac{|g'|\,(r)}{|g|(r)}\right\}$. Alors, d'après le Théorème 1.5.7, on a $\dfrac{|h'|\,(r)}{|h|(r)} \le \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{|g'|\,(r)}{|g|(r)} \le \dfrac{1}{r}$. D'où, $\dfrac{|f'|\,(r)}{|f|(r)} \le \dfrac{1}{r}$. $\square$

Corollaire 1.7.4. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. Pour tout $r > 0$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f^{(n)}|(r) \le \dfrac{1}{r^n}|f|(r)$ où $f^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n de f.*

Théorème 1.7.5. *[23, Théorème 2.1.2] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$. Si f n'a aucun pôle dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. f n'a aucun pôle dans le disque $D^-(0,R)\big)$, alors $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout $r > 0$ (resp. $r \in]0,R[$), la fonction f appartient à $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$). Pour montrer cela on écrit f sous la forme $f = \dfrac{h}{g}$ où $h, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $h, g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et $g \neq 0$. Par hypothèse, si f n'admet aucun pôle dans $\mathbb{K}$ (resp. f n'admet aucun pôle dans $D^-(0,R)$), c'est-à-dire g n'a aucun zéro dans $\mathbb{K}$ (resp. g n'a aucun zéro dans $D^-(0,R)$)), alors, d'après le Théorème 1.5.17 on a, g est une fonction constante dans $\mathbb{K}$ (resp. g est constante dans $D^-(0,R)$)), d'où, $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$). $\square$

Les corollaires suivants sont des résultats immédiats à partir de Corollaires 1.5.18 et 1.5.19

Corollaire 1.7.6. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^-(0,R)\big)$. Alors f est une constante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^-(0,R)\big)$.*

Corollaire 1.7.7. *Les fonctions méromorphes transcendantes dans $\mathbb{K}$ ont, en général, une infinité des zéros ou une infinité des pôles.*

Chapitre 2

La théorie de distribution des valeurs sur un corps ultramétrique

Sommaire

Dans les deux domaines de mathématique, l'analyse complexe et l'analyse ultramétrique, la théorie de Nevanlinna joue un rôle important dans l'étude des problèmes de distribution de valeurs. La théorie classique (dans le corps des nombres complexes) a été développée par le mathématicien finlandais Rolf Nevanlinna en 1925.

En 1983, dans [35], H. H. Khoái considère des fonctions méromorphes dans le disque unité de $\mathbb{C}_p$. Sa définition de la fonction caractéristique $T(r, .)$ ne lui permet d'obtenir qu'un résultat comparable au premier théorème fondamental classique de Nevanlinna. Cependant, il a annoncé avoir amélioré ses résultats et avec M. V. Quang, ils ont introduit l'analogue de la théorie de Nevanlinna dans le disque unité de $\mathbb{C}_p$ en 1988 (voir [36]). Puis, en 1989, A.

Boutabaa [12] a prouvé l'analogue p-adique des deux théorèmes principaux et il a développé les relations de la théorie classique de Nevanlinna dans $\mathcal{M}(\mathbb{K})$. Ensuite, en 2001, lui et A. Escassut ont étendu cette théorie aux fonctions dans $\mathcal{M}(D^{-}(0,R))$.

Dans ce chapitre, on va présenter la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes définies sur un corps ultramétrique complet et algébriquement clos que l'on note $\mathbb{K}$. Puis, on va donner l'analogue du théorème classique de Valiron-Mokhon'ko. A la fin, on va définir l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe.

2.1 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Pour toute fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^{-}(0,R))\big)$, on note $\omega_\alpha(f)$ $\big($qui est un entier de $\mathbb{Z}\big)$ l'ordre de α tel que α soit un zéro ou un pôle de f, c'est-à-dire $f(x) = \sum\limits_{n\geq n_\alpha} a_n(x-\alpha)^n$ et $a_{n_\alpha} \neq 0$, alors $\omega_\alpha(f) = n_\alpha$.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^{-}(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, et soit, $r \in]\,0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$). On note $Z(r,f)$ la fonction de comptage des zéros de f dans $D^{-}(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités et qui est défini par

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r\\ \omega_\alpha(f)>0}} \omega_\alpha(f)(\log r - \log|\alpha|).$$

De même, on note $\bar{Z}(r,f)$ la fonction de comptage des zéros de f sans prendre en compte les multiplicités. On pose

$$\bar{Z}(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} (\log r - \log|\alpha|).$$

De façon analogue, on note $N(r,f)$ la fonction de comptage des pôles de f dans $D^{-}(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités. On pose

$$N(r,f) = -\sum_{\substack{|\alpha|\leq r\\ \omega_\alpha(f)<0}} \omega_\alpha(f)(\log r - \log|\alpha|) = Z\Big(r,\frac{1}{f}\Big) \text{ et } \bar{N}(r,f) = \bar{Z}\Big(r,\frac{1}{f}\Big),$$

où $\bar{N}(r,f)$ la fonction de comptage des pôles de f dans le disque $D^{-}(0,r)$ sans prendre en compte les multiplicités.

Enfin, pour $x > 0$, on pose $\log^+ x = \max(0, \log x)$, tel que $x > 0$ et log est une fonction logarithmique réelle. On définit pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

$$m(r, f) = \max\{\log |f|(r), 0\}.$$

La fonction $m(r, .)$ est appelée fonction compensation.

En considérant les définitions ci-dessus de $Z(r, f)$, $N(r, f)$ et $m(r, f)$, on obtient les propriétés suivantes

Proposition 2.1.1. *[33, Proposition 2.1] Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour $r > 0$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g) \text{ et } N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g).$$

Preuve. Les deux inégalités sont triviales puisque l'ordre de multiplicité de pôles de $f + g$ ou fg au point x est au plus égal à la somme d'ordre de multiplicité de pôles de f et g au point x, d'où,

$$Z\Big(r, \frac{1}{f+g}\Big) \leq Z\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + Z\Big(r, \frac{1}{g}\Big), \text{ et } Z\Big(r, \frac{1}{fg}\Big) \leq Z\Big(r, \frac{1}{f}\Big) + Z\Big(r, \frac{1}{g}\Big)$$

□

Avant de donner quelques propriétés liées à la théorie de Nevanlinna on introduit les notations suivantes.

Notation. *Soient ψ, ϕ deux fonctions réelles définies sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ $\big($resp. $I =]0, R[\big)$ et soit $r \in I$ tel que ϕ ne s'annule pas pour r assez grand $\big($resp. r assez proche de $R\big)$. On note par $\psi(r) = O(\phi(r))$ si $\dfrac{\psi(r)}{\phi(r)}$ est bornée quand r assez grand $\big($resp. r assez proche de $R\big)$ et dans ce cas, on dit que ψ est dominée par ϕ. On note par $\psi(r) = o(\phi(r))$ si $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{\psi(r)}{\phi(r)} = 0$ $\Big($resp. $\lim\limits_{r \to R} \dfrac{\psi(r)}{\phi(r)} = 0\Big)$ et dans ce cas, on dit que ψ est négligeable devant ϕ.*

Proposition 2.1.2. *[33, Proposition 2.2] Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors pour $r > 0$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a :*

1. *$m(r, f + g) \leq \max\big\{m(r, f), m(r, g)\big\}$.*
2. *$m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$.*

3. $m(r, fg) \le m(r, f) + m(r, g)$.

4. $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$.

5. $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$.

Preuve. Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique, elle satisfait l'inégalité triangulaire forte, c'est-à-dire que $|f + g|(r) \le \max\{|f|(r), |g|(r)\}$, aussi $|fg|(r) = |f|(r)|g|(r)$. Par conséquent, grâce à la croissance de la fonction logarithmique, on déduit sans difficulté 1, 3, et 4.

Pour montrer l'égalité 2, on suppose que $|f|(r) > |a|$, et pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

$$|f - a|(r) = \max\{|f|(r), |a|\} = |f|(r),$$

d'où, $m(r, f - a) = m(r, f)$. Alors que, si $|f|(r) \le |a|$, on a $|f - a|(r) \le |a|$, ce qui entraine $|m(r, f - a) - m(r, f)| \le \log |a|$ et ainsi $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$.

Finalement, D'après le Théorème 1.7.3, nous avons $\dfrac{|f'|(r)}{|f|(r)} \le \dfrac{1}{r}$. D'où, pour $r \ge 1$ (resp. $r \in]1, R[$), on a $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$ ce qui montre l'égalité 5. Ainsi, la Proposition 2.1.2 est démontré. □

2.1.1 Formule de Jensen

La formule qu'on donne dans le théorème suivant est la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilisera tout au long de ce travail.

Théorème 2.1.3. *[33, Formule (1.8), P. 21] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$\log(|f|(r)) = \log |f(0)| + \sum_{|\alpha| \le r} \Big(\omega_\alpha(f) - \omega_\alpha\Big(\frac{1}{f}\Big)\Big) \log \frac{r}{|\alpha|}. \tag{2.1}$$

La preuve de cette formule est plus facile que la démonstration de la formule classique de Jensen (au cas complexe). Elle est conséquence des propriétés du polygone de valuation.

En utilisant les notations ci-dessus de $N(r, f)$, $Z(r, f)$ et la définition de $m(r, f)$, on définit une autre version ultramétrique de la formule de Jensen plus simple, très connue et plus utilisée que la formule (2.1).

Théorème 2.1.4. *[33, Formule (2.1), P. 33] Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *n'ayant ni zéro ni pôle en* 0*. Alors,*

$$\log|f|(r) = Z(r,f) - N(r,f) + \log(|f(0)|), \ \textit{pour tout } r > 0 \ \big(\textit{resp. } r \in]0,R[\big). \tag{2.2}$$

Maintenant, quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, on définit la fonction de Nevanlinna (appelé aussi la fonction caractéristique) de f par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f). \tag{2.3}$$

L'analogue classique de la fonction caractéristique $T(r,.)$ peut être trouvé dans [27, Sec. 2].

Comme une conséquence immédiate de la définition de la fonction caractéristique $T(r,.)$, on a les corollaires suivants.

Corollaire 2.1.5. *Soit* $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*rep.* $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ *non nulle en* 0*. Alors, on a*

$$T(r,f) = Z(r,f) + O(1), \forall r \in]0,+\infty[\ \big(\textit{resp. } r \in]0,R[\big).$$

ce résultat nous donne la fonction de Nevanlinna dans un cas particulier où $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (rep. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$).

