République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : mathématiques appliquées.

Thème

Sur une classe d'équation différentielle multivoque

Présenté par :

- Amiour Fatima . **-Boumimez Faiza.**

Soutenu le : 27/06/2018

Devant le jury :

Président :	**S. Lounis**	**M.C.B Univ. de Jijel**
Encadreur :	**T. Haddad**	**Prof Univ. de Jijel**
Examinateur :	**H. Zerroug**	**M.A.A Univ. de Jijel**

Promotion **2017/2018**

Remerciements

En tout premier lieu, nous remerciant ***Allah****, qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.*

Nous souhaitant adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Nous remerciement chaleureusement et spécial notre encadreur le ***Prof. Haddad Tahar*** *pour nous avoir proposée ce sujet et pour nous avoir dirigé et accompagné pendant cette période de travail et nous lui souhaitons du succès dans sa vie professionnelle et privée.*

Nous remercions notre professeur ***Mme. Lounis Sabrina*** *d'avoir fait l'honneur de présider notre jury de mémoire.*

Nous veux aussi remercions nos professeurs ***Mme. Zerroug Hassina*** *pour l'honneur qu'il nos a fait en acceptant de participer à ce membres de jury.*

Sans oublier tous nos enseignantes de mathématiques et en particulier notre spécialité ***d'équation différentielle partielle****, chacun avec son propre nom.*

En fin de compte, nous ne pouvons pas oublier nos chère familles ***Amiour*** *et* ***Boumimez*** *grâce à leurs efforts envers nous jusqu'à ce moment, et ce travail est aussi un hommage à eux et que Dieu les protège et les cache de tout mal et nous leur souhaitons la santé et bien-être, et bien sur à tous nos* ***collègues, amis*** *et toutes les personnes qui ont soutenu et encouragé tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

$\mathscr{B}$***.Faiza.***

$\mathscr{A}$***.Fatima.***

Dédicace

À

Mes chères parents,

Mes frères et mes soeurs,

Mon petit frère Mehammed, et ma petite soeur ma princesse Meriem,

Mon grand père,

Ma grande famille et mes amies,

Tous mes collègues de la promotion "2017-2018",

Tous ceux qui sont proches á mon cœur.

A.Fatima.

Dédicace

À

Mes chères parents,

Mon frère et mes soeurs,

Mehdi, Ayoube et Abdou,

Ma grande famille et mes amies,

Tous mes collègues de la promotion "2017-2018",

Tous ceux qui sont proches á mon cœur.

B.Faiza.

Table des matières

Notations et abréviations

$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
H	espace de Hilbet
$co(A)$	enveloppe convexe d'un sous ensemble A.
$\overline{co}(A)$	enveloppe convexe fermée de A.
$int(A)$	intérieur de A.
$\partial f(x_0)$	le sous différentiel de f au point x_0.
$N_C(\cdot)$	le cone normal à C.
d_H	la distance de Hausdorff.
$dom\, f$	domaine effectif de la fonction f.
$D(F)$	domaine effectif de la multi-application F.
$epi\, f$	epigraphe de f.
$\delta_C(\cdot)$	fonction indicatrice de C.
$P_C(\cdot)$	projection sur l'ensemble C.
$B_r/\bar{B}_r$	boule ouverte/fermée de rayon r.
$\rightharpoonup$	convergence faible.
$s.c.i$	semi-continue inférieurement.
$s.c.s$	semi-continue supérieurement.
$e(A, B)$	ecart de A sur B.
$\mathcal{C}([0, T]; H)$	espace des fonctions continue définies sur $[0, T]$ à valeurs dans H.

Introduction générale

La théorie des équations différentielles multivoques est aujourd'hui bien connue. Cette théorie a été introduite dans les années quarante pour l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires et des problèmes issus de la mécanique [1, 5]. Aujourd'hui, cette théorie est importante pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution, principalement celles gouvernées par le cône normal N_C.

Ce mémoire est consacré au caractère bien posé pour le problème d'évolution non linéaire de la forme

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad \textit{p.p sur } [0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)), \quad \textit{pour tout } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in C(0,u_0). \end{cases} \tag{1}$$

Kunze et Marques [12], ont fait une étude originale pour l'équation différentielle multivoque (1) où C est convexe et fermé en utilisant un algorithme de projection implicite. Ensuite Haddad [7, 8, 9, 10], ont démontré l'existence de solution pour (1) via un algorithme de projection semi-implicite.

On doit mentionner que le cas où l'opérateur $C(t,u(t)) = C(t)$, c'est à dire, le problème d'évolution

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad \textit{p.p sur } [0,T], \\ u(t) \in C(t), \quad \textit{pour tout } t \in [0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

a été introduit et étudié par J.J Moreau [14]. Le problème (2) fait intervenir l'opérateur maximal monotone N_C qui dépend du temps. Pour résoudre ce problème, J.J.Moreau construit une suite de solutions discrètes selon un principe dit de rattrapage. Sous certaines hypothèses de régularité de la multifonction $t \longmapsto C(t)$, l'intervalle de temps est divisé en sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ où $C(\cdot)$ varie peu. La trajectoire d'ensemble $t \longmapsto C(t)$ est approchée par une multifonction constante par morceaux, valait C_i sur $[t_i, t_{i+1}]$ ce qui permet de construire une fonction u constante par morceaux, égale à u_i sur $[t_i, t_{i+1}]$ et telle que $u_{i+1} = Proj_{C_{i+1}}(u_i)$. Il démontre alors la convergence de cette suite de fonction lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro, obtenant à la limite une solution de (2). La solution a au moins la même régularité que celle de la multifonction $C(\cdot)$.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier est consacré à des notions de l'analyse convexe et quelques résultats auxiliaires que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, on donne une démonstration pour le caractère bien posé du problème (2) sans utiliser aucune hypothèse de compacité sur C. Plus précisément, sans passer par le théorème d'Ascoli-Arzelà, on montre que la suite de solutions approchées est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, T]; H)$.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la version quasi-variationnelle du problème (2) c-à-d, dans le cas où l'ensemble des contraintes C dépend aussi de l'état u.
Pour montrer l'existence de solutions pour (1), on donne une preuve plus élégante à celles de [10, 12, 13]. On montre que l'approche point fixe est possible pour obtenir l'existence de solutions pour (1).

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre nous allons introduire tous les résultats et les notions qui nous seront très utiles tout au long de ce mémoire. On commence par quelques notations, puis nous présentons quelques concepts d'analyse convexe ainsi que quelques théorèmes de compacité qui seront utilisés dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Ensembles convexes

Pour plus de détails sur cette section consulter les références [3] et [6].

Définition 1.1.1 (Ensembles convexes)**.** *Une partie C de H est convexe si*

$$\forall x, y \in C \ \forall \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

.

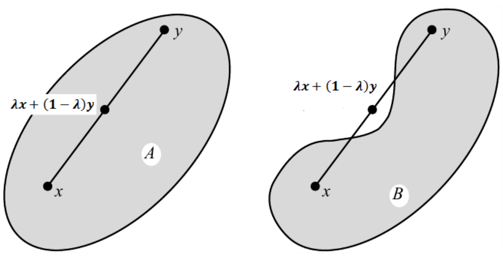

FIGURE 1.1 – A convexe, B non convexe

Exemple 1.1.2.

1. *H et $\emptyset$ sont convexes.*
2. *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*
3. *Une boule ouverte où fermée est convexe.*

Définition 1.1.3 (Enveloppe convexe)**.** *L'enveloppe convexe d'un sous ensemble $C \subset H$ est le plus petit convexe qui contient C. Elle est notée $co(C)$.*

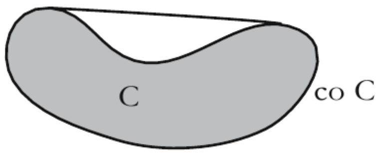

FIGURE 1.2 – Enveloppe convexe.

Définition 1.1.4 (Enveloppe convexe fermée)**.** *L'enveloppe convexe fermée de $C \subset H$ qu'on note $\overline{co}(C)$ est le plus petit convexe fermé de H contenant C. Donc c'est l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de H contenant C.*

Remarque. *on a*

1. *Si C est convexe alors $co(C) = C$.*
2. *Si C est borné alors $co(C)$ est borné.*
3. *Si C est compact alors $co(C)$ est compact.*

1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2.1 (Domaine effectif)**.** *Soient H un espace de Hilbert et une fonction $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble défini par*

$$dom f = \{x \in H : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.2.2 (Fonction propre)**.** *La fonction f est dite propre si $dom f \neq \emptyset$, et $f(x) \neq -\infty, \ \forall x \in H$*

Définition 1.2.3 (Fonction convexe)**.** *On dit qu'une fonction* $f : H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est convexe si pour tout* $x, y \in domf$ *et pour tout* $t \in [0,1]$ *on a*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

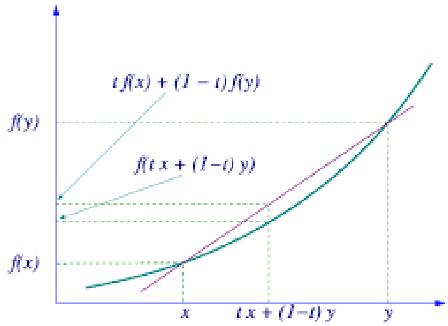

FIGURE 1.3 – f convexe.

