REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DE JIJEL

N° d'ordre

Série

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées(LMPA)

Pour l'obtention du grade de

Docteur de troisième siècle

Spécialité Mathématiques

Option Analyse

Présentée et soutenue publiquement par

Hanane Chouial

le 26/06/2023

Thème

Régularité et sous différentiabilité des opérateurs multivoques

Jury composé de

Président :	Prof. W. Chikouche		Univ. de Jijel
Directeur :	Prof. M. F. Yarou		Univ. de Jijel
Examinateur :			
	M. Abada	M.C. A.	ENS de Constantine
	S. Lounis	M.C. A.	Univ. de Jijel

Dédicaces

Je dédie ma thèse :

A mes parents Mohammed et Dahbia Djouher.

A mon mari Rafik Chelghoum.

A mes frères (Abd elouahab, Aissa, Messaoud, Rabeh et Faress) et mes soeurs.

A mes neveux (Chaima, Isslam, Asma, Salsebil, Bouchra, Marwa, Yaakoub et Mayar).

A toute ma famille.

Remerciements

Je rende grâce à *Allah* en premier, et à sa bonté infini, pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donné pour terminer cette thèse jusqu'au bout.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à *Mustapha Fateh Yarou*, Professeur à l'université de Jijel mon directeur de thèse. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. ses précieux conseils, ses stimulants encouragements, ses assistances et sa modestie tout au long de ce travail.

Je remercier *Wided Chikouche*, Professeur à l'université de Jijel qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je suis très honoré que Madame Najet Abada Maitre de Conférence à ENS de Constantine et Madame Sabrina Lounis Maitre de Conférence à l'université de Jijel, aient accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je les prie de trouver ici l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Le grand hommage revient précisément à mes parents pour leurs coneils et encouragements durant toutes les années de mes études. Merci aussi à mes soeurs et mes frères qui m'ont toujours encouragé.

À mon mari, je vous remercie pour vos encouragements continus et votre compréhension tout au long de cette période.

Je remercie mes amies, Asma, Chaima, Houria et Karima qui m'écoutent, me comprennent, rient avec moi et partagent mes joies et mes peines, m'ont toujours soutenue. Je leur souhaite de réussir professionnellement et surtout dans leur vie privée.

Sans oublier de remarcier mes collègues du laboratoire de recherche et tous mes enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans la préparation de ce modeste travail.

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties principales, dans la première nous étudions trois résultats d'existence de solutions pour un processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps, gouverné par des ensembles prox-réguliers et avec deux perturbations, l'une semi-continue inférieurement et l'autre semi-continue mixte, ceci en utilisant les propriétés des ensembles décomposables au lieu des ensembles convexes, l'approche est basée sur une version du théorème du point fixe pour les multi-applications et le théorème d'existence de sélection mesurable pour les multi-applications semi-continues mixtes. Dans la deuxième partie, on montre trois résultats d'existence de solutions pour le processus de la rafle du premier ordre gouverné par des ensembles sous lisses, dépendant du temps et de l'état, mais avec une seule perturbation retardée, en utilisant deux méthodes différentes. La première étant de ramener le problème avec retard à un problème sans retard sur chaque sous intervalle de la subdivision et d'utiliser les résultats obtenus pour le problème sans retard. La deuxième méthode appliquée au processus de la rafle du premier ordre avec une perturbation retardée consiste à utiliser les projections successives, ce qu'on appelle l'algorithme de rattrapage, sur chaque sous intervalle de la subdivision pour construire la suite des solutions approchées.

Abstract

This thesis consists of two main parts, in the first we study some existence results of solutions for a time-dependent first order sweeping process governed by prox-regular sets and with two perturbations, one is lower semi-continuous and the other is mixed semi-continuous, this by using the properties of decomposable sets instead of convex sets, the approach is based on a version of fixed point theorem for multi-applications and the existence theorem of measurable selections for mixed semi-continuous multi-applications. In the second part, we show existence results for solutions, also for a first order sweeping process governed this time by subsmooth sets, depending on time and state, but with a single delayed perturbation, using two different methods. The first being to reduce the problem with delay to a problem without delay on each sub-interval of the subdivision and to use the results obtained for the problem without delay. The second method applied on the first order sweeping process with a delayed perturbation consists in using successive projections, which is called the catch-up algorithm, on each sub-interval of the subdivision to construct the sequence of approximate solutions.

ملخص

تتكون هذه الأطروحة من جزأين رئيسيين ، في الجزء الأول ندرس بعض النتائج لوجود الحلول لمسألة المسح من الدرجة الأولى متعلقة بالزمن وتحكمها مجموعات غير محدبة ، و معرضة إلى تشويش باضطرابين، أحدهما شبه مستمر من الأسفل والآخر شبه مستمر مختلط ، باستخدام خصائص المجموعات القابلة للتحلل بدلاً من المجموعات المحدبة، نعتمد في ذلك على نسخة من نظرية النقطة الثابتة للتطبيقات متعددة القيم ونظرية وجود تطبيق ممثل قابل للقياس للتطبيقات متعددة القيم شبه المستمرة المختلطة. في الجزء الثاني، نعرض ثلاث نتائج لوجود الحلول، أيضًا لعملية المسح بتشويش من الدرجة الأولى تحكمها هذه المرة مجموعات غير ملساء، تتعلق بالوقت وحالة النظام، ولكن مع اضطراب واحد متأخر، باستخدام طريقتين مختلفتين. تتمثل الطريقة الأولى في اعادة المسألة بالتأخير إلى مسألة دون تأخير في كل المجالات الجزئية من التجزئة واستخدام النتائج التي تم الحصول عليها للمسألة بدون تأخير الطريقة الثانية المطبقة على عملية المسح من الدرجة الأولى مع اضطراب متأخر تتمثل في استخدام الإسقاطات المتتالية، والتي تسمى خوارزمية اللحاق، في كل المجالات الجزئية من التجزئة لإنشاء سلسلة الحلول التقريبية.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Le but de cette thèse est d'apporter quelques contributions à la théorie des inclusions différentielles impliquant des cônes normaux du point de vue de l'analyse non lisse et variationnelle. En particulier, nous nous intéressons au processus de la rafle («sweeping process» en anglais) perturbé.

Le processus de rafle est une inclusion différentielle d'évolution régie par un opérateur maximal monotone défini comme le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un ensemble convexe (ou non convexe), défini par des cônes normaux et comprend, comme cas particulier, une classe d'inégalité variationnelle. Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t), \ \forall t \in [0,T], \quad x(0) = a; \end{cases} \tag{1.1}$$

où $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal de l'ensemble $C(t)$ à la position $x(t)$. Ce genre de problèmes a été initié par J.J. Moreau (voir [29], [30]) pour les ensembles dépendant du temps $C(t)$ pour traiter les problèmes d'élasto-plasticité, de quasi-statique, de circuits électriques, d'hystérésis et de dynamique. L'hypothèse de convexité sur les ensembles a d'abord été utilisée puis a été remplacée par des conditions plus faibles comme les ensembles prox-réguliers ou les ensembles sous lisse. Dans [38], Valadier démontre pour la première fois l'existence de solutions du problème (1.1) sans l'hypothèse de convexité sur les valeurs de C pour quelques cas particuliers en dimension finie. Depuis, différentes généralisations ont été obtenues, voir par exemple [2],[3], [12] et les références qui s'y trouvent. Habituellement, dans les systèmes mécaniques et aussi dans les procédures de planification en économie mathématique, des forces externes sont appliquées, ce qui conduit à considérer le processus de rafle avec des perturbations convexes et non convexes, semi-continues inférieurement et semi-continues mixtes.

Le processus de la rafle perturbé se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \\ \qquad x(t) \in C(t), \ \forall t \in [0, T], \quad x(0) = a; \end{cases} \tag{1.2}$$

où F est une multi-application jouant le rôle d'une perturbation du problème, c'est-à-dire une force externe appliquée sur le système. Plusieurs résultats ont été obtenus lorsque la perturbation prend des valeurs bornées ou satisfait une condition de croissance linéaire.

Dans le cas où la multifonction C dépend du temps et de l'état, [17] a prouvé l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, x(t)), \quad \text{p.p. dans } [0, T]; \\ x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall \ t \in [0, T]; \\ x(0) = x_0 \in C(t, x_0); \end{cases}$$

en prenant $C(t, x)$ un ensemble "boule-compact", sous lisse et F une multi-application scalairement semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes, et pour tout $a \geq 0$

$$d(0, F(t, x) \leq a, \ \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et } x \in H.$$

Le problème retardé se presente sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{T}(t)x) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]; \\ x(t) = \varphi(t) \qquad\qquad t \in [-\tau, 0]; \end{cases} \tag{1.3}$$

c'est le cas ou le problème ne dépend pas seulement d'une condition initiale mais dépend du passé (fini) du système. ce type de problémes trouve des application en biologie, dynamique des populations, $\cdots$. lorsque le second membre n'est pas a valeurs convexes, une technique a été developpée et consiste à remplacer la convexité par des ensembles décomposables ([24], [25], [26]).

Dans [23] l'auteur à prouvé un résultat d'existence pour (1.3) avec $F(t, \cdot)$ semi-continue inférieurement à valeurs fermées convexes intégrablement bornées.

Dans [13] les auteurs ont montré l'existence de solution pour le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t, \mathscr{L}(t)x(\cdot)), \;\; \text{p.p. dans } [0, T]; \\ \varphi(s) = \mathscr{L}(0)x(s), \; \forall \; s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{1.4}$$

où $C(\cdot) : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application Lipschitzienne de rapport $k > 0$, à valeurs convexes compactes, $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes.

M. Bounkhel et M. F. Yarou [10] ont montré l'existence de solution pour le problème (1.4) où $C(\cdot) : [0, T] \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs r-prox-régulières pas necessairement bornées, $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application mesurable par rapport à la premier variable et semi-continue supérieurement par rapport à la deuxième variable, et pour tous $(t, \varphi(\cdot)) \in [0, T] \times \mathcal{C}_H([-\tau, 0])$ et $l > 0$

$$\|F(t, \varphi(\cdot))\| \subset l\mathbb{B},$$

où $\varphi \in \mathcal{C}_0$ tel que $\varphi(0) \in C(0)$.

Nous arrivons à notre contribution dans cette thèse qui est composée de 4 chapitres.

Dans le premier chapitre on présente une introduction générale. Le deuxiéme chapitre sera consacré essentiellement à des rappels et préliminaires sur les notions de base de l'analyse fonctionnelle et multivoque, en particulier (espaces, les multiapplications et les sélections, théorèmes de point fixe, sous différentiablité de fonctions, ...). Dans le troisième chapitre, nous prouvons quelques résultats d'existence pour l'inclusion différentielle dans le cas non convexe. Le second membre de l'inclusion est considéré comme la somme de deux multi-applications à valeurs non vides, fermées, non convexes et pas nécessairement bornées. En utilisant les propriétés des ensembles décomposables au lieu des ensembles convexes, l'approche est basée sur une version du théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan pour les multi-applications et le théorème de Tolstonogov (voir [36]), qui nous donne l'existence de sélections mesurables pour une multi-application semi-continue mixte. Puis nous avons étudié le cas ou des perturbations de ce type sont appliquées au processus de la rafle, par ce type de multi-application. Dans le quatrième chapitre on s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles avec retard. De telles perturbations sont appliquées sur le processus de rafle non convexe.

Ces traveux ont été ponctués par quelques publications et communications. Une partie du Chapitre 4 a été publiée dans le journal "Nonlinear Dynamics And Systems Theory" (voir[15]), une autre dans le journal "Maltepe Journal of Mathematics"(voir[16]). Deux autre travaux (Chapitre 3) sont encore soumis.

Chapitre 2

Notations et résultats préliminaires

Sommaire

Dans ce chapitre on se propose de donner quelques résultats qui nous seront utiles dans la démonstration de nos résultats d'existence de solutions. Dans un premier temps, on rappelle quelques notations. Après, nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle (espaces, opérateurs, ...), les multi-applications et les sélections, théorèmes du point fixe et les résultats de compacité. Pour plus de details, on réfère à [6], [18], [25].

2.1 Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de cette thèse. On note par

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n.

Soient E un espace de Banach, E^* son dual topologique, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ leur produit de dualité, $\|\cdot\|$ la norme de E et $\sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E.

$\mathbb{B}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, $\mathbb{B}$ (resp. $\overline{\mathbb{B}}$) la boule unité ouverte (resp. fermée) de E.

$\mathcal{B}(A)$ la tribu Borélienne d'un ensemble A.

$\mathcal{L}([0, T])$ la tribu sur $[0, T]$ des ensembles mesurables au sens de Lebesgue.

$d(x, A)$ la distance du point x à l'ensemble A, avec

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \ x \in E.$$

$e(A, B)$ l'écart entre l'ensemble A et l'ensemble B, défini par

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Pour tous sous-ensembles non vides fermés A et B de E, la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$haus(A, B) = \max\{e(A, B), \ e(B, A)\}.$$

$haus_\lambda(A,B)$ la distance de λ-Hausdorff entre l'ensemble A et l'ensemble B

$$haus_\lambda(A,B) = \max\{e(A_\lambda,B),\, e(B_\lambda,A)\},$$

$A_\lambda = A \cap \lambda\overline{\mathbb{B}}$.

$A \subset E$, est un ensemble convexe si

$$\forall\, x,\, y \in A;\, \forall\, \lambda \in [0,1]:\; \lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in A.$$

$co(A)$ l'enveloppe convexe de A, est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E qui contiennent A, c'est en fait le plus petit convexe qui contient A.

$\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de A, le plus petit convexe fermé qui contient A. Nous avons la caractérisation suivante

$$\overline{co}(A) = \{x \in E/\ \forall x^* \in E^*; \langle x^*, x\rangle \leq \delta^*(x^*,A)\},$$

$\delta^*(x^*,A)$ la fonction support associée à A définie par

$$\delta^*(x^*,A) = \sup_{y\in A}\langle x^*, y\rangle\ \forall x^* \in E^*.$$

$S \subset L^1_{\mathbb{R}^n}(E)$ est un ensemble décomposable si pour tous $x,\ y \in S$ et pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$x\chi_A + y(1-\chi_A) \in S,$$

où χ_A est la fonction caractéristique de A définie par

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A; \\ 0 & \text{si } t \notin A. \end{cases}$$

Cette notion ressemble à la définition de la convexité. Cependant, la condition de décomposabilité est un bon substitut à la convexité dans plusieurs cas.

$f^\circ(x_0;v)$ la dérivée directionnelle au sens de Clarke.

$Proj_A(x)$ la projection du point x sur l'ensemble A

$$Proj_A(x) = \{y \in A\ :\ d(x,A) = \|x-y\|\}.$$

$N_A(x)$ le cône normal de Clarke de A au point x. Nous avons

$$y \in Proj_A(x),\ x - y \in N_A(y).$$

$N^P(A, x)$ ou $N_A^P(x)$ le cône normal proximal de A au point x.

$\partial^C f$ sous différentiel de Clarke

$$\partial^C f(x_0) = \{y \in E^* : f^\circ(x_0; v) \geq \langle y, v\rangle, \forall v \in E\}.$$

$\partial^P f$ sous différentiel proximal $\forall\, \omega \in E^*$, $\exists\, \varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ vérifiant

$$\langle \omega, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \varepsilon\|x' - x\|^2, \text{ pour tout } x' \in \overline{\mathbb{B}}(x, \delta).$$

$\partial^F f$ sous différentiel de Fréchet $\forall\, \omega \in E^*$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ vérifiant

$$\langle \omega, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \varepsilon\|x' - x\|, \text{ pour tout } x' \in \overline{\mathbb{B}}(x, \delta).$$

$L^1_E([0, T])$l'espace des applications intégrables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace de Banach E

$L^\infty_E([0, T])$l'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0, T]$ à valeurs dans l'espace de Banach E

$\mathcal{C}_0 : \mathcal{C}_E([0, T])$ (resp. $\mathcal{C}_T := \mathcal{C}_E([-\tau, T])$) l'espace de Banach des applications continues $x : [0, T] \longrightarrow E$ (resp. $x : [-\tau, T] \longrightarrow E$), muni de la topologie de la norme sup, i.e.,

$$\|x\|_{\mathcal{C}_0} = \sup_{t\in[0,T]} \|x(t)\| \ \ (\text{resp.}\|x\|_{\mathcal{C}_T} = \sup_{t\in[-\tau,T]} \|x(t)\|).$$

$\rightharpoonup$ signifie la convergence faible dans E.

$f : [0, T] \to E$ une application univoque de $[0, T]$ à valeurs dans E.

$F : [0, T] \rightrightarrows E$ une multi-application de $[0, T]$ à valeurs dans E.

$ghp(F)$ le graphe de F.

$x : [0, T] \to E$ une application absolument continue, i.e. différentiable presque partout, et sa dérivée $\dot{x}(\cdot)$ est Lebesgue intégrable. De plus x est absolument continue s'il exite une application $y \in L^1_E([0, T])$ telle que

$$x(t) = x(0) - \int_0^t y(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

i.e. $\dot{x} = y \ \ p.p.$

2.2 Notions d'analyse multivoque

Dans cette section on se propose de donner quelques définitions concernant les multi-applications et leurs propriétés ainsi que quelques théorèmes du point fixe. Pour plus de détails sur les résultats de cette section voir [6], [27], [32].

Soient X, Y deux ensembles non vides.

Définition 2.2.1. *On appelle multi-application ou fonction multivoque (multi-fonction) définie sur X à valeurs dans Y toute application F définie sur X à valeurs dans $P(Y)$ (ensemble des parties). On note $F : X \to P(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$ i.e.*

$$\begin{aligned} F: \ \ & X \rightrightarrows Y \\ & x \mapsto F(x), \end{aligned}$$

alors pour tout $x \in X$, $F(x) \subset Y$ est un sous-ensemble de Y.

- *On appelle le domaine effectif d'une multi-application F qu'on note $dom(F)$ l'ensemble défini par*

$$dom(F) = \{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle l'image d'une multi-application F qu'on note $Im(F)$ l'ensemble défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y; \ \exists x \in X : \ y \in F(x)\}.$$

Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$, l'ensemble défini par

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x),$$

et on peut écrire

$$F(A) = \{y \in Y; \exists x \in A : \ y \in F(x)\}.$$

- *On appelle graphe d'une multi-aplication F qu'on note $gph(F)$ le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\}.$$

Remarque 2.2.2. *Si l'application F de X dans Y est telle que l'ensemble $F(x)$ soit composé d'un seul élément, on dit que F est une application ou une fonction univoque de X dans Y.*

Définition 2.2.3. *Soient* (X, d_1), (Y, d_2) *deux espaces métriques et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On dit que* F *est à graphe fermé au point* $x_0 \in X$ *si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ *tel que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *dans* X *et pour toute suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$ *avec* $y_n \in F(x_n)$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ *dans* Y*, nous avons* $y_0 \in F(x_0)$.
gph(F) *est fermé sur* X *s'il est fermé en tout point* $x_0 \in X$.
Si gph(F) *est fermé, on dit que* F *est fermée.*

Définition 2.2.4. *Une multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite à valeurs convexes (resp. compactes) si pour tout* $x \in X$, $F(x)$ *est convexe (resp. compactes).*

Définition 2.2.5. *Soient* X, Y *deux espaces normés. Une multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est dite intégrablement bornée s'il existe une fonction intégrable* $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $x \in [0, T]$,

$$\|y\| \leq \delta(x), \quad \textit{pour tout} \;\; y \in F(x).$$

Définition 2.2.6. *Soient* (X, d_1), (Y, d_2) *deux espaces métriques et* $F : X \to P(Y)$.
On dit que F *est* γ*-Lipschitzienne s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que*

$$\textit{haus}(F(x_1), F(x_2)) \leq \gamma\, d(x_1, x_2), \;\; \textit{pour tout } x_1, x_2 \in X.$$

2.2.1 Continuité des multi-applications

On commence par la notion de la semi-continuité supérieue d'une multi-application.