Corollaire 2.1.6. *[12, Formule (1.5)] Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*rep.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ *n'a ni zéro ni pôle en* 0*. Alors* $T\Big(r,\dfrac{1}{f}\Big) = T(r,f) + O(1)$*, pour tout* $r > 0$ $\big($*resp.* $r] \in 0,R[\big)$*.*

Preuve. En utilisant le fait que $\log x = \log^+ x - \log^+ \dfrac{1}{x}$, pour $x > 0$ et d'après la définition de la fonction de compensation $m(r,f)$, on déduit que

$$\log|f|(r) = m(r,f) - m\Big(r,\frac{1}{f}\Big).$$

Donc, d'après la formule de Jensen (2.2) et la définition de la fonction caractéristique, on a

$$T(r,f) = T\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + \log|f(0)|.$$

Ce qui achève la démonstration. □

une autre version plus forte de la fonction de Nevanlinna est la suivante

Théorème 2.1.7. *[15, Introduction] Soit f une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, la quelle n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

$$T(r,f) = \max\Big\{N(r,f), N\Big(r,\frac{1}{f}\Big) + O(1)\Big\}.$$

Preuve. D'après la formule de Jensen (2.2), on a

$$\log|f|(r) + N(r,f) = Z(r,f) + \log|f(0)|,$$

En introduisant la fonction max, on obtient

$$\max\{\log|f|(r) + N(r,f), N(r,f)\} = \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\}.$$

D'où, $N(r,f) + \max\{\log|f|(r), 0\} = \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\}$. Ce qui implique

$$T(r,f) = \max\{Z(r,f) + \log|f(0)|, N(r,f)\}.$$

D'où le résultat. □

Remarque. *Il existe d'autres définitions des fonctions de Nevanlinna qui ne contiennent pas $|f(0)|$ lorsque la fonction f n'a ni zéro ni pôle en 0. Par exemple A. Escassut, A. Boutabaa, C. C. Yang et autres considèrent toujours que $T(r,f) = \max\{Z(r,f), N(r,f)\}$ ou $T(r,f) = \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + O(1)$. En fait, toutes les définitions sont équivalentes par les inégalités, jusqu'à une constante additive.*

Théorème 2.1.8. *[20, Théorème. 9] Soit f une fonction méromorphe non constante $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$, alors $T(r,f) \to \infty$ quand $r \to \infty$ $\big($resp. $T(r,f) \to R$ quand $r \to R\big)$.*

Les propriétés de $T(r,.)$ sont assez semblables à celles connues dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Cependant, la propriété (3) ci-dessous est spécifique à l'analyse ultramétrique.

Proposition 2.1.9. *[20, Théorème. 5] Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ non identiquement nulles et n'ayant ni zéro ni pôle à l'origine. Alors pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

1. *$T(r, f+g) \leq T(r,f) + T(r,g)$.*

2. $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g)$.
3. *Si* $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, R))\big)$, *on a* $T(r, f + g) \leq \max\{T(r, f), T(r, g)\}$.

Preuve. On sait que $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$. D'après la Proposition 2.1.1 et la Proposition 2.1.2 (les propriétés 1 et 3), on trouve sans difficulté

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) \text{ et } T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g).$$

D'après l'hypothèse f et g sont des fonctions entières (resp. analytique dans le disque ouvert de centre 0 et de rayons r), d'où $N(r, f) = N(r, g) = 0$. L'inégalité est immédiatement déduite de la Proposition 2.1.2 (la propriété 1). □

Remarque. *Remarquons que les fonctions* $Z(r, f)$, $N(r, f)$ *et* $T(r, f)$ *sont positives. De plus, si une fonction* f *admet un zéro ou un pôle en* 0, *on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions* $Z(r, f)$, $N(r, f)$ *et* $T(r, f)$.

Comme on a déjà dit précédemment, la théorie de Nevanlinna s'exprime par deux théorèmes fondamentaux. Pour démontrer le premier théorème, on a besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.1.10. *[12, Proposition I2] Soient* $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($*resp.* $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))\big)$ *et* $a \in \mathbb{K}$ $\big($*resp.* $a \in D^-(0, R))\big)$ *tels que* f *n'a ni zéro ni pôle en zéro et* $f(0) \neq a$. *Alors pour* $r \in]0, +\infty[$ $\big($*resp.* $r \in]0, R[\big)$, *on a :*

1. $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$.
2. $T(r, f - a) = T(r, f) + O(1)$.

Preuve. D'après la Proposition 2.1.2, on a $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$ aussi $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$. D'autre part, il est clair que le nombre des pôles des af et $f - a$ sont égaux le même nombre des pôles de f, d'où $N(r, af) = N(r, f - a) = N(r, f)$. Par conséquent, $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$ et $T(r, f - a) = T(r, f) + O(1)$. □

2.2 Théorie de Nevanlinna

Dans cette section, on introduit quelques résultats de base qui seront utilisés dans les sections suivantes. Tout d'abord, on prouve l'analogue ultramétrique du premier théorème principal. Puis, on va présenter l'analogue du deuxième théorème fondamental.

2.2.1 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 2.2.1. *[33, Théorème 2.13] Soient f une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$ tels que f n'a ni zéro ni pôle en zéro et $f(0) \neq 0$. Alors pour tout r positif, on a*

$$T\Big(r, \frac{1}{f-a}\Big) = T(r, f) + O(1).$$

Preuve. La preuve est très facile et vient directement du Corollaire 2.1.6 et la Proposition 2.1.10 (la propriété 2). □

2.2.2 Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna

Le premier théorème de Nevanlinna a très peu d'importance. Par contre, le second théorème est essentiel : c'est lui qui permet de résoudre des problèmes. Il est plus utilisé dans la théorie de distribution de valeurs. La version ultramétrique a été d'abord introduite par A. Boutabaa [13] en considérant le corps $\mathbb{K}$ tout entier. Ensuite, avec A. Escassut [15] ils ont étendu ce théorème à $D^-(0, R)$. Maintenant, on donne l'analogue ultramétrique du deuxième théorème principal (voir par exemple [17, 20, 36])

Théorème 2.2.2. *[33, Théorème 2.15] Soient $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$ où $q \geq 2$. Soit f une fonction méromorphe non constante dans $\mathbb{K}$ $\big($resp. dans $D^-(0, R)\big)$ telle que f n'ayant ni zéro ni pôle en 0, f' et $f - a_i$ ne sont pas nulles en 0. Alors pour $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$, on a*

$$(q-1)T(r, f) \leq \bar{N}(r, f) + \sum_{j=1}^{q} \bar{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'} : f(x) \neq a_i \, \forall i = 1, \dots, q\right) - \log r + O(1).$$

La preuve de ce théorème est très longue et on peut la trouver dans [33, pages 44-46].

2.3 Estimations de la croissance des fonctions méromorphes

Avant de donner quelques propriétés de la théorie de Nevanlinna liées aux fonctions méromorphes, on donne une définition qui aura un rôle majeur dans ce chapitre et dans le dernier chapitre. Ensuite, nous étudions deux exemples et donnons une estimation de la fonction de Nevanlinna d'un polynôme et d'une fraction rationnelle.

Définition 2.3.1. *Soient P, Q sont des polynômes ont des coefficients dans $\mathbb{K}$, sans zéros communs, on appelle degré de la fonction rationnelle $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, et on note* $\deg(R)$ *le nombre* $\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Exemple 2.3.2. *Soit A un polynôme a coefficients dans $\mathbb{K}$*

$$A(x) = \sum_{j=0}^{K} a_j x^j (a_k \neq 0).$$

Maintenant, on estime $T(r, A)$. Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ l'ensemble des zéros de A (il est claire que $n \leq k$), et soient $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \dots, \omega_{\alpha_n}$ leurs ordres de multiplicité respectifs. On suppose que $\gamma = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$ et $r \geq \gamma$. Alors

$$\begin{aligned} N\Big(r, \frac{1}{A}\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log r - \log |\alpha_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log r - \log \gamma) + \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} (\log \gamma - \log |\alpha_i|) \\ &= \log r \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} \Big(\log \frac{\gamma}{|\alpha_i|} - \log \gamma\Big). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{K}$ est un corps ultramétrique complet et algébriquement clos, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{\alpha_i} = \deg(A)$. D'où

$$T(r, A) = m(r, A) = \deg(A) \log r + O(1).$$

Exemple 2.3.3. *Soit A et B deux polynômes premiers entre eux et avec des coefficients dans $\mathbb{K}$*

$$A(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j (a_k \neq 0), \quad B(x) = \sum_{j=0}^{q} b_j x^j (b_q \neq 0).$$

Maintenant, on va estimer $T(r, R)$ pour la fonction rationnelle $R = \dfrac{A}{B}$. Soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ et $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\}$ les ensembles des zéros de A et B respectivement. D'après l'exemple Précédent, lorsque $r > \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, on a

$$Z(r, A) = k \log r + O(1), \text{ et } Z(r, B) = q \log r + O(1).$$

Donc d'après la définition de la fonction caractéristique de Nevanlinna, on a

$$T(r, R) = \max\{Z(r, A) + \log |A(0)|, Z(r, B)\} = \deg(R) \log r + O(1),$$

où, par définition,

$$\deg(R) = \max\{q, k\}.$$

Inversement, si une fonction méromorphe f sur $\mathbb{K}$ satisfait

$$T(r, f) = O(\log r)\ (r \to +\infty),$$

alors f est une fonction rationnelle.

De l'Exemple 2.3.3, on obtient les propriétés suivantes :

Corollaire 2.3.4. *[33, Corollaire 2.46] Une fonction méromorphe f dans $\mathbb{K}$ est une fonction rationnelle de degré d si et seulement si* $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,f)}{\log r} = d$.

Corollaire 2.3.5. *[33, Corollaire 2.7] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ qui n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors f est transcendante si et seulement si* $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,f)}{\log r} = +\infty$.

Preuve. D'abord, on suppose que f est une fonction rationnelle. Donc, d'après l'exemple précédent pour tout r assez grand, on a

$$T(r, f) = \deg(f) \log r + O(1).$$

Par conséquent $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,f)}{\log r} = \deg(f)$.

Maintenant, on suppose que f est une fonction méromorphe transcendante. D'où, f admet une infinité des zéros ou une infinité des pôles. Alors, pour tout nombre positif λ, on a $T(r, f) > \lambda \log r$, $\forall r > 0$. Par conséquent $\lim\limits_{r\to+\infty} \dfrac{T(r,f)}{\log r} = +\infty$. $\square$

Dans le cas où f est une fonction méromorphe dans un disque ouvert de centre zéro et de rayon r, on a le résultat suivant.

Théorème 2.3.6. *[15, Théorèm 1.1] Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors f est une fonction méromorphe bornée dans $D^-(0, R)$ si et seulement si $T(r, f)$ est bornée.*

Passons au cas plus général ; c'est l'estimation de la fonction caractéristique d'une fraction rationnelle avec plusieurs variables $R(x, f)$ où f est une fonction méromorphe, puis on va présenter l'analogue du théorème de Valiron-Mokhon'ko dans le cas ultramétrique, qui va jouer un rôle important dans le troisième chapitre. On pose

$$A(x, f(x)) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x) f(x)^j,$$

où f et $a_j \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $(j = 0, 1, \ldots, k)$ tel que $a_k \neq 0$. Alors, on a le résultat suivant

Théorème 2.3.7. *[33, Théorème 2.11] Soit f est une fonction méromorphe non constante, alors*

$$T(r, A \circ f) = kT(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j)\right), \tag{2.4}$$

où $A \circ f$ est défini par $A \circ f(x) = A(x, f(x))$.