Définition 1.2.4 (Epigraphe)**.** *On appelle épigraphe de* f *l'ensemble défini par*

$$epif = \{(x,t) \in H \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}.$$

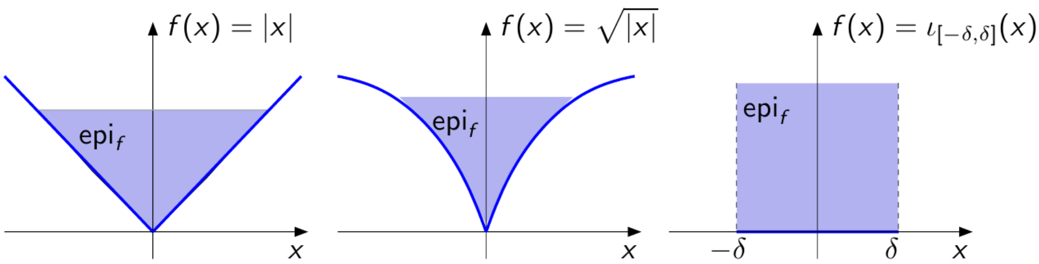

FIGURE 1.4 – Exemples Épigraphe des fonction usuelles.

1.3 Semi-continuité

Définition 1.3.1. *Soient* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction définie sur un espace topologique* (E, τ) *et* $x_0 \in E$*. Alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{v \in \vartheta(x_0)} \inf_{x \in v} f(x) \quad et \quad \limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{v \in \vartheta(x_0)} \sup_{x \in v} f(x).$$

Définition 1.3.2 (Semi-continuité inférieure)**.** *Une fonction $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est semi-continue inférieure (en abrégé s.c.i) en x_0 si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers x_0*

on a

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Autrement dit, la fonction f est (s.c.i) si et seulement si son épigraphe est un fermé de $H \times \mathbb{R}$.

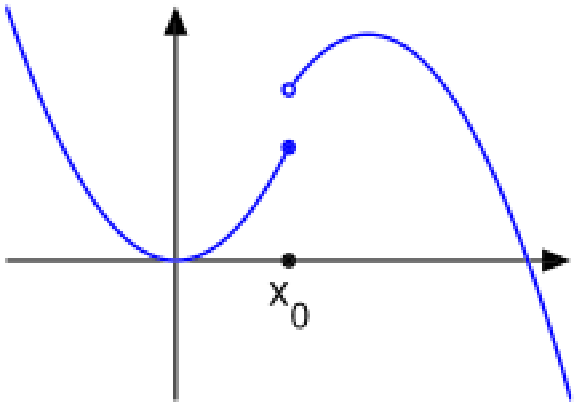

FIGURE 1.5 – semi continue inférieure

.

Remarque. *On dit que f est semi continue supérieure(s.c.s) si $-f$ est semi continue inférieure.*

Proposition 1.3.3. *[13] Soit $f : H \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est s.c.i, convexe et propre. Si $x_n \rightharpoonup x$ dans H, alors*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Théorème 1.3.4. *[3] Soit E un espace vectoriel topologique compact et soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction s.c.i, alors f atteint son minimum sur E.*

Remarque.

1. *La fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.*

2. *Toute fonction continue est s.c.i.*

3. *La fonction f est continue si et seulement si f et $-f$ sont s.c.i.*

Définition 1.3.5 (Fonction indicatrice). *Soit C un sous ensemble convexe non vide de H. On appelle fonction indicatrice de C notée $\delta(\cdot, C)$ la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} \delta(\cdot, C) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\longmapsto \delta(x, C) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in C, \\ +\infty & si \quad x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

1. *$\delta(x, C)$ est une fonction convexe si et seulement si C est convexe.*
2. *$\delta(x, C)$ est une fonction (s.c.i) si et seulement si C est fermé.*

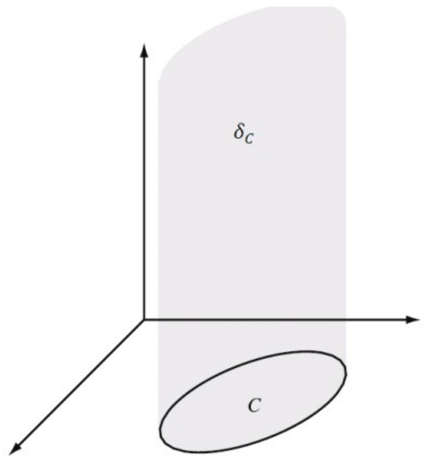

FIGURE 1.6 – Fonction indicatrice.

Définition 1.3.6 (Fonction support). *On appelle fonction support de $C \subset H$ qu'on note $\sigma(\cdot, C)$ la fonction définie sur H par :*

$$\begin{aligned} \sigma(\cdot, C) : H &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ \xi &\longmapsto \sigma(\xi, C) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle . \end{aligned}$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. *$\sigma(\cdot, C)$ est convexe même lorsque C ne l'est pas.*
2. *$\sigma(\cdot, C)$ est positivement homogène de degré 1 c-à-d*

$$\sigma(\alpha x, C) = \alpha \sigma(x, C) \quad \forall x \in H \ \forall \alpha > 0.$$

1.4 Projection sur un convexe fermé

Théorème 1.4.1. *Soit x un élément d'un espace de Hilbert H et C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H. Il existe un unique point $y \in C$ tel que*

$$d(x, C) = \|y - x\| = \inf_{z \in C} \|z - x\| .$$

Cet point y est appelé la projection de x sur C et noté $P_C(x)$.
Il est caractérisé par l'inéquation variationnelle suivante :

$$\langle y - x, y - z \rangle \leq 0 \ \ \forall z \in C.$$

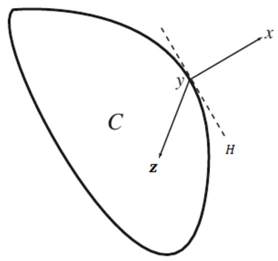

Figure 1.7 – projection d'un convexe fermé.

Démonstration.

1. **<u>Existence de la projection :</u>**

   On pose
   $$d = \inf_{z \in C} \|z - x\| \Longrightarrow d^2 = \inf_{z \in C} \|z - x\|^2 .$$
   Par définition de la borne inférieur on a
   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z \in C \ \ \|z - x\|^2 \leq d^2 + \varepsilon,$$
   en prend $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists z_n \in C, \ \ \|z_n - x\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$
   Maintenant nous allons montrer que la suite z_n est une suite de Cauchy. Par l'iden-

tité du Parallélogramme : $\|y-x\|^2+\|y+x\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Soit } p>0 \qquad \|z_n-z_p\|^2 &= \|z_n-x+x-z_p\|^2 \\
&= 2\|z_n-x\|^2+2\|z_p-x\|^2-\|z_n+z_p-2x\|^2 \\
&= 2\|z_n-x\|^2+2\|z_p-x\|^2-4\left\|\frac{z_n+z_p}{2}-x\right\|^2 \\
&\leq \left(2d^2+\frac{2}{n}\right)+\left(2d^2+\frac{2}{p}\right)-4d^2 \\
&\leq \frac{2}{n}+\frac{2}{p} \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

On déduit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy. Puisque H est complet, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et on note sa limite $y\in C$ (car C est fermé), par continuité de la norme on a alors :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|z_n-x\|^2=\|y-x\|^2,$$

donc

$$\|y-x\|\leq d,$$

et par définition de d on a $\|y-x\|\geq d$, on aura

$$\|y-x\|=d.$$

2. **Unicité de la projection :**

   Supposons que y_1 et y_2 deux projections de x sur C, la caractérisation de la projection donne

   $$\langle x-y_1, z-y_1\rangle \leq 0 \ \ \forall z\in C,$$

   $$\langle x-y_2, z-y_2\rangle \leq 0 \ \ \forall z\in C.$$

   Par l'addition on trouve

   $$-\langle x-y_1, y_1-y_2\rangle+\langle x-y_2, y_1-y_2\rangle\leq 0,$$

   ce qui donne

   $$\langle y_1-y_2, y_1-y_2\rangle\leq 0,$$

   par conséquent

   $$\|y_1-y_2\|^2\leq 0,$$

   ce qui donne $y_1=y_2$ d'ou l'unicité de la projection.