Définition 2.2.7. *Soient* X, Y *deux espaces vectoriels topologiques séparé et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*
On dit que F *est semi-continue supérieurement (s.c.s. en abrégé) au point* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* Y *avec* $F(x_0) \subset U$*, il existe un voisinage ouvert* V *de* x_0 *tel que* $F(x) \subset U$*, pour tout* $x \in V$.
F *est s.c.s. sur* X *si elle est s.c.s. en tout point* $x \in X$.

Proposition 2.2.8. *[25] Soient* X, Y *deux espaces vectoriels topologiques de Hausdorff et* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application à valeurs fermées.*
Si F *est s.c.s. sur* X*, alors gph*(F) *est fermé dans* $X \times Y$.
Si F *est à valeurs compactes on a l'équivalence.*

Corollaire 2.2.9. *Soit F une multi-application définie d'un espace métrique X à valeurs dans un espace normé Y s.c.s. à valeurs compactes, alors la fonction*

$$(x, y) \in X \times Y^* \longmapsto \delta^*(F(x), y),$$

est s.c.s..

Maintenant on va donner la définition de la semi-continuité inférieure et ses propriétés.

Définition 2.2.10. *Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques séparé et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y avec $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage ouvert V de t_0 tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V$.
F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point $x \in X$.

Proposition 2.2.11. *[6] Soient $(X, d_1), (Y, d_2)$ deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
F est s.c.i. au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset X$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x_0)$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset Y$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

Définition 2.2.12. *Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques séparé et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On dit que F est continue au point $x_0 \in X$ si elle est s.c.s. et s.c.i. au point $x_0 \in X$.

2.2.2 Semi-continuité mixte des multi-applications

Définition 2.2.13. *[26] Soient X, Y deux espaces vectoriels topologiques séparé et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On dit que F est semi-continue mixte (s.c.m.) si pour tout $x \in X$, tel que $F(x)$ est convexe, $F(\cdot)$ est s.c.s. et à chaque fois que $F(x)$ est non-convexe, $F(\cdot)$ est s.c.i. sur un voisinage de x.

2.2.3 Mesurabilité des multi-applications et sélections

Définition 2.2.14. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, et soit Y un espace vectoriel topologique. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On dit que F est Σ-mesurable (ou simplement mesurable) si pour tout ouvert $U \subset X$, l'ensemble

$$F^-(U) = \{x \in X : \ F(x) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Remarque 2.2.15. *La multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$ *est mesurable si et seulement si* $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ *est mesurable.*
$\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ *i.e.*

$$\begin{aligned} \overline{F} : \ & X \rightrightarrows Y \\ & x \mapsto \overline{F}(x), \end{aligned}$$

alors pour tout $x \in X$, $\overline{F}(x) \subset Y$ *est un sous-ensemble de* Y.

Définition 2.2.16. *Soient* (X, Σ) *un espace mesurable, et soit* Y *un espace vectoriel topologique. Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application.*
On appelle sélection de F *toute application* $f : X \to Y$ *telle que* $f(x) \in F(x)$ *pour tout* $x \in X$.
Si f *est mesurable (resp. continue), alors on appelle sélection mesurable (resp. sélection continue) de* F.

Théorème 2.2.17 (Kuratowski-Ryll-Nardzewski). *[25] Soient* (X, Σ) *un espace mesurable et* Y *un espace vectoriel topologique. Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. Si* F *est mesurable à valeurs fermées, alors* F *admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 2.2.18 (Mickael). *[6] Soient* X *un espace métrique, et* Y *un espace de Banach. Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application s.c.i. à valeurs fermées convexes, alors* F *admet une sélection continue.*

On présente maintenant un théorème d'existence de sélection continue similaire au théorème de Michael pour les multi-applications s.c.i. à valeurs fermées décomposables.

Théorème 2.2.19 (Bressan - Colombo - Fryszkowski). *[25] Soient* X, Y *deux espaces métriques séparables. Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application s.c.i. à valeurs fermées décomposables. Alors* F *admet une sélection continue.*

Théorème 2.2.20. *[26] Soient* X, Y *deux espaces métriques séparables. Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application s.c.m. à valeurs fermées décomposables. Alors* $F(\cdot)$ *admet une multi-sélection s.c.s.*

2.2.4 Théorèmes du point fixe

Définition 2.2.21. *Soient* X *un espace topologique séparé localement convexe,* S *un sous ensemble non vide convexe compact de* X *et* $F : S \rightrightarrows S$ *une multi-application.*
On dit que F *admet un point fixe s'il existe* $x \in S$ *tel que* $x \in F(x)$.

Théorème 2.2.22. *[25] Soit S un ensemble convexe compact d'un espace topologique séparé localement convexe X, alors toute multi-application $F : S \rightrightarrows S$ s.c.i. à valeurs fermées convexes admet un point fixe.*

Théorème 2.2.23 (Ky Fan). *[25] Soient S un ensemble convexe compact d'un espace de Banach X, alors toute multi-application $F : S \rightrightarrows S$ s.c.s. à valeurs fermées convexes admet un point fixe.*

2.3 Quelques résultats de compacité

Définition 2.3.1. *Soit X un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $S \in X$ est boule-compact si son intersection avec toute boule fermée de X est compacte.*

Théorème 2.3.2 (Théorème d'Ascoli-Arzelà). *Soient X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et S un sous ensemble de $\mathcal{C}(X, Y)$, l'espace des applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors S est relativement compact si et seulement si S est équicontinu et $S(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec*

$$S(x) = \{f(x) : f \in S\}.$$

Théorème 2.3.3 (Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà). *Soient I un ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach de dimension finie et soit (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur I à valeurs dans E vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $\forall t \in I$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous ensemble relativement compact dans E;

(2) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_{\mathbb{R}^+}(I)$ telle que

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t), \text{ p.p. sur } I;$$

alors il existe une sous suite de $(f_n)_n$ notée encore $(f_n)_n$ qui converge vers une fonction absolument continue $f : I \longrightarrow E$ au sens suivant :

- *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f ;*
- *$(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_E(I)$.*

Théorème 2.3.4 (Théorème de Mazur). *Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble compact de E. Alors $co(A)$ est compact.*

Lemme 2.3.5 (Lemme de Mazur). *Soit E un espace de Banach, et soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \cdots$) convergeant fortement vers x.*

Théorème 2.3.6 (Théorème VI-4 [14]). *Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et F une multi-application définie sur $[0,T]\times X$ à valeurs non vides, convexes, compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $F(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement.*

Soient $(x_n)_n$, x des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans X. $(y_n)_n$, y des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans E. Supposons que

(1) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, *p. p. sur* $[0,T]$;

(2) $\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$, $\sigma(L^1_E, L^\infty_{E^*})$;

(3) $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors,

$$y(t) \in F(t, x(t)), \text{ p. p. sur } [0,T].$$

Lemme de Gronwall

Lemme 2.3.7. *[2] Soient $m > 0$, (ω_i) et (υ_i) des suites positives telle que*

$$\omega_i \leq m + \sum_{j=0}^{i-1} \upsilon_j \omega_j, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\omega_i \leq m \exp\left(\sum_{j=0}^{i-1} \upsilon_j\right), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.3.8. *[Inégalité de Gronwall] Soient $u, v : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continue telles que, pour tout $C \geq 0$, nous avons*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Alors

$$u(t) \leq C \exp(\int_{t_0}^{t} v(s)ds), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

2.4 Cônes normaux et sous différentiels

2.4.1 Sous différentiels

Dans cette section nous donnons les résultats les plus importants sur les sous différentiels. Pour plus de détails sur les sous différentiels voir [8], [18], [19], [28].

Définition 2.4.1. *(Sous différentiabilité) Soient E un espace vectoriel normé, E^* son dual topologique, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 qu'on note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E^* : \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \ \forall x \in E\}.$$

Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$.

1. Si $f(x_0) = +\infty$, alors $\partial f(x_0) = \emptyset$.
2. ∂f est une multi-application de E dans E^*.
3. $\partial(\gamma f)(x_0) = \gamma \partial f(x_0)$.

Définition 2.4.2. *(Dérivée directionnelle de Clarke) Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point x_0 dans la direction $v \in E$, notée $f^\circ(x_0; v)$, est défnie par*

$$f^\circ(x_0; v) = \limsup_{x \to x_0,\, t \to t_0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

où x est un vecteur de E et t un scalaire positif.

Définition 2.4.3. *(Sous différentiel de Clarke) Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction localement Lipschitzienne au voisinage de $x_0 \in E$. Alors, le sous différentiel de Clarke de f au point x_0, notée $\partial^C f(x_0)$ est défni par*

$$\partial^C f(x_0) = \{y \in E^* : f^\circ(x_0; v) \geq \langle y, v\rangle, \forall v \in E\}.$$

Définition 2.4.4. *(Sous différentiel proximal) Soient E un espace de Banach et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Le sous différentiel aproximal de f au point $x \in E$, noté $\partial^P f(x)$, est donné par l'ensemble de tous les $y \in E^*$, tels que il existe deux nombres réels $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ vérifiant*

$$\langle y, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \varepsilon \|x' - x\|^2,$$

pour tout $x' \in \overline{\mathbb{B}}(x, \delta)$.

Définition 2.4.5. *(Sous différentiel au sens de Fréchet) Soient E un espace de Banach et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Le sous différentiel au sens de Fréchet de f au point $x \in E$, noté $\partial^F f(x)$, est donné par l'ensemble de tous les $y \in E^*$, tels que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant*

$$\langle y, x' - x\rangle \leq f(x') - f(x) + \varepsilon\|x' - x\|,$$

pour tout $x' \in \overline{\mathbb{B}}(x, \delta)$.

On a toujours,

$$\partial^P f(x) \subset \partial^F f(x) \subset \partial f(x).$$

2.4.2 Cônes normaux

On donne la définition générale d'un cône et quelques propriétés et résultats qui jouent un rôle important dans l'analyse convexe et les types de Cônes normaux (Clarke, Fréchet, proximal) et la relation entre les différents types de cônes normaux. Pour plus de détails sur les cônes normaux se référer à [6], [8], [18].

Définition 2.4.6. *(Cône normal)Soient E un espace de Hilbert, S un sous-ensemble convexe fermé de E et $x \in S$. On appelle cône normal à S au point x, qu'on note $N_S(x)$ ou $N(S, x)$ l'ensemble défini par*

$$N_S(x) = \{y \in E \quad : \ < y, x' - x > \leq 0, \ \textit{pour tout}\, x' \in S\}.$$

Proposition 2.4.7. *Soient E un espace de Hilbert, S un sous-ensemble convexe fermé de E. Alors,*

$$y \in N_S(x) \Leftrightarrow x \in S \ \textit{et} \ < y, x >= \delta^*(y, S);$$

et

$$y = Proj_C(x) \Leftrightarrow x - y \in N_S(y).$$

Définition 2.4.8. *(Cône normal proximal) Soient S un sous-ensemble non vide d'un espace de Hilbert E et $x \in S$. On définit le Cône normal proximal de S en x par*

$$N_S^P(x) = \{\xi \in E : \ \exists \alpha > 0, \ x \in \mathrm{Proj}_S(x + \alpha\xi)\}.$$

Définition 2.4.9. *(Cône normal de Fréchet) Soient S un sous-ensemble non vide fermé d'un espace de e Hilbert E et $x \in S$. On appelle Cône normal de Fréchet à S au point x qu'on note $N^F(A,x)$ ou $N^F_A(x)$ l'ensemble défini par*

$$\{y \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ \langle y, x' - x \rangle \leq \varepsilon \|x' - x\|, \ \textit{pour tout } x' \in \overline{\mathbb{B}}(x, \delta)\}.$$

On a l'inclusion

$$N^F_A(x) \subset N_A(x) \quad \text{pour tout} \ \ x \in A.$$

Proposition 2.4.10. *Soient S un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E et $x \in S$. On a*

$$N^F_S(x) = \mathbb{R}_+ \partial^F d_S(x); \tag{2.1}$$

$$\partial^F d_S(x) = N^F_S(x) \cap \mathbb{B}. \tag{2.2}$$

2.5 Ensembles r-prox-réguliers

Cette section est consacrée à l'étude des ensembles uniformément r-prox-réguliers (voir [20], [31]).

Définition 2.5.1. *Etant donné un $r \in]0, +\infty]$, un ensemble $S \subset E$ est dit uniformément r-prox-régulier ou r-proximalement lisse si et seulement si pour tout $x \in S$ et tout $\xi \in N^P_S(x)$, $\xi \neq 0$ on a*

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \frac{\|\xi\|}{2r} \|y - x\|^2 \ \textit{pour tout } y \in S.$$

Par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$ dans ce cas, l'uniforme r-prox-régularité de S est équivalente à sa convexité.

Proposition 2.5.2. *Soient $r > 0$ et S un sous-ensemble non vide fermé uniformément r-prox-régulier de E, alors on a :*

1. *Pour tout $x \in E$ vérifiant $d(x, S) < r$, on a $Proj_S(x) \neq \emptyset$ est $Proj_S(x)$ est univoque.*
2. *Le sous différentiel proximal $\partial^P d(x, S)$ coincide avec le sous différentiel de Clarke $\partial^C d(x, S)$ en tout point x de S satisfaisant $d(x, S) < r$.*
3. *Pour tout $x \in S$, on a $N_S(x) = N^P_S(x)$.*
4. *Pour tout $x_i \in S$ et pour tout $v_i \in N^P_S(x_i)$ avec $\|v_i\| \leq r$ $(i = 1, 2)$ on a*

$$\langle v_1 - v_2, x_1 - x_2 \rangle \geq -\|x_1 - x_2\|^2.$$

2.6 Ensembles sous lisses

Il est bien connu que les sous-ensembles lisses sont l'un des ensembles qui jouent un rôle important dans l'analyse variationnelle. Ils s'avèrent se situer naturellement entre les classes d'ensembles prox-réguliers et d'ensembles presque radiaux. Depuis quelques années, les sous-ensembles lisses sont également utilisés pour résoudre inclusion différentielle (voir [3], [4], [35]). On rappelle maintenant la définition et les propriétés des sous-ensembles lisses.

Définition 2.6.1. *Soit A un sous-ensemble fermé de E. On dit que A est sous lisse au point $x_0 \in A$, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\langle \zeta_2 - \zeta_1; x_2 - x_1 \rangle \geq -\epsilon \|x_2 - x_1\|; \tag{2.3}$$

quand $x_1, x_2 \in B(x_0; \delta) \cap A$ et $\zeta_i \in N(A; x_i) \cap \mathbb{B}$, $i = \overline{1, 2}$.
L'ensemble A est dit sous lisse, s'il est sous lisse en tout point de A.

Proposition 2.6.2. *Soit A un sous-ensemble fermé de E. Si A est sous lisse au point $x_0 \in A$, alors,*

$$N^F(A; x_0) = N(A; x_0), \tag{2.4}$$

et

$$\partial d_A(x_0) = \partial^F d_A(x_0).$$

Définition 2.6.3. *Soit $(C(t))_{t \in J}$ une famille d'ensembles fermés de E. Cette famille est dite uniformément équi-sous lisse, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour chaque $t \in J$, l'inégalité* (2.3) *est vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in C(t)$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et tout $\xi_i \in N(C(t); x_i) \cap \mathbb{B}$, avec $i = \overline{1, 2}$.*

Proposition 2.6.4. *[34] Soit $\{C(t, x) : (t, x) \in [0; T] \times E\}$ une famille d'ensembles fermés de E uniformément équi-sous lisse et soit $\nu \geq 0$. Supposons qu'il existe des constantes réelles positives λ, k telles que, pour tous $t, s \in [0, T]$, et $x, y, z \in E$*

$$|d(z, C(t, x)) - d(z, C(s, y))| \leq \lambda |t - s| + k\|x - y\|.$$

Alors

(a) pour tout $(t, x, y) \in gph(C)$, on a

$$\nu \partial d_{C(t,x)}(y) \subset \nu \mathbb{B};$$

(b) *pour n'importe quelle suite* $(t_n)_n$ *dans* $[0,T]$ *convergeant vers* t*, toute suite* $(x_n)_n$ *convergeant vers* x *et toute suite* $(y_n)_n$ *convergeant vers* $y \in C(t,x)$ *avec* $y_n \in C(t_n,x_n)$ *et* $\zeta \in E$*, on a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sigma\big(\zeta, \nu\partial d_{C(t_n,x_n)}\big(y_n)\big) \;\; \leq \;\; \sigma\big(\zeta, \nu\partial d_{C(t,x)}\big(y)\big) \;\; .$$

2.7 Inclusions différentielles avec retard

Soit $\tau > 0$ un retard fini. A chaque $t \in [0,T]$, on associe une application

$$\mathscr{L}(t) : \mathcal{C}_T \longrightarrow \mathcal{C}_0$$

définie, pour tout $x(\cdot) \in \mathcal{C}_T$ par

$$\mathscr{L}(t)x(s) = x(t+s), \quad \text{pour tout } s \in [-\tau, 0].$$

Les inclusions différentielles à mémoire ou avec retard souvent appelées "Functionnal differential inclusions" sont des inclusions différentielles où le système ne dépend pas seulement comme dans les inclusions différentielles ordinaires de la valeur initiale, mais aussi de l'état antérieur du système. Ce type de problèmes se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{L}(t)x) & \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) = \varphi(t) & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Chapitre 3

Approche du point fixe pour des inclusions différentielles régis par des multi-applications semi-continues mixtes

Sommaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous prouvons quelques résultats d'existence pour l'inclusion d'évolution différentielle dans le cas non-convexe. on étudie l'existence de solution pour une inclusion différentielle telle que le second membre de l'inclusion est considéré comme la somme de deux multi-applications à valeurs non vides, fermées, non-convexes et pas nécessairement bornées. Par la suite, on montre l'existence de solutions pour une inclusion différentielle gouvernée par un processus de la rafle sous des hypothèses de prox-régularité avec somme de deux perturbations, l'une semi-continue inférieurement et l'autre semi-continue mixte. La preuve se base sur le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan (Théorème 2.2.23) et le Théorème 3.2.1.

On s'intéresse à l'étude d'une inclusion différentielle du la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + G(t, x(t)) \text{ p.p. sur } [0, T] \\ x(t) \in C(t), \forall\, t \in [0; T] \\ x(0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

$F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs non vides, fermées, mesurables et intégrablement bornée et $G : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées, satisfait la condition de croissance linéaire et semi-continue mixte dans le sens suivant : pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, tel que $G(t, x)$ est convexe, $G(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement, et à chaque fois que $G(t, x)$ est non-convexe, $G(t, \cdot)$ est semi-continue inférieurement sur un voisinage de x.