De plus, si $b_0, \ldots, b_q$ sont des fonctions méromorphes dans $\mathbb{K}$ avec $b_q \neq 0$ tells que

$$B(x, f(x)) = \sum_{j=0}^{q} b_j(x) f(x)^j,$$

et $A(x, f)$ sont des polynômes premiers entre eux en f. on pose

$$R(x, f) = \frac{A(x, f)}{B(x, f)}.$$

Et on a le résultat suivant

Théorème 2.3.8. *[33, Théorème 2.12] Soit f est une fonction méromorphe non constante, alors*

$$T(r, R \circ f) = \max\{k, q\} T(r, f) + O\left(\sum_{j=0}^{k} T(r, a_j) + \sum_{j=0}^{q} T(r, b_j)\right). \tag{2.5}$$

Le Théorème 2.3.8 a été prouvé par Gackstatter et Laine [24], et Mokhon'ko [43] pour les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ (voir aussi Pei chu Hu et Chung chun Yang [31, 32]). Dans le cas ultramétrique et comme une version particulière du Théorème 2.3.8 où les coefficients $\{a_j\}$ et $\{b_j\}$ de la fonction $R(x, f)$ sont des fonctions rationnelles, Abdelbaki Boutabaa a démontré le théorème suivant

Théorème 2.3.9. *[12, Théorème II.1] soit f une fonction méromorphe et $R(x, f)$ une fonction rationnelle irréductible en f telle que*

$$R\big(x, f(x)\big) = \frac{P\big(x, f(x)\big)}{Q\big(x, f(x)\big)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i(x) f(x)^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j(x) f(x)^j},$$

où les coefficients $a_i(x)$ *et* $b_j(x)$ *sont des fonctions rationnelles, alors la fonction caractéristique de* $R(x,f)$ *satisfait*

$$T\big(r, R(x,f)\big) = \max\{p,q\}T(r,f) + O(\log r). \tag{2.6}$$

Le Théorème 2.3.9 est l'analogue du Théorème de Valiron-Mokhon'ko classique.

Grâce aux résultats précédents, on a le théorème suivant qui est un analogue du théorème de J. G. Clunie (voir [28, P. 54]).

Théorème 2.3.10. *[33, Théorème 2.44] Soit* h *une fonction entière non constante et si* f *une fonction méromorphe transcendante, alors*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r, f\circ h)}{T(r,h)} = +\infty.$$

Corollaire 2.3.11. *[33, Corollaire 2.45] Une fonction méromorphe* f *dans* $\mathbb{K}$*, est une fonction rationnelle de degré* d *si et seulement si, pour toute fonction entière non constante* h *dans* $\mathbb{K}$*, on a*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r, f\circ h)}{T(r,h)} = d.$$

Parmi les propriétés de $T(r,f)$, on a

Proposition 2.3.12. *[12, Proposition I.4] Soit* f *une fonction méromorphe dans* $\mathbb{K}$ *telle que* f *n'a ni zéro ni pôle en zéro. Nous avons les équivalences suivantes :*

1. f *est une constante si et seulement si* $T(r,f) = o(\log r)$, $r \to +\infty$.
2. f *appartient à* $\mathbb{K}(x)$ *si et seulement si* $T(r,f) = O(\log r)$, $r \to +\infty$.
3. f *est non constante si et seulement si il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $A > 0$ *tels que*

$$T(r,f) \geq \log r + c, \ \ \textit{pour } r > A$$

.

Lemme 2.3.13. *[15, Lemme 2.4] Soit* $f \in \mathcal{M}\left(D^-(0,R)\right)$*, et soit* $\varepsilon > 0$*. Alors, il existe* $\phi, \psi \in \mathcal{A}\left(D^-(0,R)\right)$ *telles que* $f = \phi/\psi$*, et* $Z(r,\phi) \leq Z(r,f) + \varepsilon$*,* $Z(r,\psi) \leq N(r,f) + \varepsilon$ $\forall r \in]0, R[$.

Corollaire 2.3.14. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ n'ayant ni zéro ni pôle à l'origine. Alors, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $\phi, \psi \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ telles que $f = \phi/\psi$, vérifie*

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\big\{T(r,\phi), T(r,\psi)\big\}.$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, d'où il existe $\phi, \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ telles que $f = \phi/\psi$, vérifie les deux égalités suivantes $Z(r,\phi) = Z(r,f) + O(1)$ et $Z(r,\psi) = N(r,f) + O(1)$, pour tout $r > 0$. Donc, pour tout $r > 0$, on a

$$\max\{Z(r,\phi), Z(r,\psi)\} \leq \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + O(1).$$

Si $f \in \mathcal{M}\left(D^-\left(0,R\right)\right)$, d'après le Lemme 2.3.13, pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\phi, \psi \in \mathcal{A}\left(D^-\left(0,R\right)\right)$ telles que $f = \phi/\psi$ vérifie $Z(r,\phi) \leq Z(r,f) + \varepsilon$ et $Z(r,\psi) \leq N(r,f) + \varepsilon$, pour tout $r \in]0,R[$. Par conséquent, $\forall r \in]0,R[$, on a

$$\max\{Z(r,\phi), Z(r,\psi)\} \leq \max\{Z(r,f), N(r,f)\} + \epsilon.$$

D'autre part, pour tout $r \in]0 + \infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on sait que

$$T(r,f) + O(1) \geq \max\{Z(r,f), N(r,f)\},$$

et d'après le Corollaire 2.1.5, on a $Z(r,\phi) = T(r,\phi) + O(1)$ et $Z(r,\psi) = T(r,\psi) + O(1)$, pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. Ce qui achève la preuve. $\square$

Enfin, on donne quelques applications de la théorie de Nevanlinna, lesquelles établissent des liens entre des fonctions méromorphes et leurs dérivées.

Proposition 2.3.15. *[12, Proposition I.5] Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))\big)$ telle que pour tout entier n, $f^{(n)}$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$, on a*

1. $N(r,f^{(n)}) = N(r,f) + n\bar{N}(r,f)$,
2. $Z(r,f^{(n)}) \leq Z(r,f) + n\bar{N}(r,f) - \log r + O(1)$,
3. $T(r,f^{(n)}) \leq T(r,f) + n\bar{N}(r,f) \leq (n+1)T(r,f)$.

Preuve. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des pôles de f dans le disque $|x| \leq r$, on suppose que chaque α_i est d'ordre m_i tel que $i \in \{1, \dots, k\}$. Il est facile de voir que chaque pôle α de f d'ordre m est un pôle de $f^{(n)}$ d'ordre $m+n$. D'où, les pôles de $f^{(n)}$ dans le disque $|x| \leq r$ sont $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ et leurs multiplicité sont $m_1+n, m_2+n, \dots, m_k+n$ respectivement. D'où

$$\begin{aligned} N\left(r, f^{(n)}\right) &= (m_1+n)\left(\log r - \log|\alpha_1|\right) + \ldots + (m_k+n)\left(\log r - \log|\alpha_k|\right) \\ &= m_1\left(\log r - \log|\alpha_1|\right) + \ldots + m_k\left(\log r - \log|\alpha_k|\right) \\ &+ n\Big(\left(\log r - \log|\alpha_1|\right) + \ldots + \left(\log r - \log|\alpha_k|\right)\Big) \\ &= N(r,f) + n\bar{N}(r,f). \end{aligned}$$

Ainsi, la première égalité est démontrée.

2. Montrons la deuxième inégalité. Soit $r \in]0, +\infty[$ $\big($resp. $r \in]0, R[\big)$. D'après la formule de Jensen $\big($Théorème 2.1.4$\big)$, on a

$$Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)| = \log|f|(r) \text{ et } Z(r,f^{'}) - N(r,f^{'}) + \log|f^{'}(0)| = \log|f^{'}|(r).$$

D'autre part, d'après le Théorème 1.7.3, on a $|f^{'}|(r) \leq \dfrac{|f|(r)}{r}$. D'où, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient que $\log|f^{'}|(r) \leq \log|f|(r) - \log r$. Par conséquent

$$Z(r,f^{'}) \leq Z(r,f) + N(r,f^{'}) - N(r,f) - \log r + O(1).$$

Mais, d'après la première inégalité, $N(r,f^{'}) - N(r,f) = \bar{N}(r,f)$. Alors,

$$Z(r,f^{'}) \leq Z(r,f) + \bar{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. On suppose que l'inégalité précédente est vraie pour tout $n \leq s$. Donc

$$Z(r,f^{(s+1)}) \leq Z(r,f^{(s)}) + N(r,f^{(s)}) - \log r + O(1).$$

Par conséquent

$$Z\left(r, f^{(s+1)}\right) \leq Z(r,f) + \underbrace{\bar{N}(r,f) + \ldots + \bar{N}(r,f)}_{s\,fois} + \bar{N}\left(r, f^{(s)}\right) - \log r + O(1),$$

Puisque $\bar{N}\left(r, f^{(s)}\right) = \bar{N}(r,f)$ et ce qui achève la démonstration de la deuxième inégalité.

3. Pour démontrer la troisième inégalité on a les faits que $\bar{N}(r,f) \leq N(r,f) \leq T(r,f)$ et $m\Big(r, \dfrac{f'}{f}\Big) = 0$, pour tout $r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $r \in]0,R[\big)$. D'après la définition de la fonction caractéristique $T(r,.)$, on a

$$\begin{aligned}
T\left(r, f^{(n)}\right) &= N\left(r, f^{(n)}\right) + m\left(r, f^{(n)}\right) \\
&= N(r,f) + n\bar{N}(r,f) + m\left(r, f^{(n)}\right) \\
&= N(r,f) + n\bar{N}(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}} \cdots \frac{f'}{f} f\right) \\
&\leq N(r,f) + n\bar{N}(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f^{(n-1)}}\right) + \ldots + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r,f) \\
&= T(r,f) + n\bar{N}(r,f).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$T\left(r, f^{(n)}\right) \leq T(r,f) + n\bar{N}(r,f) \leq (n+1)T(r,f).$$

□

Remarque. *La deuxième inégalité de la Proposition 2.3.15 n'est pas valable si on considère des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. Voici un contre-exemple : Soit $f(x) = e^{-\cos(x)}$. Il est clair que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ n'a pas de zéros dans $\mathbb{C}$. Donc, pour tout $r > 0$, on a $Z(r,f) = 0$. D'autre part, on a $f'(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)}$, on sait que* sin *est une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}$, d'où*

$$\lim_{r\to+\infty} Z\left(r, f'\right) = Z\big(r, \sin(x)\big) = +\infty.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{r\to+\infty} Z\left(r, f'\right) - Z(r,f) = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité de la Proposition précédente.

Corollaire 2.3.16. *Soient $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ $\big($resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))\big)$ et $n \in \mathbb{N}$ telle que $f^{(n)}$ n'a pas de zéro en 0. Alors, $T\left(r, f^{(n)}\right) \leq T(r,f) + O(1)$ $\forall r \in]0,+\infty[$ $\big($resp. $\forall r \in]0,R[\big)$.*

2.4 L'ordre de croissance d'une fonction méromorphe

Dans cette section, on va définir l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe. Puis, on donnera quelques-unes de ses propriétés.

De la même manière de la définition connue sur les fonctions méromorphe sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ (voir [47]). Dans [10, 11], K. Boussaf, A. Boutabaa et A. Escassut ont défini l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ comme suit.

