République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Analyse Numérique des Equations de Navier-Stokes

Présenté par :

LADJEROUD ASMA

soutenu le : 27 Juin 2018

Devant le jury :

Président	: S. Maarouf	MC B. Université de Jijel
Encadreur	: Y. Daikh	MC A. Université de Jijel
Examinateur	: I. Soualhia	MC B. Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Table des matières

Introduction **4**

1 Préliminaires **7**

1.1 Espaces de Sobolev 7

1.1.1 Injection de Sobolev 10

1.1.2 Opérateur de traces 11

1.2 Théorème de Banach-Nečas-Babuška 11

1.3 Espaces discrets 12

1.4 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale 14

1.4.1 polynômes de Legendre 14

1.4.2 Formules de quadrature 15

1.4.3 Inégalités inverses pour des polynômes 15

1.4.4 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale en dimension quelconque 15

2 Le problème de Navier-Stokes **17**

2.1 Position du problème 17

2.2 Formulation variationnelle 19

2.3 Existence et unicité de la solution 21

3 Discrétisation spectrale du problème de Navier-Stokes **31**

3.1 Position du problème 31

3.2 Existence de la solution 33

3.3 Estimation d'erreur 37

Appendice **49**

Bibliographie **52**

Introduction

Les équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux compressible ou incompressible tel que l'eau, l'air, le pétrole en régime stationnaire ou in-stationnaire, ont fait et font encore l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche. La variation d'un des paramètres associés à ces équations (domaines sur lequel sont posées les équations, conditions aux limites, nature des données, formulation variationnelle des équations, dépendance par rapport au temps, choix de la méthode d'approximation,...) fournit un nouveau problème et un nouveau sujet de recherche.
Ces équations permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvement des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs, mais aussi l'écoulement trivial de l'eau dans un tuyau et nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Ici, nous optons pour les méthodes spectrales comme méthode d'approximation pour ces équations. Ces méthodes ont été introduites pour la première fois par D. Gottlieb et S. A.Orszag [21] [26] et développées, ensuite, par plusieurs auteurs, on cite entre autre C. Bernardi et Y. Maday [11] [13] [14]. Ces méthodes permettent d'obtenir des approximations d'équations aux dérivées partielles avec une bonne précision et une convergence rapide. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans des espaces de polynômes de haut degré. Les intégrales sont évaluées au moyen de formules de quadrature appropriées. Ces méthodes sont également très avantageuses, non seulement pour la simplicité des bases qu'elles fournissent et qui sont obtenues en dimension quelconque d'espace par une tensorisation de la base en dimension 1, mais aussi et surtout pour la nature de la convergence des solutions discrètes obtenues vers les solutions continues correspondantes. En ce sens, la précision de ces méthodes n'est limitée que par la régularité de la fonction à approcher. Ajoutons à ça, leur implémentation relativement simple et leur coût raisonnable qui ont fait d'elle des méthodes aussi attractives que compétitives. Les domaines où ces méthodes sont posées, se multiplient et se généralisent. Grâce aux produits de tensorisation sur les polynômes, la géométrie de base est soit un carré en dimension 2 soit un cube en dimension 3, et il est bien connu que la méthode s'adapte parfaitement à ce genre de domaines. Nous pouvons trouver des extensions sur des trapèzes, cylindres ou même des cônes, par conséquent, le champ d'applications des méthodes spectrales ne se limite plus aux géométries simples, mais s'étend aux situations complexes (voir [27]). Beaucoup de problèmes ont été résolus par cette méthode et l'efficacité de la méthode a été montré aussi bien sur un domaine unique que sur un union de sous-domaine.

L'objectif de ce mémoire est de détailler quelques parties de l'article [9], en particulier la partie concernant la discrétisation spectrale du problème continu ainsi que l'estimation d'erreur à priori. Ce mémoire est structuré de la façon suivante :
Dans le premier chapitre de ce travail, on donne les principales propriétés des espaces de Sobolev [1], des polynômes de Legendre, ensuite on donne les principales estimation d'erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale de aux nœuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto en normes des espaces de Sobolev usuels sur Λ^d [11] [14].
Dans le deuxième chapitre, nous considérons les équations de Navier-Stokes dans un domaine borné bi ou tri-dimensionnel munies de conditions aux limites non usuelles portant sur la composante normale de la vitesse et les composantes tangentielles du tourbillon. Nous proposons une formulation variationnelle de ce problème comportant trois inconnus indépendantes : la vitesse, la pression et le tourbillon. Cette formulation a été proposé dans [18] et [27] pour le problème de Stokes (voir aussi [19], [2] et [3]). En s'appuyant sur cette formulation, nous présentons les principaux outils fonctionnels qui permettent de déduire que les équations admettent une solution sans restriction sur la régularité du domaine en dimension 2 et faible limitation en dimension 3. Notons cependant que ce résultat d'existence n'est établi que sur certaine conditions sur la viscosité et la donnée $\boldsymbol{f}$ en dimension 3. Vu la non linéarité du problème on a recours pour cela au théorème de Brouwer.
L'objet du troisième chapitre est la discrétisation spectrale du problème de Navier-Stokes. Pour discrétiser le problème, on utilise la méthode de Galerkin avec intégration numérique, c'est-à-dire on remplace l'espace continu par un espace de dimension finie, et les intégrales exactes par une formule de quadrature. Nous utilisons ensuite le théorème de Brezzi-Rapaz-Raviart [16] pour prouver que le problème est bien posé et qu'il admet une solution localement unique. De plus, nous établissons des majorations quasi-optimales de l'erreur pour les trois inconnus en dimension 2 tout en combinant les résultats dans [16]

et [8].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle tout d'abord les définitions et propriétés fondamentales des espaces de Sobolev et des espaces des polynômes qui constituent le cadre de l'analyse numérique des méthodes spectrales. Ensuite, pour pouvoir majorer la distance de fonctions de régularité donnée à un espace de polynôme, pour les normes de Sobolev, on définit une base de polynômes orthogonaux ainsi que les formules de quadrature qui sont employées pour évaluer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle. A la fin, on établit des majorations de l'erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale.

1.1 Espaces de Sobolev

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [1], Dautray et Lions [17], Grisvard [22], Lions et Magenes [23] et Nečas [24].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontère. Deux définitions sont nécessaires pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère.

Définition 1.1.1. *En dimension $d \geq 2$, un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien ou à frontière lipschitzienne si pour tout point x de $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, ..., y_d)$, un hypercube $U^x = \prod_{i=1}^{d}]-a_i, a_i[$ et une application lipschitzienne*

Φ^x *de* $\prod_{i=1}^{d-1}]-a_i, a_i[$ *dans* $]-\frac{a_d}{2}, \frac{a_d}{2}[$ *tels que :*

$$\Omega \cap U^x = \{(y_1, ..., y_d) \in U^x;\ \ y_d > \Phi^x(y_1, ..., y_{d-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U^x = \{(y_1, ..., y_d) \in U^x;\ \ y_d = \Phi^x(y_1, ..., y_{d-1})\}.$$

Cette propriété signifie que la frontière coïncide localement avec le graphe d'une fonction lipschitzienne. Elle sera satisfaite par tous les ouverts considérés dans ce mémoire. Tout ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$ est également à frontière lipschitzienne (voir Grisvard [22, Corollaire 1.2.2.3]).