Nous considérons des perturbations non-convexes de cette forme au processus de la rafle. Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) + G(t, x(t)) \text{ p.p. sur } [0, T] \\ x(t) \in C(t), \forall\, t \in [0; T] \\ x(0) = x_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $C : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs non compactes non-convexes, uniformément prox-régulières et se déplace de manière absolument continue. $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal de Clarke à $C(t)$ au point $x(t)$. F et G jouent le rôle de perturbations du système, c'est-à-dire les forces externes appliquées sur le processus.

3.2 Préliminaires

Nous commencons par definir l'ensemble $\mathcal{S}$ nécessaire à notre étude qui nous sera utile dans la démonstration de nos théorèmes. On peut se référer à [23], [26] et [36] pour des résultats détaillés.

Soit $\epsilon > 0$ et

$$\mathcal{S} = \left\{ \; x : [0,T] \to \mathbb{R}^n, x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s)ds, \; \|\dot{x}(t)\| \leq \zeta(t), \text{ p.p. dans } [0,T] \; \right\} \tag{3.1}$$

où $\zeta(t) = \dot{z}(t) + \delta(t)$, et $z : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la solution absolument continue de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \rho(t)z(t) + \beta(t) \text{ p.p. dans } [0,T], \\ z(0) &= 0, \end{cases}$$

avec $\beta(t) = \epsilon + \left(1 + \|x_0\| + \int_0^t \delta(s)ds\right) \rho(t)$.

$\mathcal{S}$ est un sous-ensemble convexe compact de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,T])$.

En effet, soient $x, y \in \mathcal{S}$ et soit $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \lambda\|x(t)\| + (1-\lambda)\|y(t)\| \\ &\leq \lambda\zeta(t) + (1-\lambda)\zeta(t) \\ &\leq \zeta(t), \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{S}$ est convexe.

On a $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble borné fermé d'un espace de dimension finie d'où la compacité de $\mathcal{S}$.

Dans ce travail, on a besoin d'un théorème de Tolstonogov qui nous donne l'existence de sélection mesurable pour une multi-application semi-continue mixte.

Théorème 3.2.1. *[36] Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs fermées satisfaisant les hypothèses suivantes :*

(i) F est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ measurable ;

(ii) pour tout $t \in [0,T]$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(t,x)$ est convexe, $F(t,\cdot)$ s.c.s. et à chaque fois que $F(t,x)$ est non-convexe, $F(t,\cdot)$ est s.c.i. sur un voisinage de x ;

(iii) il existe une fonction de Carathéodory $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, intégrablement bornée sur les ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$F(t,x) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(0, f(t,x)) \neq \emptyset, \ \forall\, (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}(\ [0,\ T\ ])$, il existe une multi-application $\Phi : \mathcal{K} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ à valeurs non vides convexes fermées et de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, telle que pour tout $x \in \mathcal{K}$ et tout $\gamma \in \Phi(x)$ nous avons pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\gamma(t) \in F(t, x(t)), \tag{3.2}$$

$$\|\gamma(t)\| \leq f(t, x(t)) + \epsilon. \tag{3.3}$$

3.3 Résultat d'existence de solutions pour la somme de deux multi-applications

Théorème 3.3.1. *[26] Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses suivantes :*

($\mathcal{H}_1^F$) F est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mesurable ;

($\mathcal{H}_2^F$) pour toute $t \in [0,T]$ fixé, $F(t,\cdot)$ est s.c.i. dans $\mathbb{R}^n$;

($\mathcal{H}_3^F$) il existe une fonction intégrable $\delta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour chaque $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$

$$\|y\| \leq \delta(t), \quad \text{pour tout } \ y \in F(t,x) \ \text{p.p. } t \in [0,T].$$

Alors, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) & \text{p.p. dans } [0,T]; \\ x(0) \ = \ x_0; \end{cases} \tag{3.4}$$

admet au moins une solution absolument continue x satisfaisant

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \delta(t).$$

La proposition suivante est une conséquence directe du Théorème 3.3.1.

Proposition 3.3.2. *Soit* $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.3.1.*

Alors, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$*, pour toute fonction* $h \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$*, le problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) + h(t) \quad \textit{p.p. dans } [0,T]; \\ x(0) \;=\; x_0; \end{cases} \tag{3.5}$$

admet au moins une solution absolument continue x *satisfaisant*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \delta(t) + \|h(t)\|.$$

Preuve.

Soit $z(t) = \int_0^t h(s)\,ds$, et $y(t) = x(t) - z(t)$, $\forall\; t \in [0,T]$. D'où $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - h(t)$ et $x(t) = y(t) + z(t)$. En mettant $F_1(t,y(t)) = F\big(t, y(t) + z(t)\big)$, on applique le Théorème 3.3.1. La preuve de la Proposition 3.3.2 est ainsi achevée. ■

Théorème 3.3.3. *Soient* F *et* G *deux multi-applications,* $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *à valeurs non vides fermées vérifiant les hypothèses* $(\mathcal{H}_1^F)$*,* $(\mathcal{H}_2^F)$ *et* $(\mathcal{H}_3^F)$ *du Théorème 3.3.1,* $G : [0,T]\times\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *à valeurs non vides fermées vérifiant les hypothèses suivantes :*

$(\mathcal{H}_1^G)$ *G est* $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mesurable ;*

$(\mathcal{H}_2^G)$ *pour tout* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, $G(t,\cdot)$ *est s.c.m. ;*

$(\mathcal{H}_3^G)$ *pour tout* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$*, et pour une fonction* $\rho \in L^1_{\mathbb{R}_+}([0,T])$

$$G(t,x) \cap (1 + \|x\|)\rho(t)\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n} \neq \emptyset.$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, le problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) + G(t,x(t)) \quad \textit{p.p. dans } [0,T]; \\ x(0) \;=\; x_0; \end{cases}$$

admet au moins une solution absolument continue $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$*.*

Preuve.

1^ere^ Étape.

On définit la multi-application $K_F : \mathcal{S} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ par

$$K_F(x) = \big\{ y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]) : y(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \big\}.$$

K_F est à valeurs décomposables fermées non vides car F est à valeurs mesurables fermées.

Montrons que K_F est s.c.i.

En effet, soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{S}$ tel que $x_n \longrightarrow x_0$ pour $n \to \infty$ et soit $y_0 \in K_F(x_0)$, pour tout point (t, x), la multi-application $F(t, \cdot)$ est s.c.i. au point x, donc il existe $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$ (voir la Proposition 2.2.11) tel que

$$y_n(t) \longrightarrow y_0(t), \text{ pour } n \to \infty,$$

alors

$$y_n \in K_F(x_n).$$

Comme $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$, on a

$$\|y_n(t)\| \leq (1 + \|x_n\|)\delta(t),$$

d'après le théorème de Lebesgue on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|y_n(s)\| \, ds \; = \; \int_I \|y_0(s)\| \, ds;$$

donc

$$y_n \longrightarrow y_0 \text{ dans } L^1_{\mathbb{R}^n}([0, T]),$$

alors K_F est s.c.i., par conséquent K_F admet une sélection continue $k : \mathcal{S} \to L^1_{\mathbb{R}^n}([0, T])$ (voir [23]).

Maintenant, on définit la fonction $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$g(t, x(t)) = (1 + \|x(t)\|)\rho(t).$$

g est intégrablement borné sur des sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $(t, x) \in [0,\ T] \times \mathbb{R}^n$,

$$G(t, x) \cap \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}(0, g(t, x)) \neq \emptyset.$$

Ensuite, d'après le Théorème 3.2.1, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une multi-application à valeurs fermées convexes $\Phi : \mathcal{S} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,\ T])$ de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, tel que pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $\gamma \in \Phi(x)$, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$\gamma(t) \in G(t, x(t)), \tag{3.6}$$

$$\|\gamma(t)\| \leq g(t, x(t)) + \epsilon. \tag{3.7}$$

2$^{\text{ème}}$ Étape.

On considère la multi-application $\Psi : \mathcal{S} \ \rightrightarrows\ \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,\ T])$ définie par

$$\Psi(x) = \{y : [0, T] \to \mathbb{R}^n, y(t) = x(0) + \int_0^t (k(x)(s) + \gamma(s))ds \ \text{ p.p.};$$
$$k(x) \in K_F(x) \text{ et } \gamma \in \Phi(x)\}.$$

Nous allons montrer que $\Psi(x)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{S}$, $\forall x \in \mathcal{S}$.

Soit $y \in \Psi(x)$, il existe $\gamma \in \Phi(x)$, tel que

$$y(t) = x(0) \ + \ \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma(s)\big)\ ds,\ \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

donc

$$\dot{y}(t) = k(x)(t) + \gamma(t),$$

et

$$\|\dot{y}(t)\| \leq \|k(x)(t)\| + \|\gamma(t)\|.$$

Nous avons, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t)\| &\leq g(t, x(t)) + \epsilon \leq (1 + \|x(t)\|)\ \rho(t) + \epsilon \\
&\leq \epsilon + \rho(t) + \rho(t)\ \big(\|x_0\| + \textstyle\int_0^t \|\dot{x}(s)\|\ ds\big) \\
&\leq \epsilon + \rho(t) + \rho(t)\ (\|x_0\| + \textstyle\int_0^t \big(\dot{z}(s) + \delta(s)\big)\ ds) \\
&= \epsilon + \big(1 + \|x_0\| + \textstyle\int_0^t \delta(s)\ ds\big)\ \rho(t) + \rho(t)\ z(t) \\
&= \beta(t) + \rho(t)\ z(t) = \dot{z}(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\gamma(t)\| \leq \dot{z}(t) \text{ pour p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.8}$$

D'autre part, comme $k(x) \in K_F(x)$, donc $k(x)(t) \in F(t,x)$ i.e.

$$\|k(x)(t)\| \leq \delta(t), \tag{3.9}$$

d'après (3.8) et (3.9), on a

$$\|\dot{y}(t)\| \leq \zeta(t) \text{ pour p.p. } t \in [0,T],$$

donc, $y \in \mathcal{S}$ pour tout $y \in \Psi(x)$.

Clairement Ψ est à valeurs non vides convexes compacte.

Soient $y_1, y_2 \in \Psi(x)$ et $\lambda \in [0,1]$, il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in \Phi(x)$ tel que

$$y_1(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma_1(s)\big)\, ds, \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

$$y_2(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma_2(s)\big)\, ds, \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

$$\begin{aligned} \lambda y_1(t) + (1-\lambda)y_2(t) &= \lambda(x(0) + \textstyle\int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma_1(s)\big)\, ds) \\ &\quad +(1-\lambda)(x(0) + \textstyle\int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma_2(s)\big)\, ds) \\ &= x(0) + \textstyle\int_0^t \big(k(x)(s) + \lambda\gamma_1(s) + (1-\lambda)\gamma_2(s)\big)\, ds \end{aligned}$$

puisque Φ à valeurs convexes on a

$$\lambda\gamma_1(s) + (1-\lambda)\gamma_2(s) \in \Phi,$$

donc

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \Psi(x),$$

d'où la convexité de Ψ.

Montrons maintenant que, pour tout $x \in \mathcal{S}$, $\Psi(x)$ est compacte. Comme $\Psi(x) \in S$ qui est compacte il suffit de montrer que $\Psi(x)$ est fermé.

Pour ce but, soit $(y_n)_n$ une suite dans $\Psi(x)$ tel que y_n converge vers y, il existe pour tout n, $\gamma_n \in \Phi(x)$ tel que

$$y_n(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma_n(s)\big)\, ds, \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Comme $(\gamma_n)_n \subset \Phi(x)$, on peut extraire une sous-suite, également notée $(\gamma_n)_n$ faiblement convergeant vers $\gamma \in \Phi(x)$, et

$$y(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma(s)\big)\, ds, \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

On conclut que $y \in \Psi(x)$ et par suite $\Psi(x)$ est fermé, d'où la compacité de $\Psi(x)$.

Pour montrer la s.c.s. de Ψ, il suffit de montrer que le graphe de Ψ, $\mathrm{gph}(\Psi) = \{(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : y \in \Psi(x)\}$, est fermé.

Soit (x_n, y_n) une suite du $\mathrm{gph}(\Psi)$ convergeant vers $(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Pour tout $n \in \mathbb{N},\ y_n \in \Psi(x_n)$, il existe $\gamma_n \in \Phi(x_n)$ tel que

$$y_n(t) = x_n(0) + \int_0^t \big(k(x_n)(s) + \gamma_n(s)\big)\, ds, \text{ p.p. sur } [0, T].$$

D'après (3.8), on peut extraire une sous-suite, également notée $(\gamma_n)_n$ faiblement convergent dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([0, T])$ vers γ. Le graphe de (Φ) étant fortement faiblement séquentiellement fermé pour $\mathcal{S}$, on conclut que

$$\gamma \in \Phi(x),$$

et comme $x_n \longrightarrow x$, alors $k(x_n) \longrightarrow k(x)$ puisque k est continue. On a

$$y(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma(s)\big)\, ds, \text{ p. p. } t \in [0, T],$$

alors $(x, y) \in \mathrm{gph}(\Psi)$, donc le graphe de Ψ est fermé, par conséquent Ψ est s.c.s..

En utilisant le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan, la multi-application Ψ admet un point fixe, c'est-à-dire, il existe $x \in \mathcal{S}$ tel que $x \in \Psi(x)$ pour p.p. $t \in [0, T]$, ceci donne que x est absolument continue et

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \big(k(x)(s) + \gamma(s)\big)\, ds, \text{ p.p. sur } [0, T].$$

donc

$$\dot{x}(t) = k(x)(t) + \gamma(t) \in F(t, x(t)) + G(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Maintenant, on reprend le même problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + G(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]; \\ x(0) \;=\; x_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nous présentons, une autre approche du point fixe pour notre problème, en utilisant l'existence de multi-sélection pour les ensembles décomposables. Pour la preuve on utilise quelques idées de [11]).

Théorème 3.3.4. *Supposons que les hypothèses ($\mathcal{H}_1^F$), ($\mathcal{H}_2^F$), ($\mathcal{H}_3^F$), ($\mathcal{H}_1^G$),($\mathcal{H}_2^G$) du Théorème 3.3.3 et*
($\mathcal{H}_4^G$) il existe une fonction intégrable $\rho : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|y\| \leq (1 + \|x\|)\, \rho(t), \;\; \textit{pour tout } y \in G(t, x), \;\; (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout x_0, le problème (3.10) admet au moins une solution absolument continue.

Preuve.

1$^{\text{ere}}$ Étape.

Supposons d'abord que $\|G(t, x)\| \leq \rho(t)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, soit

$$\Theta(t) = \{z \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0, T]) : \|z(t)\| \leq \rho(t), \;\; \text{p.p. } t \in [0, T]\}.$$

Θ est une multi-application intégrablement bornée à valeurs compactes convexes.

Soit l'ensemble $\mathcal{S}^1_\Theta$ de toutes les sélections intégrables de Θ défini par

$$\mathcal{S}^1_\Theta = \big\{y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0, T]) : y(t) \in \Theta(t)\big\}.$$

$\mathcal{S}^1_\Theta$ est convexe faiblement compact.

Pour chaque $h \in \mathcal{S}^1_\Theta$, soit x_h la solution absolument continue de l'inclusion différentielle (3.5), l'existence est assurée par la Proposition 3.3.2.

Pour chaque $h \in \mathcal{S}^1_\Theta$, on a

$$G(t, x_h(t)) \subset \Theta(t).$$

Soit l'ensemble $\mathcal{R}$ défini par

$$\mathcal{R} = \{x_h : h \in \mathcal{S}^1_\Theta\},$$

par le théorème d'Ascoli $\mathcal{R}$ est un ensemble compacte sur $\mathcal{C}^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]$.

Pour tout $h \in \mathcal{S}^1_\Theta$, on définit la multi-application $K_G : \mathcal{S} \to L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ par

$$K_G(x_h) = \big\{y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]) : y(t) \in G(t, x_h(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]\big\}.$$

D'apré l'exemple 3.10.(4) dans [26], K_G est s.c.m. à valeurs fermées décomposables alors K_G admet une multi-sélection s.c.s. à valuers convexes fermées $M : \mathcal{S} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ tel que $M(x_h) \subset K_G(x_h)$.

Soit $\Phi : \mathcal{S}^1_\Theta \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ définie par

$$\Phi(h) = \big\{g \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]) : g(t) \in M(x_h)(t) \text{ p.p. } t \in [0,T]\big\}.$$

Φ est s.c.s. à valuers convexes compactes sur $\mathcal{S}^1_\Theta$.

Appliquons le théorème de Kakutani à la multi-application Φ on obtient l'existence d'un point fixe, i.e., il existe $h \in \mathcal{S}^1_\Theta$ telle que $h \in \Phi(h)$ pour p.p. $t \in [0,T]$. On conclut que x_h est une solution absolument continue de (3.5) avec

$$h(t) \in G(t, x_h(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

$2^{\text{ème}}$ Étape.

Supposons $(\mathcal{H}^G_4)$ et soit

$$\alpha(t) = \|x_0\| + \int_0^t \zeta(s)\, ds,$$

où ζ est défini précédemment dans (3.1).

Soit la multi-application $\Gamma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\Gamma(t, x(t)) = \begin{cases} x(t) & si\ \|x(t)\| \leq \alpha(t) \\ \frac{\alpha(t)\, x(t)}{\|x(t)\|} & si\ \|x(t)\| \geq \alpha(t) \end{cases}$$

et posons

$$G_0(t, x(t)) = G(t, \Gamma(t, x(t))).$$

G_0 hérite de toutes les propriétés de G et pour tout $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|G_0(t,x)\| \leq (\ 1 + \|\Gamma(t,x)\|)\ \rho(t) \leq (\ 1 + \alpha(t))\ \rho(t) = m(t).$$

Par la première étape , il existe une solution absolument continue $x(\cdot)$ de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + G_0(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ x(0) \;=\; x_0; \end{cases}$$

alors $x(\cdot)$ est un solution de (3.10). Ce qui complète la preuve de notre théorème. ■

3.4 Processus de la rafle non-convexes avec perturbations semi-continues mixtes

Nous présentons ici un nouveau résultat en prenant une perturbation comme somme de deux multi-applications, on s'intéresse à l'étude d'une inclusion différentielle de la forme

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + F(t, x(t)) + G(t, x(t)) \;\text{ p.p.} t \in [0, T]; \\ \;x(t) \in C(t), \forall\, t \in [0, T]; \\ \;x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3.11}$$

Où $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal de $C(t)$ à $x(t)$ et F et G deux multi-applications.

L'approche est basée sur la connexion de notre problème avec une inclusion différentielle sans contrainte régie par la sous-différentielle de la fonction de distance (voir [33]).

Pour la démonstration de notre théorème nous avons besoin de la proposition suivante qui obtenu dans le cas non-convexe, c'est-à-dire, lorsque les ensembles $C(t)$ sont uniformément prox-réguliers.

Proposition 3.4.1. *[33] Soit $r \in]0, +\infty]$, et soit $C : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valures non vides fermées tel que les assertions suivantes soient satisfaites*

($\mathcal{H}_1^C$) pour tout $t \in [0, T], C(t)$ est à valeurs uniformement r-prox-régulier ;

($\mathcal{H}_2^C$) la multi-application $C(t)$ est absolument continue, i.e., il existe une fonction absolument continue $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$|d(x, C(t)) - d(y, C(s))| \leq \|x - y\| + |u(t) - u(s)|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $t, s \in [0, T]$.