■

1.5 Sous-différentiel et cône normal

Définition 1.5.1 (Sous-différentiel). *Soient H un espace de Hilbert et f une fonction convexe et (s.c.i) définie de H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in dom f$.*
Le sous-différentiel de f au point x_0, noté $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble de H défini par :

$$\partial f(x_0) = \{\xi \in H : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0 \rangle \, , \, \forall x \in H\} \, .$$

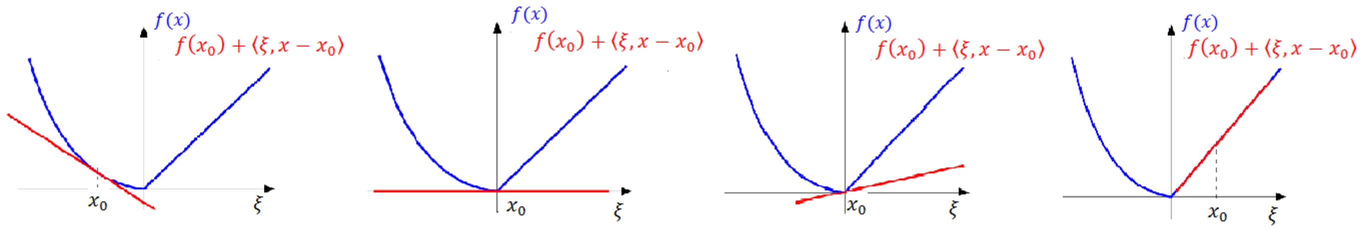

FIGURE 1.8 – Le sous différentiel (animation).

Exemple 1.5.2.

1. *Considérons la fonction*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |x| \, . \end{aligned}$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. *En effet,*

$$\begin{aligned} \partial f(0) &= \{y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x\, y \leq x, \ \forall x \in \mathbb{R}_+\} \cap \{y \in \mathbb{R} : x\, y \leq -x, \ \forall x < 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\} \\ &= [-1, 1]. \end{aligned}$$

2. *Soit $C \subset H$ un ensemble et $x_0 \in C$. Alors $\xi \in \partial \delta(x_0, C)$ si et seulement si $\delta(x, C) \geq \delta(x_0, C) + \langle \xi, x - x_0 \rangle$ pour tout $x \in C$. On a donc*

$$\partial \delta(x_0, C) = \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0 \quad \textit{pour tout } x \in C\}.$$

Définition 1.5.3 (Cône). *Un sous ensemble $C \subset H$ est un cône si*

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \quad \lambda x \in C.$$

Définition 1.5.4 (Cône normal). *Soit $C \subset H$ un sous ensemble convexe et $x_0 \in C$. On appelle cône normal à C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :*

$$N_C(x_0) = \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C\}.$$

On vérifie aisément que $N_C(x_0)$ est un cône et que $0 \in N_C(x_0)$.

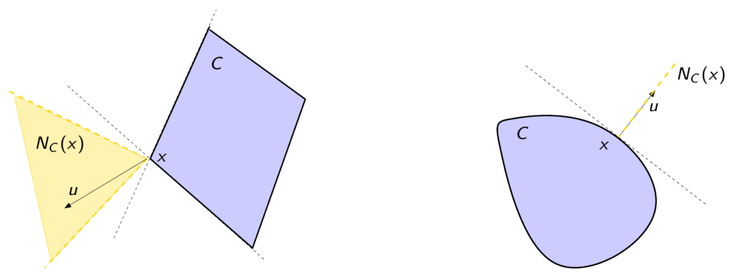

FIGURE 1.9 – Exemple de Cônes normaux.

Proposition 1.5.5. *Si C est convexe fermé et $y \in C$ alors*

$$N_{x+C}(x+y) = N_C(y), \quad \forall x \in H.$$

Démonstration. Soit $z \in N_{x+C}(x+y)$ alors :

$$\langle z, x+y-w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in [x+C],$$

or

$$\langle z, y-(w-x) \rangle \leq 0 \quad \forall (w-x) \in C,$$

d'ou $z \in N_C(y)$.

∎

Remarque.

$$y = P_C(x) \Longleftrightarrow x - y \in N_C(y).$$

Théorème 1.5.6. *Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un sous ensemble convexe tel que $int(C) \neq \emptyset$. Alors si $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0\}$.*

Démonstration. Soit $v \in N_C(x) \Longrightarrow v = 0$?

$$x \in int(C) \Longrightarrow \exists \delta > 0 \;\; x + \delta B(x_0, r) \subset C,$$

$$\begin{aligned} \langle v, x + \delta e - x\rangle \leq 0 \qquad & \forall e \in B(x_0, r), \\ \langle v, \delta e\rangle \leq 0 \qquad & \forall e \in B(x_0, r), \\ \langle v, e\rangle \leq 0 \qquad & \forall e \in B(x_0, r). \end{aligned}$$

Soit $r > 0$ suffisamment petit telle que $rv \in B(x_0, r)$

$$\begin{aligned} \langle v, rv\rangle \leq 0 &\Longrightarrow r\,\|v\|^2 \leq 0, \\ &\Longrightarrow \|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.5.7. *Soit $H = \mathbb{R}^2$; $C = [0,1] \times [0,1]$,*
si on prend $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

1.6 Topologie faible et faible $*$

Pour plus de détails sur cette section on peut se référer à [4].
Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique i.e., $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f$ linéaire continue$\}$ tel que pour tout $f \in E'$,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle f, x\rangle| \,.$$

On désigne par $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.6.1. *La **topologie faible** $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ sur E est la topologie la moins fine sur E (avec le minimum d'ouverts) rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Proposition 1.6.2. *Soit (x_n) une suite de E. On a*

- **(i)** $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall\, f \in E'$.
- **(ii)** *Si $x_n \to x$, alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$.*
- **(iii)** *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|$.*
- **(iv)** *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ et $f_n \to f$ dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Définition 1.6.3. *La* ***topologie faible*** $*$ *désignée aussi par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine sur* E' *rendant continues toutes les applications* $(\varphi_x)_{x \in E}$.

Proposition 1.6.4. *Soit* (f_n) *une suite de* E'. *On a*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma_(E', E) \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \forall\, x \in E$.

(ii) *Si* $f_n \to f$, *alors* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$. *Si* $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$, *alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$.

(iii) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|$.

(iv) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* E, *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 1.6.5. *[6] Soit* E *un espace de Banach séparable. Alors, toute suite bornée dans* E' *admet une sous suite faiblement* $*$ *convergente dans* E'.

Remarque. *Lorsque* E *est de dimension finie les trois topologies forte, faible et faible* $*$ *coïncident.*

1.7 Multi-applications et continuité

Les résultats suivants sont pris des références [2] et[11].

Définition 1.7.1. *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. On appelle multi-application (ou fonction multivoque) de* X *dans* Y *toute application* F *de* X *dans* $\mathscr{P}(Y)$ *(ensembles des parties de* Y*) et on note* $F : X \longrightarrow \mathscr{P}(Y)$ *ou* $F : X \rightrightarrows Y$. *Alors* $\forall\, x \in X : F(x) \subset Y$ *est un sous-ensemble de* Y.

Définition 1.7.2. *On appelle domaine (effectif) de* F *q'on le note* $D(F)$ *le sous-ensemble de* X *défini par :*

$$D(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

Et l'image de F *noté* $R(F)$ *le sous-ensemble de* Y *défini par :*

$$R(F) = \{y \in Y / \exists\, x \in X : y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.7.3. *On appelle graphe de* F *et on le note* $gph(F)$ *le sous-ensemble de* $X \times Y$ *défini par :*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

Définition 1.7.4 (Distance de Hausdorff)**.** *Soient X un espace métrique, A et B deux sous-ensembles fermés non vides de X. L'excès (ou écart) de A sur B (resp. de B sur A) est défini par*

$$e(A,B) = \sup\{d(x,B)/x \in A\} \qquad et \qquad e(B,A) = \sup\{d(y,A)/y \in B\}.$$

On appelle distance de Hausdorff entre A et B la fonction numérique $d_H(\cdot,\cdot)$ définie par

$$d_H(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

De plus, pour $\delta > 0$, $d_H(A,B) \leq \delta \Longleftrightarrow A \subset B + \overline{B}(0,\delta)$.

Définition 1.7.5. *Soit X, Y deux espace métriques et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est continue (résp lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$) si pour tout $x, t \in X$ nous avons :*

$$\lim_{x \longrightarrow t} d_H(F(x), F(t)) = 0,$$

(resp pour tous $x, t \in X$)

$$d_H\left(F(x), F(t)\right) \leq \lambda d_X(x,t),$$

d_X la métrique de X.