Définition 2.4.1. *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$. On appelle ordre de croissance de f, que l'on note $\rho(f)$, la valeur*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}. \tag{2.7}$$

Dans le cas particulier où f est une fonction entière dans $\mathbb{K}$, on a

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log(\log |f|(r))}{\log r}. \tag{2.8}$$

On dit que f est d'ordre fini si $\rho(f) < +\infty$.

Théorème 2.4.2. *[11, Théorème 1] Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Alors, si $c(|f|(r))^\alpha \geq |g|(r)$ avec α et $c > 0$, pour r assez grand, on a*

1. *$\rho(f) \geq \rho(g)$.*
2. *$\rho(f+g) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$.*
3. *$\rho(fg) = \max(\rho(f), \rho(g))$.*

Corollaire 2.4.3. *[11, Corollaire 1.1] Soient f, g des fonctions entières sur $\mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\rho(f^n) = \rho(f)$. Aussi, si $\rho(f) > \rho(g)$, alors $\rho(f+g) = \rho(f)$.*

Théorème 2.4.4. *[11, Théorème 2] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}[x]$. Alors, $\rho(P \circ f) = \rho(f)$ et $\rho(f \circ P) = \deg(P)\rho(f)$.*

Théorème 2.4.5. *[11, Théorème 3] Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(x)$. Si $\rho(f) \neq 0$, alors $\rho(f \circ g) = +\infty$. Et si $\rho(f) = 0$, alors $\rho(f \circ g) \geq \rho(g)$.*

Remarque. *Bien sûr, les polynômes ont un ordre de croissance égal à 0. Sur $\mathbb{K}$ comme sur $\mathbb{C}$, on peut facilement construire des fonctions entières transcendantes d'ordre 0 ou d'ordre ∞.*

Pour plus d'informations sur l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{K}$ (voir par exemple [10, 11]).

Chapitre 3

Certaines propriétés des solutions méromorphes des équations fonctionnelles dans un corps ultramétrique

Sommaire

Dans ce chapitre, on va étudier la croissance des solutions méromorphes de certaines équations aux différences et aux q-différences. Ces équations découlent de l'étude analogue de l'équation différentielle de type Malmquist et de l'équation q-différence de type Schröder. On va donner également quelques caractérisations de l'ordre de croissance pour les solutions méromorphes transcendantes de telles équations.

Récemment, il y a beaucoup d'articles (voir par exemple [1, 3, 5, 7–9, 26, 29, 30, 39, 50, 51]) qui se sont concentrés sur les propriétés des solutions méromorphes des équations aux différences et des équations aux q-différences et de nombreux résultats significatifs ont été obtenus sur la croissance de leurs solutions dans les cas complexes et ultramétriques. L'objectif principal de notre travail est de généraliser certains de ces résultats au cas des équations ultramétriques de type Malmquist et de type Schröder.

3.1 Sur la croissance des solutions méromorphes des équations aux différences de type Malmquist

Il existe de nombreux résultats sur les solutions méromorphes des équations aux différences dans le cas complexe et ultramétrique (voir par exemple [1, 9, 16, 18, 19, 29, 38, 40, 41, 49]) où les auteurs ont étudié la croissance et d'autres propriétés des solutions méromorphes de telles équations. Le célèbre théorème de Malmquist énonce en 1913 qu'une équation différentielle complexe de la forme

$$y' = R(x, y), \tag{3.1}$$

où $R(x, y)$ est rationnel dans les deux arguments à coefficients rationnels, et qui admet une solution méromorphe transcendante y, peut s'écrire sous la forme de l'équation différentielle de Riccati

$$y'(x) = a_1(x) + a_2(x)y(x) + a_3(x)y(x)^2,$$

avec des coefficients rationnels (pour plus de détails à ce sujet voir [37, 42]).

Notons que l'équation (3.1) a été étudiée dans le cas ultramétrique par Abdelbaki Boutabaa. Il a obtenu que si l'équation différentielle (3.1) admet une solution méromorphe transcendante dans $\mathbb{K}$, alors c'est une équation de Riccati (voir[12, Corollaire II.4]). De plus, il a prouvé l'analogue du Théorème de Yosida dans le cas ultramétrique. Il a obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *[12, Théorème II.3] Si l'équation différentielle*

$$\frac{d^m y}{dx^m} = R(x, y(x)), \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

admet au moins une solution méromorphe transcendante dans $\mathbb{K}$, alors $R(x, y(x))$ est un polynôme en y de degré $\leq 2m$.

Dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, il existe de nombreux résultats sur les solutions méromorphes des équations aux différences de type Malmquist (voir par exemple [1, 29]). Dans cette section, on va généraliser certains de ces résultats au cas des équations aux différences ultramétriques d'une classe plus large des équations aux différences.

3.1.1 L'ordre de croissance des solutions méromorphes des équations aux différences

Au début de cette section, on va étudier les équations suivantes

$$\sum_{j=1}^{n} A_j y(x + c_j) = R(x, y(x)), \tag{3.2}$$

et

$$\prod_{j=1}^{n} A_j y(x + c_j) = R(x, y(x)), \tag{3.3}$$

où

$$R(x, y(x)) = \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{p} a_i(x) y(x)^i}{\sum\limits_{i=0}^{q} b_i(x) y(x)^i},$$

$a_i(x)$ et $b_i(x)$ sont des fonctions rationnelles telle que $a_p(x) b_q(x) \neq 0$, $A_1, \ldots, A_n$ sont des constantes de $\mathbb{K}$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Tout au long de cette section, on note par $p = \deg_y P$, et $q = \deg_y Q$, les degrés du numérateur P et du dénominateur Q, respectivement, par rapport à y. De la même manière, on pose $d = \max\{p, q\}$.

Notons que dans le domaine des nombres complexes, les équations (3.2) et (3.3) ont été étudiées par Ablowitz, Halberd et Herbst dans [1]. Ils ont obtenu les résultats suivants

Théorème 3.1.2. *[1, Théorème 3] Si l'équation aux différences du second ordre*

$$y(x+1) + y(x-1) = R(x, y(x)) = \frac{a_0(x) + a_1(x) y(x) + \cdots + a_p(x) y(x)^p}{b_0(x) + b_1(x) y(x) + \cdots + b_q(x) y(x)^q},$$

où $a_i(x)$ et $b_i(x)$ sont des polynômes, admet une solution méromorphe non rationnelle d'ordre fini, alors $\max(p, q) = 2$.

Théorème 3.1.3. *[1, Théorème 5] Si l'équation aux différences du second ordre*

$$y(x+1)y(x-1) = R(x, y(x)) = \frac{a_0(x) + a_1(x)y(x) + \cdots + a_p(x)y(x)^p}{b_0(x) + b_1(x)y(x) + \cdots + b_q(x)y(x)^q},$$

où $a_i(x)$ et $b_i(x)$ sont des polynômes, admet une solution méromorphe non rationnelle d'ordre fini, alors $\max(p, q) = 2$.

Dans ce qui suit de cette section, on note σ la fonction définie par $\sigma(x) = x + c$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{N}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on obtient $\sigma^k = \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ (k fois). Certaines propriétés de cet opérateur sont résumées dans le lemme suivant

Lemme 3.1.4. *[9, Lemme 5.2] Soit f une fonction méromorphe dans $\mathbb{K}$ et $r > 1$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a*

1. $|f \circ \sigma^k|(r) = |f|(r)$,
2. $m(r, f \circ \sigma^k) = m(r, f)$,
3. $N(r, f \circ \sigma^k) = N(r, f) + O(1)$,
4. $T(r, f \circ \sigma^k) = T(r, f) + O(1)$.

Le théorème suivant est l'un de nos principaux résultats

Théorème 3.1.5. *Soit y une solution méromorphe transcendante de l'équation aux différences* (3.2) $\big($*resp. de l'équation* (3.3)$\big)$*. Si $d > n$, on a $\rho(y) = \infty$.*

Preuve. Supposons que y est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.2). En introduisant les caractéristiques de Nevanlinna des deux côtés de l'équation (3.2), on obtient

$$T(r, \sum_{j=1}^{n} y(x + c_j)) = T(r, R(x, y(x))). \tag{3.4}$$

D'après le Théorème 2.3.9 et en utilisant le fait que le côté gauche de l'équation (3.4) est borné par $\sum_{j=1}^{n} T(r, y(x + c_j)) + O(1)$, on a

$$T(r, R(x, y(x))) = dT(r, y(x)) + O(\log r). \tag{3.5}$$

En utilisant le Lemme 3.1.4, on a

$$\sum_{j=1}^{n} T(r, y(x + c_j)) = nT(r, y(x)) + O(1). \tag{3.6}$$

Aussi, pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, il est évident que

$$T(r, y(x+c_j)) \leq (1+\epsilon)T(r+1, y(x)) + O(1), \tag{3.7}$$

où $\epsilon > 0$ est un constant arbitraire. Donc, par (3.4), (3.5) et (3.7), on a

$$T(r+1, y(x)) \geq kT(r, y(x)) + O(\log r), \tag{3.8}$$

où $k = \dfrac{d}{n(\epsilon+1)}$. De la même façon, on a

$$T(r+2, y(x)) \geq k^2 T(r, y(x)) + O(k \log r + \log(r+1)).$$

En répétant ce raisonnement s fois, on obtient

$$T(r+s, y(x)) \geq k^s T(r, y(x)) + g(r), \tag{3.9}$$

où $g(r) = O(h(r))$ et $h(r) = \log(r+s-1) + k\log(r+s-2) + \ldots + k^{s-1}\log r$.

D'autre part, on a

$$h(r) = k^{s-1} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\log(r+i)}{k^i} \leq k^{s-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log(r+i)}{k^i}. \tag{3.10}$$

Puisque $k > 1$ et en utilisant $\log(r+i) \leq (\log r)(\log i)$, pour r et i suffisamment grands, on remarque que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log(r+i)}{k^i}$$

est convergente. En fait, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log(r+i)}{k^i} \leq \log r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log i}{k^i}. \tag{3.11}$$

et aussi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log i}{k^i} < \infty \quad \text{où } k > 1.$$

Par conséquent, par (3.10) et (3.11), on a

$$|g(r)| < Ck^s \log r, \tag{3.12}$$

où C est une constante positive. Puisque y est une fonction entière transcendante, on peut choisir r_0 suffisamment grand tel que pour tout $r > r_0$, on a

$$T(r, y(x)) > 2C \log r. \tag{3.13}$$

Donc, par (3.9), (3.12) et (3.13), il existe r_0 tel que pour $r \geq r_0$, on a

$$T(r+s, y(x)) > Ck^s \log r. \tag{3.14}$$

D'où, pour tout $r \geq r_0$ suffisamment grand, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $r \in [r_0 + s, r_0 + s + 1)$, c'est-à-dire $s = [r - r_0]$ (où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t). En notant $\rho = r + s$, alors pour tout $\rho \geq \rho_0 = r_0 + s$ et par (3.14), on obtient

$$T(\rho, y(x)) \geq T(r_0 + s, y(x)) > C' k^{\rho},$$

où $C' = Ck^{-r_0 - 1} \log r_0$. D'après (2.7), il est clair que $\rho(y) = \infty$.