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note x le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit dx soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(x)\, dx\ < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx.$$

On note $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ la norme

$$\|v\|_{0,\Omega} = \Big(\int_\Omega v^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [28]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: pour tout d$-$uplet $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$, $|\alpha|$ représente la longueur $\alpha_1 + ... + \alpha_d$ et on note ∂^α la dérivée partielle d'ordre total $|\alpha|$ et d'ordre α_j par rapport à la $j-$ième variable, $1 \leq j \leq d$. On utilisera également la notation $\frac{\partial}{x_1}, ..., \frac{\partial}{x_d}$ pour désigner les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport aux différentes variables $x_1, ..., x_d$, et le symbole ∇ pour le vecteur à d

composantes formé par ces dérivées. Lorsque d est égal à 1, on écrira plus simplement $\frac{d^k}{d\zeta^k}$ la dérivée d'ordre k, où k est un entier positif, et on désignera aussi par les symboles $'$,$''$,..., les premières dérivées.

Définition 1.1.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{m,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha v)^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Il est facile de vérifier que l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme (1.1) :

$$(u, v)_{1,\Omega} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u)(x)(\partial^\alpha v)(x)\, dx\Big).$$

Une autre propriété fondamentale est rappelée dans le lemme suivant (la démonstration se trouve dans le livre d'Adams [1, Théorème 3.16]) :

Lemme 1.1.3. *Pour tout entier positif m, l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Ce résultat conduit à la définition suivante :

Définition 1.1.4. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs (voir Adams [1, Théorème 6.28]).

Lemme 1.1.5 (Inégalité de Poincaré-Friedrichs). *Il existe une constante positive C ne dépendant que de la géométrie de Ω telle que toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ vérifie*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C\Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Cette inégalité permet de démontrer facilement le résultat suivant :

Corollaire 1.1.6. *La semi norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \Big(\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{d} (\frac{\partial v}{\partial x_j})^2(x)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Définition 1.1.7. *Soit m un entier positif. On note $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ et on le munit de la norme duale :*

$$\|f\|_{-m,\Omega} = \sup_{v\in H_0^m(\Omega)} \frac{< f, v >}{\mid v \mid_{m,\Omega}}, \tag{1.4}$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit de dualité entre $H_0^m(\Omega)$ et son dual.

Il est possible de caractériser le dual topologique de l'espace $H^{-1}(\Omega)$ de la façon suivante :

Proposition 1.1.1. *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \Big\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \ f = v_0 + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\ \text{ avec } v_0, v_1, ...v_d \in L^2(\Omega) \Big\}.$$

Autrement dit, toute forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$, notée $L \in H^{-1}(\Omega)$, s'écrit pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$L(\phi) = \int\limits_{\Omega} \Big(v_0\phi - \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\Big) dx,$$

avec $v_0, v_1, ..., v_d \in L^2(\Omega)$.

Grâce à l'espace $H^{-1}(\Omega)$ on peut définir une nouvelle notion de dérivation pour les fonctions de $L^2(\Omega)$.

Lemme 1.1.8. *Soit $v \in L^2(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq d$, on peut définir une forme linéaire continue $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$< \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi >= -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

1.1.1 Injection de Sobolev

On donne ici une version simple d'injection de Sobolev qui permet de comparer, au sens de l'inclusion, les espaces de Sobolev aux espaces des fonctions continues habituels.

Théorème 1.1.9. *Soit m un entier positif. L'espace $H^m(\Omega)$ est inclus, avec injection continue dans l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ si et seulement si*

$$2m > d. \tag{1.6}$$

1.1.2 Opérateur de traces

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [22]. On rappelle que l'ouvert Ω étant lipschitzien, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$. Si les composantes de $\boldsymbol{n}$ s'écrivent $(n_1, ..., n_d)$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ l'opérateur de dérivée normale $n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + n_d \frac{\partial}{\partial x_d}$.

Théorème 1.1.10. *L'application $\gamma_0 \,:\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu :* ***l'application de traces.***
l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf_{u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.2 (Formule de Green).
Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^N$, et $\partial\Omega$ sa frontière. Alors, pour tout $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega)$, $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Delta \boldsymbol{u}(x) \boldsymbol{v}(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla \boldsymbol{u}(x)\ \nabla \boldsymbol{v}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}(x) \gamma_0 \boldsymbol{v}(x)\, d\sigma \tag{1.7}$$

Proposition 1.1.3 (Formule de Stokes).
Soit Ω un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. L'application $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ qui à $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^d$ associe $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})_{|\partial\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue de $H(\mathrm{div}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on a la formule de Stokes suivante :

$$\forall \boldsymbol{u} \in H(\mathrm{div}, \Omega), \forall \boldsymbol{w} \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{w}\, dx + \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{div} \boldsymbol{u}\, dx = \langle \gamma_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}, \gamma_0 \boldsymbol{w} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}},$$

où, γ_0 est l'opérateur de trace de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

1.2 Théorème de Banach-Nečas-Babuška

Le théorème suivant joue un rôle fondamental dans la théorie des méthodes mixtes, il est du à Nečas en 1962 [25], ensuite popularisé par Babuška en 1972 [6] dans le contexte des méthodes des éléments finis. Ce théorème peut être considéré comme une reformulation de deux résultats fondamentaux de Banach : le théorème du graphe fermé et le théorème de l'application ouverte. Certains auteurs appellent ce théorème "une généralisation du théorème de Lax-Milgram", ce n'est pas notre vocabulaire préféré, car Lax-Milgram est réservé pour les espaces de Hilbert par contre le théorème de ***Banach-Nečas-Babuška*** est dans un cadre plus général qui est les espaces de Banach. En plus dans le cadre hilbertien, le théorème BNB donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit bien posé, tandis que le théorème de Lax-Milgram ne donne qu'une condition suffisante.

Théorème 1.2.1 (**Banach-Nečas-Babuška**). *Soient V et W deux espaces de Hilbert, a une forme bilinéaire continue sur $V \times W$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*
(1) *Pour toute forme linéaire continue L sur W, il existe un unique $u \in V$ tel que*

$$a(u,w) = L(w), \quad \forall w \in W \tag{1.8}$$

(2) *Les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\exists \alpha > 0, \ \inf_{v \in V} \left(\sup_{w \in W} \frac{a(v,w)}{\|v\|_V \|w\|_W} \right) \geq \alpha, \tag{1.9}$$

$$(\forall v \in V, a(v,w) = 0) \Rightarrow w = 0. \tag{1.10}$$

Dans le cas où ces deux propositions sont vérifiées, l'unique solution u de (1.8) *vérifie en sus*

$$\|u\|_V = \frac{\|L\|'_W}{\alpha}. \tag{1.11}$$

Démonstration. Voir [25] et [6] ■

1.3 Espaces discrets

On définit les espaces de polynômes, tout d'abord en dimension $d = 1$, puis dans des domaines de dimension $d \geq 2$ qui sont produits d'intervalles.