Définition 1.7.6 (Fonction absolument continue)**.** *Soit H un espace de Hilbert, une fonction $f : [a,b] \longrightarrow H$ est dite absolument continue si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite $([b_n, a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-intervalles de $[a,b]$ d'intérieurs disjoints,*

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \|f(a_n) - f(b_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.7.7. *[2] Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow H$ est absolument continue si et seulement si elle est intégrale de sa dérivée, c'est à dire :*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

1.8 Quelque résultats de compacité

Lemme 1.8.1. *[17] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H faiblement convergente vers u dans H, alors*

1. $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|$.
2. *Si* $u_n \in C + \bar{B}(0,\varepsilon_n)$ *pour tout* $C \subset H$ *convexe fermé et* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{R}_+^*$ *telle que* $\varepsilon_n \to 0$*, alors* $u \in C$.

Lemme 1.8.2. *[16, corollary, p. 227] Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions,* $u_n : [0,T] \longrightarrow H$ *telle que* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u_*$ *dans* $\mathbf{L}^\infty([0,T];H)$*, i.e.*

$$\int_0^T \langle u_n(t), \varphi(t)\rangle\, dt \longrightarrow \int_0^T \langle u_*(t), \varphi(t)\rangle\, dt,\ n \to \infty \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{L}^1([0,T];H).$$

Supposons que

1. $C(t) \subset H$ *est convexe fermé* $\forall\, t \in [0,T]$,
2. $C(\cdot)$ *est L-lipschitzienne sur* $[0,T]$.

Soit

$$\phi(u) = \int_0^T \sigma(u(t), C(t)), dt \quad \textit{pour} \quad u \in \mathbf{L}^\infty([0,T];H).$$

Alors ϕ *est semi-continue inférieurement, i.e,* $\phi(u_*) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \phi(u_n)$.

Lemme 1.8.3. *Soit* $u : [0,T] \longrightarrow H$ *une fonction absolument continue. Alors*

$$(a) \quad \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2.$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2\right) = \langle u'(t), u(t)\rangle = \|u(t)\|^2.$$

Théorème 1.8.4 (point fixe Schauder)**.** *[13, 17] Soit* E *un espace de Banach* $K \subset H$ *un convexe fermé. Si* A *est une application continue de* K *dans* K *telle que* $A(K)$ *soit relativement compact, alors* A *a un point fixe.*

Théorème 1.8.5 (Mazur)**.** *[13, 17] Soit* E *un espace de Banach et* A *un sous ensemble compact de* E*. Alors* $\overline{co}(A)$ *est compact.*

Théorème 1.8.6 (Banach-Mazur)**.** *[13, 17] Soit* E *un espace de Banach réel. Soit* $(x_n) \subset E$ *et* $x \in E$ *tel que* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement dans* E*, quand* $n \longrightarrow \infty$*. On pose* $C_n = co\{x_m; m \geq n\}$ *(c'est à dire l'ensemble des combinaisons convexes des* x_m*,* $m \geq n$*). Alors, nous avons*

(i) $x \in \overline{C_n}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Il existe $(y_n)_n \subset E$ *telle que* $y_n \in co\{x_m; m \geq n\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $y_n \longrightarrow x$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

Proposition 1.8.7. *[13, 17] Soit $S \subset H$ un sous ensemble non vide convexe et fermé. Alors*
$S = \{x \in H; \langle \xi, x \rangle \leq \sigma(\xi, S); \forall \xi \in H\}$.

Théorème 1.8.8 (Ascoli-Arzélà)**.** *[13, 17] Soit $K \subset \mathcal{C}([0,T]; H)$non vide.*
K est relativement compact si est seulement si

(a) Pour tout $t \in [0,T]$, l'ensemble $K(t) := \{u(t); u \in K\}$ est relativement compact dans H;

(b) K est uniformément équicontinue ,i.e, pour tout $\varepsilon \geq 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que, si $t, s \in [0,T]$ et $|t-s| < \delta$, alors $\|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ pour tout $u \in K$.

Théorème 1.8.9. *(Dunford-Pettis) Soit H un espace de Hilbert. Tout ensemble $K \subseteq \mathbf{L}^1([0,T]; H)$ uniformément intégrable est relativement faiblement compact.*

Chapitre 2

Inégalité variationnelle de type processus de Rafle

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'établir un résultat d'existence et d'unicité pour un problème d'évolution non linéaire gouverné par le cône normal, de la forme :
Trouver $u : [0, T] \longrightarrow H$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p \ sur \ [0, T], \\ u(0) = u_0, \quad u_0 \in C(0), \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $C : [0, T] \longrightarrow 2^H$ est une multi-application de $[0, T]$ $(T > 0)$ à valeurs convexes fermées dans l'espace de Hilbert H.
- $N_{C(t)}(u(t))$ dénote le cône normal, au sens d'analyse convexe, à $C(t)$ au point $u(t)$.

Le problème (2.1) s'appelle processus de rafle (sweeping process en anglais) du premier ordre et couvre plusieurs situations en mécanique telle l'évolution des systèmes élasto-plastiques, ainsi que les problèmes avec frottement.
Ce problème est équivalent à l'inégalité variationnelle d'évolution suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : [0, T] \longrightarrow H \ \text{ tel que}, \\ \langle u'(t), v - u(t) \rangle \geq 0 \ \text{ pour tous } \ v \in C(t), \\ u(0) = u_0, \, u_0 \in C(0), \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Dans ce chapitre on s'intéresse au caractère bien posé pour le problème (2.1).

2.2 Résultats auxiliaires

Nous rappelons maintenant des résultats concernant le sous-différentiel de la fonction distance à un ensemble S dont nous aurons besoin pour la suite(voir[16]).

Proposition 2.2.1. *[7, 16] Soit S un sous ensemble non vide fermé de H et $x \in S$. Alors*

$$\partial d_S(x) = N_S(x) \cap B(0,1).$$

Proposition 2.2.2. *[7, 16] Soit $C : [0,T] \rightrightarrows H$ une multifonction Hausdorff-continue à valeurs non vide fermées convexes. Alors la fonction*

$$(t,x) \longmapsto \partial d_{C(t)}(x)$$

est à valeurs fermés convexes satisfaisant la propriété de la semi-continuité supérieure suivante :
Soit (t_n) une suite dans $[0,T]$ convergeant vers $t \in [0,T]$, et (x_n) une suite dans H avec $x_n \in C(t_n)$ pour tout n, convergeant vers $x \in C(t)$, alors pour chaque $\xi \in H$, nous avons

$$\limsup_n \sigma(\xi, \partial d_{C(t_n)}(x_n)) \leq \sigma(\xi, \partial d_{C(t)}(x)).$$

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section nous allons aborder la question d'existence et d'unicité d'une solution pour le problème non linéaire (2.1) qui est équivalent à l'inégalité variationnelle d'évolution (2.2).

Tout d'abord, qu'est-ce qu'on entend par solution du problème non linéaire (2.1) ?

Définition 2.3.1. *Une fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ est une solution de (1), si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) $u(0) = u_0$, *et* $u_0 \in C(0)$,

(b) $u(t) \in C(t) \quad \forall\, t \in [0,T]$,

(c) $u(\cdot)$ *est différentiable presque partout sur* $]0,T[$,

(d) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ *presque partout sur* $[0,T]$.

Théorème 2.3.2. *Soit H un espace de Hilbert séparable, on suppose que $C(t)$ est convexe fermé pour tout $t \in [0,T]$ satisfaisant l'hypothèse suivant :*

$(\mathcal{H}1)$ $C(\cdot)$ *est absolument continue, c-à-d pour tout $y \in H$*

$$\left|d_{C(t)}(y) - d_{C(t')}(y)\right| \leq |v(t) - v(t')| \quad \forall t, t' \in [0,T], \tag{2.3}$$

où $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction absolument continue. Alors pour chaque $u_0 \in C(0)$ le problème d'évolution (2.1) admet une solution unique, et cette solution est absolument continue.

.

Démonstration.

On définit la suite des solutions approchées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}([0,T];H)$, et on montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathcal{C}([0,T];H)$ vers une solution de notre problème (2.1).

La suite est définie via un algorithme de projection .

I- Existence

La démonstration de l'existence de la solution se fait en 3 étapes :

1 $^{\text{re}}$étape : **Construction des suites approximatives :**

On observe que (2.3) assure pour tout $t \leq t'$

$$\begin{aligned}\left|d_{C(t')}(y) - d_{C(t)}(y)\right| \leq |v(t') - v(t)| &= \left|\int_t^{t'} v'(s)ds\right| \\ &\leq \int_t^{t'} |v'(s)|\, ds.\end{aligned}$$

On suppose que $v'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition suivante de l'intervalle $I := [0.T]$

$$I_i^n :=]t_i^n, t_{i+1}^n], \quad t_i^n = i\frac{T}{2^n}, \quad 0 \leq i \leq 2^n - 1, \quad I_0^n = \{t_0^n\}. \tag{2.4}$$

Algorithme : Posons

$$\mu_n := \frac{T}{2^n}, \epsilon_i^n := \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} v'(s)ds, \; et \; \epsilon_n := \max_{0\leq i<2^n} \{\mu_n + \epsilon_i^n\}, \tag{2.5}$$

et

$$u(t_i^n) = u_i^n, u(t_{i+1}^n) = u_{i+1}^n.$$

Fixons $n \geq 1$, on définit par induction :

- $u_0^n = u_0$ avec $u_0 \in C(0)$,
- $0 \leq i \leq 2^n - 1,\ u_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n)$ est solution de $u_i^n - u_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n)}(u_{i+1}^n)$.