Dans le second cas, où y est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.3), on utilise simplement la propriété suivante

$$T(r, \prod_{i=1}^{n} A_i f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + O(1),$$

et on procède comme dans la preuve du cas précédent avec l'équation (3.2). Le Théorème 3.1.5 est prouvé. □

Remarques. 1. *Le résultat du Théorème 3.1.5 peut être formulé comme suit ; Si l'équation* (3.2) $\big($*resp.* (3.3)$\big)$ *admet une solution méromorphe non rationnelle d'ordre fini, alors* $d \leq n$.

2. *En comparant avec les Théorème 3.1.2 et Théorème 3.1.3 où* $n = 2$*, notre résultat ultramétrique du Théorème 3.1.5 est plus général. Car premièrement,* $n \geq 2$ *et, deuxièmement,* $d \leq n$.

Dans la deuxième partie de cette section, on va étudier l'équation suivante

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x) y(x + c_j) = \sum_{i=0}^{m} q_i(x) y^i(x), \tag{3.15}$$

où $c_1, \ldots, c_n$ sont des éléments de $\mathbb{N}^*$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $q_0(x), \ldots, q_m(x)$ sont des fonctions rationnelles et $m > 1$.

Notons que l'équation (3.15) a été étudiée par J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppoa et K. Tohge (voir [29]) dans le cas complexe. Ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 3.1.6. *[29, Théorèm 10] Soit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et soit $m \geq 2$. Supposons que y est une solution méromorphe transcendante de l'équation aux différences*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(z)y(z+c_i) = \sum_{j=0}^{m} b_j(z)y(z)^j \tag{3.16}$$

à coefficients rationnels $a_i(z), b_j(z)$. Posons $C := \max\{|c_1|, \dots, |c_n|\}$. Si y est entière ou a un nombre fini de pôles, alors il existe des constantes $K > 0$ et $r_0 > 0$ telles que

$$\log M(r, y) \geq K m^{r/C}$$

est valable pour tout $r \geq r_0$. Où $M(r, y) = \max\limits_{|z|=r} |y(z)|$.

Dans notre travail, nous étudions l'analogue de cette équation dans le cas ultramétrique. On obtient ce qui suit

Théorème 3.1.7. *Soit y une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.15). Si y est entière ou a un nombre fini de pôles, alors il existe des constantes $K > 0$ et $r_0 > 0$ telles que $\log|y|(r) > K m^r$, $r \geq r_0$.*

Preuve. Supposons que y est une solution méromorphe transcendante de (3.15) et que y possède un nombre fini de pôles. Alors, il existe un polynôme $B(x)$ et une fonction entière transcendante $h(x)$ tels que $y(x) = \dfrac{h(x)}{B(x)}$. En remplaçant dans (3.15) et en multipliant par les dénominateurs, on voit que h satisfait une équation du même type lorsque $y(x)$ est une fonction entière transcendante. Alors, on peut supposer sans perte de généralité que $y \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$.

Soit y une solution entière transcendante de l'équation (3.15). On multiplie les dénominateurs des coefficients $p_j(x), q_i(x)$ dans (3.15), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x)y(x+c_j) = \sum_{i=0}^{m} B_i(x)y^i(x), \tag{3.17}$$

où les coefficients $A_j(x), B_i(x)$ sont des polynômes. Par le principe du module maximum, on a

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)y(x+c_j)\Big|(r) = \Big|\sum_{i=0}^{m} B_i(x)y^i(x)\Big|(r). \tag{3.18}$$

Puisque y est une fonction entière transcendante et que $B_0(x), \ldots, B_m(x)$ sont des polynômes, on a $\Big|\sum\limits_{i=1}^{m-1} B_i(x)y(x)^i\Big|(r) = o(|y|^m(r))$. Donc

$$\frac{1}{2}\Big|B_m\Big|(r)\Big|y\Big|^m(r) \leq \Big|\sum_{i=0}^{m} B_i(x)y(x)^i\Big|(r), \tag{3.19}$$

quand r est suffisamment grand. En utilisant le fait que $|.|(r)$ est une norme multiplicative et le Lemme 3.1.4, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)y(x+c_j)\Big|(r) &\leq \max_{1\leq j\leq n}\Big\{|A_j|(r)|y\circ\sigma^j|(r)\Big\}\\ &\leq |y|(r)\max_{1\leq j\leq n}\big\{|A_j|(r)\big\}.\end{aligned}$$

Puisque $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des polynômes, il existe $\lambda > 1$ tel que, pour $r > 0$ assez grand, on a

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)y(x+c_j)\Big|(r) \leq r^\lambda|y|(r). \tag{3.20}$$

D'autre part, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il est évident que

$$|y\circ\sigma^j|(r) \leq (1+\epsilon)|y|(r+1), \tag{3.21}$$

où ϵ est une constante strictement positive. Alors par (3.20) et (3.21), on a

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)y(x+c_j)\Big|(r) \leq (1+\epsilon)r^\lambda|y|(r+1). \tag{3.22}$$

Il est clair que, d'après (3.19) et (3.22), on obtient

$$\log|y|(r+1) \geq m\log|y|(r) + O(\log r). \tag{3.23}$$

De la même manière, nous avons

$$\log|y|(r+2) \geq m^2\log|y|(r) + O(m\log r + \log(r+1)).$$

En répétant ce raisonnement s fois, on obtient

$$\log|y|(r+s) \geq m^s\log|y|(r) + g(r), \tag{3.24}$$

où $g(r) = O(h(r))$ et $h(r) = \log(r+s-1) + m\log(r+s-2) + \ldots + m^{s-1}\log r$.

En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 3.1.5, on obtient

$$\log|y|(r+s) \geq Km^s \log r, \tag{3.25}$$

où K est une constante positive. Ainsi, pour chaque $r \geq r_0$ suffisamment grand, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $r \in [r_0+s, r_0+s+1)$. On pose $\rho = r+s$. Pour tout $\rho \geq \rho_0 = r_0+s$, par (3.25), on a

$$\log|y|(\rho) \geq \log|y|(r_0+s) > K^{'}m^{\rho},$$

où $K^{'} = Km^{-r_0-1}\log r_0$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.1.7. □

Remarques. *On observe que*

1. *L'assertion du Théorème 3.1.7 est indépendante des constantes c_j. Ce n'est pas le résultat du Théorème 3.1.6, l'analogue complexe où l'assertion dépend des éléments $c_1, \ldots, c_n$.*
2. *Les assertions complexes et ultramétriques du Théorème 3.1.6 et du Théorème 3.1.7, respectivement, sont indépendantes du nombre $n \in \mathbb{N}$ le nombre des termes du côté gauche des deux équations (3.15) et (3.16).*

Corollaire 3.1.8. *Si y est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.15) tel que y possède au plus un nombre fini de pôles, alors $\rho(y) = \infty$.*

Preuve. Si y est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.15) et y possède un nombre fini de pôles, alors en utilisant le Théorème 3.1.7 et (2.7), on obtient facilement $\rho(y) = \infty$. □

3.2 Certaines propriétés des solutions méromorphes des équations aux q-différences de type Schröder

L'article classique sur l'équation de Schröder

$$f(qz) = R(f(z)),$$

où $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0, 1$ et $R(f)$ est une fonction rationnelle en f, est due à J. F. Ritt [44] qu'il a publié en 1925. Plus tard, en 1983 dans [46], L. A. Rubel a posé la question : Que peut-on dire de l'équation plus générale

$$f(qz) = R(z, f),$$

où $R(z, f)$ est rationnel dans les deux variables ? Cette question a été examinée dans l'article [26] publié en 2002 par G. G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo et D. Yang où les auteurs ont étudié cette équation. Ils ont obtenu de nombreux résultats sur la relation entre ses solutions et q et $\deg_f(R)$.

Dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clos $\mathbb{K}$, N. Boudjerida, A. Boutabaa et S. Medjerab dans [8] ont établi des résultats concernant l'équation

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(x) f(q^j x) = B(x),$$

où $B(x)$ est un polynôme. Notre objectif est de généraliser l'essentiel de ces résultats au cas de l'équation de type Schröder. Autrement dit, on remplace $B(x)$ par une fraction rationnelle $R(x, f(x))$. Alors, dans cette section, on va étudier certaines propriétés de la taille des solutions méromorphes de l'équation au q-différence de type Schröder

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = R(x, f(x)) = \frac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))}, \tag{3.26}$$

où $q \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |q| < 1$, $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fractions rationnelles et P, Q sont des polynômes relativement premiers en f sur le corps des fonctions rationnelles telles que $p = \deg_f P$, $t = \deg_f Q$, $d = p - t \geq 2$.

Dans un premier temps, on montre que si $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ et les coefficients de $R(x, f(x))$ sont des constants, alors f est une fonction rationnelle. Ensuite, on passe à l'examen des solutions de l'équation (3.26) dans le cas où les coefficients sont des fractions rationnelles pour obtenir certaines caractéristiques de ces solutions.

3.2.1 Cas des coefficients constantes

Dans cette partie, on considère l'équation fonctionnelle suivante

$$\sum_{j=1}^{n} A_j f(q^j x) = R(f(x)) = \frac{\sum_{i=0}^{p} B_i f(x)^i}{\sum_{i=0}^{t} C_i f(x)^i} \tag{3.27}$$

où $q \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |q| < 1$, $A_1, \dots, A_n$, $B_0, \dots B_p$, $C_0, \dots, C_t$ sont des constants et $p - t \geq 2$.

Théorème 3.2.1. *Toute solution $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante de l'équation (3.27) est une fraction rationnelle qui possède au plus un pôle $\alpha = 0$.*

Le lemme suivant joue un rôle important dans les preuves de nos résultats.

Lemme 3.2.2. *[8, Lemme 1] Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a*

1) $|f \circ \sigma_q^n|(r) = |f|(|q|^n r)$,

2) $m(r, f \circ \sigma_q^n) = m(|q|^n r, f)$,

3) $N(r, f \circ \sigma_q^n) = N(|q|^n r, f)$,

4) $T(r, f \circ \sigma_q^n) = T(|q|^n r, f)$,

tel que $\sigma_q(x) = qx$ et $\sigma_q^n = \sigma_q \circ \sigma_q \circ \sigma_q \cdots \sigma_q$, n fois.

Preuve du Théorème 3.2.1. Soit $\alpha \neq 0$ un pôle de f de multiplicité m. Alors, α est un pôle de $R(f(x))$ de multiplicité dm. D'où, il existe au moins un indice $j_1 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\alpha_1 = q^{j_1}\alpha$ est un pôle de f de multiplicité $m_1 \geq dm$. On répète le même processus avec α_1 et on déduit qu'il existe au moins un index $j_2 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\alpha_2 = q^{j_2}\alpha_1$ est un pôle de f de multiplicité $m_2 \geq dm_1 \geq d^2 m$. Donc, on construit une suite de pôles de f ; $\alpha_k = q^{j_1 + \dots + j_k}$ ($j_i \in \{1, 2, \dots, n\}, i = 1, 2, ..., k$), de multiplicité $m_k \geq d^k m$. Il est clair que $\alpha_k \to 0$ quand $k \to \infty$, et on obtient une contradiction avec le principe des zéros isolés (resp. pôles). D'où, f n'a pas de pôles différents de 0.