Une application absolument continue $x(\cdot)$ est une solution du processus de la rafle

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t), \forall\, t \in [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0); \end{cases}$$

si et seulement si elle est une solution de l'inclusion différentielle sans contrainte

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in |\dot{u}(t)|\partial d(C(t), x(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t), \forall\, t \in [0,T]; \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

On donne maintenant un résultat d'existence de solution du processus de la rafle non-convexe avec deux perturbations F et G.

Théorème 3.4.2. *Supposons que les hypothèses ($\mathcal{H}_1^C$), ($\mathcal{H}_1^C$), ($\mathcal{H}_1^F$), ($\mathcal{H}_2^F$),($\mathcal{H}_3^F$), ($\mathcal{H}_1^G$), ($\mathcal{H}_2^G$) et ($\mathcal{H}_3^G$), sont satisfaites. Alors, pour tout $x_0 \in C(0)$, il existe une solution absolument continue de l'inclusion différentielle (3.11).*

Preuve.

1^{ere} Étape.

Soit $\epsilon > 0$ et

$$\mathcal{X} = \left\{ \; x : [0,T] \to \mathbb{R}^n, x(t) = x_0 + \int_0^t \dot{x}(s)ds \text{ et } \|\dot{x}(t)\| \leq \mathcal{M}(t), \text{ p.p. } t \in [0,T] \; \right\},$$

où

$$\mathcal{M}(t) = \dot{\varsigma}(t) + \dot{m}(t) + \delta(t),$$
$$\varsigma(t) = \int_0^t \big(|\dot{u}(s)| + \dot{m}(s) + \delta(s)\big)\, ds,$$

et $m : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la solution absolument continue de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{m}(t) &= 2\rho(t)m(t) + \xi(t) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ m(0) &= 0, \end{cases}$$

où $\xi(t) = \epsilon + \big(1 + \|x_0\| + \int_0^t (|\dot{\varsigma}(s)| + \delta(s))\, ds\big)\, \rho(t)$.

Observons que $\dot{m}(t) \geq 0$ p.p. $t \in [0,T]$ et $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble compact convexe de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,T])$.

$2^{\text{ème}}$ Étape.

Soit $K_F : \mathcal{X} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ défini par

$$K_F(x) = \big\{y \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T]) : y(t) \in F(t,x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T]\big\}.$$

K_F est s.c.i. à valeurs non vides fermées décomposables, d'où K_F admet une sélection continue $l : \mathcal{X} \to L^1_{\mathbb{R}^n}([0,T])$ (voir [23]).

On définit la fonction $p : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$p(t,x(t)) = (1 + \|x(t)\|)\rho(t).$$

p est intégrablement bornée sur les sous-ensembles bornées de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ on a

$$G(t,x) \cap \overline{\mathbb{B}}_{\mathbb{R}^n}(0, p(t,x)) \neq \emptyset.$$

Alors d'après le Théorème 3.2.1, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une multi-application à valeurs non vides convexes fermées $\Lambda : \mathcal{X} \rightrightarrows L^1_{\mathbb{R}^n}([0,\ T])$, de graphe fortement faiblement séquentiellement fermé, tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $\vartheta \in \Lambda(x)$, on a

$$\vartheta(t) \in G(t,x(t)) \tag{3.12}$$

et

$$\|\vartheta(t)\| \leq p(t,x(t)) + \epsilon. \tag{3.13}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Maintenant, nous allons définir la multi-application $\Pi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,\ T])$ par

$$\Pi(x) = \left\{ \begin{array}{l} y : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \\ y(t) = x(0) + \int_0^t [\eta(s) - \big(l(x)(s) + \vartheta(s)\big)]ds, \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ \\ \eta(t) \in -\dot{\varsigma}(t)\, \partial d(x(t), C(t)), l(x) \in K_F(x) \text{ et } \vartheta \in \Lambda(x) \end{array} \right\}.$$

Montrons que $\Pi(x)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Soit $y \in \Pi(x)$, il existe $\vartheta \in \Lambda(x)$ et $\eta(t) \in -\dot{\varsigma}(t)\,\partial d(x(t), C(t))$ tel que

$$y(t) = x(0) \;+\; \int_0^t [\eta(s) - \big(l(x)(s) + \vartheta(s)\big)]\, ds, \text{ p.p. } t \in [0,\ T],$$

et

$$\|\dot{y}(t)\| \leq \|\eta(t)\| + \|l(x)(t)\| + \|\vartheta(t)\|.$$

On a $\eta(t) \in -\dot{\varsigma}(t)\,\partial d(x(t), C(t))$, donc $\|\eta(t)\| \leq \dot{\varsigma}(t)$.

D'autre part, par (3.13), on a

$$\begin{aligned}
\|\vartheta(t)\| &\leq p(t, x(t)) + \epsilon \\
&\leq (1 + \|x(t)\|)\rho(t) + \epsilon \\
&\leq \epsilon + \rho(t) + \rho(t)(\|x_0\| + \textstyle\int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds) \\
&\leq \epsilon + \big(1 + \|x_0\| + \textstyle\int_0^t (|\dot{\varsigma}(t)| + \delta(s)) ds\big)\rho(t) + 2\rho(t)m(t) \\
&= \dot{m}(t),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\|\vartheta(t)\| \leq \dot{m}(t) \text{ p.p. } t \in [0, T]. \tag{3.14}$$

Comme $l(x) \in K_F(x)$, $l(x)(t) \in F(t, x(t))$ i.e.

$$\|l(x)(t)\| \;\leq\; \delta(t). \tag{3.15}$$

Alors, $y \in \mathcal{X}$. Donc $\Pi(x) \subset \mathcal{X}$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, i.e. $\Pi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$.

De façon similaire à la preuve du Théorème 3.3.3 (deuxième étape) nous obtenons la convexité, la compacité et la semi-continueté supérieure de Π.

En utilisant le théorème du point fixe de Kakutani, la multi-application Π a au moins un point fixe, c'est à dire, il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $x \in \Pi(x)$ p.p. $t \in [0, T]$, cela nous donne la continué absolument de x avec

$$x(t) = x(0) \;+\; \int_0^t [\eta(s) - \big(l(x)(s) + \vartheta(s)\big)]\, ds, \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

alors

$$\dot{x}(t) = \eta(t) - \big(l(x)(t) + \vartheta(t)\big),$$

donc

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \dot{\varsigma}(t)\,\partial d(x(t), C(t)) + l(x)(t) + \vartheta(t) \qquad p.p \quad t \in [0,T]; \\ x(0) \; = \; x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3.16}$$

<u>3$^{\text{ème}}$ Étape.</u>

Posons

$$q(t) = \int_0^t \big(l(x)(s) + \vartheta(s)\big) ds,$$

$$B(t) = C(t) + q(t),$$

$$v(t) = x(t) + q(t),$$

l'inclusion (3.16) est équivalente à

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in \dot{\varsigma}(t)\,\partial d(v(t), B(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ v(0) \; = \; x_0 \in B(0) = C(0). \end{cases} \tag{3.17}$$

Observons que $B(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{H}_1^C)$. On va montrer que $B(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{H}_2^C)$. En effet, d'après $(\mathcal{H}_2^C)$ pour la multi-application $C(\cdot)$, (3.14) et (3.15), on a

$$\begin{aligned} |d(y_1, B(t)) - d(y_2, B(t))| &\leq |d(y_1 - q(t), C(t)) - d(y_2 - q(s), C(s))| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \|q(t) - q(s)\| + |u(t) - u(s)| \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + \textstyle\int_s^t \|l(x)(r) + \vartheta(r)\|\, dr + \int_s^t |\dot{u}(r)|\, dr \\ &\leq \|y_1 - y_2\| + |\varsigma(t) - \varsigma(s)|, \end{aligned}$$

pour $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ et $s, t \in [0,T]$ avec $s \leq t$. D'où $B(\cdot)$ satisfait $(\mathcal{H}_2^C)$.

Alors, par la Proposition 3.4.1, $v(\cdot)$ satisfait

$$\begin{cases} -\dot{v}(t) \in N_{B(t)}(v(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ v(0) \; = \; x_0 \in B(0) = C(0); \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) + l(x)(t) + \vartheta(t) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ x(0) \; = \; x_0 \in C(0); \end{cases}$$

puisque $l(x)(t) \in F(t, x(t))$ et $\vartheta(t) \in G(t, x(t))$, on obtient l'inclusion souhaitée, par conséquent $x(\cdot)$ est une solution à (3.11). Ce qui achève la preuve. ∎

Chapitre 4

Méthode de discrétisation des inclusions différentielles non-convexes retardées

Sommaire

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des inclusions différentielles avec retard, par deux méthodes différentes. La première étant de ramener le problème avec retard à un problème sans retard sur chaque sous intervalle de la subdivision et d'utiliser les résultats obtenus pour le problème sans retard. La deuxième méthode appliquée au processus de la rafle du premier ordre avec une perturbation retardée consiste à utiliser les projections successives, ce qu'on appelle l'algorithme de rattrapage, sur chaque sous intervalle de la subdivision pour construire la suite des solutions approchées.

4.2 Existence de solutions pour une inclusion différentielle gouvernée par une multi-application semi-continue inférieurement à valeurs non-convexes

Dans cette section, nous commençons par le résultat suivant pour le problème non retardé de A. Fryszkowski et L. Gorniewicz (voir [26]).

Théorème 4.2.1. *Soit $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses suivantes :*

(i) F *est* $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mesurable ;*

(ii) *pour tout* $t \in [0,T]$, $F(t,\cdot)$ *est s.c.i. dans* $\mathbb{R}^n$;

(iii) *il existe une fonction intégrable* $\rho : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tel que*

$$|y| \leq (1+|x|)\,\rho(t), \text{ pour tout } y \in F(t,x) \text{ et } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, *il existe une application* $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *absolument continue solution de l'inclusion différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t,x(t)) & p.p.\ t \in [0,T]; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \tag{4.1}$$

Preuve.

La preuve de ce théorème est basée sur le théorème de sélection continue pour les ensembles décomposables pour plus de détail voir [24]. ■

Maintenant, on donne le résultat d'existence pour le problème retardé

Théorème 4.2.2. *Soit* $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est une multi-application à valeurs non vides fermées telle que*

(i) F *est* $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$ *mesurable ;*

(ii) pour tout $t \in [0,T]$, $F(t,\cdot)$ *est s.c.i. dans* $\mathcal{C}_0$ *;*

(iii) pour tout $(t,\varphi) \in [0,T] \times \mathcal{C}_0$

$$\|F(t,\varphi)\| \leq (1 + |\varphi(0)|)\rho(t).$$

Alors, $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}_0$, *il existe une application continue* $x : [-\tau, T] \to \mathbb{R}^n$, *absolument continue sur* $[0,T]$ *solution de l'inclusion différentielle*

$$(\mathcal{DP}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{X}(t)x) & p.p. \ \ t \in \ [0,T]; \\ x(t) \ = \ \varphi(t) & \qquad\quad t \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

Preuve.

Nous allons réduire notre problème à un problème sans retard et appliquer le Théorème 4.2.1.

Pour simplifier les calculs, on prend $T = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mu_n = 2^{-n}$. Considérons la partition t_i^n de l'intervalle $[0,T]$ définie par $t_i^n = i\mu_n T$, $i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 2^n$.

<u>**1$^{\text{ere}}$ Étape**</u> (*Construction de solutions approchées*)

Pour tous $(t,x) \in [-\tau, t_1^n] \times \mathbb{R}^n$, on définit $f_0^n : [-\tau, t_1^n] \times \mathbb{R}^n$ par

$$f_0^n(t,x) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } \ t \in [-\tau, 0]; \\ \varphi(0) + \frac{t}{\mu_n}(x - \varphi(0)) & \text{si } \ t \in]0, t_1^n]; \end{cases}$$

$f_0^n(t_1^n, x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. En effet

$$\begin{aligned} f_0^n(t_1^n, x) \ &= \varphi(0) + \tfrac{t_1^n}{\mu_n}(x - \varphi(0)) \\ &= \varphi(0) + \tfrac{\mu_n}{\mu_n}(x - \varphi(0)) \\ &= \varphi(0) + (x - \varphi(0)) \\ &= x. \end{aligned}$$

On définit la multi-application G_0^n sur $[0, t_1^n] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées dans $\mathbb{R}^n$ par

$$G_0^n(t,x) := F(t, \mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, x)) \ \ \forall\, (t,x) \in [0, t_1^n] \times \mathbb{R}^n.$$

Montrons que G_0^n satisfait les conditions du Théorème 4.2.1.

Remarquons d'abord que la fonction

$$x \longmapsto \mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, x)$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, x) - \mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, y)\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|f_0^n(t_1^n + s, x) - f_0^n(t_1^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\mu_n, 0]} \|f_0^n(t_1^n + s, x) - f_0^n(t_1^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\mu_n, 0]} \|\tfrac{t_1^n + s}{\mu_n}(x - y)\| \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Comme F est mesurable et s.c.i. on trouve la mesurabilité et la semi-continuité inférieure de G.

De plus, par la condition *iii)* du Théorème 4.2.2, on obtient pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|G_0^n(t,x)\| = \|F(t, \mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, x))\| &\le (1 + \|\mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(0, x)\|)\, \rho(t) \\ &= (1 + \|f_0^n(t_1^n, x)\|)\, \rho(t) \\ &= (1 + \|x\|)\, \rho(t). \end{aligned}$$

Donc G_0^n vérifie les conditions du Théorème 4.2.1, cela donne une solution absolument continue $v_0^n : [0, t_1^n] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ au problème

$$\begin{cases} \dot{v}_0^n(t) & \in G_0^n(t, v_1^n(t)) \qquad \text{p.p. } t \in [0, t_1^n]; \\ v_0^n(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{v}_0^n(s) ds \qquad \forall t \in]0, t_1^n]; \\ v_0^n(0) & = \varphi(0); \end{cases}$$

i.e., v_0^n est une solution à

$$\begin{cases} \dot{v}_0^n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(t_1^n) f_0^n(\cdot, x)) \qquad \text{p.p. } t \in [0, t_1^n]; \\ v_0^n(0) & = \varphi(0). \end{cases}$$

On pose

$$x_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si\, t \in [-\tau, 0]; \\ v_0^n(t) & si\ t \in]0, t_1^n]. \end{cases}$$

Comme précédemment, pour tout $(t, x) \in [-\tau, t_1^n] \times \mathbb{R}^n$, nous définissons $f_1^n : [-\tau, t_2^n] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$f_1^n(t, x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } t \in [-\tau, t_1^n]; \\ x_n(t_1^n) + \frac{t - t_1^n}{\mu_n}(x - x_n(t_1^n)) & \text{si } \ t \in]t_1^n, t_2^n]. \end{cases}$$

avec

$$f_1^n(t_2^n, x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Par conséquent, nous pouvons définir de la même manière la multi-application G_1^n sur $[t_1^n, t_2^n] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées dans $\mathbb{R}^n$ par

$$G_1^n(t, x) := F(t, \mathscr{L}(t_1^n) f_1^n(\cdot, x)) \ \ \forall\, (t, x) \in [t_1^n, t_2^n] \times \mathbb{R}^n$$

satisfaisant pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|G_1^n(t, x)\| = \|F(t, \mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(\cdot, x))\| &\leq (1 + \|\mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(0, x)\|)\, \rho(t) \\ &= (\ 1 + \|f_1^n(t_2^n, x)\|)\, \rho(t) \\ &= (\ 1 + \|x\|)\, \rho(t). \end{aligned}$$

La fonction

$$x \longmapsto \mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(\cdot, x),$$

est Lipschitzienne puisque pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(\cdot, x) - \mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(\cdot, y)\| &= \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|f_1^n(t_2^n + s, x) - f_1^n(t_2^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\mu_n, 0]} \|f_1^n(t_2^n + s, x) - f_1^n(t_2^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\mu_n, 0]} \|x_n(t_1^n) + \tfrac{t_2^n + s - t_1^n}{\mu_n}(x - x_n(t_1^n)) \\ &- \ (x_n(t_1^n) + \tfrac{t_2^n + s - t_1^n}{\mu_n}(y - x_n(t_1^n)))\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{s\in[-\mu_n,0]} \|\tfrac{t_2^n+s-t_1^n}{2^{-n}}(x-y)\| \\
&= \|\tfrac{t_2^n-t_1^n}{\mu_n}(x-y)\| \\
&= \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Donc G_1^n vérifie les conditions du Théorème 4.2.1, cela donne une solution absolument continue $v_1^n : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ au problème

$$\begin{cases}
\dot{v}_1^n(t) & \in G_1^n(t, v_1^n(t)) \qquad\qquad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n]; \\
v_1^n(t) & = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{v}_1^n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_1^n, t_2^n]; \\
v_1^n(t_1^n) & = x_n(t_1^n).
\end{cases}$$

Donc v_1^n est une solution à

$$\begin{cases}
\dot{v}_1^n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(t_2^n) f_1^n(\cdot, x)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n]; \\
v_1^n(t) & = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{v}_1^n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_1^n, t_2^n]; \\
v_1^n(0) & = \varphi(0).
\end{cases}$$

Par récurrence, supposons que x_n a été construite et définie sur $[-\tau, t_k^n]$, absolument continue sur $[0, t_k^n]$, et satisfait

$$\begin{cases}
\dot{x}_n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(t_{k-1}^n) f_{k-1}^n(\cdot, x)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\
x_n(t) & = x_n(t_{k-1}^n) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{x}_n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_{k-1}^n, t_k^n];
\end{cases}$$

et construisons une solution sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$.

Pour tous $(t, x) \in [-\tau, t_1^n] \times \mathbb{R}^n$, on définit $f_k^n : [-\tau, t_{k+1}^n] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$f_k^n(t,x) = \begin{cases}
x_n(t) & \text{si } \ t \in [-\tau, t_k^n]; \\
x_n(t_k^n) + \frac{t-t_k^n}{\mu_n}(x - x_n(t_k^n)) & \text{si } \ t \in]t_k^n, t_{k+1}^n];
\end{cases}$$

telle que

$$f_k^n(t_{k+1}^n, x) = x \text{ et } f_k^n \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([-\tau, t_{k+1}^n]).$$

La fonction

$$x \longmapsto \mathscr{L}(t_{k+1}^n) f_k^n(\cdot, x)$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\mathscr{L}(t_{k+1}^n) f_k^n(\cdot, x) - \mathscr{L}(t_{k+1}^n) f_k^n(\cdot, y)\| =$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|f_k^n(t_{k+1}^n + s, x) - f_k^n(t_{k+1}^n + s, y)\|$$
$$= \sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|f_k^n(t, x) - f_k^n(t, y)\|.$$

On distingue deux cas

(1) si $-\tau + t_{k+1}^n \leq t_k^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|f_k^n(t, x) - f_k^n(t, y)\| &= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|f_k^n(t, x) - f_k^n(t, y)\| \\
&= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|\tfrac{t-t_k^n}{\mu_n}(x - y)\| \\
&= \|x - y\|.
\end{aligned}$$

(2) si $t_k^n \leq -\tau + t_{k+1}^n \leq t_{k+1}^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|f_k^n(t, x) - f_k^n(t, y)\| &\leq \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|f_k^n(t, x) - f_k^n(t, y)\| \\
&= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|\tfrac{t-t_k^n}{\mu_n}(x - y)\| \\
&= \|x - y\|.
\end{aligned}$$

De la même manière on peut définir la multi-application G_k^n sur $[t_k^n, t_{k+1}^n] \times \mathbb{R}^n$ à valeurs fermées dans $\mathbb{R}^n$ par

$$G_k^n(t, x) := F(t, \mathscr{L}(t_{k+1}^n) f_k^n(\cdot, x)) \;\; \forall (t, x) \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \times \mathbb{R}^n$$

satisfaisant les conditions du Théorème 4.2.1.