Notation 1.3.1. *Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. Pour tout intervalle ouvert borné Λ de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ l'espace des restrictions à Λ des fonctions de l'ensemble $\mathbb{P}_n$.*

Notation 1.3.2. *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout intervalle ouvert borné Λ de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Lambda)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ qui s'annulent aux deux extrémités de Λ.*

Une des bases de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ est formée par les ζ^m, $0 \leq m \leq n$, on en déduit facilement le résultat suivant :

$$\dim \mathbb{P}_n(\Lambda) = n+1, \qquad \dim \mathbb{P}_n^0(\Lambda) = n-1.$$

En dimension $d \geq 2$, on travaille dans des domaines Ω dits tensorisés, c'est-à-dire du type $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$, où les Λ_i sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Notation 1.3.3. *Pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout domaine Ω de $\mathbb{R}$ égal au produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable $x_i, 1 \leq i \leq d$.*

D'après cette définition, tout polynôme p de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ s'écrit sous la forme

$$p(x_1,...,x_d) = \sum_{m_1=0}^{n} \cdots \sum_{m_d=0}^{n} \alpha_{m_1 \ldots m_d} x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$$

où les $\alpha_{m_1 \ldots m_d}$ sont des réels. On en déduit la propriété de tensorisation suivante, qui est à la base de l'analyse numérique des méthodes spectrales.

Proposition 1.3.1. *Soit Ω_d le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_{d-1}$. Pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m,\ 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda_d)$, un polynôme p appartient à $\mathbb{P}_n(\Omega_d)$ si et seulement s'il s'écrit*

$$p(x_1,...,x_d) = \sum_{m=0}^{n} q_m(x_1,...,x_{d-1}) \varphi_m(x_d),$$

où les q_m, $0 \leq m \leq n$, appartiennent à $\mathbb{P}_n(\Omega_d)$.

Remarque 1.3.1. *Considérons pour simplifier le cas où Ω est égal à Λ^d pour un intervalle ouvert Λ de $\mathbb{R}$. La Proposition 1.3.1 est alors équivalente au résultat suivant : pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\varphi_m; 0 \leq m \leq n\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$, les polynômes $\varphi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{m_d}$ définis par*

$$(\varphi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{m_d})(x_1,...,x_d) = \varphi_{m_1}(x_1) \cdots \varphi_{m_d}(x_d), \tag{1.12}$$

forment lorsque chaque m_i décrit les entiers de 0 à n, une base de $\mathbb{P}_n(\Omega)$.

Finalement, pour traiter les problèmes avec conditions aux limites essentielles, on introduit les espaces suivants :

Notation 1.3.4. *Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ égal au produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega$.*

Proposition 1.3.2. *Soit Ω_d le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_d$ d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et Ω_{d-1} le produit $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_{d-1}$. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute base $\{\psi_m,\ 1 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$, un polynôme p appartient à $\mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$ si et seulement s'il s'écrit*

$$p(x_1, ..., x_d) = \sum_{m=1}^{n-1} q_m(x_1, ..., x_{d-1})\psi_m(x_d),$$

où les q_m, $1 \leq m \leq n-1$, appartiennent à $\mathbb{P}_n^0(\Omega_d)$.

Remarque 1.3.2. *Là aussi, lorsque Ω est égal à Λ^d pour un intervalle ouvert Λ de $\mathbb{R}$, pour tout entier $n \geq 0$ et toute base $\{\psi_m; 1 \leq m \leq n-1\}$ de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$, les polynômes $\psi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{m_d}$ définis par*

$$(\psi_{m_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{m_d})(x_1, ..., x_d) = \psi_{m_1}(x_1) \cdots \psi_{m_d}(x_d), \tag{1.13}$$

forment lorsque chaque m_i décrit les entiers de 1 à $n-1$, une base de $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$.

1.4 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Pour les preuves de cette section, on réfère à [11] et [13].
On désigne par Λ l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et par Ω l'intervalle $]-1,1[^d = \Lambda^d$, où d est un entier quelconque ≥ 2.

1.4.1 polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre forment une famille de polynômes deux à deux orthogonaux dans l'espace $L^2(\Lambda)$ On peut les construire par le procédé de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique formée par les ζ^n, $n \geq 0$, on obtient la famille orthogonale notée $\tilde{L}_n$ définie d'après G-S par :

$$\tilde{L}_n(\zeta) = \zeta^n - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\int_{-1}^{1} \zeta^n \tilde{L}_m(\zeta)\, d\zeta}{\|\tilde{L}_m\|_{0,\Lambda}^2} \tilde{L}_m(\zeta).$$

on fixe le polynôme $\tilde{L}_0$ égal à 1, ceci permit de définir les polynômes de Legendre en multipliant chaque $\tilde{L}_n$ par une constante appropriée.

Définition 1.4.1. *On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur Λ, deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$.*

1.4.2 Formules de quadrature

Il est bien connu que les zéros et les extrema des polynômes de Legendre servent à la construction de formules de quadrature numérique de grande précision, c'est-à-dire qui sont exactes sur un espace de polynômes de degré élevé : il s'agit principalement des formules de Gauss et de Gauss-Lobatto. On est intéressés par la seconde qui sera rappelée dans la proposition suivante.

Proposition 1.4.1. *Soit N un entier positif fixé. On pose $\eta_0 = -1$ et $\eta_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N-1$ points ξ_j de Λ, $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N+1$ réels ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme Φ de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$:*

$$\int_{-1}^{1} \Phi(\zeta) d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\eta_j)\rho_j. \tag{1.14}$$

Les η_j, $1 \leq j \leq N-1$, sont les zéros du polynôme L'_N. Les ρ_j, $0 \leq j \leq N$, sont positifs. La formule (1.14) *est appelée formule de Gauss-Lobatto de type Legendre à N+1 points.*

1.4.3 Inégalités inverses pour des polynômes

Lemme 1.4.2. $\forall\, \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$, *on a*

$$(i) \qquad \|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.15}$$

$$(ii) \quad \forall q > 2, \;\; \|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^q(\Omega)} \leq c N^{4(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \|\boldsymbol{\varphi}_N\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.16}$$

1.4.4 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale en dimension quelconque

Pour simplifier les notations de cette partie on présente les résultats uniquement dans le cas $d = 2$. Les résultats se généralisent de manière triviale à la dimension quelconque.