Supposons que $\alpha = 0$ est un pôle de f d'ordre m, alors $f(x) = g(x)/x^m$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ tel que $g(0) \neq 0$. En remplaçant ceci dans l'équation (3.27), on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{g(q^j x)}{(q^j x)^m} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{p} B_i \frac{g(x)^i}{x^{im}}}{\sum\limits_{i=0}^{t} C_i \frac{g(x)^i}{x^{im}}}. \tag{3.28}$$

Après simplifications, l'équation (3.28) devient

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j g(q^j x) \right) \left(\sum_{i=0}^{t} C_i \frac{g(x)^i}{x^{im}} \right) = \sum_{i=0}^{p} B_i \frac{g(x)^i}{x^{(i-1)m}}, \tag{3.29}$$

où $\alpha_j = A_j/q^{jm}$. Comme $|g|(r)$ est une fonction croissante, en utilisant le Lemme 3.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g(q^j x)\right|(r) &\leq \max_{1\leq j\leq n}\{|\alpha_j||g|(|q|^j r)\}\\ &\leq \gamma_1|g|(|q|r), \end{aligned} \tag{3.30}$$

où $\gamma_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n}\{|\alpha_j|\}$. Ensuite, on a

$$\left|\sum_{i=0}^{t} C_i \frac{g(x)^i}{x^{im}}\right|(r) \leq \max_{0\leq i\leq t}\left\{|C_i|\frac{|g|^i(r)}{r^{im}}\right\},$$

D'autre part, pour r assez grand, on a

$$|g|^{p-1}(r) \geq |g|^{p-2}(r) \geq \ldots \geq |g|(r) \text{ et } r^m \geq 1 \geq \frac{1}{r^m} \geq \ldots \geq \frac{1}{r^{(p-2)m}}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\left|\sum_{i=0}^{t} C_i \frac{g(x)^i}{x^{im}}\right|(r) \leq \gamma_2|g|^t(r), \tag{3.31}$$

où $\gamma_2 = \max\limits_{0\leq i\leq t}\{|C_i|\}$. De plus, pour r suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=0}^{p-1} B_i \frac{g(x)^i}{x^{(i-1)m}}\right|(r) &\leq \max_{0\leq i\leq p-1}\left\{|B_i|\frac{|g|^i(r)}{r^{(i-1)m}}\right\}\\ &\leq \gamma_3 r^m|g|^{p-1}(r), \end{aligned} \tag{3.32}$$

où $\gamma_3 = \max\limits_{0\leq i\leq p-1}\{|B_i|\}$. D'après (3.29), on a

$$\frac{B_p g(x)^p}{x^{(p-1)m}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g(q^j x)\right)\left(\sum_{i=0}^{t} C_i\frac{g(x)^i}{x^{im}}\right) - \sum_{i=0}^{p-1} B_i\frac{g(x)^i}{x^{(i-1)m}}. \tag{3.33}$$

Donc, d'après (3.30), (3.31), (3.32) et (3.33), on a

$$\frac{|B_p||g|^p(r)}{r^{(p-1)m}} \leq \max\{\gamma_1\gamma_2|g|^{t+1}(r), \gamma_3 r^m|g|^{p-1}(r)\}. \tag{3.34}$$

Par hypothèse, on a $p-t \geq 2$, d'où $p-1 \geqslant t+1$. Alors, de (3.34), on a

$$|g|^p(r) \leq \frac{\gamma}{|B_p|} r^{pm}|g|^{p-1}(r),$$

où $\gamma = \max\{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\}$. Donc, il s'ensuit facilement que $|g|(r) \leqslant Cr^{pm}$, où $C = \dfrac{\gamma}{|B_p|}$. D'où, on obtient

$$\log |g|(r) \leq \log C + pm \log r.$$

En conséquence, on a

$$\log |g|(r) = O(\log r),\ r \to \infty.$$

Alors, on obtient que $g \in \mathbb{K}[X]$. Cela signifie que $f \in \mathbb{K}(X)$. ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 3.2.3. *Toute solution entière de l'équation (3.27) est une polynomiale.*

3.2.2 Cas des coefficients non constants

Dans cette partie, on va généraliser le premier cas de l'étude (où les coefficients ont été des constants). Nous allons étudier l'équation précédente, mais dans un cas plus général. C'est quand les coefficients ne sont pas constants. Donc, on va étudier l'équation suivante

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = \frac{P(x, f(x))}{Q(x, f(x))} = \frac{\sum_{i=0}^{p} B_i(x) f(x)^i}{\sum_{i=0}^{t} C_i(x) f(x)^i}, \tag{3.35}$$

où $q \in \mathbb{K}$ tel que $0 < |q| < 1$, $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ sont des fractions rationnelles et P, Q sont des polynômes relativement premiers en f sur le corps de fonctions rationnelles vérifiant $p = \deg_f P$, $t = \deg_f Q$, $d = p - t \geq 2$. On a obtenu les résultats suivants

Théorème 3.2.4. *Si f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.35), qui possède au plus un nombre fini de pôles, on a*

$$T(r, f) = O((\log r)^2),\ \ r \to \infty.$$

Théorème 3.2.5. *Si f est une solutions méromorphe transcendante de l'équation (3.35), qui a une infinité de pôles, on a*

$$(\log r)^2 = O(T(r, f)),\ \ r \to \infty.$$

Pour la démonstration de nos théorèmes, on a besoin des résultats suivants

Remarque. *La première observation est que si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$ possède au plus un nombre fini de pôles dans l'équation (3.35), on peut supposer sans perte de généralité que $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}[X]$. En effet, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$ possède au plus un nombre fini des pôles, on a $f(x) = \dfrac{h(x)}{B(x)}$, où h est une fonction entière transcendante et B est un polynôme. En remplaçant ceci dans l'équation (3.35) et en multipliant par les dénominateurs, on voit que h satisfait une équation du même type lorsque f est une fonction entière transcendante.*

Les lemmes suivants seront utiles pour la démonstration de nos résultats

Lemme 3.2.6. *[48, Lemme 3.2] Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

1. *f est une polynomiale,*
2. *il existe $c > 0$ et $s \geq 0$ tel que $|f|(r) \leq cr^s$, pour r assez grand.*

Lemme 3.2.7. *Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}(X)$ est une solution de l'équation (3.35) qui a une infinité des pôles, alors il existe une constante R telle que pour tout $r > R$, f admet au moins un pôle dans $D(0, r|q|^{-n}) \setminus D(0, r)$.*

Preuve. Soit R un constant positif tel que tous les zéros et les pôles de tous les coefficients de l'équation (3.35) sont dans le disque $D^-(0, R)$, et comme f admet une infinité des pôles, on peut choisir un pôle α de f d'ordre m tel que $|\alpha| > r$. Si $|\alpha| \leq |q|^{-n}r$, on a le résultat. Sinon, on déduit que α est un pôle de la partie droite de l'équation (3.35) d'ordre m. D'où, il existe au moins un indice $j_1 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\alpha_1 = q^{j_1}\alpha$ est un pôle de f d'ordre $m_1 \geq dm$, et on a $|\alpha| > |\alpha_1| = |q|^{j_1}|\alpha| > r|q|^{j_1-n} \geq r$. Si $|\alpha_1| \leq |q|^{-n}r$ on a le résultat. Sinon, on déduit que α_1 est un pôle de la partie droite de l'équation (3.35) d'ordre dm_1. D'où, il existe au moins un indice $j_2 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\alpha_2 = q^{j_2}\alpha_1$ est un pôle de f d'ordre $m_2 \geq dm_1$, et on a $|\alpha| > |\alpha_1| > |\alpha_2| = |q|^{j_2}|\alpha_1| > r|q|^{j_2-n} \geq r$. Si $|\alpha_2| \leq |q|^{-n}r$ on a le résultat. Sinon, on applique à nouveau ce raisonnement à α_2 au lieu de α_1.

Le processus ci-dessus doit s'arrêter à un certain rang. D'où, il existe au moins α tel que $r < \alpha \leq r|q|^{-n}$. □

Preuve du Théorème 3.2.4. En introduisant la fonction du module maximum $|.|(r)$ des deux côtés de l'équation (3.35), on obtient

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)f(q^j x)\Big|(r) = \left|\frac{\sum_{i=0}^{p} B_i(x)f(x)^i}{\sum_{i=0}^{t} C_i(x)f(x)^i}\right|(r).$$

Comme $|.|(r)$ est une est une norme multiplicative, on a

$$\Big|\sum_{i=0}^{t} C_i(x)f(x)^i\Big|(r)\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)f(q^j x)\Big|(r) = \Big|\sum_{i=0}^{p} B_i(x)f(x)^i\Big|(r). \tag{3.36}$$

En utilisant le Lemme 3.2.2, on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x)f(q^j x)\Big|(r) &\le \max_{1\le j\le n}\big\{|A_j|(r)|f|(|q|^j r)\big\}\\ &\le |f|(|q|r)\max_{1\le j\le n}\big\{|A_j|(r)\big\}. \end{aligned}\tag{3.37}$$

Aussi, nous avons

$$\Big|\sum_{i=0}^{t} C_i(x)f(x)^i\Big|(r) \le \max_{0\le i\le t}\big\{|C_i|(r)|f|^i(r)\big\}.$$

Comme f est une fonction entière transcendante, pour r assez grand, on a

$$|f|^t(r) \ge \cdots \ge |f|(r) > 1.$$

Donc

$$|\sum_{i=0}^{t} C_i(x)f(x)^i|(r) \le |f|^t(r)\max_{0\le i\le t}\{|C_i|(r)\}. \tag{3.38}$$

Puisque f est une fonction entière transcendante et $B_i(x)$, $(i = 1\ldots,p)$ sont des polynômes, on a $\big|\sum_{i=1}^{p-1} B_i(x)f(x)^i\big|(r) = o\big(|f|^p(r)\big)$. Par conséquent

$$\frac{1}{2}|B_p|(r)|f|^p(r) \le \Big|\sum_{i=0}^{p} B_i(x)f(x)^i\Big|(r), \tag{3.39}$$

quand r est suffisamment grand. De (3.36), (3.37), (3.38) et (3.39), on a

$$\frac{1}{2}|B_p|(r)|f|^p(r) \le |f|(|q|r)|f|^t(r)\max_{1\le j\le n}\{|A_j|(r)\}\max_{0\le i\le t}\{|C_i|(r)\}.$$

Comme $d = p - t \ge 2$, alors

$$|f|^d(r) \le \frac{|f|(|q|r)}{2|B_p|(r)|}\max_{1\le j\le n}\{|A_j|(r)\}\max_{0\le i\le t}\{|C_i|(r)\}.$$

Donc, il existe $\lambda > 1$ tel que, pour tout r assez grand, on a

$$|f|(r) \leq |f|^d(r) \leq r^{\lambda}|f|(|q|r). \tag{3.40}$$

Ainsi, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|f|(|q|^{-k}) \leq |q|^{-k\lambda}|f|(|q|^{1-k}). \tag{3.41}$$