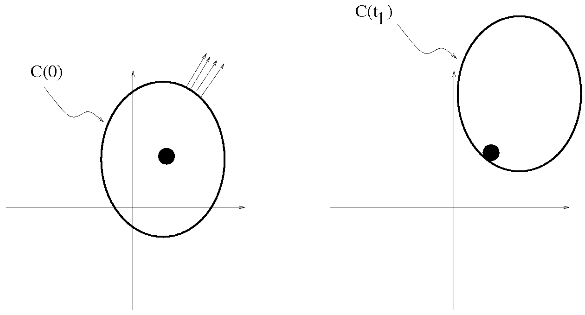

FIGURE 2.1 – la propriété de rattrapage

.

L'algorithme ci-dessus est bien défini. En effet pour $i = 0$, nous avons

$$\begin{cases} u_0^n - u_1^n \in N_{C(t_1^n)}(u_1^n), \\ \qquad \Leftrightarrow \\ u_1^n = P_{C(t_1^n)}(u_0^n). \end{cases} \tag{2.6}$$

Le théorème (1.4.1), assure l'existence et l'unicité de u_1^n solution de (2.6) avec $u_1^n \in C(t_1^n)$. Alors

$$u_{i+1}^n = proj_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n). \tag{2.7}$$

De plus, si on applique (2.3), (2.5) et on utilise le fait que $d_{C(t_i^n)}(u_i^n) = 0$ (car $u_i^n \in C(t_i^n)$ et C convexe fermé) on trouve

$$\begin{aligned} \left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\| = d_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n) &\leq \left|d_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n)\right| \\ &\leq \left|d_{C(t_{i+1}^n)}(u_i^n) - d_{C(t_i^n)}(u_i^n)\right| \\ &\leq \left|v(t_{i+1}^n) - v(t_i^n)\right| \\ &\leq \epsilon_i^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\|u_{i+1}^n - u_i^n\right\| \leq \epsilon_i^n. \tag{2.8}$$

Maintenant, nous utilisons la suite discrète (u_i^n) pour construire la suite de solution approchée (u_n) de $[0, T]$ à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle I_i^n comme suit

$$u_n(t) := \begin{cases} u_0^n \quad si \quad t = 0, \\ u_i^n + \frac{v(t) - v(t_i^n)}{\epsilon_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad si\ t \in I_i^n, i \in 1, .., 2^n - 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

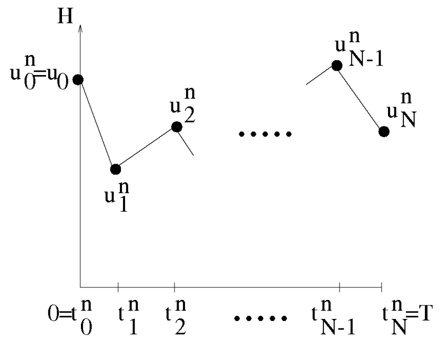

FIGURE 2.2 – la suite de solution approchée.

Donc pour tout $t, t' \in I_i^n$

$$u_n(t') - u_n(t) = \frac{v(t') - v(t)}{\epsilon_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n).$$

D'après (2.8), si $t, t' \in I_i^n$ tell que $t \leq t'$ on obtient

$$\begin{aligned} \|u_n(t') - u_n(t)\| &= \left\| \frac{v(t') - v(t)}{\epsilon_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\| \\ &\leq v(t') - v(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cette inégalité affirme que u_n est absolument continue.

Maintenant, on observe que pour $0 \leq i \leq 2^n$

$$u_n'(t) = \frac{v'(t)}{\epsilon_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) \ p.p \ \ t \in I_i^n.$$

Si on utilise (2.8), on trouve

$$\|u_n'(t)\| = \left\| \frac{v'(t)}{\epsilon_i^n}(u_{i+1}^n - u_i^n) \right\| \leq v'(t). \tag{2.11}$$

Soient θ_n, ρ_n définies de I à valeur dans I par :

$$\begin{cases} \theta_n(0) = 0, \\ \rho_n(0) = 0, \\ \theta_n(t) = t_{i+1}^n \quad ; t \in I_i^n, \\ \rho_n(t) = t_i^n \quad ; t \in I_i^n. \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors d'après (2.7), la construction de u_n, et les propriétés du cône normal, on obtient

$$u_n'(t) \in -N_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))) \ p.p \ t \in I. \tag{2.13}$$

(2.11) implique

$$\begin{aligned}\|u_n'(t)\| \leq \|v'(t)\| &\Leftrightarrow u_n'(t) \in \bar{B}(0, v'(t))\\ &\Leftrightarrow u_n'(t) \in v'(t)\bar{B}(0,1).\end{aligned}$$

De plus, si on utilise (2.13) on trouve

$$u_n'(t) \in -N_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))) \cap v'(t)\bar{B}(0,1).$$

La proposition(2.2.1) affirme que

$$u_n'(t) \in -v'(t)\partial d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))), \quad p.p\, t \in I. \tag{2.14}$$

2$^{\text{ème}}$ étape : Convergence de (u_n) :

Dans cette étape, on s'intéresse à la convergence des suites (u_n) et (u_n').

Maintenant on va démontrer que (u_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{C}(I,H)$ pour la norme de la convergence uniforme .

Fixons $m, n \in N$ tels que $m \geq n \geq n_0$, $t \in I$

$$\begin{cases} t \neq t_i^m \;\; pour \;\; i = 0, ..., 2^m, \\ \quad et \\ t \neq t_j^n \;\; pour \;\; j = 0, ..., 2^n. \end{cases}$$

(2.3), (2.5) et (2.10) donnent

$$\begin{aligned} d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) &= d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t)))\\ &\leq d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(t)) + d_{C(\theta_m(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t)))\\ &\leq |v(\theta_n(t)) - v(\theta_m(t))| + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\|\\ &\leq |v(\theta_n(t)) - v(t)| + |v(\theta_m(t)) - v(t)| + |v(\theta_m(t)) - v(t)|\\ &\leq \int_{\theta_n(t)}^t v'(s)ds + \int_{\theta_m(t)}^t v'(s)ds + \int_{\theta_m(t)}^t v'(s)ds\\ &\leq \epsilon_n + 2\epsilon_m. \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'après (2.14) on a

$$-u_n'(t) \in v'(t)\partial d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))), \quad p.p\, t \in I.$$

On tenant compte de (2.15), et la définition du sous différentiel, on obtient

$$\langle -u_n'(t), u_m(t) - u_n(\theta_n(t))\rangle \leq v'(t)[d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t)))],$$

et donc

$$\langle -u_n'(t), u_m(t) - u_n(\theta_n(t))\rangle \leq v'(t) d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t))(\text{car } d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))) = 0).$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle u_n'(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\rangle &\leq v'(t) d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) \\ &\leq v'(t)(\epsilon_n + 2\epsilon_m). \qquad (2.16)\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy Schwartz et les relations (2.11), (2.8) et (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle u_n'(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle &= \langle u_n'(t), u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\rangle + \langle u_n'(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\rangle \\ &\leq \|u_n'(t)\| \, \|u_n(t) - u_n(\theta_n(t))\| + v'(t)(\epsilon_n + 2\epsilon_m) \\ &\leq v'(t)\epsilon_n + v'(t)(\epsilon_n + 2\epsilon_m) \\ &\leq 2v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m).\end{aligned}$$

Alors

$$\langle u_n'(t), u_n(t) - u_m(t)\rangle \leq 2v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m). \qquad (2.17)$$

On a aussi

$$\langle u_m'(t), u_m(t) - u_n(t)\rangle \leq 2v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m). \qquad (2.18)$$

En combinant entres (2.17) et (2.18), on trouve

$$\langle u_m'(t) - u_n', u_m(t) - u_n(t)\rangle \leq 2v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m) + 2v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m) = 4v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m).$$

Le lemme (1.8.3) implique

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\|u_m(t) - u_n(t)\|^2) &= 2\langle u_m'(t) - u_n', u_m(t) - u_n(t)\rangle \\ &\leq 8v'(t)(\epsilon_n + \epsilon_m).\end{aligned}$$

Comme $\|u_m(0) - u_n(0)\|^2 = 0$, pour tout $t \in I$, on a

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|^2 \leq 4(\epsilon_n + \epsilon_m) \int_0^t v'(s) ds.$$

Donc pour certaine constante positive k indépendant de m, n et t nous avons

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|^2 \leq k(\eta_n + \eta_m),$$

où η_n, η_m sont des constantes qui tend vers 0.
On conclut que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{C}(I, H)$ qui est complet, et par suite $(u_n)_n$converge uniformément vers u, c-à-d, $u_n \longrightarrow u$.
La relation (2.11) donne que $(u'_n)_n$ est borné dans $\mathbf{L}^1(I, H)$, alors d'après le théorème(1.8.9) on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $\mathbf{L}^1(I, H)$, on suppose que cette sous suite est $(u'_n)_n$et p est la limite faible dans $\mathbf{L}^1(I, H)$ on note $u'_n \rightharpoonup p$ dans $\mathbf{L}^1(I, H)$.
Pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} u(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t) &= u_0 + \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^t u'_n(s) ds \\ &= u_0 + \int_0^t p(s) ds. \end{aligned}$$

(on a utilisé la convergence faible de u'_n et le théorème de la convergence dominé de Lebesgue).
On en déduit que u est absolument continue et $u'(t) = p(t) \;\; p.p \; t \in I$.