D'où, il existe une solution absolument continue $v_k^n : [t_k, t_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ à

$$\begin{cases}
\dot{v}_k^n(t) & \in G_k^n(t, v_k^n(t)) \qquad\qquad \text{p.p. } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\
v_k^n(t) & = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{v}_k^n(s) ds \qquad \forall\, t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\
v_k^n(t_k^n) & = x_n(t_k^n).
\end{cases}$$

Donc v_k^n est une solution de

$$\begin{cases} \dot{v}_k^n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(t_{k+1}^n) f_k^n(\cdot, x)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ v_k^n(t) & = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{v}_k^n(s)ds \qquad \forall\, t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ v_k^n(t_k^n) & = x_n(t_k^n). \end{cases}$$

on pose $x_n(t) = v_k^n(t)$ sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, on obtient

$$x_n(t) = \begin{cases} v_0^n(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds & si \;\; t \in [0, t_1^n]; \\ v_1^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_n(s)ds & si \;\; t \in [t_1^n, t_2^n]; \\ \quad \cdots & \\ v_k^n(t) = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{x}_n(s)ds & si \;\; t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on définit deux fonctions réelles θ_n, $\delta_n : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ par $\theta_n(t) = t_i^n$, $\delta_n(t) = t_{i+1}^n$, $\forall\; t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$ telle que $\theta_n(0) = 0$ et on définit aussi la fonction $f^n_{\mu_n \delta_n(t)-1} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n([-\tau, \delta_n(t)])}$ par

$$f^n_{\mu_n \delta_n(t)-1}(t, x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } \; t \in [-\tau, \theta_n(t)]; \\ x_n(\theta_n(t)) + \frac{t - \theta_n(t)}{\mu_n}(x - x_n(\theta_n(t))) & \text{si } \; t \in]\theta_n(t), \delta_n(t)]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Il est clair que x_n est continue sur $[-\tau, 1]$, absolument continue sur $[0,1]$ et satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t)) f^n_{\mu_n \delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t))) \qquad \text{p.p. } \; t \in [0,1]; \\ x_n(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,1]; \\ x_n(t) & = \varphi(t) \qquad \forall\, t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{4.4}$$

<u>**2$^{\text{ème}}$ Étape**</u> *(La convergence uniforme)*

D'abord, nous montrons la convergence de la suite $(x_n)_n$.

Par la condition *iii*) du Théorème 4.2.1 et l'inclusion (4.4), pour presque tout $t \in [0,1]$, on a

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t)) f^n_{\mu_n \delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t))),$$

on obtient

$$\|F(t, \mathscr{Z}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t)))\| \leq (\ 1 + \|x_n(t)\|\ )\,\rho(t).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\big(\mathscr{Z}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t))\big)(0) &= f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+0, x_n(t))\\
&= x_n(\theta_n(t)) + \tfrac{\delta_n(t)-\theta_n(t)}{\mu_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t)))\\
&= x_n(\theta_n(t)) + \tfrac{\mu_n(i+1-i)}{\mu_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t)))\\
&= x_n(t),
\end{aligned}$$

donc

$$\big(\mathscr{Z}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t))\big)(0) = x_n(t).$$

$$\begin{aligned}
\|F(t, \mathscr{Z}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t)))\| &\leq (\ 1 + \|\mathscr{Z}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t))\big)(0)\|\ )\,\rho(t)\\
&\leq (\ 1 + \|x_n(t)\|\ )\,\rho(t).
\end{aligned}$$

De plus, puisque x_n est absolument continue sur $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - \varphi(0)\| &\leq \textstyle\int_0^t \|\dot{x}_n(s)\|\ ds\\
&\leq \textstyle\int_0^t (\ 1 + \|x_n(s)\|\ )\,\rho(s)ds\\
&\leq \textstyle\int_0^t (\ 1 + \|x_n(s)\|\rho(s)\ )\,ds\\
&= \textstyle\int_0^t \rho(s)ds + \int_0^t \rho(s)\|x_n(s)\|\ ds, \quad \forall t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|x_n(t)\| \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t \rho(s)\,ds + \int_0^t \rho(s)\|x_n(s)\|\,ds,\ \forall t \in [0,1].$$

En utilisant le Lemme 2.3.7, on obtient pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|x_n(t)\| \leq (\|\varphi(0)\| + \int_0^t \rho(s)ds)\ \exp(\int_0^t \rho(s)ds).$$

Soit

$$\alpha(t) = (\|\varphi(0)\| + \int_0^t \rho(s)ds)\ \exp(\int_0^t \rho(s)ds).$$

Ainsi pour presque tout $t \in [0,1]$, on a

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq (1 + \alpha(t))\,\rho(t). \tag{4.5}$$

Maintenant, on montre la convergence de $(x_n)_n$. D'une part, Il est clair que $(x_n(\cdot))_n$ est une suite bornée, puisque pour tous $t, s \in [0,1]$ nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_n(t)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(l)\,dl\| \\
&\leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t \|\dot{x}_n(l)\|\,dl \\
&\leq \|\varphi(0)\| + (1+\alpha(t))\,\rho(t)
\end{aligned}$$

D'autre part, par la relation(4.5), $(x_n(\cdot))_n$ est équicontinue. En effet pour tous $t, s \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| &= \|\varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(l)\,dl - (\varphi(0) + \int_0^s \dot{x}_n(l)\,dl)\| \\
&= \|\int_0^t \dot{x}_n(l)\,dl - \int_0^s \dot{x}_n(l)\,dl\| \\
&= \|\int_s^t \dot{x}_n(l)\,dl\| \\
&\leq \int_s^t \|\dot{x}_n(l)\|\,dl \\
&\leq (1+\alpha(t))\,\rho(t)|t-s|.
\end{aligned}$$

Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(x_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,1])$. D'autre part, pour presque tout $t \in [0,1]$ on a

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq (1+\alpha(t))\,\rho(t).$$

Alors, d'aprés le Corollaire 2.3.3, on peut extraire une sous suite, notée aussi $(x_n(\cdot))_n$ qui converge vers x au sens suivant :

$(x_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers x dans $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}([0,1])$ et $((\dot{x})_n(\cdot))_n$ converge faiblement vers $\dot{x}$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([0,1])$.

Maintenant, on va montrer que

$$\|\mathscr{L}(\delta_n(t)) f^n_{\mu_n \delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t)) - \mathscr{L}(t)x\| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

On a

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|\mathscr{L}(\delta_n(t)) f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(s, x_n(t)) - \mathscr{L}(t)x(s)\|_{\mathcal{C}_0} =$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(s+t)\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,0]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s) + x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\|$$

$$\leq \sup_{s\in[-\tau,0]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\| +$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\|.$$

D'abord,

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$\leq \sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$+ \sup_{s\in[-\mu_n,0]} \|f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\delta_n(t)+s, x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x_n(\delta_n(t)+s) - x(\delta_n(t)+s)\| +$$

$$\sup_{s\in[-\mu_n,0]} \|x_n(\theta_n(t)) + \frac{\delta_n(t)+s-\theta_n(t)}{\mu_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t)) - x(\delta_n(t)+s))\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x_n(\delta_n(t)+s) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$+ \sup_{s\in[-\mu_n,0]} \|\frac{s}{\mu_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) + x_n(t) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$= \|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| + \|x_n(t) - x_n(\delta_n(t))\|.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[-\tau,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| &\leq \sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&\quad + \sup_{s\in[-\mu_n,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&= \sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&\quad + \|x(\delta_n(t)) - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|\mathscr{L}(\delta_n(t)) f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(s, x_n(t)) - \mathscr{L}(t)x(s)\|_{\mathcal{C}_0} \leq$$

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| + \|x_n(t) - x_n(\delta_n(t))\| +$$

$$\sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| + \|x(\delta_n(t)) - x(t)\|.$$

De plus, comme

$$|\theta_n(t) - t| \leq \mu_n \text{ et } |\delta_n(t) - t| \leq \mu_n, \; \forall t \in [0,1].$$

Passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve

$$\theta_n(t) \longrightarrow t \text{ et } \delta_n(t) \longrightarrow t.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,1]$, $(x_n)_n$ converge uniformément vers x, alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \|x(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x_n(t)\| = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| &\leq \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(\theta_n(t))\| \\ &\leq \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| + \|x(t) - x(\theta_n(t))\|,\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| = 0.$$

Comme x est uniformément continue, il existe $\lambda > 0$ tel que $|s-t| \leq \lambda$ implique

$$\|x(s) - x(t)\| \leq \epsilon.$$

Mais nous avons

$$|\delta_n(t) + s - (s+t)| \leq \mu_n \text{ pour tout } s \in [-\tau, \mu_n],$$

d'où

$$\sup_{s\in[-\tau,-\mu_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \leq \epsilon \text{ pour } \lambda \leq \mu_n.$$

On peut conclure que

$$\mathscr{L}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t)) \longrightarrow \mathscr{L}(t)x \text{ dans } \mathcal{C}_0.$$

Finalement, puisque $\mathscr{L}(\delta_n(t))f^n_{\mu_n\delta_n(t)-1}(\cdot, x_n(t)) \longrightarrow \mathscr{L}(t)x$ dans $\mathcal{C}_0$, $(\dot{x}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{x} \in L^1_{\mathbb{R}^n}([0,1])$ et la multi-application $F(t,\cdot)$ est s.c.i. à valeurs fermées dans $\mathcal{C}_0$, alors $\dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{L}(t)x)$. Donc, x satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & \in F(t, \mathscr{L}(t)x) \qquad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]; \\ x(t) & = \varphi(t) \qquad \forall\, t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Ceci complète la preuve de notre Théorème. ■

Théorème 4.2.3. *La conclusion du Théorème 4.2.2 reste vraie si on remplace la s.c.i. de* $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *par la s.c.m. au sens suivante :*

pour tout $t \in [0,T]$, *et tout* $\varphi \in \mathcal{C}_0$ *tels que* $F(t,\varphi)$ *est convexe,* $F(t,\cdot)$ *est semi-continue supérieurement dans* $\mathcal{C}_0$, *et à chaque fois que* $F(t,\varphi)$ *est non-convexe,* $F(t,\cdot)$ *est semi-continue inférieurement sur un voisinage de* φ.

Pour la preuve de ce théorème on a besoin du théorème suivant pour le problème sans retard de A. Fryszkowski et L. Gorniewicz (voir [26]).

Théorème 4.2.4. *Soit* $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses suivantes :*

(i) F *est* $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *mesurable ;*

(ii) pour tout $t \in [0,T]$, $F(t,\cdot)$ *est s.c.m ;*

(iii) il existe une fonction intégrable $\rho : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *tel que*

$$|y| \leq (1 + |x|)\,\rho(t), \textit{ pour tout } y \in F(t,x) \textit{ et } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, *le problème*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \qquad \textit{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(0) \;=\; x_0; \end{cases} \tag{4.6}$$

admet au moins une solution $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *absolument continue.*

Preuve

Suivant les mêmes étapes de la preuve du Théorème 4.2.2, nous allons établir notre démonstration en trois étapes.

4.3 Processus de la rafle dependant du temps et de l'état avec une perturbations retardée

Cette section consiste à montrer le résultat d'existence de solution pour le processus de la rafle perturbé dans un espace de Hilbert sous une condition de boule-compacité supposée sur un ensemble mobile sous-lisse dépendant à la fois du temps et de l'état C. La démonstration de notre résultat d'existence est inspiré de celle donnée dans [2] et [10].

Théorème 4.3.1. *Soit T un nombre réel positif et soit $C : [0,T]\times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées tel que les assertions suivantes soient satisfaites*

($\mathscr{H}_1$) *pour tout $(t,x) \in [0,T] \times H$, $C(t,x)$ est uniformément sous-lisse ;*

($\mathscr{H}_2$) *il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $0 < k < 1$ telle que, pour tous $t,s \in [0,T]$, et $x,y,z \in H$*

$$|d(z, C(t,x)) - d(z, C(s,y))| \leq \lambda|t-s| + k\|x-y\|;$$

($\mathscr{H}_3$) *pour tout sous-ensemble borné $A \in H$, l'ensemble $C(t,A)$ est boule relativement compacte.*

Soit $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides, satisfait

($\mathscr{H}_4$) *F est scalairement semi-continue supérieurement à valeurs convexes, fermées et pour toute constante $\mu > 0$, tout $t \in [0,T]$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, on suppose*

$$d(0, F(t,\varphi)) \leq \mu(1 + \|\varphi(0)\|).$$

Alors,
pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) = x_0 \in C(0,x_0)$, il existe une application continue $x : [-\tau, T] \to H$, Lipschitzienne sur $[0,T]$ solution de l'inclusion différentielle

$$(\mathscr{G}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, \mathscr{X}(t)x), \quad p.p.\ t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t,x(t)),\ \forall\ t \in [0,T]; \\ \varphi(s) = \mathscr{X}(0)x(s),\ \forall\ s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

De plus, on a pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \gamma,$$

où

$$\gamma = \frac{\lambda + 2\mu(1+\eta)}{1-k} + \lambda + 2\mu(1 + \|\varphi(0)\|),$$

et

$$\eta = \|\varphi(0)\| + \frac{\lambda + 2\mu}{1-k} T \exp\left(\frac{2\mu(T+1)}{1-k}\right).$$

Preuve.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la partition de l'intervalle $[0, T]$ définie par

$$t_i^n = i\,\kappa_n,\ \kappa_n = \frac{T}{n},\ 0 \leq i \leq n.$$

On pose $v(t_i^n) := v_i^n$, $v(t_0^n) = v_0^n = x_0 = \varphi(0) \in C(t_0^n, x_0)$, $t \in [t_0^n, t_1^n]$ et soit $g_0 : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \longrightarrow H$, telle que $g_0(t_i^n, \mathscr{L}(t_i^n)v)$ est l'élément de norme minimale de $F(t_i^n, \mathscr{L}(t_i^n)v)$, i.e.,

$$\|F_0(t_i^n, \mathscr{L}(t_i^n)v)\| = \min\{\|y\| : y \in F(t_i^n, \mathscr{L}(t_i^n)v)\} \leq \mu\big(1 + \|(\mathscr{L}(t_i^n)v)(0)\|\big), \tag{4.7}$$

où $\mathscr{L}(t_i^n)v = v(t_i^n + s)$ pour tout $s \in [-\tau, 0]$.

<u>**1$^{\text{ere}}$ Étape**</u> Tout d'abord, posons $x_n(t) := \varphi(t)$, puor tout $t \in [-\tau, 0]$. D'après la boule compacité de $C(t_1^n, v_0^n)$ on peut choisir

$$v_1^n \in Proj_{C(t_1^n, v_0^n)}(v_0^n + \kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{L}(t_0^n)v))$$

donc,

$$v_1^n \in C(t_1^n, v(t_0^n)) \text{ et } v_0^n + \kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{L}(t_0^n)v) - v_1^n \in N_{C(t_1^n, v(t_0^n))}(v(t_1^n)).$$

D'autre part, en utilisant (4.7), on a

$$\begin{aligned}
\|v_1^n - v_0^n\| &\leq \Big\|v_1^n - \big(v_0^n + \kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v)\big)\Big\| + \Big\|\kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v)\Big\| \\
&= d\Big(v_0^n + \kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v), C(t_1^n, v_0^n)\Big) + \Big\|\kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v)\Big\| \\
&\leq d\Big(v_0^n + \kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v), C(t_0^n, v_0^n)\Big) + \lambda\,|t_1^n - t_0^n| \\
&\quad + \Big\|\kappa_n g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v)\Big\| \\
&\leq \lambda\,\kappa_n + 2\kappa_n \Big\|g_0(t_0^n, \mathscr{Z}(t_0^n)v)\Big\| \\
&\leq \lambda\,\kappa_n + 2\kappa_n\mu\big(1 + \|(\mathscr{Z}(t_0^n)v)(0)\|\big) \\
&\leq \Big(\lambda + 2\mu\Big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|(\mathscr{Z}(t_0^n)v)(0)\| \qquad (4.8) \\
&\leq \Big(\lambda + 2\mu\Big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_0^n\|. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Maintenant, supposons que, pour $0,\ 1,\ \cdots,\ i$, avec $i \leq n-1$, $v_0^n, v_1^n, \cdots, v_i^n$ ont été construits, telle que les inclusions suivantes tiennent

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, v_i^n), \qquad (4.10)$$

$$v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n) - v_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n, v_i^n)}(v_{i+1}^n), \qquad (4.11)$$

$\|v_1^n - v_0^n\| \leq \Big(\lambda + 2\mu\Big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_0^n\|$ et pour $i = 1,\ \cdots,\ n-1$

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \Big(\lambda + 2\mu\Big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_i^n\| + k\|v_i^n - v_{i-1}^n\|. \qquad (4.12)$$

Comme $C(t_{i+1}^n, v_i^n)$ est boule-compacte, alors on peut choisir

$$v_{i+1}^n \in Proj_{C(t_{i+1}^n, v_i^n)}\big(v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\big),$$

d'où

$$v_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, v_i^n) \text{ et } v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n) - v_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n, v_i^n)}(v_{i+1}^n).$$

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\leq \Big\|v_{i+1}^n - \big(v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\big)\Big\| + \Big\|\kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\Big\| \\
&= d\Big(v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_n)v_i^n), C(t_{i+1}^n, v_i^n)\Big) + \Big\|\kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\Big\| \\
&\leq d\Big(v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n), C(t_i^n, v_{i-1}^n)\Big) \\
&\quad + d\Big(C(t_i^n, v_{i-1}^n), C(t_{i+1}^n, v_i^n)\Big) + \Big\|\kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\Big\| \\
&\leq d\Big(v_i^n + \kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n), C(t_i^n, v_{i-1}^n)\Big) + \lambda\, |t_{i+1}^n - t_i^n| \\
&\quad + k\|v_i^n - v_{i-1}^n\| + \Big\|\kappa_n g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\Big\| \\
&\leq \lambda\, \kappa_n + k\|v_i^n - v_{i-1}^n\| + 2\kappa_n \Big\|g_0(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)v_n)\Big\| \\
&\leq \Big(\lambda + 2\mu\Big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_i^n\| + k\|v_i^n - v_{i-1}^n\|.
\end{aligned}$$