Notation 1.4.1. *On note Π_N l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$.*

Théorème 1.4.3. $\forall\, m \geq 0$, $\exists\, c \geq 0$ *ne dépendant que de m telle que, pour toute fonction v de $H^m(\Omega)$, on ait :*

$$\|v - \Pi_N v\|_{0,\Omega} \leq c N^{-m} \|v\|_{m,\Omega}. \tag{1.17}$$

Notations 1.4.1. *On note* $\Pi_N^{1,0}$ *l'opérateur de projection orthogonale de* $H_0^1(\Lambda^2)$ *sur* $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ *pour le produit scalaire associé à la norme* $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Théorème 1.4.4. *Pour tout entier* $m \geq 1$*, il existe une constante c positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$*, on ait :*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{1,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \tag{1.18}$$

Théorème 1.4.5. $\forall\ m \geq 1, \exists\ c(m) > 0,\ \forall\ v \in H^m(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$ *:*

$$\|v - \Pi_N^{1,0} v\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \tag{1.19}$$

Notations 1.4.2. *On définie la grille de Gauss-Lobatto notée* Σ_N *par :*

$$\Sigma_N = \{(\eta_j, \eta_k), 0 \leq j, k \leq N\}.$$

On note $\mathcal{I}_N$ *l'opérateur d'interpolation sur cette grille ,i.e. pour toute fonction* v *continue sur* $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ *appartient à* $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ *et vérifie :*

$$(\mathcal{I}_N v)(\eta_i, \eta_j) = v(\eta_i, \eta_j), \qquad 0 \leq i, j \leq N.$$

Les estimations restent vrais pour $\mathcal{I}_N$,

Théorème 1.4.6. *Pour tout entier* $m \geq 2$*, il existe une constante c positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Lambda^2)$*, on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{0,\Lambda^2} \leq cN^{-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \tag{1.20}$$

et

$$|v - \mathcal{I}_N v|_{1,\Lambda^2} \leq cN^{1-m} \|v\|_{m,\Lambda^2}. \tag{1.21}$$

Proposition 1.4.2. *Tout polynôme* $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ *vérifie les inégalités*

$$\|\varphi_N\|_{0,\Lambda^2}^2 \leq \sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\rho_j \leq 3\ \|\varphi_N\|_{0,\Lambda^2}^2. \tag{1.22}$$

Proposition 1.4.3. $\forall\ \boldsymbol{\varphi}_M \in \mathbb{P}_M(\Lambda^2)$

$$\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{\varphi}_M\|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c(1 + \frac{M}{N})^2 \|\boldsymbol{\varphi}_M\|_{L^2(\Lambda^2)}. \tag{1.23}$$

Chapitre 2

Le problème de Navier-Stokes

L'objectif du chapitre est d'étudier le problème de Navier-Stokes dans un domaine bi- ou tri-dimensionnel muni de conditions aux limites non usuelles portant sur la composante normale de la vitesse et les composantes tangentielles du tourbillon. La formulation variationnelle qu'on va considérer est celle où les inconnues sont la vitesse, la pression et le tourbillon. Les principaux outils fonctionnels qui permettent de déduire l'existence et l'unicité de la solution sont aussi présentés.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné connexe dans $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 ($\boldsymbol{x} = (x, y)$ *ou* $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$), de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On considère le système des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\nu\ \Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}\ P = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \gamma_t(\mathbf{curl}\ \boldsymbol{u}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

Où, les inconnues sont la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression statique P. La donnée $\boldsymbol{f}$ correspond aux forces appliquées au fluide et le coefficient ν qui représente la viscosité cinématique, est constant et positif.
$\boldsymbol{n}$: est le vecteur unitaire normale à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieure de Ω.
Pour préciser le sens d'opérateur γ_t, rappelons que :
• En dimension 2, pour tout champs de vecteurs $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$, $\mathbf{curl}\ \boldsymbol{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x$,

γ_t représente donc la trace sur $\partial\Omega$.

• En dimension 3, pour tout champs de vecteurs $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$,
$\mathbf{curl}\ \boldsymbol{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y, \partial_z v_x - \partial_x v_z, \partial_x v_y - \partial_y v_x)$, d'où l'opérateur γ_t est la trace tangentielle sur $\partial\Omega$ définie par : $\gamma_t(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}$.

Le but est d'établir une formulation variationnelle tout en considérant le terme $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{curl}\ \boldsymbol{u}$ qui représente le tourbillon comme une troisième variable. On peut alors noter que le terme de convection $\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ peut être écrit comme suit :

$$\boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} + \frac{1}{2}\ \mathbf{grad}|\boldsymbol{u}|^2.$$

et avec un changement de variable $\mathrm{p} = \mathrm{P} + \frac{1}{2}\ |\boldsymbol{u}|^2$ qui définie la pression dynamique, on observe que le système (2.1) est équivalent au système :

$$\begin{cases} \nu\ \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}\ p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \quad (2.a) \\ \text{div}\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \quad (2.b) \\ \boldsymbol{\omega} = \mathbf{curl}\ \boldsymbol{u} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

Le cadre fonctionnel dans lequel le problème (2.2) est bien posé fait intervenir des espaces différents pour les trois inconnues. Il s'agit des espaces : $H_0(\text{div}, \Omega)$ pour la vitesse, $L^2_0(\Omega)$ pour la pression et $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ pour le tourbillon, d'où :

On définit les deux espaces de Sobolev $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ respectivement par :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)^{\mathrm{d}};\ \text{div}\ \boldsymbol{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}, \tag{2.3}$$

muni de la norme du graphe :

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H(\text{div},\Omega)} = \big(\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\text{div}\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\big),$$

et

$$H(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}};\ \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^d\}, \tag{2.4}$$

muni de la norme du graphe :

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} = \big(\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\mathbf{curl}\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}\big).$$

On considère aussi les deux sous-espaces respectifs :

$$H_0(\text{div}, \Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H(\text{div}, \Omega);\ \boldsymbol{v}\ \cdot\ n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}, \tag{2.5}$$

$$H_0(\mathbf{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{\varphi} \in H(\mathbf{curl}, \Omega);\ \gamma_t(\boldsymbol{\varphi}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}. \tag{2.6}$$

Il faut noter que les espaces $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ et $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ coïncident avec les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ respectivement en dimension 2. De plus, l'opérateur de trace normale $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot n$ et l'opérateur γ_t sont continues sur $H(\text{div}, \Omega)$ et $H(\mathbf{curl}, \Omega)$, respectivement, dans les deux dimensions (voir [20, Chap I, Thms 2.5 & 2.11]).

Afin d'écrire la formulation variationnelle du problème (2.2), nous rappelons d'abord la définition de l'opérateur **curl** en dimension 2 pour toute fonction scalaire $\boldsymbol{\varphi}$:
pour tout champs de vecteurs $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y)$,

$$\mathbf{curl}\ \boldsymbol{v} = \partial_x \boldsymbol{v}_y - \partial_y \boldsymbol{v}_x, \quad \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \partial_y \boldsymbol{\varphi} \\ -\partial_x \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}.$$

On rappelle aussi que, pour tout champs de vecteurs $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y)$ et toute fonction scalaire $\boldsymbol{\varphi}$, le produit $\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{v}$ est le vecteur de composantes $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{v}_y$ et $-\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{v}_x$.