<u>3 ème étape</u> : u(·) est solution du notre problème.

On commence par la condition de viabilité

$$u(t) \in C(t) \quad p.p \;\; t \in [0, T] . \tag{2.19}$$

Pour presque partout $t \in I$, et d'après la définition (2.12) de $\theta_n(t)$ on a

$$|\theta_n(t) - t| \leq \frac{T}{2^n}.$$

Combinant(2.5) et (2.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &= \|u_n(\theta_n(t)) + u_n(t) - u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + v(\theta_n(t)) - v(t) \\ &\leq \|u_n(t) - u(t)\| + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient

$$\begin{cases} \lim_{n\longrightarrow\infty} \theta_n = t, \\ et \\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(\theta_n(t)) = u(t). \end{cases} \tag{2.20}$$

Comme $u_n(\theta_n(t)) \in C(\theta_n(t))$, (2.3) implique

$$d_{C(t)}(u_n(\theta_n(t))) = d_{C(t)}(u_n(\theta_n(t))) - d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))) \leq v(\theta_n(t)) - v(t).$$

D'autre part, la continuité de la fonction distance et la relation(2.20), impliquent

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} d_{C(t)}(u_n(\theta_n(t))) \leq 0,$$

or

$$d_{C(t)}(u(t)) = 0,$$

c-à-d

$$u(t) \in \overline{C(t)}.$$

Comme $C(t)$ est fermé alors

$$u(t) \in C(t); \forall t \in [0,T].$$

Maintenant, nous montrons que $u(\cdot)$ vérifié l'inclusion différentielle (2.1).
On a d'après (2.14), pour tout $t \in I$

$$u_n'(t) \in -v'(t)\partial d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))).$$

La convergence faible de $(u_n')_n$ vers u' dans $\mathbf{L}^1(I,H)$ donne d'après le lemme(1.8.6).

$$u'(t) \in \overline{co}\{u_k'(t) \ : k \geq n\},$$

et donc

$$u'(t) \in \bigcap_n \overline{co}\{u_k'(t) \ : k \geq n\}.$$

Nous fixons $t \in I$ et $\xi \in H$, alors

$$\langle \xi, u'(t)\rangle \leq \sigma_{\overline{co}\{u_k'(t)\,:k\geq n\}}(\xi),$$

alors

$$\langle \xi, u'(t)\rangle \leq \sup_k \langle \xi, u_k'(t)\rangle,$$

or

$$\langle \xi, u'(t) \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle \xi, u'_k(t) \rangle = \lim_n \sup \langle \xi, u'_n(t) \rangle.$$

Nous utilisons la relation (2.14), la proposition (1.8.7), la proposition(2.2.2) et le fait que $\sigma(\partial d_{C(t)}(.), .)$ est semi continue supérieurement, nous trouvons

$$\begin{aligned} \langle \xi, u'(t) \rangle \leq \lim_n \sup \langle \xi, u'_n(t) \rangle &\leq \lim_n \sup \sigma(-v'(t) \partial d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))); \xi) \\ &\leq \sigma(-v'(t) \partial d_{C(t)}(u(t)); \xi). \end{aligned}$$

Comme $\partial d_{C(t)}(u(t))$ est un convexe fermé, alors

$$u'(t) \in -v'(t) \partial d_{C(t)}(u(t)) \subset -N_{C(t)}(u(t)) \ p.p\ t \in I.$$

II-unicité de la solution :

Supposons que u_1, u_2 sont deux solutions de (2.1) telles que $u_1(0) = u_2(0) = u_0$.
Donc, pour p.p $t \in [0, T]$, nous avons pour $i = 1, 2$

$$\langle -u'_i(t), v - u_i(t) \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } v \in C(t).$$

En utilisant le fait que $u_i(t) \in C(t)$ p.p $t \in [0, T]$, nous obtenons

$$\begin{cases} \langle u'_1(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle & \leq 0, \\ \langle -u'_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle & \leq 0. \end{cases}$$

En additionnant les deux dernières inégalités, nous avons

$$\langle u'_1(t) - u'_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle \leq 0. \tag{2.21}$$

Alors

$$\frac{d}{dt} \langle u_1(t) - u_2(t), u_1(t) - u_2(t) \rangle = 2 \langle u_1(t) - u_2(t), u'_1(t) - u'_2(t) \rangle \leq 0,$$

or

$$\|u_1(s) - u_2(s)\| - \|u_1(0) - u_2(0)\| \leq 0.$$

Par conséquent

$$\|u_1(s) - u_2(s)\| \leq 0 \Longleftrightarrow u_1(s) = u_2(s); \forall s \in [0, T].$$

D'où l'unicité de la solution et ce qui achève la preuve.

■

Chapitre 3

Version quasi-variationnelle du processus de Rafle

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solution pour la version quasi-variationnelle du processus de rafle, i.e, le problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} -u'(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)), \quad p.p\, sur [0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)), \quad \text{pour tout}\, t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0,u_0), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ est une multifonction à valeurs convexes et fermées dans l'espace de Hilbert H.

Le problème (3.1) s'appelle processus de rafle avec contrainte sur l'état (state dépendent sweeping processus en anglais) du premier ordre.

L'existence de la solution pour le problème (3.1) été prouvé par plusieurs auteurs via les méthodes de discrétisations [10, 12].

Le but de ce chapitre est de montrer que l'approche point fixe est possible pour démontrer l'existence de solution pour le problème (3.1).

3.2 Résultats d'existence

Maintenant, nous énoncons notre résultat principale.

Théorème 3.2.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit $C : [0,T] \times H \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides satisfaisant les hypothèses suivants :*

($\mathcal{H}1$) *$C(t,u)$ est convexe fermé, $\forall (t,u) \in [0,T] \times H$;*

($\mathcal{H}2$) *$C(.,.)$ est bouge dans un sens lipschitzien, c-à-d,*
$\exists L_1 \geq 0$ *et* $0 \leq L_2 < 1$ *tels que :* $\quad d_H(C(t,u), C(s,v)) \leq L_1 |t-s| + L_2 \|u-v\|$;

($\mathcal{H}3$) *$C(t,u) \subset S$ où $S \subset H$ est compact.*

Alors, pour tout $u_0 \in C(0,u_0)$; le problème (3.1) *admet au mois une solution continûment Lipschitzienne.*

Démonstration.

La preuve se fait en trois étapes.

1^{re}étape :K est convexe fermé :

On pose

$$K := \left\{ u \in \mathcal{C}([0,T];H);\ u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s)ds;\ \ \forall t \in [0,T];\ \|u'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2};\ \text{p.p } t \in [0,T] \right\}.$$

On a par définition $K \subset \mathcal{C}([0,T];H)$. Maintenant on montre que

(i)-K convexe :

Soient $u, v \in K, \lambda \in [0,1]$ on va démontrer que $\lambda u + (1-\lambda)v \in K$.

$$u \in K \Longrightarrow \begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s)ds, \\ \|u'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}, \end{cases} \quad \text{et} \quad v \in K \Longrightarrow \begin{cases} v(t) = u_0 + \int_0^t v'(s)ds, \\ \|v'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}. \end{cases}$$

On a

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in \mathcal{C}([0,T];H) \text{ (car u, v} \in \mathcal{C}([0,T];H)).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \lambda u(t) + (1-\lambda)v(t) &= \lambda u_0 + \lambda \int_0^t u'(s)ds + (1-\lambda)u_0 + (1-\lambda)\int_0^t v'(s)ds \ \ p.p\ \ t \in [0,T] \\ &= u_0 + \int_0^t (\lambda u'(s) + (1-\lambda)v'(s))ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|(\lambda u(t)+(1-\lambda)v(t))'\| &= \|\lambda u'(t)+(1-\lambda)v'(t)\| \\ &\leq \lambda\|u'(t)\|+(1-\lambda)\|v'(t)\| \\ &\leq \lambda\frac{L_1}{1-L_2}+(1-\lambda)\frac{L_1}{1-L_2} \\ &\leq \frac{L_1}{1-L_2},\end{aligned}$$

d'où la convexité de K.