Pour tous $0 \leq i \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\leq \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_i^n\| + k\|v_i^n - v_{i-1}^n\| \\
&\leq \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_i^n\| \\
&\quad + k\Big(\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_{i-1}^n\| + k\|v_{i-1}^n - v_{i-2}^n\|\Big) \\
&= \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_i^n\| + k\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2k\mu\kappa_n\|v_{i-1}^n\| \\
&\quad + k^2\|v_{i-1}^n - v_{i-2}^n\| \\
&\leq \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + k\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\big(\|v_i^n\| + k\|v_{i-1}^n\|\big) \\
&\quad + k^2\Big(\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + 2\mu\kappa_n\|v_{i-2}^n\| + k\|v_{i-2}^n - v_{i-3}^n\|\Big) \\
&= \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + k\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n + k^2\big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n \\
&\quad + 2\mu\kappa_n\big(\|v_i^n\| + k\|v_{i-1}^n\| + k^2\|v_{i-2}^n\|\big) + k^3\|v_{i-2}^n - v_{i-3}^n\| \\
&= \big(\lambda + 2\mu\big)\kappa_n\big(1 + k + k^2\big) + 2\mu\kappa_n\big(\|v_i^n\| + k\|v_{i-1}^n\| + k^2\|v_{i-2}^n\|\big) \\
&\quad + k^3\|v_{i-2}^n - v_{i-3}^n\|
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n\| &\leq \kappa_n\big(\lambda + 2\mu\big)\sum_{j=0}^{i-1} k^j + 2\mu\kappa_n \sum_{j=1}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\| + k^i\|v_1^n - v_0^n\| \\
&\leq \kappa_n\big(\lambda + 2\mu\big)\sum_{j=0}^{i} k^j + 2\mu\kappa_n \sum_{j=1}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\| + 2\mu\kappa_n k^i\|v_0^n\| \\
&\leq \kappa_n\big(\lambda + 2\mu\big)\sum_{j=0}^{i} k^j + 2\mu\kappa_n \sum_{j=0}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\|.
\end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, alors,

$$\|v_{i+1}^n - v_i^n\| \leq \frac{\lambda + 2\mu}{1-k}\kappa_n + 2\mu\kappa_n \sum_{j=0}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\|. \tag{4.13}$$

Pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$, donc

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\leq \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + \|v_i^n - v_{i-1}^n\| + \cdots + \|v_1^n - v_0^n\| + \|v_0^n\| \\
&\leq \|v_0^n\| + \tfrac{\lambda+2\mu}{1-k}(i+1)\kappa_n + 2\mu(i+1)\kappa_n\sum_{j=0}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\| \\
&\leq \|v_0^n\| + \tfrac{\lambda+2\mu}{1-k}T + 2\mu T\sum_{j=0}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\|
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|\varphi(0)\| + \frac{\lambda + 2\mu}{1-k}T + 2\mu(T+1)\sum_{j=0}^{i} k^{i-j}\|v_j^n\|.$$

En utilisant le Lemme 2.3.7, on obtient

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \left(\|\varphi(0)\| + \frac{\lambda + 2\mu}{1-k}T\right)\exp\left(\frac{2\mu(T+1)}{1-k}\right) := \eta. \tag{4.14}$$

Alors, pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$\|v_i^n\| \leq \eta, \tag{4.15}$$

et

$$\frac{\|v_{i+1}^n - v_i^n\|}{\kappa_n} \leq \frac{\lambda + 2\mu(1+\eta)}{1-k} + \lambda + 2\mu(1 + \|\varphi(0)\|) := \gamma. \tag{4.16}$$

2$^{\text{ème}}$ Étape Pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, \cdots, n-1$, on définit $x_n : [-\tau, t_{i+1}^n] \longrightarrow H$ par

$$x_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-\tau, t_0^n], \\ \frac{t_{i+1}^n - t}{t_{i+1}^n - t_i^n} v_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} v_{i+1}^n & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]. \end{cases} \tag{4.17}$$

Ensuite, pour presque tous $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$,

$$\dot{x}_n(t) = \frac{-v_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} + \frac{v_{i+1}^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} = -\frac{1}{\kappa_n}(v_i^n - v_{i+1}^n).$$

par (4.10), (4.11) et (4.12) on a

$$x_n(t_{i+1}^n) \in C\big(t_{i+1}^n, x_n(t_i^n)\big), \tag{4.18}$$

et

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{C\left(t_{i+1}^n, x_n(t_i^n)\right)}\big(x_n(t_{i+1}^n)\big) + g_0\big(t_i^n, \mathscr{Z}(t_i^n)x_n\big), \tag{4.19}$$

avec l'estimation

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \gamma. \tag{4.20}$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et pour $n \geq 1$, on definit les fonctions

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ t_{n-1}^n & \text{si } t = T. \end{cases}$$

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{si } t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[\\ T & \text{si } t = T. \end{cases}$$

Observons que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \delta_n(t) = t. \tag{4.21}$$

Donc, par (4.18) et (4.19) on a

$$x_n(\theta_n(t)) \in C\big(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t))\big), \tag{4.22}$$

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{C\big(\theta_n(t),x_n(\delta_n(t))\big)}\big(x_n(\theta_n(t))\big) + g_0\big(\delta_n(t), \mathscr{L}(\delta_n(t))x_n\big) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Soit

$$\big(g_n(t)\big)_n := \big(g_0\big(\delta_n(t), \mathscr{L}(\delta_n(t))x_n\big)\big)_n \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Alors nous avons

$$\dot{x}_n(t) \in -N_{C\big(\theta_n(t),x_n(\delta_n(t))\big)}\big(x_n(\theta_n(t))\big) + g_n(t) \text{ p.p. } t \in [0,T], \tag{4.23}$$

et

$$\|g_n(t)\| \leq \mu(1 + \|x_n(\delta_n(t)\|).$$

<u>3ème Étape</u> On va montrer que (x_n) converge uniformément sur $[-\tau, T]$ à une fonction absolument continue sur $[0,T]$.

Par construction on a

$$x_n(\theta_n(t)) \in C\big(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t))\big) \cap \eta\mathbb{B},$$

ce qui implique que

$$x_n(\theta_n(t)) \in C\big([0,T] \times \eta\mathbb{B}\big) \cap \eta\mathbb{B}.$$

Par $(\mathscr{H}_1)$ la suite $x_n(\theta_n(t))$ est relativemment compacte pour tout $t \in [0,T]$.
Comme

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| \leq \gamma\big(\theta_n(t) - t\big),$$

donc,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| = 0. \tag{4.24}$$

Donc $\big(x_n(t)\big)$ est relativement compacte. Ainsi $\big(x_n(\cdot)\big)$ est relativement compacte sur $\mathcal{C}_H\big([0,T]\big)$. Par conséquent, par l'inégalité (4.20) on peut supposer que $(\dot{x}_n)$ $\sigma\big(L^\infty_H([0,T]), L^1_H([0,T])\big)$ converger vers $y \in L^\infty_H([0,T])$ avec

$$\|y(t)\| \leq \gamma \text{ pour p.p. } t \in [0,T].$$

Donc, $(x_n)_n$ converge sur $\mathcal{C}_H\big([-\tau,T]\big)$ vers une fonction continue x telle que

$$x(t)=\varphi(0)+\int_0^t \dot{x}(s)ds,\ \ \forall t\in[0,T]$$

avec $\dot{x}(t)=y(t)$ pour p.p. $t\in[0,T]$ et $x=\varphi$ on $[-\tau,0]$.

La convergence de (g_n).

Comme

$$\|g_n(t)\|\leq \mu(1+\eta)\ \text{ pour tout }\ n\in\mathbb{N}\ \text{ et pour tout }\ t\in[0,T],$$

donc on peut extraire une sous suite notée (g_n) $\sigma(L^\infty_H,L^1_H)$ converge vers une fonction $g\in L^\infty_H([0,T])$ avec

$$\|g(t)\|\leq \mu(1+\eta)\text{ p.p. } t\in[0,T].$$

En effet, pour tout $z\in L^\infty_E([0,T])$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle g_n(\cdot),z(\cdot)\rangle=\langle g(\cdot),z(\cdot)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\langle g_n(s),z(s)\rangle ds=\int_0^T\langle g(s),z(s)\rangle ds,$$

en particulié, on prend $z(\cdot)=\chi_{[0,t]}(\cdot)e_j$, avec $t\in[0,T]$, $\chi_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'interval $[0,T]$ et (e_j) une base de T. Alors on a

$$\langle\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(s)ds,e_j\rangle=\langle\int_0^t g(s)ds,e_j\rangle,\ \ \forall j,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t g_n(s)ds=\int_0^t g(s)ds.$$

On conclut $(g_n)_n$ convergeant faiblement $(\sigma(L^1,L^\infty))$ vers $(g_n)_n$.

On va montrer

$$\mathscr{Z}(\delta_n(t))x_n-\mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0}\longrightarrow 0,\ \text{lorsque } n\longrightarrow\infty.$$

Soit $t \in [0,T]$, on trouve

$$\begin{array}{rcl}
\|\mathscr{Z}(\delta_n(t))x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} & \leq & \sup\limits_{s\in[-\tau,0]} \|x_n(\delta_n(t)+s) - x_n(t+s)\| \\
& & +\|\mathscr{Z}(t)x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} \\
& \leq & \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[-\tau,T],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|x_n(s_1) - x_n(s_2)\| \\
& & \mathscr{Z}(t)x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} \\
& \leq & \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[-\tau,0],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|x_n(s_1) - x_n(s_2)\| \\
& & + \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[0,T],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|x_n(s_1) - x_n(s_2)\| \\
& & +\|\mathscr{Z}(t)x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} \\
& \leq & \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[-\tau,0],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)\| \\
& & + \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[0,T],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|x_n(s_1) - x_n(s_2)\| \\
& & \|\mathscr{Z}(t)x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} \\
& \leq & \sup\limits_{\{s_1,s_2\in[-\tau,0],|s_1-s_2|\leq\kappa_n\}} \|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)\| \\
& & +\gamma\kappa_n + \|\mathscr{Z}(t)x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0}.
\end{array}$$

Par la continuité de φ et la convergence uniforme de x_n, on voit que

$$\|\mathscr{Z}(\delta_n(t))x_n - \mathscr{Z}(t)x\|_{\mathcal{C}_0} \longrightarrow 0, \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty. \tag{4.25}$$

4ème Étape.

Montrons maintenant que $x(\cdot)$ est une solution de $\big(\mathscr{G}\big)$. Tout d'abord, on montre que

$$x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall \ t \in [0,T].$$

En effet, par $(\mathscr{H}_2)$,(4.21) et (4.22) on a

$$\begin{array}{rcl}
d\big(x_n(t), C(t,x(t))\big) & \leq & d\big(x_n(t), x_n(\theta_n(t))\big) + d\big(x_n(\theta_n(t)), C(t,x(t))\big) \\
& \leq & \|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| + \lambda|\theta_n(t) - t| + k\|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\|.
\end{array}$$

passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$, on trouve

$$x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall \ t \in [0,T].$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|\dot{x}_n(t) - g_n(t)\| &\leq \|\dot{x}_n(t)\| + \|g_n(t)\|\\ &\leq \gamma + \mu(1+\eta) := M,\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\dot{x}_n(t) - g_n(t) \in M\mathbb{B}, \tag{4.26}$$

donc, par l'inclusion (4.23) et la relation (4.26) on trouve pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$-\dot{x}_n(t) + g_n(t) \in N_{C\left(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t))\right)}\left(x_n(\theta_n(t))\right) \cap M\mathbb{B}, \tag{4.27}$$

de (2.2), (2.4) et la Proposition 2.6.2 on a

$$-\dot{x}_n(t) + g_n(t) \in M\partial d_{C\left(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t))\right)}\left(x_n(\theta_n(t))\right). \tag{4.28}$$

Grâce à la convergence faible de la suite $(-\dot{x}_n + g_n, g_n)_n$ vers $(-\dot{x} + g, g)$ dans $L^1_{H\times H}([0,T])$, par le lemme de Mazur, il existe une sous suite $(\phi_n, \psi_n)_n$, qui converge vers $(-\dot{x} + g, g)$ dans $L^1_{H\times H}([0,T])$, telle que $n \geq 0$, on a

$$\phi_n \in co\{-\dot{x}_m + g_m : m \geq n\} \text{ et } \psi_n \in co\{g_m : m \geq n\}.$$

La convergence forte de $(\phi_n, \psi_n)_n$ vers $(-\dot{x} + g, g)$ nous permet d'extraire de la suite $(\phi_n, \psi_n)_n$ une sous suite qui converge p.p. vers $(-\dot{x} + g, g)$. Par conséquent, pour presque tout $t \in [0,T]$, on a

$$-\dot{x}(t) + g(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{-\dot{x}_m(t) + g_m(t) : m \geq n\}, \tag{4.29}$$

et

$$g(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{g_m(t) : m \geq n\}. \tag{4.30}$$

Par la caractérisation de l'enveloppe convexe fermée d'un ensmble, il en résulte que, pour presque tout $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $y \in H$,

$$\langle y, \phi_q(t)\rangle \leq \sup_{m\geq n}\langle y, -\dot{x}_m(t) + g_m(t)\rangle \text{ pour tout } q \geq n,$$

et

$$\langle y, \psi_q(t)\rangle \leq \sup_{m\geq n}\langle y, g_m(t)\rangle \text{ pour tout } q \geq n.$$

En passant à la limite dans les deux inégalités précédentes, quand $q \longrightarrow +\infty$ et par la Proposition 2.4.7 on obtient

$$\begin{aligned}\langle y, -\dot{x}(t) + g(t)\rangle &\leq \sup_{m\geq n}\langle y, -\dot{x}_m(t) + g_m(t)\rangle \\ &\leq \sup_{m\geq n}\sigma^*\Big(y, M\partial d_{C\big(\theta_m(t), x_m(\delta_m(t))\big)}\big(x_m(\theta_m(t))\big)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\langle y, g(t)\rangle \leq \sup_{m\geq n}\sigma^*\Big(y, F\big(\delta_m(t), \mathscr{Z}(\delta_m(t))x_m\big)\Big),$$

donc

$$\langle y, -\dot{x}(t) + g(t)\rangle \quad \leq \quad \limsup_{n\to+\infty}\sigma^*\Big(y, M\partial d_{C\big(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t))\big)}\big(x_n(\theta_n(t))\big)\Big)$$

et

$$\langle y, g(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty}\sigma^*\Big(y, F\big(\delta_n(t), \mathscr{Z}(\delta_n(t))x_n\big)\Big).$$

Par $(\mathscr{H}_2)$ et la Proposition 2.6.4 on obtient la s.c.s. sur $gph(C)$ de la fonction

$$(t, x, x') \longmapsto \sigma^*\Big(y, M\partial d_{C(t,x)}(x')\Big).$$

De plus, par l' hypothèse $(\mathscr{H}_4)$, on a la fonction

$$(t, \varphi) \longmapsto \sigma^*(y, F(t, \varphi))$$

est aussi s.c.s. sur $[0, T] \times \mathcal{C}_0$. Par suite

$$\Big(\theta_n(t), x_n(\delta_n(t)), x_n(\theta_n(t))\Big) \in gph(C) \text{ pour tout } n.$$

Donc pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $y \in H$

$$\langle y, -\dot{x}(t) + g(t)\rangle \quad \leq \quad \sigma^*\Big(y, M\partial d_{C(t,x(t))}\big(x(t)\big)\Big)$$

et

$$\langle y, g(t)\rangle \leq \sigma^*\Big(y, F\big(t, \mathscr{Z}(t)x\big)\Big),$$

d'où par la Proposition 2.4.7 on trouve que

$$-\dot{x}(t) + g(t) \in M\partial d_{C(t,x(t))}\big(x(t)\big),$$

et

$$g(t) \in F\big(t, \mathscr{X}(t)x\big).$$

Donc, on obtient

$$\dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + g(t), \quad \text{p.p. sur } [0,T];$$

et

$$g(t) \in F\big(t, \mathscr{X}(t)x\big)\text{p.p.},$$

avec

$$\|\dot{x}(t) - g(t)\| \leq \gamma + \mu(1+\eta).$$

Ce qui complète la preuve de notre théorème. ■

On donne maintenant un corollaire du Théorème 4.3.1.

Corollaire 4.3.2. *Supposons que les hypothèses $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_3$, $\mathscr{H}_4$ sont vérifiées et soit $G : [0,T] \times \mathcal{C}_0 \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides fermées. On suppose que $G(\cdot)$ satisfait les assertions suivantes*

(G_1) G est $\mathcal{L}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$ mesurable ;

(G_2) pour tout $t \in [0,T]$, la multi-application $G(t,\cdot)$ est semi-continue inférieurement ;

(G_3) pour tout $(t,\varphi) \in [0,T] \times \mathcal{C}_0$

$$d(0, G(t,\varphi)) \leq \xi(1 + \|\varphi(0)\|).$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$, le problème

$$(\mathscr{P}\mathscr{G}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, \mathscr{X}(t)x) + G(t, \mathscr{X}(t)x), & \text{p.p. sur } [0,T]; \\ x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall \ t \in [0,T]; \\ \varphi(s) = \mathscr{X}(0)x(s), \ \forall \ s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

admet au moins une solution continue $x : [-\tau, T] \to H$, absolument continue sur $[0,T]$. Avec

$$\|\dot{x}(t)\| \leq d \text{ p.p. } t \in [0,T],$$

où

$$d = \frac{\lambda + 2(\mu+\xi)(1+\zeta)}{1-k} + \lambda + 2(\mu+\xi)(1+\|\varphi(0)\|),$$

et

$$\zeta = \|\varphi(0)\| + \frac{\lambda + 2(\mu+\xi)}{1-k} T \exp\left(\frac{2(\mu+\xi)(T+1)}{1-k}\right).$$

Preuve.

Soit

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{array}{c} x : [-\tau, T] \to H,\ x(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(z)dz, x(t) = \varphi(t) \text{ sur } [-\tau, 0] \\ \text{et } \|\dot{x}(t)\| \leq \xi(1+\|\varphi(0)\|),\ \text{p.p. sur } [0,T] \end{array} \right\}.$$

On définit la multi-application $K_G : \mathcal{Z} \rightrightarrows L^1_H([0,T])$ par

$$K_G(x) = \left\{ y \in L^1_H([0,T]) : y(t) \in G(t, \mathscr{X}(t)x) \quad \text{p.p. sur } [0,T] \right\}.$$

K_G est semi-continue inférieurement, à valeurs non vides décomposables fermées car G est à valeurs mesurables fermées. Par conséquent K_G admet une sélection continue $l : \mathcal{Z} \to L^1_H([0,T])$ telle que $l(x)(t) \in G(t, \mathscr{X}(t)x)$ (voir [23]).

Pour tous $(t, \varphi) \in [0,T] \times \mathcal{C}_0$, on pose

$$L(t, \varphi(t)) = g_0(t, \varphi(t)) + l(x)(t),$$

d'oú

$$\|L(t, \mathscr{X}(t)x)\| \leq (\mu + \xi)(1 + \|\varphi(0)\|).$$

Répétons les mêmes étapes de la preuve du Théorème 4.3.1 pour obtenir la solution. ■

4.4 Inclusion différentielle dans un espace de Banach

Dans cette section, nous fournissons une méthode de réduction qui résout l'inclusion différentielle fonctionnelle dans les espaces de Banach, c'est à dire lorsque le second member contient un retard fini. Nous considérons le cas où l'application à valeurs ensemblistes prend des valeurs fermées non vides, non-convexes et non necessairement bornées, nous utilisons la notion d'hypothèse de Lipschitzness $\lambda - H$ au lieu de la condition de Lipschitz standard, connue sous le nom de troncature. Une application à un système dynamique gouverné par un processus de Rafle perturbé retardé est donnée, de tels problèmes sont bien posé pour les systèmes de complémentarité différentielle et les problèmes d'hystérésis.