2.2 Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ où 3. Partons du problème (2.2) et supposons la donnée $\boldsymbol{f}$ dans $H_0(\text{div}, \Omega)'$. On multiplie la première équation du problème (2.2) par une fonction test $\boldsymbol{v}$ de $\mathcal{D}(\Omega)^d$, on intègre sur Ω et on applique la formule de Green on trouve :

$$\nu \int_\Omega \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\ dx + \int_\Omega (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\ dx - \int_\Omega \text{div}\ \boldsymbol{v}(x) \cdot p(x)\ dx = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle. \tag{2.7}$$

où : $\langle .\,,. \rangle$ désigne les crochets de dualité entre $H_0(\text{div}, \Omega)$ et son dual $H_0(\text{div}, \Omega)'$.
Si l'on cherche la solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ dans $H(\mathbf{curl}, \Omega) \times H(\text{div}, \Omega)$, les deux conditions sur le bord se traduisent par le fait que $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{u}$ appartiennent en fait à $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ et $H_0(\text{div}, \Omega)$ respectivement, et l'équation (2.7) s'étend par densité à toutes les fonctions $\boldsymbol{v}$ de $H_0(\text{div}, \Omega)$. De même, on peut multiplier la deuxième équation du problème (2.2) par n'importe quelle fonction q de $L^2(\Omega)$ pour obtenir :

$$\int_\Omega \text{div}\ \boldsymbol{v}(x) \cdot q(x)\ dx = 0. \tag{2.8}$$

Réciproquement, en prenant $\boldsymbol{v}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)^d$ dans (2.7) et q dans $\mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.8), on trouve les équations (2.a) et (2.b) au sens des distributions. Les conditions sur le bord étant assurées par l'appartenance de $\boldsymbol{u}$ à $H_0(\text{div}, \Omega)$ et $\boldsymbol{\omega}$ à $H_0(\textbf{curl}, \Omega)$. D'autre part, il est clair que la fonction p intervenant dans (2.a) n'est définie qu'à une constante près : on va donc lui imposer d'être à moyenne nulle pour assurer son unicité, c'est-à-dire d'appartenir à l'espace $L_0^2(\Omega)$ défini par :

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_\Omega q(x)dx = 0\}. \tag{2.9}$$

Ceci signifie que Le problème de Navier-Stokes s'écrit de façon équivalente sous forme variationnelle :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p) \textit{ de } H_0(\textbf{curl}, \Omega) \times H_0(\text{div}, \Omega) \times \mathrm{L}_0^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle, & \forall \boldsymbol{v} \in H_0(\text{div}, \Omega) \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega) \\ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}) = 0, & \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0(\textbf{curl}, \Omega) \end{cases} \tag{2.10}$$

Les formes bilinéaires $a(.,.;.)$, $b(.,.)$ et $c(.,.;.)$ sont définies par :

$$a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \nu \int_\Omega \textbf{curl}\, \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\, dx, \qquad b(\boldsymbol{v}, q) = -\int_\Omega (\text{div}\boldsymbol{v})(x) q(x)\, dx$$

$$c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\, dx - \int_\Omega \boldsymbol{u}(x) \cdot (\textbf{curl}\, \boldsymbol{\varphi})(x)\, dx. \tag{2.11}$$

et la forme trilinéaire K est définie par :

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\, dx, \tag{2.12}$$

Dans la deuxième égalité du problème (2.10), il est équivalent de prendre des fonctions test dans $L^2(\Omega)$. En effet supposons que cette égalité soit satisfaite. Pour $r \in L^2(\Omega)$, on note $\bar{r}$ sa valeur moyenne i.e.

$$\bar{r} = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega r\, dx,$$

et on a :

$$\int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})\, r\, dx = \int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})(r - \bar{r})\, dx + \bar{r} \int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})\, dx$$

d'après la formule de Stokes, on a

$$\int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})\, r\, dx = \int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})(r - \bar{r})\, dx + \bar{r} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot n\, d\tau.$$

Or, r - $\bar{r} \in L_0^2(\Omega)$, et par conséquent pour $\boldsymbol{u} \in H_0(\text{div}, \Omega)$ satisfaisant l'égalité, on obtient :

$$\int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})(x)\, r\, dx = \bar{r} \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot n\, d\tau = 0. \tag{2.13}$$

Proposition 2.2.1. *Le problème* (2.2) *est équivalent au problème* (2.10) *au sens des distributions.*

2.3 Existence et unicité de la solution

Pour analyser le problème (2.10), on introduit d'abord le sous-espace V de $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$:

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega);\ \forall q \in \mathrm{L}^2_0(\Omega),\ b(\boldsymbol{v}, q) = 0\}. \tag{2.14}$$

En utilisant la formule de Stokes, il est clair que V coïncide avec l'espace des fonctions à divergence nulle dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$.
On introduit aussi le noyau

$$\mathcal{W} = \{(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\omega}) \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \times V;\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega),\ \mathrm{c}(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\omega}; \boldsymbol{\varphi}) = 0\}. \tag{2.15}$$

formé de couples $(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\omega})$ de $H_0(\mathbf{curl},\Omega) \times V$ tels que $\boldsymbol{\vartheta} = \mathbf{curl}\ \boldsymbol{u}$ au sens des distributions.

Pour démontrer que le problème (2.10) est bien posé, on a besoin de quelques propriétés des formes $a(.,.;.)$, $b(.,.)$, $c(.,.;.)$ et $K(.,.;.)$.

Proposition 2.3.1. *Les formes bilinéaires* $a(.,.;.)$*,* $b(.,.)$ *et* $c(.,.;.)$ *sont continues sur* $\big(H(\mathbf{curl}, \Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega)\big) \times H(\mathrm{div}, \Omega)$*,* $H(\mathrm{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ *et* $\big(H(\mathbf{curl}, \Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega)\big) \times H(\mathbf{curl}, \Omega)$ *respectivement.*

Démonstration.
• Pour tout $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \in \big(H(\mathbf{curl}, \Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega)\big) \times H(\mathrm{div}, \Omega)$:

$$\begin{aligned} |a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| &= |\nu \int_\Omega \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x) dx \\ &\leq |\nu|\ |\int_\Omega \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{v}(x) dx| \end{aligned}$$

comme ν est positive, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$|a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| \leq c\ \nu \|\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}$$

d'où

$$|a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| \leq c\ \nu \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{(\mathrm{div},\Omega)} \tag{2.16}$$

• Soient $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\|b(\boldsymbol{v}, q)\| \leq |\int_\Omega \mathrm{div}\ \boldsymbol{v}\,(x) \cdot q(x)\ dx|$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que l'opérateur divergence étant continu, on trouve :

$$\|b(\boldsymbol{v}, q)\| \leq c\ \|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.17}$$

• $\forall\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi}) \in \big(H(\mathbf{curl}, \Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega)\big) \times H(\mathbf{curl}, \Omega)$

$$|c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi})| = |\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(x)\ dx - \int_\Omega \boldsymbol{u}(x) \cdot (\mathbf{curl}\boldsymbol{\varphi})(x)\ dx|$$

en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi})| \leq \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\mathbf{curl}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\Omega)^d}$$

d'après la définition des normes de $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ et $H(\mathrm{div}, \Omega)$ on a

$$\begin{aligned} |c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\varphi})| &\leq \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \\ &\leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\big) \end{aligned}$$