(ii)-K est fermé :

Soit $(u_n)_n \subset K \subset \mathcal{C}([0,T];H)$ telle que : $u_n \longrightarrow u$ dans $\mathcal{C}([0,T];H)$ et montrons que $u \in K$.

Soit $u := \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$, et $u_n \in K$, donc on peut écrire

$$u_n(t) = u_0 + \int_0^t u_n'(s)ds \quad p.p\ \ t\in[0,T], \text{ et } \ \|u_n'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}. \tag{3.2}$$

On doit montrer que

$$\begin{cases} u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s)ds \quad p.p\ \ t\in[0,T], \\ \|u'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}. \end{cases}$$

D'après (3.2) on a

$$\|u_n'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2} \quad p.p\ \ t\in[0,T],\ \ \forall n\in\mathbb{N},$$

alors

$$\int_0^T \|u_n'(t)\|dt \leq \frac{L_1}{1-L_2}T \quad p.p\ \ t\in[0,T],\ \ \forall n\in\mathbb{N},$$

or

$$\|u_n'(t)\|_{\mathbf{L}^1([0,T];\,H)} \leq cte < \infty \quad p.p\ \ t\in[0,T],\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Donc, d'après le théorème(1.8.9) on trouve
$\exists(u_n')_n \subset \mathbf{L}^1([0,T];H)$; $\exists w\in\mathbf{L}^1([0,T];H)$ tels que u_n' converge faiblement vers w dans $\mathbf{L}^1([0,T];H)$, et on note $u_n' \rightharpoonup w$ dans $\mathbf{L}^1([0,T];H)$.
Soit

$$v(t) = u_0 + \int_0^t w(s)ds, \quad p.p\ \ t\in[0,T].$$

On pose

$$Z := \left\{ y(.) \in \mathbf{L}^1([0,T];H); \quad \|y(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2} \ \ p.p \ \ t \in [0,T] \right\}.$$

Il est clair que Z convexe et fermé dans $\mathbf{L}^1([0,T];H)$ (on utilise l'inégalité triangulaire et la continuité de la norme).

Comme $u_n \in K$ alors $u_n' \in Z$.

Or

$$u_n' \rightharpoonup w.$$

Donc d'après le lemme (1.8.1) on a

$$w \in Z,$$

c-à-d

$$\|w(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}.$$

Comme $v(t) := u_0 + \int_0^t w(s)ds$, et $\|w(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}$, on obtient

$$v \in K. \tag{3.3}$$

On va montrer maintenant que : $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n(t) = v(t)$.

(3.2) donne

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t) = u_0 + \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^t u_n'(s)ds.$$

Donc il suffit montre que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^t u_n'(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Soit e_j est une base de H

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} \langle e_j, \int_0^t u_n'(s)ds \rangle &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T \langle \mathbb{1}_{[0,t]}(s) e_j, u_n'(s) \rangle ds \\
&= \int_0^T \langle \mathbb{1}_{[0,t]} e_j, w(s) \rangle ds \\
&= \langle e_j, \int_0^t w(s)ds \rangle.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^t u_n'(s)ds = \int_0^t w(s)ds.$$

Par suite

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(t) = v(t).$$

D'après l'unicité de la limite on trouve que $u = v \in K$, ce qui assure que K est fermé.

2$^{\text{ème}}$ étape :Construction de l'opérateur point fixe A :

Posons $D(t) := C(t, v(t))$ où $v \in K$ quelconque. On définit le problème suivant d'inconnu w,

$$\begin{cases} -w'(t) \in N_{D(t)}(w(t)), \\ w(0) = u_0 \in D(0) = C(0, u_0). \end{cases} \tag{3.4}$$

On va vérifier que $D(.)$ satisfaisant les conditions du théorème (2.3.2).

Il est clair que $D(t)$ est convexe fermé.

Maintenant, soit $y \in H$ et $t, t' \in [0, T]$, alors

$$\begin{aligned} \left|d_{D(t)}(y) - d_{D(t')}(y)\right| &= \left|d_{C(t,v(t))}(y) - d_{C(t',v(t'))}(y)\right| \\ &\leq L_1 \left|t - t'\right| + L_2 \left|v(t) - v(t')\right| \\ &\leq \tilde{v}(t) - \tilde{v}(t'), \end{aligned}$$

avec $\tilde{v}(t) = L_1 t + L_2 v(t)$.

Donc $D(.)$, bouge dans un sens absolument continu par rapport à $\tilde{v}(.)$. Le théorème (2.3.2) nous garanti l'existence et l'unicité de $w \in W^{1,2}([0, T]; H)$ solution du problème (3.4).

Maintenant, on définit A par

$$\begin{aligned} A : K &\longrightarrow K \\ v &\longmapsto w = Av. \end{aligned}$$

(i) K est invariant par A :

On va montrer que $AK \subset K$.

Soit $v \in K$, alors $v \in \mathcal{C}([0, T]; H)$ et

$$v(t) = u_0 + \int_0^t v'(s)ds.$$

Et soit $w \in AK$ donc

$$w = Av \ ; \ v \in K.$$

D'après 3.4 on obtient

$$w(0) = u_0.$$

Comme w est absolument continue(d'après chapitre2) alors :

$$\begin{cases} w(t) = u_0 + \int_0^t w'(s)ds, \\ \qquad et \\ \|w'(t)\| \leq \tilde{v}'(t) = L_1 + L_2 v'(t). \end{cases}$$

Resta a vérifier que $\|w'(t)\| \leq \frac{L_1}{1-L_2}$.

Soit $t \in I$

$$\begin{aligned} \|w'(t)\| \leq \tilde{v}'(t) &\leq \|\tilde{v}'(t)\| \\ &\leq L_1 + L_2\|v'(t)\| \\ &\leq \frac{L_1}{1-L_2}. \end{aligned}$$

Donc $w \in K$.

(ii) A est continue :

On va démontrer que A est continue.

Soit $(v_n)_n \subset K$ telle que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{dans } \mathcal{C}([0,T];H).$$

On a

$$w_n = A(v_n) \text{ et } w = Av.$$

Et comme $w_n = A(v_n)$ alors w_n est solution de

$$\begin{cases} -w_n \in N_{C(t,v_n(t))}(w_n(t)), \\ w_n(0) = u_0 \in C(0,u_0). \end{cases}$$

Comme $w = A(v)$ alors w est solution de

$$\begin{cases} -w \in N_{C(t,v(t))}(w(t)), \\ w(0) = u_0 \in C(0,u_0). \end{cases}$$

On utilise la définition du cône normal on obtient

$$\begin{cases} \langle -w_n'(t), x - w_n(t)\rangle \leq 0;\ \forall x \in C(t,v_n(t)), \\ \langle -w'(t), x - w(t)\rangle \leq 0;\ \forall x \in C(t,v(t)). \end{cases}$$

Si on prend

$$x = proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) \in C(t,v_n(t)),$$

et

$$x = proj_{C(t,v(t))}(w_n(t)) \in C(t, v(t)),$$

et on remplace dans les deux inégalités précédentes on trouve

$$\begin{cases} \langle -w_n'(t), proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) - w_n(t) \rangle \leq 0, \\ \langle -w'(t), proj_{C(t,v(t))}(w_n(t)) - w(t) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle -w_n'(t), w(t) - w_n(t) \rangle &= \langle -w_n'(t), w(t) - proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) \rangle + \langle -w_n'(t), proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) - w_n(t) \rangle \\ &\leq \langle -w_n'(t), w(t) - proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) \rangle \\ &\leq \|w_n'(t)\| \left\| w(t) - proj_{C(t,v_n(t))}(w(t)) \right\| \\ &\leq \frac{L_1}{1 - L_2} \left| d_{C(t,v_n(t))}(w(t)) - d_{C(t,v(t))}(w(t)) \right| \\ &\leq \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v(t) - v_n(t)\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\langle -w_n'(t), w(t) - w_n(t) \rangle \leq \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v(t) - v_n(t)\|, \tag{3.5}$$

et

$$\langle -w'(t), w_n(t) - w(t) \rangle \leq \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v(t) - v_n(t)\|. \tag{3.6}$$

Combinant (3.5) et (3.6) on trouve

$$\langle w_n'(t) - w'(t), w_n(t) - w(t) \rangle \leq 2 \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v(t) - v_n(t)\|.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_n(t) - w(t)\|^2 \leq 2 \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v_n(t) - v(t)\|.$$

D'après le lemme (1.8.3) on obtient

$$\|w_n(t) - w(t)\|^2 \leq 2 \frac{L_1}{1 - L_2} L_2 \|v_n(t) - v(t)\|.$$

Passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|w_n(t) - w(t)\|^2 = 0.$$

Alors

$$w_n(t) \longrightarrow w(t),$$

par suite A est continue.