De la même façon, on a

$$|f|(|q|^{1-k}) \leq |q|^{(1-k)\lambda}|f|(|q|^{2-k}). \tag{3.42}$$

De (3.41) et (3.42), on obtient

$$|f|(|q|^{-k}) \leq |q|^{-k\lambda}|q|^{(1-k)\lambda}|f|(|q|^{2-k}).$$

En répétant ce raisonnement k fois, on obtient

$$|f|(|q|^{-k}) \leq |q|^{-\lambda\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)}|f|(1). \tag{3.43}$$

Notant $r_k = |q|^{-k}$, on obtient $k = \dfrac{\log r_k}{\log |q|^{-1}}$. Alors, l'inégalité (3.43) devient

$$\log |f|(r_k) \leq \frac{\log r_k}{\log |q|^{-1}}\left(\frac{\log r_k}{\log |q|^{-1}} + 1\right)\frac{\log |q|^{-\lambda}}{2} + \log |f|(1). \tag{3.44}$$

D'où, par l'inégalité (3.44), on a

$$\log |f|(r_k) = O\big((\log r_k)^2\big),\ k \to \infty.$$

Comme $r_k \to \infty$ quand $k \to \infty$, on déduit que

$$T(r, f) = O\big((\log r)^2\big),\ r \to \infty.$$

Ceci achève la démonstration. □

Preuve du Théorème 3.2.5. Soit R une constante telle que tous les zéros et les pôles des coefficients de l'équation (3.35) sont dans le disque $D^-(0, R)$ et f est une fonction méromorphe transcendante qui possède une infinité des pôles. Pour chaque entier $k \geq 0$, on pose $r_k = R|q|^{-kn}$. D'après le Lemme 3.2.7, il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ de pôles de f tel que $r_k < |\alpha_k| \leq r_{k+1}$, pour tout entier k. Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
N(r_k, f) &= -\sum_{|\alpha|<r_k} \omega_\alpha(f) \log \frac{r_k}{|\alpha|} \\
&\geq \sum_{0\leq i<k} \log \frac{r_k}{|\alpha_i|} \geq \sum_{0\leq i<k} \log \frac{r_k}{r_i} \\
&= \sum_{0\leq i<k} \log |q|^{(i-k)n} \\
&= \log \prod_{0\leq i<k} |q|^{(i-k)n} \\
&= \log |q|^{-\dfrac{k(k+1)}{2}n}.
\end{aligned}$$

D'où

$$N(r_k, f) \geq \frac{k(k+1)}{2} \log |q|^{-n}. \tag{3.45}$$

Si l'on pose $r_k = R|q|^{-kn}$, on a

$$k = \frac{\log r_k - \log R}{n \log |q|^{-n}} \tag{3.46}$$

De (3.45) et (3.46), on a $(\log r_k)^2 = O\big(N(r_k, f)\big)$, $k \to \infty$. Parce que, $r_k \to \infty$ quand $k \to \infty$, on déduit que $(\log r)^2 = O\big(N(r, f)\big)$, $r \to \infty$. Par conséquent, on a

$$(\log r)^2 = O\big(T(r, f)\big),\ r \to \infty.$$

Ceci termine la démonstration du Théorème 3.2.5. □

Remarque. *L'étude des solutions de l'équation* (3.35) *dans les cas plus simples lorsque $R(x, f(x)) = P(x, f(x))$ ou f est une fonction entière sont données soit comme étape préliminaire, soit comme conséquence immédiate du cas général.*

Dans la dernière partie de cette section, on s'intéressera à l'étude des propriétés des solutions de l'équation (3.35), mais avec des conditions différentes des conditions précédentes (par exemple où $|q| > e$). On va étudier l'équation suivante

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = \sum_{i=0}^{d} B_i(x) f(x)^i, \tag{3.47}$$

où $A_1(x), \dots, A_n(x)$, $B_0(x), \dots, B_d(x)$ sont des fonctions rationnelles, $d \geq 2$ et $q \in \mathbb{K}$ tel que $|q| > e$.

On note que, dans [51], Xiu-Min Zheng et Zong-Xuan Chen ont étudié certaines propriétés des solutions méromorphes de l'équation (3.47) dans le cas complexe. Ils ont établi une estimation de l'ordre de la croissance de la solution méromorphe d'une telle équation. Dans la suite de notre travail, on a étudié l'analogue de leur équation dans le cas ultramétrique et nous avons obtenu une autre estimation comme suit.

Théorème 3.2.8. *Si f est une solution entière transcendante de l'équation (3.47), alors il existe des constantes $K^{'} > 0$ et $r_0 > e$ telles que*

$$\log |f|(r) \geq K^{'}(\log(r/|q|^n r_0))^2 d^{\log r / n \log |q|},$$

est valable pour tout $r \geq r_0$.

Preuve. On multiplie les dénominateurs des coefficients $A_j(x)$, $B_i(x)$ dans (3.47), d'où on peut supposer que les coefficients de l'équation (3.47) sont des polynômes. Donc, à partir d'ici on suppose que (3.47) est de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x) = \sum_{i=0}^{d} B_i(x) f(x)^i, \tag{3.48}$$

où $A_j(x),\ j = (1, \dots, n)$, $B_i(x),\ i = (1, \dots, d)$, sont des polynômes et $q \in \mathbb{K}$ tel que $|q| > e$.

Comme f est une fonction entière transcendante et $B_i(x)$ $(i = 0, \dots, d)$ sont des polynômes, on a $\Big|\sum\limits_{i=1}^{d-1} B_i(x) f(x)^i\Big|(r) = o(|f|^d(r))$. Donc

$$\Big|\sum_{i=0}^{d} B_i(x) f(x)^i\Big|(r) \geq \frac{1}{3}|B_d|(r)|f|^d(r), \tag{3.49}$$

quand r est suffisamment grand. D'autre part, on sait que $|.|(r)$ est une fonction croissante et en utilisant le fait que $|f(q^j x)|(r) = |f|(|q|^n r)$, on obtient

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_j(x) f(q^j x)\Big|(r) \leq |f|(|q|^n r) \max_{1 \leq j \leq n}\{|A_j|(r)\}. \tag{3.50}$$

D'où, de (3.48), (3.49) et (3.50) on a

$$|f|^d(r) \leq |f|(|q|^n r) \max_{1 \leq j \leq n}\left\{3\frac{|A_j|(r)}{|B_d|(r)}\right\}.$$

Alors, il existe $\lambda > 1$ tel que, pour $r > 0$ suffisamment grand, on a

$$\log|f|(|q|^n r) \geq d\log|f|(r) - \lambda\log r, \tag{3.51}$$

ensuite, on obtient

$$\log|f|(|q|^{2n} r) \geq d^2\log|f|(r) - \lambda d\log r - \lambda\log|q|^n r.$$

En répétant ce raisonnement k fois, on obtient

$$\log|f|(|q|^{kn} r) \geq d^k\log|f|(r) - \lambda\sum_{i=0}^{k-1}\frac{d^{k-1}}{d^i}\log|q|^{ni} r. \tag{3.52}$$

Puisque $|q| > e$, pour r suffisamment grand, disons $r \geq r_0$ tel que $r_0 \geq e$, on a

$$\log|q|^{ni} r = ni\log|q| + \log r \leq 2\max\left\{ni\log|q|, \log r\right\} \leq 2ni\log|q|\log r.$$

Donc, d'après (3.52), on a

$$\log|f|(|q|^{kn} r) \geq d^k\log|f|(r) - 2n\log|q|\log r\ \lambda\sum_{i=0}^{k-1}\frac{id^{k-1}}{d^i}. \tag{3.53}$$

Il est facile de trouver que $\sum_{i=0}^{k-1}\frac{id^{k-1}}{d^i} \leq d^k S_k$, où $S_k = 1+2+3+\ldots\ldots+k-1$. Par conséquent, on a

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{id^{k-1}}{d^i} \leq d^k\frac{k}{2}(k-1) \leq d^k\frac{k^2}{2}. \tag{3.54}$$

D'après (3.53) et (3.54), on a

$$\log|f|(|q|^{kn} r) \geq d^k\log|f|(r) - k^2\lambda d^k n\log|q|\log r. \tag{3.55}$$

Il est bien connu qu'une fonction entière est polynomial si et seulement si $T(r, f) = O(\log r)$. Par hypothèse, f n'est pas polynomial, donc on peut choisir r_0 suffisamment grand tel que pour tout $r > r_0$, on a

$$\log|f|(r) \geq 2k^2\lambda n\log|q|\log r.$$

Donc, d'après (3.55), on obtient

$$\log|f|(|q|^n r) \geq \lambda d^k k^2\log|q|^n\log r. \tag{3.56}$$

D'autre part, pour chaque r suffisamment grand, disons $r \geq r_0 \geq e$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$k = \left[\frac{\log r - \log r_0}{n \log |q|} \right], \text{ c'est-à-dire } k > \frac{\log r - \log |q|^n r_0}{n \log |q|}, \tag{3.57}$$

où $[s]$ désigne la partie entière du nombre réel s. Donc, d'après (3.56) et (3.57), on a

$$\log |f|(r) \geq K' \left(\log(r/|q|^n r_0) \right)^2 d^{\log r / n \log |q|},$$

où $K' = \lambda \frac{\log r_0}{n \log |q|} d^{-\log |q|^n r_0 / n \log |q|}$. Le Théorème 3.2.8 est prouvé. □

Remarque. *Si f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.47) qui possède un nombre fini de pôles, alors l'estimation du Théorème 3.2.8 reste aussi vraie.*

Comme une conséquence immédiate de la remarque ci-dessus et du Théorème 3.2.8, on obtient le résultat suivant

Corollaire 3.2.9. *Si f est une solution méromorphe transcendante de l'équation (3.47), qui a au plus un nombre fini de pôles, alors nous avons $\rho(f) \geq \dfrac{\log d}{n \log |q|}$.*

Conclusion et Perspectives

Cette thèse fait l'objet de quelques contributions dans l'étude des solutions méromorphes des équations fonctionnelles aux différences et q-différences dans un corps ultramétrique complet algébriquement clos qu'on note $\mathbb{K}$. Notre méthode d'étude est basée sur la théorie de Nevanlinna ultramétrique. Il y a encore beaucoup de problèmes ouverts dans ce domaine. Par exemple, nous prévoyons, dans des travaux futurs, d'étudier l'équation au q-différence non linéaire de la forme

$$R_1(qx, f(qx)) = R_2(x, f(x)),$$

où $q \in \mathbb{K}$ tel que $|q| > 1$, $R_1(x, f)$ et $R_2(x, f)$ sont des fonctions rationnelles avec coefficients sous forme de fractions rationnelles et $R_1(x, f)$ et $R_2(x, f)$ sont relativement premiers en f. Cette équation a déjà été traitée dans le corps des nombres complexe. Notre but essentiel est de comparer les résultats du cas ultramétrique à ceux qui sont obtenus dans le cas complexe.

Bibliographie

[1] M. J. Ablowitz, R. Halburd, and B. Herbst. On the extension of the Painlevé property to difference equations. *Nonlinearity*, 13(3) :889–905, 2000. doi:10.1088/0951-7715/13/3/321.