■

Lemme 2.3.1. *Il existe une constante $\alpha > 0$ tel que :*

$$(i) \quad \forall \boldsymbol{v} \in V \backslash \{0\}, \quad \sup_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}} a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) > 0 \tag{2.18}$$

$$(ii) \quad \forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in V} \frac{a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \alpha\ (\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d}) \tag{2.19}$$

$$(iii) \quad \forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}) \geq \frac{\nu}{2} \|\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathrm{H}(\mathbf{curl},\Omega)} + \frac{\nu}{2\mathrm{c}_0^2} \|\boldsymbol{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^\mathrm{d}}. \tag{2.20}$$

$$(iv) \quad \forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{u}) \geq \frac{\nu}{2} \|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \frac{\nu}{2c_0^2} \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.21}$$

Démonstration. Voir [8, Lem 2.3]. ■

Lemme 2.3.2. *Il existe une constante $\beta > 0$ tel que la forme $b(.,.)$ satisfait la condition :*

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div},\Omega)} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Démonstration. Voir [8, Cor 2.4]. ■

Remarque 1. *La condition* (2.22) *est souvent appelée "la condition inf-sup", quelques auteurs l'appelent aussi "**la condition de Babuška-Brezzi**", le courant actuel semble utiliser l'expression "**LBB condition**" qui veut dire : la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi . Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème* (2.2) *soit bien posé est que la condition inf-sup soit satisfaite et que l'opérateur linéaire continu A de V dans V' associé à la forme bilinéaire a défini par :*

$$\langle A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_{V',V} = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),$$

est un isomorphisme.

On observe que pour toute solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ du problème (2.10), le couple $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ est solution du problème réduit (2.23) définie par :

$$\begin{cases} Trouver\ (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\ dans\ \mathcal{W}\ telque : \\ \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) + K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \end{cases} \tag{2.23}$$

Pour assurer la continuité de la forme trilinéaire $K(.,.;.)$, nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire pour le cas tridimensionnel.

Hypothèse 2.3.1.
En $d = 3$, les espaces $H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap H(\mathbf{curl}, \Omega)$ et $H(\mathrm{div}, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ s'injectent compactement dans l'espace $H^{3/4}(\Omega)^3$.

Lemme 2.3.3. *Si l'hypothèse* 2.3.1 *est satisfaite :*
(i) Il existe $c_*(\Omega) > 0$ tel qu'on a la propriété de continuité suivante :
$\forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d$,

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) \leq c_* \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \big) \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.24}$$

(ii) Pour tout $(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{W}$, les deux opérateurs : $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \mapsto \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ et $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \mapsto \boldsymbol{\vartheta} \times \boldsymbol{u}$ sont compactes de $\mathcal{W}$ dans $L^2(\Omega)^d$.

Démonstration.
Soient $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}$, et $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d$:

$$|K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| = |\int_\Omega (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})(x) \cdot \boldsymbol{v}(x)\, dx|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

en appliquant l'inégalité de Hölder

$$|K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^p(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \|\boldsymbol{u}\|_{L^q(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

pour tout $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}$, tel que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{curl}\, \boldsymbol{u}$ on a

$$\mathcal{W} \subset \big(H(\mathrm{div}, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)\big) \times \big(H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap \tilde{H}(\mathbf{curl}, \Omega)\big).$$

d'après l'hypothèse 2.3.1 et le théorème d'injection de Sobolev, $\mathcal{W}$ s'injecte compactement dans $L^4(\Omega)^3 \times L^4(\Omega)^3$, i.e. en prenant $p = q = 4$ dans l'inégalité de Hölder on trouve

$$\begin{aligned} |K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v})| &\leq \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^3}. \\ &\leq c_* \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\big) \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^3}. \end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.2. *En dimension 2, pour toute donnée $\boldsymbol{f}$ dans l'espace dual de $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$, le problème (2.10) admet une solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}$. De plus, cette solution satisfait :*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^2} \leq c\, \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} \tag{2.25}$$

où, la constante c ne dépend que de Ω.

La preuve de la proposition 2.3.2 repose sur le Lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Si l'hypothèse 2.3.1 est vérifiée,la forme $K(.,.;.)$ est antisymétrique, c-à-d :*

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \quad K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{u}) = 0, \tag{2.26}$$

et pour la dimension $d = 2$, on a :

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}, \quad K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega}) = 0, \tag{2.27}$$

Remarque 2. *La raison pour laquelle la preuve de la proposition 2.3.2 ne peut être adapté à la dimension 3 est que l'égalité (2.27) n'est pas satisfaite dans ce cas. Une condition supplémentaire sur la donnée $\boldsymbol{f}$ et la viscosité ν est suffisante pour pouvoir démontrer l'existence d'une solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$.*

Lemme 2.3.5. *En $d = 3$, si l'hypothèse* 2.3.1 *est vérifiant, alors : il existe une constante $c_\sharp$ ne dépend que de Ω tel que :*
pour tout $\boldsymbol{f}$ dans l'espace dual $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$ vérifiant,

$$c_\sharp \nu^{-2} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} < 1, \tag{2.28}$$

alors, toute solution du problème (2.23) *satisfait :*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^3} \leq c\nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} \tag{2.29}$$

Démonstration. On note

$$m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) := \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) := \left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

On prend $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ dans (2.27). En utilisant (2.21) et (2.26), on obtient

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}}\, m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2 \leq a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}\rangle \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^3},$$

d'où

$$m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \leq 2\, max\{1, c_0^2\} \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'}. \tag{2.30}$$

On prend maintenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega}$ dans (2.23). En utilisant (2.20) et (2.26), on obtient

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}}\, M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2 \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} \|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^3} - K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega}).$$

De (2.24), on obtient

$$|K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega})| \leq c_* \|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\big) \|\mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)^d}$$

En utilisant la relation $(a + b) \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ on trouve

$$\begin{aligned} |K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega})| &\leq \sqrt{2} c_* \big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)}\big) \big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big) \\ &\leq \sqrt{2} c_* m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2. \end{aligned}$$

grâce à (2.30), on a

$$|K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \mathbf{curl}\, \boldsymbol{\omega})| \leq \sqrt{2} c_* 2 max\{1, c_0^2\} \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2$$

par conséquent

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}} M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2 \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) + 2\sqrt{2} c_* max\{1, c_0^2\} \nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})^2,$$

i.e.