4.4.1 Caractérisations des multi-applications $(\lambda - H)$-Lipschitzienne

On rappelle quelques résultats concernant les multi-applications $(\lambda - H)$-Lipschitzienne et leurs caractérisations qui nous seront utiles par la suite.

Soit E un espace de Banach séparable, $\|\cdot\|$ son norm et $\ominus$ son élément nul.

Définition 4.4.1. *[36] Soient $D \subset [0,T] \times E$ et $F : D \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vide. On dit que la multi-application F est localement intégralement $(\lambda - H)$-Lipschitz au point $(t_1, x_1) \in D$ s'il existe deux constantes $\epsilon > 0$, $\gamma \geq 0$ et il existe une fonction positive $\eta(\cdot)$ intégrable sur $[t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon]$ telle que*

$$haus_\lambda(F(t,x), F(t,y)) < (\eta(t) + \gamma\lambda)\|x - y\|, \tag{4.31}$$

pour tous (t,x), $(t,y) \in \big([t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon] \times (x_1 + \epsilon\mathbb{B})\big) \cap D$ et pour tout $\lambda \geq 0$.

On dit que la multi-application F est intégralement $(\lambda - H)$-Lipschitz au point $(t_1, x_1) \in D$ s'il existe deux constantes $\epsilon > 0$, $\gamma \geq 0$ et $\eta(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0,T])$ telle que l'inégalité (4.31) est vérifiée pour tout (t,x), $(t,y) \in D$ et pour tout $\lambda \geq 0$.

$haus_\lambda(A,B) = 0$ pour tout $\lambda \geq 0$ si et seulement si $A = B$.

Proposition 4.4.2. *[5] Soit $\lambda_0 > 0$ et soit A, B deux sous-ensembles fermés de E tels que A_{λ_0} et B_{λ_0} sont non vides. Alors pour tout $\lambda \geq \lambda_0$*

$$haus_\lambda(A,B) \leq haus_\lambda(A_\lambda, B_\lambda).$$

De plus, si A et B sont convexes, alors pour $\lambda \geq \lambda_0$

$$haus(A,B) \leq \frac{2\lambda}{\lambda - \lambda_0} haus_\lambda(A,B).$$

4.4.2 Etude d'une inclusion différentielle dans un espace de Banach

Cette section consiste à montrer le résultat d'existence de solution pour l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathscr{D}\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{X}(t)x) & \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) \; = \; \varphi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

La démonstration de notre résultat d'existence est inspiré de celle donnée dans [4] pour le problème sans retard.

Pour la preuve de notre théorème, nous avons besoin du résultat suivant pour le problème sans retard.

Théorème 4.4.3. *[37] Pour tout $\beta > 0$, soit $F : [0,T] \times \beta\overline{\mathbb{B}} \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant*

(1) pour tout $x \in \mathcal{C}_E([0,T])$ et $t \in [0,T]$, la fonction $t \longmapsto F(t, x(t))$ est mesurable ;

(2) pour certaines fonctions $\eta(\cdot),\ \xi(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+_*}([0,T])$

$$d(\ominus, F(t, u(t))) < \xi(t) + \eta(t)\|x(t)\| \ p.p.,\ \|x(t)\| \leq \beta,$$

$d(\ominus, F(t, \ominus)) = 0$ pour $\xi(t) = 0$;

(3) pour $\|x(t)\| \leq \beta$, $\|y(t)\| \leq \beta$, $x(t) \neq y(t)$ on a

$$haus_\lambda(F(t, x(t)), F(t, y(t))) \leq \eta(t)\|x(t) - y(t)\| \ p.p.;$$

avec $0 \leq \lambda \leq \dot{m}(t)$ pour $t \in [0,T]$, où $m(\cdot) : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, la solution absolument continue de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{m}(t) & = \; \eta(t)\, m(t) + \xi(t) \ p.p. \ \ t \in [0,T], \\ m(0) & = \; m_0 \geq 0, \end{cases}$$

Alors, $\forall\ x_0 \in \mathcal{C}_E([0,T])$ avec $\|x_0\| < \beta$, le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)); & p.p.\ t \in [0,T]; \\ x(0) \; = \; x_0; \end{cases} \tag{4.32}$$

admet une solution x telle que

$$\|x(t)\| \leq m(t),\ \|\dot{x}(t)\| \leq \dot{m}(t)\ p.p.$$

pour $t \in [0,T]$ avec $m(t) \leq \beta$.

Maintenant, on donne le résultat d'existence pour le problème avec retard

Théorème 4.4.4. *Pour tout $\beta > 0$ et $\mathcal{C}_0^\beta = \mathcal{C}_0 \cap \beta\overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{C}_0}$, soit $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0^\beta \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées. On suppose que F satisfait les assertions suivantes*

(i) pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\beta$, $F(\cdot, \varphi)$ est mesurable ;

(ii) pour certaines fonctions $\eta(\cdot)$, $\xi(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0,T])$ telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\beta$,

$$d(\ominus, F(t,\varphi)) < \xi(t) + \eta(t)\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0},$$

et $d(\ominus, F(t,\ominus)) = 0$ for $\xi(t) = 0$;

(iii) $\forall\, \varphi,\ \phi \in \mathcal{C}_0^\beta$, avec $\phi \neq \varphi$ on a

$$haus_\lambda\big(F(t,\phi), F(t,\varphi)\big) \leq \eta(t)\|\phi - \varphi\|_{\mathcal{C}_0}.$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\beta$, l'inclusions différentielle $(\mathscr{D}\mathscr{P})$ admet au moins une solution continue $x : [-\tau, T] \to E$, absolument continue sur $[0,T]$.
De plus,

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \dot{m}(t) \text{ p.p.}$$

Preuve.

La preuve est essentiellement identique à celle du Théorème 4.2.2, avec quelqeues adaptations. Nous allons réduire notre problème à un problème sans retard et appliquer le Théorème 4.4.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\varpi_n = Tn^{-1}$. Considérons la partition t_i^n de l'intervalle $[0,T]$ définie par $t_i^n = i\varpi_n$, $i = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ n$.

1$^{\text{ere}}$ Étape *(Construction de solutions approchées)*

La première étape consiste à définir les applications approximantes comme dans (4.2) et (4.3), pour tous $(t,x) \in [-\tau, t_1^n] \times E$, on définit $p_0^n : [-\tau, t_1^n] \times E \longrightarrow E$ par

$$p_0^n(t,x) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } \ t \in [-\tau, 0]; \\ \varphi(0) + \frac{t}{\varpi_n}(x - \varphi(0)) & \text{si } \ t \in \ ]0, t_1^n]; \end{cases}$$

Il est clair que $p_0^n(t_1^n, x) = x, \ \ \forall x \in E$. En effet

$$\begin{aligned} p_0^n(t_1^n, x) &= \varphi(0) + \tfrac{t_1^n}{\varpi_n}(x - \varphi(0)) \\ &= \varphi(0) + \tfrac{\varpi_n}{\varpi_n}(x - \varphi(0)) \\ &= \varphi(0) + (x - \psi(0)) \\ &= x. \end{aligned}$$

On définit la multi-application Λ_0^n sur $[0, t_1^n] \times E$ à valeurs fermées dans E par

$$\Lambda_0^n(t, x) := F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, x)), \ \ \forall (t, x) \in [0, t_1^n] \times E.$$

Montrons que Λ_0^n satisfait les conditions du Théorème 4.4.3.

Remarquons d'abord que la fonction

$$x \longmapsto \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, x)$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, x) - \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, y)\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|p_0^n(t_1^n + s, x) - p_0^n(t_1^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\varpi_n, 0]} \|p_0^n(t_1^n + s, x) - p_0^n(t_1^n + s, y)\| \\ &= \sup_{s \in [-\varpi_n, 0]} \|\tfrac{t_1^n + s}{\varpi_n}(x - y)\| \\ &= \|x - y\|. \end{aligned}$$

Donc la fonction $t \longmapsto \Lambda_0^n(t, u)$ est mesurable.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, x)\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s \in [-\tau + t_1^n, t_1^n]} \|p_0^n(s, x)\| \\ &\leq \max\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \sup_{s \in [0, t_1^n]} \|\varphi(0) + \tfrac{s}{\varpi_n}(x - \varphi(0))\|\} \\ &\leq \max\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \sup_{s \in [0, t_1^n]} \big((1 - \tfrac{s}{\varpi_n})\|\varphi(0)\| + \tfrac{s}{\varpi_n}\|x\|\big)\} \\ &\leq \max\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \|\varphi(0)\| + \|x\|\}. \end{aligned}$$

De plus, par la condition $ii)$ du Théorème 4.4.4, on obtient pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et $x \in E$, telle que $\|x\| \leq \beta$,

$$\begin{aligned} d(\ominus, \Lambda_0^n(t,x)) = d(\ominus, F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,x))) &\leq \xi(t) + \eta(t)\,\|\mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,x)\| \\ &\leq \xi(t) + \eta(t)(\|\varphi(0)\| + \|x\|) \\ &\leq \xi(t) + \eta(t)\|\varphi(0)\| + \eta(t)\|x\| \\ &\leq \zeta(t)(1 + \|\varphi(0)\|) + \eta(t)\|x\| \end{aligned}$$

où $\zeta(t) := \max\{\xi(t), \eta(t)\}$. Pour $\zeta(t) = 0$, on obtient

$$d(\ominus, \Lambda_0^n(t,\ominus)) = d(\ominus, F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,\ominus))) = 0.$$

Finalement, grace à la condition $iii)$ on a

$$\begin{aligned} haus_\lambda(\Lambda_0^n(t,x), \Lambda_0^n(t,y)) &= haus_\lambda\big(F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,x)), F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,y))\big) \\ &\leq \eta(t)\,\|\mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,x) - \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot,y)\| \\ &= \eta(t)\,\|x-y\|, \end{aligned}$$

$\|x\| \leq \beta$ et $\|y\| \leq \beta$, $u \neq v$.

Donc Λ_0^n vérifie les conditions du Théorème 4.4.3, cela donne une solution absolument continue $\vartheta_0^n : [0, t_1^n] \longrightarrow E$ au problème

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_0^n(t) & \in \Lambda_0^n(t, \vartheta_0^n(t)) \qquad\qquad \text{p.p.}\, t \in [0, t_1^n]; \\ \vartheta_0^n(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{\vartheta}_0^n(s)ds \qquad \forall\, t \in \,]0, t_1^n]; \\ \vartheta_0^n(0) & = \varphi(0), \end{cases}$$

avec $\|\vartheta_0^n(t)\| \leq m(t)$ et $\|\dot{\vartheta}_0^n(t)\| \leq \dot{m}(t)$, i.e., ϑ_0^n est une solution à

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_0^n(t) & \in F(t, \mathscr{Z}(t_1^n)p_0^n(\cdot, \vartheta_0^n)) \qquad \text{p.p.}\, t \in [0, t_1^n]; \\ \vartheta_0^n(0) & = \varphi(0). \end{cases}$$

On pose

$$x_n(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si\ t \in [-\tau, 0]; \\ \vartheta_0^n(t) & si\ t \in \,]0, t_1^n]. \end{cases}$$

Comme précédemment, pour tout $(t,x) \in [-\tau, t_1^n] \times E$, on définit $p_1^n : [-\tau, t_2^n] \times E \longrightarrow E$ par

$$p_1^n(t,x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } t \in [-\tau, t_1^n]; \\ x_n(t_2^n) + \frac{t-t_2^n}{\varpi_n}(x - x_n(t_2^n)) & \text{si } t \in \,]t_1^n, t_2^n]. \end{cases}$$

Avec $p_1^n(t_2^n, x) = x, \quad \forall\, x \in E$. Par conséquent, nous pouvons définir de la même manière la multi-application Λ_1^n sur $[t_1^n, t_2^n] \times E$ à valeurs fermées dans E par

$$\Lambda_1^n(t,x) := F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x)), \;\; \forall (t,x) \in [t_1^n, t_2^n] \times E.$$

La fonction

$$x \longmapsto \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x)$$

est Lipschitzienne puisque pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned} \|\mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x) - \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,y)\| &= \sup_{s\in[-\tau,0]} \|p_1^n(t_2^n+s,x) - p_1^n(t_2^n+s,y)\| \\ &= \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|p_1^n(t_2^n+s,x) - p_1^n(t_2^n+s,y)\| \\ &= \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|x_n(t_1^n) + \tfrac{t_2^n+s-t_1^n}{\varpi_n}(x - x_n(t_1^n)) \\ &\quad -(x_n(t_1^n) + \tfrac{t_2^n+s-t_1^n}{\varpi_n}(y - x_n(t_1^n)))\| \\ &= \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|\tfrac{t_2^n+s-t_1^n}{2^{-n}}(x-y)\| \\ &= \|\tfrac{t_2^n-t_1^n}{\varpi_n}(x-y)\| \\ &= \|x-y\|. \end{aligned}$$

On a,

$$\begin{aligned} \|\mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-\tau+t_2^n,t_2^n]} \|p_1^n(s,x)\| \\ &\le \max\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|\vartheta_0^n(s)\|\} + \sup_{s\in[t_1^n,t_2^n]} \Big((1 - \tfrac{t-s}{\varpi_n})\|x_n(t_2^n)\| + \tfrac{t-s}{\varpi_n}\|x\|\Big) \\ &\le \max\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|\vartheta_0^n(s)\|\} + \|x\|. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$ et $x \in E$, avec $\|x\| \le \beta$

$$\begin{aligned} d(\ominus, \Lambda_1^n(t,x)) = d(\ominus, F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x))) &\le \xi(t) + \eta(t)\, \|\mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x)\| \\ &\le \zeta(t)(1 + \max\{\|\psi\|_{\mathcal{C}_0}, \sup_{s\in[0,t_1^n]} \|\vartheta_0^n(s)\|\}) + \eta(t)\, \|x\|, \end{aligned}$$

pour $\zeta(t) = 0$

$$d(\ominus, \Lambda_1^n(t,\ominus)) = d(\ominus, F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,\ominus))) = 0.$$

De plus, par la condition *iii*) du Théorème 4.4.4, on obtient, pour tout $t \in [t_1^n, t_2^n]$ et tous $x, y \in E$, telles que $\|x\| \leq \beta$, et $\|y\| \leq \beta$, $x \neq y$

$$\begin{aligned}
haus_\lambda(\Lambda_1^n(t,x), \Lambda_1^n(t,y)) &= haus_\lambda\big(F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,x)), F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot,y))\big) \\
&\leq \eta(t)\,\|\mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(0,x) - \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(0,y)\| \\
&= \xi(t) + \eta(t)\,\|p_1^n(t_2^n,x) - p_1^n(t_2^n,y)\| \\
&= \xi(t) + \eta(t)\,\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Donc Λ_1^n vérifie les conditions du Théorème 4.4.3, cela donne une solution absolument continue $\vartheta_1^n : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow E$ au problème

$$\begin{cases}
\dot{\vartheta}_1^n(t) & \in \Lambda_1^n(t, \vartheta_1^n(t)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n]; \\
\vartheta_1^n(t) & = x_n(t_2^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{\vartheta}_1^n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_1^n, t_2^n]; \\
\vartheta_1^n(t_2^n) & = x_n(t_2^n),
\end{cases}$$

$\|\vartheta_1^n(t)\| \leq m(t)$ et $\|\dot{\vartheta}_1^n(t)\| \leq \dot{m}(t)$. Donc v_1^n est une solution de

$$\begin{cases}
\dot{\vartheta}_1^n(t) & \in F(t, \mathscr{Z}(t_2^n)p_1^n(\cdot, \vartheta_1^n)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_1^n, t_2^n]; \\
\vartheta_1^n(t) & = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{\vartheta}_1^n(s)ds \qquad \forall\ t \in]t_1^n, t_2^n]; \\
\vartheta_1^n(0) & = \varphi(0).
\end{cases}$$

Par récurrence, supposons que x_n ont été construites est définies sur $[-\tau, t_k^n]$, continues sur $[-\tau, t_k^n]$, absolement continues sur $[0, t_k^n]$, tels que

$$\begin{cases}
\dot{x}_n(t) & \in F(t, \mathscr{Z}(t_{k-1}^n)p_{k-1}^n(\cdot, x)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_{k-1}^n, t_k^n]; \\
x_n(t) & = x_n(t_{k-1}^n) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{x}_n(s)ds \qquad \forall\ t \in]t_{k-1}^n, t_k^n];
\end{cases}$$

construisons une solution sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$.

Pour tout $(t,x) \in [-\tau, t_1^n] \times E$, on définit $p_k^n : [-\tau, t_{k+1}^n] \times E \longrightarrow E$ par

$$p_k^n(t,x) = \begin{cases}
x_n(t) & \text{si } t \in [-\tau, t_k^n]; \\
x_n(t_k^n) + \frac{t - t_k^n}{\varpi_n}(x - x_n(t_k^n)) & \text{si } t \in]t_k^n, t_{k+1}^n];
\end{cases}$$

telle que $p_k^n(t_{k+1}^n, x) = x$ et $p_k^n \in \mathcal{C}_E([-\tau, t_{k+1}^n])$.

La fonction

$$x \longmapsto \mathscr{Z}(t_{k+1}^n) p_k^n(\cdot, x)$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tous $x, y \in E$ on a

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{Z}(t_{k+1}^n)p_k^n(\cdot,x) - \mathscr{Z}(t_{k+1}^n)p_k^n(\cdot,y)\| = \\
&\sup_{s\in[-\tau,0]} \|p_k^n(t_{k+1}^n + s, x) - p_k^n(t_{k+1}^n + s, y)\| \\
&= \sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(t,x) - p_k^n(t,y)\|.
\end{aligned}$$

On distingue deux cas

(1) si $-\tau + t_{k+1}^n \leq t_k^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(t,x) - p_k^n(t,y)\| &= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(t,x) - p_k^n(t,y)\| \\
&= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|\tfrac{t-t_k^n}{\varpi_n}(x-y)\| \\
&= \|x-y\|.
\end{aligned}$$

(2) si $t_k^n \leq -\tau + t_{k+1}^n \leq t_{k+1}^n$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(t,x) - p_k^n(t,y)\| &\leq \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(t,x) - p_k^n(t,y)\| \\
&= \sup_{t\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|\tfrac{t-t_k^n}{\varpi_n}(x-y)\| \\
&= \|x-y\|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{Z}(t_{k+1}^n)p_k^n(\cdot,x)\|_{\mathcal{C}_0} &= \sup_{s\in[-\tau+t_{k+1}^n, t_{k+1}^n]} \|p_k^n(s,x)\| \\
&\leq \max\left\{\|\varphi\|_{\mathcal{C}_0}, \max_{0\leq k\leq i-1} \sup_{s\in[t_k^n, t_{k+1}^n]} \|\vartheta_k^n(s)\|\right\} + \|x\|.
\end{aligned}$$

De la même manière on peut définir la multi-application Λ_k^n sur $[t_k^n, t_{k+1}^n] \times E$ à valeurs fermées dans E par

$$\Lambda_k^n(t,u) := F(t, \mathscr{Z}(t_{k+1}^n)p_k^n(\cdot,x)), \ \ \forall (t,x) \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \times E$$

satisfaisant les conditions du Theorem 4.4.3.