[2] Y. Amice. Les nombres p-adiques. Presses Universitaires de Frances, Collection SUP, 1975.

[3] W. Bergweiler, K. Ishizaki, and N. Yanagihara. Meromorphic solutions of some functional equations. *Methods Appl. Anal.*, 5(3) :248–258, 1998. doi:10.4310/MAA.1998.v5.n3.a2.

[4] W. Bergweiler, K. Ishizaki, and N. Yanagihara. Growth of meromorphic solutions of some functional equations I. *Aequationes Math.*, 63(1-2) :140–151, 2002. doi:10.1007/s00010-002-8012-x.

[5] J. P. Bézivin. Sur les équations fonctionnelles aux q-différences. *Aequationes Math.*, 43 (2-3) :159–176, 1992. doi:10.1007/BF01835698.

[6] J. P. Bézivin. Dynamique des fractions rationnelles p-adiques. *Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN*, 23, 2005.

[7] J. P. Bézivin and A. Boutabaa. Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences. *Collect. Math.*, 43(2) :125–140, 1992.

[8] N. Boudjerida, A. Boutabaa, and S. Medjerab. On some ultrametric q-difference equations. *Bull. Sci. Math.*, 137(2) :177–188, 2013. doi:10.1016/j.bulsci.2010.05.002.

[9] S. Bourourou, A. Boutabaa, and T. Zerzaihi. On the growth of solutions of difference equations in ultrametric fields. *Indag. Math., New Ser.*, 27(1) :112–123, 2016. doi:10.1016/j.indag.2015.08.005.

[10] K. Boussaf, A. Boutabaa, and A. Escassut. Growth of p-adic entire functions and applications. *Houston J. Math.*, 40(3) :715–736, 2014.

[11] K. Boussaf, A. Boutabaa, and A. Escassut. Order, type and cotype of growth for p-adic entire functions : a survey with additional properties. *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, 8(4) :280–297, 2016. doi:10.1134/S2070046616040026.

[12] A. Boutabaa. Theorie de Nevanlinna p-adique. (p-adic Nevanlinna theory). *Manuscr. Math.*, 67(3) :251–269, 1990. doi:10.1007/BF02568432.

[13] A. Boutabaa. Applications de la théorie de Nevanlinna p-adique. *Collect. Math.*, 42 (1) :75–93, 1991.

[14] A. Boutabaa and A. Escassut. On uniqueness of p-adic meromorphic functions. *Proc. Am. Math. Soc.*, 126(9) :2557–2568, 1998. doi:10.1090/S0002-9939-98-04533-X.

[15] A. Boutabaa and A. Escassut. Urs and ursims for p-adic meromorphic functions inside a disc. *Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser.*, 44(3) :485–504, 2001. doi:10.1017/S0013091599000759.

[16] Z. X. Chen. Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 373(1) :235–241, 2011. doi:10.1016/j.jmaa.2010.06.049.

[17] W. Cherry and Z. Ye. Non-Archimedean Nevanlinna theory in several variables and the non-Archimedean Nevanlinna inverse problem. *Trans. Am. Math. Soc.*, 349(12) : 5043–5071, 1997. doi:10.1090/S0002-9947-97-01874-6.

[18] Y. M. Chiang and S. J. Feng. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane. *Ramanujan J.*, 16(1) :105–129, 2008. doi:10.1007/s11139-007-9101-1.

[19] Y. M. Chiang and S. J. Feng. On the growth of logarithmic differences, difference quotients and logarithmic derivatives of meromorphic functions. *Trans. Am. Math. Soc.*, 361(7) :3767–3791, 2009. doi:10.1090/S0002-9947-09-04663-7.

[20] C. Corrales Rodrigáñez. Nevanlinna theory on the p-adic plane. *Ann. Pol. Math.*, 57 (2) :135–147, 1992. doi:10.4064/ap-57-2-135-147.

[21] B. Diarra. Analyse p-adique. *Cours de DEA-Algèbre Commutative, FAST-Université du Mali*, 1999.

[22] A. Escassut. *Analytic elements in p-adic analysis.* Singapore : World Scientific, 1995. doi:10.1142/2724.

[23] A. Escassut, W. Tutschke, and C. C. Yang. Some topics on value distribution and differentiability in complex and p-adic analysis. Beijing : Science Press, 2008.

[24] F. Gackstatter and I. Laine. Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen. *Ann. Pol. Math.*, 38 :259–287, 1980. doi:10.4064/ap-38-3-259-287.

[25] F. Q. Gouvêa. *p-adic numbers. An introduction.* Cham : Springer, 2020. doi:10.1007/978-3-030-47295-5.

[26] G. G. Gundersen, J. Heittokangas, I. Laine, J.Rieppo, and D. Yang. Meromorphic solutions of generalized Schröder equations. *Aequationes Math.*, 63(1-2) :110–135, 2002. doi:10.1007/s00010-002-8010-z.

[27] W. K. Hayman. Picard values of meromorphic functions and their derivatives. *Ann. Math. (2)*, 70 :9–42, 1959. doi:10.2307/1969890.

[28] W. K. Hayman. *Meromorphic functions.* Oxford University Press, Oxford, 1964.

[29] J. Heittokangas, R. Korhonen, I. Laine, J. Rieppo, and K. Tohge. Complex difference equations of Malmquist type. *Comput. Methods Funct. Theory*, 1(1) :27–39, 2001. doi:10.1007/BF03320974.

[30] J. Heittokangas, J. Wang, Z. T. Wen, and H. Yu. Meromorphic functions of finite φ-order and linear q-difference equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 27(9) :1280–1309, 2021. doi:10.1080/10236198.2021.1982919.

[31] P. C. Hu and C. C. Yang. The Second Main Theorem for algebroid functions of several complex variables. *Math. Z.*, 220(1) :99–126, 1995. doi:10.1007/BF02572605.

[32] P. C. Hu and C. C. Yang. Further results on factorization of meromorphic solutions of partial differential equations. *Result. Math.*, 30(3-4) :310–320, 1996. doi:10.1007/BF03322198.

[33] P. C. Hu and C. C. Yang. *Meromorphic functions over non-Archimedean fields.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000. doi:10.1007/978-94-015-9415-8.

[34] S. Katok. *p-adic analysis compared with real.* Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007. doi:10.1090/stml/037.

[35] H. H. Khóai. On p-adic meromorphic functions. *Duke Math. J.*, 50 :695–711, 1983. doi:10.1215/S0012-7094-83-05033-0.

[36] H. H. Khoái and M. V. Quang. On p-adic Nevanlinna theory. *Lect. Notes Math.*, 1351 : 146–158, 1988. doi:10.1007/BFb0081250.

[37] I. Laine. *Nevanlinna theory and complex differential equations.* Berlin : W. de Gruyter, 1992. doi:10.1515/9783110863147.

[38] I. Laine and C. C. Yang. Clunie theorems for difference and q-difference polynomials. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 76(3) :556–566, 2007. doi:10.1112/jlms/jdm073.

[39] S. T. Lan and Z. X Chen. Growth, zeros and fixed points of differences of meromorphic solutions of difference equations. *Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.)*, 35(1) :16–32, 2020. doi:10.1007/s11766-020-3582-8.

[40] S. Li and B. Chen. Results on meromorphic solutions of linear difference equations. *Adv. Difference Equ.*, 2012 :7, 2012. doi:10.1186/1687-1847-2012-203.

[41] Y. Liu. On growth of meromorphic solutions for linear difference equations with meromorphic coefficients. *Adv. Difference Equ.*, 2013 :9, 2013. doi:10.1186/1687-1847-2013-60.

[42] J. Malmqvist. On functions with a finite number of branches defined by first order differential equations. *Acta Math.*, 36 :297–343, 1913. doi:10.1007/BF02422385.

[43] A. Z. Mokhon'ko. Estimations for the increase of branches of algebroidal functions and their Nevanlinna characteristics. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.*, 33 :99–107, 1980.

[44] J. F. Ritt. Transcendental transcendency of certain functions of Poincaré. *Math. Ann.*, 95 :671–682, 1926. doi:10.1007/BF01206632.

[45] A. M. Robert. *A course in p-adic analysis.* New York, NY : Springer, 2000. doi:10.1007/978-1-4757-3254-2.

[46] L. A. Rubel. Some research problems about algebraic differential equations. II. *Ill. J. Math.*, 36(4) :659–680, 1992. doi:10.1090/S0002-9947-1983-0712248-1.

[47] L. A. Rubel. *Entire and meromorphic functions. With assistance from James E. Colliander.* New York, NY : Springer, 1996. doi:10.1007/978-1-4612-0735-1.

[48] B. Saoudi, A. Boutabaa, and T. Zerzaihi. On factorization of p-adic meromorphic functions. *Indag. Math., New Ser.*, 31(6) :921–933, 2020. doi:10.1016/j.indag.2020.07.002.

[49] Z. L. Yuan and Q. Ling. Results on the growth of meromorphic solutions of some linear difference equations with meromorphic coefficients. *Adv. Difference Equ.*, 2014 : 13, 2014. doi:10.1186/1687-1847-2014-306.

[50] G. Zhang. Growth of meromorphic solutions of some q-difference equations. *Abstr. Appl. Anal.*, 2013 :6, 2013. doi:10.1155/2013/943209.

[51] X. M. Zheng and Z. X. Chen. Some properties of meromorphic solutions of q-difference equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 361(2) :472–480, 2010. doi:10.1016/j.jmaa.2009.07.009.

الملخص : في هذه الأطروحة، نحن مهتمون بدراسة نمو الحلول الميرومورفية لبعض المعادلات الخطية الفرقية في حقل اولترامتري تام ومغلق جبريًا، وتنشا هذه المعادلات من فكرة نظرية مالمكويست الكلاسيكية في المعادلات التفاضلية و معادلات شرودر الفرقية. كما نعطي بعض خصائص ترتيب النمو ونعرض بعض التقديرات لحلول هذه المعادلات.

الكلمات المفتاحية : توابع ميرومورفية اولترامترية، نظرية نيفانلينا، المعادلات الخطية الفرقية، ترتيب النمو.

Abstract : In this thesis, we are interested in the study of the growth of meromorphic solutions of some ultrametric difference and q-difference equations in a complete ultrametric algebraically closed field, these equations arise from reasoning of the classical Malmquist theorem in differential equations and q-difference equations of shröder. We also give some characterizations of the order of growth, and we show some estimates of the solutions of such equations.

Keywords : Ultrametric meromorphic functions, Nevanlinna theory, Difference equations, q-Difference equations, Order of growth.

Résumé : Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la croissance des solutions méromorphes de certaines équations ultramétriques aux différences et q-différences dans un corps ultramétrique complet algébriquement clos, ces équations sont découlé du raisonnement du théorème de Malmquist classique en équations différentielles et des équations q-différences de shröder. On donne également quelques caractérisations de l'ordre de croissance, et nous montrons quelques estimations des solutions de ces équations.

Mots clés : Fonctions méromorphes ultramétriques, Théorie de Nevanlinna, Équations aux différences, Équations aux q-différences, Ordre de croissance.