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}} M(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \big(1 - 4\sqrt{2} c_* (max\{1, c_0^2\})^2 \nu^{-2} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'}\big) \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'}.$$

et l'hypothèse (2.28) donne le résultat désiré. ■

Proposition 2.3.3. *En $d = 3$, si l'hypothèse* 2.3.1 *est satisfaite, il existe une constante* $c_\flat(\Omega)$*, tel que, pour toute donnée* $\boldsymbol{f}$ *dans* $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$ *satisfaisant,*

$$c_\flat \nu^{-2} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} < 1, \tag{2.31}$$

le problème (2.23) *admet une solution* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{W}$*. De plus, cette solution vérifie* (2.29)*.*

Démonstration. On pose $(\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{u}^0) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$, pour tout n ≥ 1 , et soit le problème itératif :

$$\begin{cases} Trouver\ (\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n)\ dans\ \mathcal{W}\ telque : \\ \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad a(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n; \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle - K(\boldsymbol{\omega}^{n-1}, \boldsymbol{u}^{n-1}; \boldsymbol{v}). \end{cases} \tag{2.32}$$

grâce à (2.18), (2.19) et (2.24) et au théorème 1.2.1, ce problème admet une solution unique.
Soit

$$\mu = \frac{\nu}{4c_* \sqrt{2}\ max\{1, c_0^2\}},$$

où c_* est la même constante dans (2.24).
Démontrons par récurrence sur n que la suite $(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n)$ est bornée par μ en norme de $\mathcal{W}$. i.e.

$$\left(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mu. \tag{2.33}$$

pour $n = 0$ l'estimation précédente est évidente grace au choix de $(\boldsymbol{\omega}^0, \boldsymbol{u}^0)$. Prenons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n$ dans le problème (2.32). De (2.20) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n) &= \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n \rangle - K(\boldsymbol{\omega}^{n-1}, \boldsymbol{u}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n) \\ &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} \left(\|\boldsymbol{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n\|_{L^2(\Omega)^3}\right) + c_* \|\boldsymbol{\omega}^{n-1}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \big(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^3} \\ &+ \|\boldsymbol{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big) \left(\|\boldsymbol{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n\|_{L^2(\Omega)^3}\right) \\ &\leq \left(\|\boldsymbol{u}^n\|_{L^2(\Omega)^3} + \|\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n\|_{L^2(\Omega)^3}\right) \Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} + c_* \big(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} \\ &+ \|\boldsymbol{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\big) \left(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^3}\right) \Big) \end{aligned}$$

En utilisant la relation $(a + b) \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ on trouve

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n) \leq \sqrt{2} \left(\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\omega}^n\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} \\ + c_* 2 \left(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\right) \Big) \end{aligned}$$

d'après (2.33) on a

$$a(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u}^n + \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}^n) \leq \sqrt{2} \left(\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\omega}^n\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} + c_* 2\mu^2 \Big)$$

l'estimation (2.20) nous donne

$$\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \frac{\nu}{2c_0^2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3} \leq \sqrt{2}\big(\|\boldsymbol{u}^n\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \|\boldsymbol{\omega}^n\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)}\big)^{\frac{1}{2}}\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} + c_* 2\mu^2\Big)$$

ce qui implique

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}}\big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\Big(\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} + c_* 2\mu^2\Big)$$

i.e.

$$\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}}\big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} + c_*\sqrt{2}\mu^2.$$

d'où, grâce au chois de μ, on a

$$\frac{2c_*\sqrt{2}\, max\{1, c_0^2\}}{\nu}\,\mu^2 = \frac{1}{2}\,\mu.$$

On prend $c_\flat \geq 16c_*\sqrt{2}(max\{1, c_0^2\})^2$, d'après (2.31) on a

$$\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} < \frac{1}{c_\flat}\nu^{-2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{2\, max\{1, c_0^2\}}{\nu}\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} &\leq \frac{2\, max\{1, c_0^2\}}{c_\flat}\,\nu \\
&\leq \frac{\nu}{8c_*\sqrt{2}\, max\{1, c_0^2\}} = \frac{1}{2}\mu.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\forall \boldsymbol{v} \in V,\quad & a(\boldsymbol{\omega}^n - \boldsymbol{\omega}^{n-1}, \boldsymbol{u}^n - n - 1; \boldsymbol{v}) \\
&= K(\boldsymbol{\omega}^{n-2}, \boldsymbol{u}^{n-2}; \boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{\omega}^{n-1}, \boldsymbol{u}^{n-1}; \boldsymbol{v}) \\
&= -K(\boldsymbol{\omega}^{n-1} - \boldsymbol{\omega}^{n-2}, \boldsymbol{u}^{n-2}; \boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{\omega}^{n-1}, \boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}^{n-2}; \boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

En utilisant encore une fois (2.20) et (2.24) avec (2.33), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\nu}{2\, max\{1, c_0^2\}}\,\big(\|\boldsymbol{\omega}^n - \boldsymbol{\omega}^{n-1}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leq c_*\mu\big(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1} - \boldsymbol{\omega}^{n-2}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}^{n-2}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

d'où, grâce au chois de μ,

$$\begin{aligned}
&\big(\|\boldsymbol{\omega}^n - \boldsymbol{\omega}^{n-1}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\|\boldsymbol{\omega}^{n-1} - \boldsymbol{\omega}^{n-2}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}^{n-2}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{u}^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{W}$, par conséquent elle converge vers un couple $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ puisque $\mathcal{W}$ est complet.

par suite, par passage à la limite dans (2.30), on constate que $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ est une solution du problème (2.23). $\blacksquare$

Théorème 2.3.6. *En $d = 2$, pour tout $\boldsymbol{f}$ dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$, le problème* (2.7) *admet une solution* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ *dans* $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \times H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$.
En $d = 3$, si l'hypothèse 2.3.1 *est satisfaite, pour tout $\boldsymbol{f}$ dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$ tel que* (2.29) *est vérifié, le problème* (2.10) *admet une solution* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ *dans* $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \times H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$. *De plus, cette solution vérifie :*

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} + \nu^{-1}\|p\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq c\nu^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'}\big(1 + \nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'}\big), \tag{2.34}$$

avec, c est une constante dépend que de Ω.

Démonstration. Pour tout $\boldsymbol{f}$ dans $H_0(div, \Omega)'$, l'existence d'une solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ problème (2.23) a été démontré dans la proposition 2.3.2 pour la dimension 2 et 2.3.3 pour la dimension 3 et satisfait (2.25) et (2.33) puisque $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}$ et $\|\cdot\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}$ coïncident dans V.
Concernant la pression p :

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega), \quad b(\boldsymbol{v}, p) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle - a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}).$$

l'existence d'une solution p pour cette équation dans $L_0^2(\Omega)$ est une conséquence de la condition (2.22), voir aussi $([20], Chap.I, Lem4.1)$. De plus, elle satisfait :

$$\beta\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(div,\Omega)'} + \nu\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + c_*\big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}\big)^2$$

■

Comme d'habitude pour les équation de Navier-Stokes, l'unicité de la solution ne peut être prouvé que pour une donnée $\boldsymbol{f}$ assez petite ou une viscosité assez grande.

Théorème 2.3.7. *Si l'hypothèse* 2.3.1 *est vérifiée, alors : il existe une constante $c_\sharp$ ne dépend que de Ω tel que :*
pour tout $\boldsymbol{f}$ dans l'espace dual $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$ vérifie,

$$c_\sharp\nu^{-2}\|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} < 1, \tag{2.35}$$

le problème (2.10) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ *dans* $H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \times H_0(\mathrm{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$

Démonstration. Soient $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}_1; p_1)$ et $(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{u}_2; p_2)$ deux solutions pour le problème (2.10). En $d = 2$, d'après (2.20), (2.26) et (2.27), $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}_1)$ et $(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{u}_2)$ vérifient (2.25).