D'où, il existe une solution $\vartheta_k^n : [t_k, t_{k+1}] \longrightarrow E$ à

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_k^n(t) & \in \Lambda_k^n(t, \vartheta_k^n(t)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ \vartheta_k^n(t) & = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{\vartheta}_k^n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ \vartheta_k^n(t_k^n) & = x_n(t_k^n), \end{cases}$$

avec

$$\|\vartheta_k^n(t)\| \leq m(t) \text{ et } \|\dot{\vartheta}_k^n(t)\| \leq \dot{m}(t).$$

Donc ϑ_k^n est une solution de l'inclusion

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_k^n(t) & \in F(t, \mathscr{Z}(t_{k+1}^n) p_k^n(\cdot, \vartheta_k^n)) \qquad \text{p.p. } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ \vartheta_k^n(t) & = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{\vartheta}_k^n(s)ds \qquad \forall\, t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]; \\ \vartheta_k^n(t_k^n) & = x_n(t_k^n). \end{cases}$$

On pose $x_n(t) = \vartheta_k^n(t)$ sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, on obtient

$$x_n(t) = \begin{cases} \vartheta_0^n(t) = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds & \text{si } t \in [0, t_1^n]; \\ \vartheta_1^n(t) = x_n(t_1^n) + \int_{t_1^n}^t \dot{x}_n(s)ds & \text{si } t \in]t_1^n, t_2^n]; \\ \quad \cdots & \\ \vartheta_k^n(t) = x_n(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{x}_n(s)ds & \text{si } t \in]t_k^n, t_{k+1}^n]; \end{cases}$$

et

$$\|x_n(t)\| \leq m(t).$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on définit deux fonctions réelles θ_n, $\delta_n : [0, T] \to \mathbb{R}$ par

$$\theta_n(t) = t_i^n, \ \delta_n(t) = t_{i+1}^n, \ \ \forall\, t \in]t_i^n, t_{i+1}^n] \text{ telle que } \theta_n(0) = 0.$$

On définit aussi la fonction $p^n_{\varpi_n \theta_n(t)} \in \mathcal{C}_E([-\tau, \delta_n(t)])$ par

$$p^n_{\varpi_n \theta_n(t)}(t, x) = \begin{cases} x_n(t) & \text{si } t \in [-\tau, \theta_n(t)]; \\ x_n(\theta_n(t)) + \frac{t - \theta_n(t)}{\varpi_n}(x - x_n(\theta_n(t))) & \text{si } t \in]\theta_n(t), \delta_n(t)]. \end{cases}$$

Il est clair que x_n est continue sur $[-\tau, T]$, absolument continue sur $[0, T]$ et satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) & \in F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))) \qquad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x_n(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}_n(s)ds \qquad \forall\, t \in [0,T]; \\ x_n(t) & = \varphi(t) \qquad \forall\, t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \tag{4.33}$$

<u>**2ème Étape**</u> *(La convergence uniforme)*

D'abord, nous montrons la convergence de la suite $(x_n)_n$.

Par la condition (2) du Théorème 4.4.4 et l'inclusion (4.33), pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))), \tag{4.34}$$

avec $\mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))(0) = x_n(t)$ et

$$d\big(\ominus, F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\big) \leq \xi(t) + \eta(t)\|x_n(t)\|.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \big(\mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t))\big)(0) &= p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t) + 0, x_n(t)) \\ &= x_n(\theta_n(t)) + \tfrac{\delta_n(t)-\theta_n(t)}{\varpi_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) \\ &= x_n(\theta_n(t)) + \tfrac{\varpi_n(i+1-i)}{\varpi_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) \\ &= x_n(t), \end{aligned}$$

De plus, puisque $\|x_n(t)\| \leq m(t)$, on obtient

$$d\big(\ominus, F(t, \mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)))\big) \leq \xi(t) + \eta(t)m(t).$$

D'où pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leq \dot{m}(t). \tag{4.35}$$

On montre la convergence de $(x_n(\cdot))$. Il est clair que $(x_n(\cdot))_n$ est une suite bornée dans $\mathcal{C}_E([0, T])$, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\|x_n(t)\| = \|\varphi(0)\| + \int_0^t \|\dot{x}_n(s)\|ds \leq \|\varphi(0)\| + \int_0^t \dot{m}(s)ds = \gamma(t).$$

Par la relation (4.35), $(x_n(\cdot))_n$ est une suite équicontinue. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(x_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_E([0,T])$, donc on peut extraire une sous suite, notée $(x_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément vers x dans $\mathcal{C}_E([0,T])$.
Ainsi par la relation (4.35), $(\dot{x}_n(\cdot))$ est uniformement bornée, donc on peut extraire une sous suite, notée aussi $(\dot{x}_n)_n$ convergeant faiblement* $(\sigma(L^\infty, L^1))$ vers $y \in L^1_E([0,T])$, avec

$$\|y(t)\| \leq (1+\alpha(t))\,\rho(t) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

En effet, pour tout $z \in L^\infty_E([0,T])$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{x}_n(\cdot), z(\cdot)\rangle = \langle y(\cdot), z(\cdot)\rangle,$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{x}_n(s), z(s)\rangle ds = \int_0^T \langle y(s), z(s)\rangle ds,$$

en particulier, on prend $z(\cdot) = \chi_{[0,t]}(\cdot)e_j$, avec $t \in [0,T]$, $\chi_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'interval $[0,T]$ et (e_j) une base de T. Alors on a

$$\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{x}_n(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_0^t y(s)ds, e_j\rangle, \ \ \forall j,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{x}_n(s)ds = \int_0^t y(s)ds,$$

comme $(x_n(\cdot))_n$ est une suite absolument continue, on a l'inégalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} (x_n(t) - x_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{x}_n(s)ds = \int_0^t y(s)ds,$$

alors,

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t y(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

d'où $x(\cdot)$ est une application absolument continue et $\dot{x}(t) = y(t)$ presque partout. On conclut $(\dot{x}_n)_n$ convergeant $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $(x_n)_n$.

Maintenant, on va montrer que

$$\|\mathscr{Z}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) - \mathscr{Z}(t)x\| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|\mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(s,x_n(t)) - \mathscr{L}(t)x(s)\|_{\mathcal{C}_0} =$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(s+t)\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,0]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s) + x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\|$$

$$\leq \sup_{s\in[-\tau,0]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\| +$$

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\|.$$

D'abord,

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$\leq \sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$+ \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\delta_n(t)+s,x_n(t)) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x_n(\delta_n(t)+s) - x(\delta_n(t)+s)\| +$$

$$\sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|x_n(\theta_n(t)) + \frac{\delta_n(t)+s-\theta_n(t)}{\varpi_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t)) - x(\delta_n(t)+s))\|$$

$$= \sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x_n(\delta_n(t)+s) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$+ \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|\frac{s}{\varpi_n}(x_n(t) - x_n(\theta_n(t))) + x_n(t) - x(\delta_n(t)+s)\|$$

$$= \|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| + \|x_n(t) - x_n(\delta_n(t))\|.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[-\tau,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \quad &\leq \quad \sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&\quad + \sup_{s\in[-\varpi_n,0]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&= \quad \sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x(\delta_n(t)+s) - x(s+t)\| \\
&\quad + \|x(\delta_n(t)) - x(t)\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{s\in[-\tau,0]} \|\mathscr{L}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(s,x_n(t)) - \mathscr{L}(t)x(s)\|_{\mathcal{C}_0} \leq$$

$$\|x_n(\theta_n(t)) - x(\theta_n(t))\| + \|x_n(t) - x_n(\delta_n(t))\| +$$

$$\sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x(\delta_n(t)+s)-x(s+t)\| + \|x(\delta_n(t))-x(t)\|.$$

Observons que pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n]$

$$|\theta_n(t)-t| = |t_i^n - t| \leq |t_i^n - t_{i+1}^n| \leq \varpi_n,$$

et nous avons aussi

$$|\delta_n(t)-t| = |t_{i+1}^n - t| \leq |t_i^n - t_{i+1}^n| \leq \varpi_n,$$

i.e.,

$$\theta_n(t) \longrightarrow t \text{ et } \delta_n(t) \longrightarrow t \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

D'une part, on a pour tout $t \in [0,T]$, $(x_n)_n$ converge uniformément vers x, donc

$$\|x(\delta_n(t))-x(t)\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

$$\|x_n(\delta_n(t))-x_n(t)\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } n \longrightarrow \infty,$$

et

$$\|x_n(\theta_n(t))-x(\theta_n(t))\| \longrightarrow 0 \ \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,T]$, x est uniformement continue, alors

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } |s-t| \leq \lambda \text{ implique } \|x(s)-x(t)\| \leq \epsilon.$$

Mais nous avons

$$|\delta_n(t)+s-(s+t)| \leq \varpi_n \text{ pour tout } s \in [-\tau, \varpi_n].$$

D'où

$$\sup_{s\in[-\tau,-\varpi_n]} \|x(\delta_n(t)+s)-x(s+t)\| \leq \epsilon \text{ pour } \lambda \leq \varpi_n.$$

On peut conclure que

$$\mathscr{X}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) \longrightarrow \mathscr{X}(t)x \text{ dans } \mathcal{C}_0. \tag{4.36}$$

Enfin, puisque $\mathscr{X}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) \longrightarrow \mathscr{X}(t)x$ dans $\mathcal{C}_0$, $(\dot{x}_n)_n$ converges $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $\dot{x}$, et la multi-application $F(t,\cdot)$ est à valeurs fermées dans $\mathcal{C}_0$, alors

$$\dot{x}(t) \in F(t, \mathscr{X}(t)x).$$

En effet, par l'inclusion (4.34), la relation (4.36) et la condition (iii) du Théorème 4.4.4 on déduit

$$d\big(\dot{x}_n(t), F(t, \mathscr{Z}(t)x)\big) \leq \eta(t)\|\mathscr{Z}(\delta_n(t))p^n_{\varpi_n\theta_n(t)}(\cdot, x_n(t)) - \mathscr{Z}(t)x\| \ p.p.$$

Passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente on trouve due à la fermeture de $F(t, \cdot)$

$$d\big(\dot{x}(t), F(t, \mathscr{Z}(t)x)\big) = 0 \ \ p.p.$$

Donc, x satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & \in F(t, \mathscr{Z}(t)x) & \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) & = \varphi(0) + \int_0^t \dot{x}(s)ds & \forall\, t \in [0,T]; \\ x(t) & = \varphi(t) & \forall\, t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Ceci complète la preuve de notre Théorème. ■

Nous présentons maintenant un autre résultat d'existence de solution pour l'inclusion différentielle fonctionnelle régie par le processus de rafle non-convexe dépendant du temps et de l'état avec une perturbation à retard fini.

Théorème 4.4.5. *Soit T un nombre réel positif et soit $F : [0,T] \times \mathcal{C}_0^\beta \rightrightarrows E$ une multi-application valeurs non vides, fermées. On suppose que $F(t, \cdot)$ satisfait les conditions $i), ii)$ et $iii)$ du Théorème 4.4.4 pour tout $t \in [0,T]$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\beta$.*
Soit $C : [0,T] \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées tel que les assertions suivantes soient satisfaites

$(\mathcal{H}'_1)$ pour tous $(t,x) \in [0,T] \times E, C(t,x)$ est uniformément sous-lisse ;

$(\mathcal{H}'_2)$ il existe deux constants $L_1 > 0$ et $0 < L_2 < 1$ telle que, pour tous $t, s \in [0,T]$, et $x, y, z \in E$

$$|d(z, C(t,x)) - d(z, C(s,y))| \leq L_1|t-s| + L_2\|x-y\|;$$

$(\mathcal{H}'_3)$ pour tout sous-ensemble borné $A \in E$, l'ensemble $C(t,A)$ est boule relativement compacte ;

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\beta$ avec $\varphi(0) = x_0 \in C(0,x_0)$, il existe une application continue $x : [-\tau, T] \to E$, Lipschitzienne sur $[0,T]$ solution de l'inclusion différentielle

$$(\mathscr{R}) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, \mathscr{Z}(t)x), \ \ p.p.\ t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall\ t \in [0,T]; \\ \varphi(s) = \mathscr{Z}(0)x(s), \ \forall\ s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Preuve.

En utilisant l'approche de discrétisation basée sur l'algorithme de rattrapage de Moreau. La preuve de ce théorème est similaire à la preuve du théorème 3.5. dans [12]. ■

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons établi plusieurs résultats d'existence pour des processus de la rafle du premier ordre gouvernés par des ensembles non-convexes et perturbés par des multi-applications.

Dans la première partie, nous avons consacré l'étude au problème d'évolution perturbé par la somme d'une multi-application semi-continue inférieurement et une multi-application semi-continue mixte, nous avons utilisé le théorème du point fixe.

La deuxième partie a été consacrée aux problèmes d'évolution avec une perturbation retardée nous avons utilisé deux méthodes différentes. La première étant de ramener le problème avec retard à un problème sans retard et d'utiliser les résultats obtenus pour le problème sans retard. La deuxième méthode appliquée au processus de la rafle du premier ordre consiste à utiliser les projections successives, sur chaque sous intervalle.

Nos perspectives, sont de généraliser ces résultats aux deuxième ordre, et aussi d'essayer de démontrer le problème

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t,x(t))}(x(t)) + F(t, \mathscr{L}(t)x), \quad \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ x(t) \in C(t, x(t)), \ \forall \ t \in [0,T]; \\ \varphi(s) = \mathscr{L}(0)x(s), \ \forall \ s \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

avec d'autres perturbations par exemple une multi-application semi-continue mixte. On peut aussi généraliser l'étude à des ensembles α-far et appliquer nos resultats à des problémes de controle optimal et de relaxation.

Bibliographie

[1] D. Affane, M. Aissous, and M. F. Yarou. Almost mixed semi-continuous perturbation of moreau's sweeping process. *Evolution Equations and Control Theory*, 9(1) :27–38, 2020.

[2] D. Affane and M. F. Yarou. General second order functional differential inclusion driven by the sweeping process with subsmooth sets. *J. Nonlinear Funct. Anal*, 2020 :1–18, 2020.

[3] D. Affane and M. F. Yarou. Second-order perturbed state-dependent sweeping process with subsmooth sets. In *Computational Mathematics and Applications*, pages 147–169. Springer, 2020.

[4] D. Affane and M. F. Yarou. Unbounded perturbation to time-dependent subdifferential operators with delay. *Electr. J. Math. Anal. Appl*, 2(8) :209–219, 2020.

[5] H. Attouch and R. J. B. Wets. Quantitative stability of variational systems. i. the epigraphical distance. *Transactions of the American Mathematical Society*, 328(2) :695–729, 1991.

[6] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*, volume 264. Springer Science and Business Media, 2012.

[7] S. Boudada and M. F. Yarou. Sweeping process with right uniformly lower semicontinuous mappings. *Positivity*, 24(1) :207–228, 2020.

[8] M. Bounkhel. *Regularity concepts in nonsmooth analysis : Theory and Applications*, volume 59. Springer Science and Business Media, 2011.

[9] M. Bounkhel and L. Thibault. Nonconvex sweeping process and prox-regularity in hilbert space. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6(2) :359–374, 2005.

[10] M. Bounkhel and M. F. Yarou. Existence results for first and second order nonconvex sweeping process with delay. *Portugaliae mathematica*, 61(2) :207–230, 2004.

[11] A. Castaing, C. Salvadori and L. Thibault. Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process. *Journal of Nonlinear and convex Analysis*, 2(2) :217–242, 2001.

[12] C. Castaing, A. G. Ibrahim, and M. F. Yarou. Some contributions to nonconvex sweeping process. *J. Nonlinear Convex Anal*, 10(1) :1–20, 2009.

[13] C. Castaing and M. D. P. Monteiro Marques. Topological properties of solution sets for sweeping processes with delay. *Portugaliae Mathematica*, 54(4) :485–507, 1997.

[14] C. Castaing and M. Valadier. Convex analysis and measurable multifunctions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(5) :950–956, 1978.

[15] H. Chouial and M. F. Yarou. Functional differential inclusions with unbounded right-hand side in banach spaces. *Nonlinear Dynamics And Systems Theory*, 4(22) :355–366.

[16] H. Chouial and M. F. Yarou. Reduction method for functional nonconvex differential inclusions. *Maltepe Journal of Mathematics*, 3(1) :6–14.

[17] M. Chraibi Kaadoud. *Étude théorique et numérique de problèmes d'évolution en présence de liaisons unilatérales et de frottement*. PhD thesis, Montpellier 2, 1987.

[18] F. H. Clarke. Optimization and nonsmooth analysis wiley, new york, 1983.

[19] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. *Nonsmooth analysis and control theory*, volume 178. Springer Science and Business Media, 2008.

[20] F. H. Clarke, R. J. Stern, and P. R. Wolenski. Proximal smoothness and the lower-c2 property. *J. Convex Anal*, 2(1-2) :117–144, 1995.

[21] J. F. Edmond. Delay perturbed sweeping process. *Set-Valued Analysis*, 14(3) :295–317, 2006.

[22] N. Fetouci and M. F. Yarou. Existence of solutions to differential inclusions with primal lower nice functions. *Electronic journal of differential equations*, 2016(48) :1–9, 2016.

[23] A. Fryszkowski. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps. *Studia Mathematica*, 76(2) :163–174, 1983.

[24] A. Fryszkowski. Existence of solutions of functional-differential inclusion in nonconvex case. In *Annales Polonici Mathematici*, volume 45, pages 121–124. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1985.

[25] A. Fryszkowski. *Fixed point theory for decomposable sets*, volume 2. Springer Science and Business Media, 2004.

[26] A. Fryszkowski and L. Górniewicz. Mixed semicontinuous mappings and their applications to differential inclusions. *Set-Valued Analysis*, 8(3) :203–217, 2000.

[27] M. Kisielewicz. Differential inclusions and optimal control. 1991.

[28] B. S. Mordukhovich and Y. Shao. Nonsmooth sequential analysis in asplund spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(4) :1235–1280, 1996.

[29] J. J. Moreau. Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 273 :118–121, 1971.

[30] J. J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *Journal of differential equations*, 26(3) :347–374, 1977.

[31] R. Poliquin, R. Rockafellar, and L. Thibault. Local differentiability of distance functions. *Transactions of the American mathematical Society*, 352(11) :5231–5249, 2000.

[32] G. V. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions*, volume 41. American Mathematical Society, 2002.

[33] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *Journal of Differential Equations*, 193(1) :1–26, 2003.

[34] L. Thibault. Moreau sweeping process with bounded truncated retraction. *Journal of Convex Analysis*, 23(4) :1051–1098, 2016.

[35] L. Thibault. Subsmooth functions and sets. *Linear Nonlinear Anal*, 4(2) :257–269, 2018.

[36] A. A. Tolstonogov. Solutions of a differential inclusion with unbounded right-hand side. *Siberian Mathematical Journal*, 29(5) :857–868, 1988.

[37] A. A. Tolstonogov. Existence and relaxation of solutions to differential inclusions with unbounded right-hand side in a banach space. *Siberian Mathematical Journal*, 58(4) :727–742, 2017.

[38] M. Valadier. Entrainement unilateral, lignes de descente, fonctions lipschitziennes non pathologiques. *CRAS Paris*, 308 :241–244, 1989.

[39] M. F. Yarou. Discretization methods for nonconvex differential inclusions. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2009(12) :1–10, 2009.

[40] M. F. Yarou. Reduction approach to second order perturbed state-dependent sweeping process. *Crea. Math. Infor*, 28(02) :215–221, 2019.