3 $^{\text{ème}}$ étape : A **est compact :**

$$\begin{aligned} \text{on a } A : K &\longrightarrow K \\ v &\longmapsto Av = w \in K. \end{aligned}$$

Pour montrer AK est relativement compact il suffit de montrer qu'il est compact et équicontinu.

1. Compact
   On a pour tout $t \in [0, T]$
   $K(t) := \{u(t); u \in K\} \subset H$ est relativement compact (d'après ($\mathcal{H}3$)).
2. Èquicontinu
   Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ tq $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} |w(t_1) - w(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} w'(s) ds \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |w'(s)| \, ds \\ &\leq \frac{L_1}{1 - L_2}(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Alors $w(t)$ est uniformément lipschitzien et donc équicontinu. Alors $w(t)$ est lipschitzienne.
D'après le théorème(1.8.8) (Ascoli-Arzélà) AK est relativement compact.
Les conditions du théorème du point fixe de Shauder(théorème1.8.4) sont satisfaites, alors il existe $u \in K$ tell que $Au = u$, c-à-d, $u \in W^{1,1}([0, T]; H)$ solution du problème(3.1).
Ce qui achève la preuve.

■

3.3 Application

Dans cette section, on va appliquer notre résultat principal pour résoudre l'inégalité quasi-variationnelle de type parabolique suivant :

Trouver $v : [0,T] \longrightarrow H$ telle que

$$\begin{cases} \langle v'(t) + f(t), w - v(t)\rangle \geq 0 \ ; \ \forall w \in \Gamma(v); \\ v(0) = v_0 \in \Gamma(v_0), \end{cases} \tag{3.7}$$

où $f : [0,T] \longrightarrow H$ une fonctionnelle donnée dans $\mathbf{L}^\infty([0,T];H)$, et $\Gamma(v) \subset H$ est l'ensemble des contraintes supposée à valeurs convexes et fermées, et

$$|d_{\Gamma(v_1)}(y) - d_{\Gamma(v_2)}(y)| \leq L\|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in H \,\text{et}\, L \geq 0. \tag{3.8}$$

Proposition 3.3.1. *Si $\Gamma(v) \subset S \subset H$ compact et $L < 1$, alors pour tout $v_0 \in \Gamma(v(0))$ le problème* (3.7) *admet aux moins une solution.*

Démonstration.
Comme $\Gamma(v)$ est convexe fermé, (3.7) peut être réécrite comme suit

$$\begin{cases} -v'(t) \in N_{\Gamma(v(t))}(v(t)) + f(t) \ \ p.p \ w \in \Gamma(v), \\ v(0) = v_0 \in \Gamma(v_0). \end{cases} \tag{3.9}$$

Maintenant, on va utiliser le changement de variable suivant :

$$u(t) := v(t) + \int_0^t f(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$
$$C(t,u(t)) := \Gamma(u(t) - \int_0^t f(s)ds) + \int_0^t f(s)ds \quad \forall (t,u) \in [0,T] \times H.$$

Comme $u(t) = v(t) + \int_0^t f(s)ds$, alors

$$u'(t) = v'(t) + f(t).$$

On remarque que (3.7) donne

$$-v'(t) - f(t) \in N_{\Gamma(v(t))}(v(t)),$$

or

$$-u'(t) \in N_{\Gamma(u(t) - \int_0^t f(s)ds) + \int_0^t f(s)ds - \int_0^t f(s)ds}(u(t) - \int_0^t f(s)ds),$$

c-à-d

$$-u'(t) \in N_{C(t,u(t)) + \int_0^t f(s)ds}(u(t) + \int_0^t f(s)ds),$$

alors
$$-u'(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)).$$

Pour terminer, on doit montrer que $C(.,.)$ bouge dans un sens lipschitzien.
Soit $y \in H$; $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
|d_{C(t_1,u_1)}(y) - d_{C(t_2,u_2)}(y)| &= |d_{\Gamma(u_1-\int_0^{t_1} f(s)ds)+\int_0^{t_1} f(s)ds}(y) - d_{\Gamma(u_2-\int_0^{t2} f(s)ds)+\int_0^{t2} f(s)ds}(y)| \\
&\leq L\|u_1 - \int_0^{t1} f(s)ds - u_2 + \int_0^{t_2} f(s)ds\| + \|\int_0^{t_1} f(s)ds - \int_0^{t_2} f(s)ds\| \\
&\leq L\|u_1 - u_2\| + L\|\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds\| + \|\int_{t_1}^{t_2} f(s)ds\| \\
&\leq L\|u_1 - u_2\| + L\int_{t_1}^{t_2} \|f\|_{\mathbf{L}^\infty} ds + \int_{t_1}^{t_2} \|f\|_{\mathbf{L}^\infty} ds \\
&\leq L\|u_1 - u_2\| + L\|f\|_{\mathbf{L}^\infty}|t_1 - t_2| + \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}|t_1 - t_2| \\
&\leq L\|u_1 - u_2\| + (1+L)\|f\|_{\mathbf{L}^\infty}|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Donc $C(.,.)$ est bouge dans un sens lipschitzien. Alors toutes les hypothèses de théorème(3.2.1) sont satisfaites et par suite le problème (3.7) admet au moins une solution.
Ce qui achève la preuve.

■

Conclusion générale

Ce manuscrit résume les six moins de mémoire de Master EDPA que nous avons effectuée au sein de Département de Mathématique de l'Université de Jijel, sous la direction du Professeur Tahar Haddad.

La première partie de ce mémoire est consacrée à l'étude de l'équation différentielle multivoques de type processus de rafle avec contrainte C dépend du temps t. Nous avons démontré le caractère bien posé sans aucune hypothèse de compacité sur C.

La seconde partie traite l'existence de solution pour le processus de rafle avec contrainte C dépend aussi de l'état u, i.e., $C(t, u(t))$. Ce résultat a été obtenu via le théorème de point fixe de Schauder et le résultat de la première partie.

Bibliographie

[1] **S.Adly, Tahar Haddad and L.Thibault**, *Convex Sweeping Process in the framework of Measure Differential inclusion and Evolution Variational Inequalities*, Mathematical Programming, February(2014), 1-43.

[2] **J.P.Aubin and A. Cellina**, *Differential inclusion-set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin(1984).

[3] **D. AZE**, *Eléments d'analyse convexe et variationnelle*, ellipses, édition marketing S.A., Paris, 1997.

[4] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, Paris, 1983.

[5] **D. Duvaut and J.L. Lions**, *Inequalities in Mechanics and Physics, Springer, 1979.*

[6] **D. Françoise et D. Gilbert**, *Convexité dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, édition marketing S.A., 2004.

[7] **Tahar Haddad**, *L'étude de la sous-différentiabilité des fonction non convexes et ses application en économie, théorie des jeux et aux inclusions différentielles du premier et second ordre*. Thése de Doctorat en Sciences, Sétif, (2007).

[8] **Tahar Haddad**, *Nonconvex Differential Variational Inequality and State-Dependent Sweeping Process*, Journal of Optimization Theory an Applications, Springer (USA), volume 159, issue 2, (2013), 386-398.

[9] **Tahar Haddad**, *Differential Inclusion Governed by State Dependent Sweeping Process*, International Journal of Difference Equations, Vol 8, N1, (2013), 63-70.

[10] **Touma Haddad and Tahar Haddad**, *State Dependent Sweeping Process with Perturbation*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Springer (USA), 41, (2013), 273-281.

[11] **M. Kisielewicz**, *Differential Inclusions and Optimal Control*. Kluwer Acad. Publishers, London, 1991.

[12] **M.Kunze and M.D.P.Monteiro Marques**, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes*, Topol.Methods Nonlinear Anal. 12, (1998), 179-191.

[13] **M.D.P.Monteiro Marques**, *Differential inclusion in nonsmooths mechanical problems, Shokcks and dry Friction*, Progress in Nonlinear Differential Equations an Their Applications, BirKhauser. 9, (1993).

[14] **J.J. Moreau**, *Rafle par un convexe variable*, I,Sém. Anal. Convexe Montpellier (1971) Exposé 15.

[15] **J.J.Moreau**, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J.Diff.Eqs. 26, (1977), 347-374.

[16] **R.T. Rockafellar**, *Convex Integral Functionals and Duality. In : E.H. Zarantonello (Ed.) Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. Academic Press, New York, 215-236, 1971.

[17] **K. Yosida**, *Functional Analysis*. Reprint. Springer, Berlin Heidelberg New York, (3rd ed) 1971.