De même,en d $=3$, d'après l'hypothèse 2.3.1 et le Lemme 2.3.4, en prenant $c_\natural > c_\sharp$, $(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}_1)$ et $(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{u}_2)$ vérifient (2.29).
D'autre part, soit $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ avec $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$ appartient à $\mathcal{W}$ et vérifie :
$\forall \boldsymbol{v} \in V, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = K(\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}_1; \boldsymbol{v})$

$$= -K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{v}) - K(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}).$$

On utilise (2.20), et on prend $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}$ dans la ligne précédente. D'après l'inégalité triangulaire on a

$$\frac{\nu}{2\,max\{1, c_0^2\}} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big)$$
$$\leq |K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}| + |K(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{u} + \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}|).$$

Le lemme 2.3.4 nous donne :

$$|K(\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{u})| = 0.$$

En combinant entre le Lemme 2.3.3 et (2.25) ou (2.29), on obtient

$$\frac{\nu}{2\,max\{1, c_0^2\}} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big)$$
$$\leq c\nu^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{H_0(\mathrm{div},\Omega)'} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H(\mathbf{curl},\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big).$$

d'où, si la condition (2.35) est vérifiée avec $c_\natural > 2c\,max\{1, c_0^2\}$, alors, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u} = 0$.
finalement, on a

$$\forall \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega), \qquad \mathrm{b}(\boldsymbol{v}, p_1 - p_2) = 0,$$

donc, $p_1 - p_2 = 0$ grâce à la condition (2.22). Ce qui assure l'unicité de la solution. ∎

On termine cette section par donner un résultat de régularité de la solution du problème (2.10).

Proposition 2.3.4. *Supposons Ω est convexe, la forme : $\boldsymbol{f} \longmapsto (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$, avec $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$ est la solution du problème (2.10), est continue de $H^{\max\{0,s-1\}}(\Omega)^d$ dans $H^s(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}} \times H^s(\Omega)^d \times H^s(\Omega)$,$s \leq 1$.*

Une propriété supplémentaire en dimension 2 est la suivante :

Proposition 2.3.5. *la forme : $\boldsymbol{f} \longmapsto (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$, avec $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p)$ est la solution du problème (2.10), est continue de $H^{\max\{0,s\}}(\Omega)^d$ dans $H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)^2 \times H^{s+1}(\Omega)$,$s \leq 1$, pour*
(i) tout $s \leq \frac{1}{2}$ dans le cas général,
(ii) tout $s \leq 1$ avec Ω convexe,
(iii) tout $s \leq \frac{\pi}{\alpha}$ avec Ω un polygone dont α représente le plus grand angle.

Démonstration. Voir [22, Chap.4] ■

Chapitre 3

Discrétisation spectrale du problème de Navier-Stokes

Le but de ce chapitre est d'effectuer l'analyse numérique de la méthode **spectrale** pour le problème (2.1). On écrit les principaux éléments intervenant dans la discrétisation spectrale et le problème discret, ensuite on prouve l'existence de la solution de ce dernier, on termine par l'estimation d'erreur a priori.

Dans ce qui suit, on suppose que le domaine Ω est le carré ou le cube $]-1,1[^d$, $d=2$ ou 3. Pour décrire les espaces discrets, on introduit pour tout triplet (ℓ, m, n) des entiers non négatives,
• En $d=2$, l'espace $\mathbb{P}_{\ell,m}(\Omega)$ des restrictions à Ω des polynômes de degré $\leq \ell$ par rapport à x et $\leq m$ par rapport à y,
• En $d=3$, l'espace $\mathbb{P}_{\ell,m,n}(\Omega)$ des restrictions à Ω des polynômes de degré $\leq \ell$ par rapport à x, $\leq m$ par rapport à y et $\leq n$ par rapport à z.
Si ℓ et m sont égales à n, l'espace sera tout simplement noté $\mathbb{P}_n(\Omega)$.

3.1 Position du problème

Soit N un entier ≥ 2. Les espaces discrets $\mathbb{D}_N$ et $\mathbb{C}_N$ associés à $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ et $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ respectivement sont définis comme suit :

$$\mathbb{D}_N = H_0(\mathrm{div}, \Omega) \cap \begin{cases} \mathbb{P}_{N,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N}(\Omega) & \text{si } d=2, \\ \mathbb{P}_{N,N-1,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N-1,N}(\Omega) & \text{si } d=3. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\mathbb{C}_N = \begin{cases} H_0^1(\Omega) \cap \mathbb{P}_N(\Omega) & \text{si } d = 2, \\ H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap \mathbb{P}_{N\text{-}1,N,N}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N,N\text{-}1,N}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N,N,N\text{-}1}(\Omega) & \text{si } d = 3. \end{cases} \tag{3.2}$$

Et l'espace discret associé à $L_0^2(\Omega)$ est :

$$\mathbb{M}_N = L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}_{N-1}(\Omega). \tag{3.3}$$

La formule de quadrature utilisée est la formule de Gauss-Lobatto (1.14), le fait que cette formule possède des nœuds aux extrémités de l'intervalle $]-1, 1[$ permet de traiter facilement les conditions aux limites. Le paramètre de discrétisation est un entier $N \geq 2$ et c désigne une constante positive indépendante de N.

On s'intéresse à l'étude de la discrétisation spectrale de la solution du problème variationnel (2.7). On définit sur les fonctions continues $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ le produit discret :

$$(u, v)_N = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u(\xi_i, \xi_j) v(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j & \text{si } d = 2, \\ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u(\xi_i, \xi_j, \xi_k) v(\xi_i, \xi_j, \xi_k) \rho_i \rho_j \rho_k & \text{si } d = 3. \end{cases} \tag{3.4}$$

La fonction $\boldsymbol{f}$ est supposée continue sur $\overline{\Omega}$. On propose le problème discret suivant, construit de la formulation (2.7) en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N) \textit{ dans } \mathbb{C}_N \times \mathbb{D}_N \times \mathbb{M}_N \textit{ tels que } : \\ a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) + K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N, & \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N \\ b_N(\boldsymbol{u}_N, q_N) = 0, & \forall q_N \in \mathbb{M}_N \\ c_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N) = 0, & \forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{C}_N \end{cases} \tag{3.5}$$

où : les formes bilinéaires $a_N(.,;.)$, $b_N(.,.)$ et $c_N(.,;.)$ sont définies par :

$$a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = \nu\ (\mathbf{curl}\ \boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{v}_N)_N, \qquad b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = -(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_N, q_N)_N,$$

$$c_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{\varphi}_N) = (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\varphi}_N)_N - (\boldsymbol{u}_N, \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\varphi}_N)_N. \tag{3.6}$$

et la forme trilinéaire $K_N(.,.;.)$ est donnée par :

$$K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = (\boldsymbol{\omega}_N \times \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.7}$$

Les formes bilinéaires $a_N(.,.;.)$, $b_N(.,.)$ et $c_N(.,.;.)$ sont continues car elles sont définies dans des espaces de dimensions finies.

3.2 Existence de la solution

Pour analyser le problème (3.5), on introduit d'abord le sous espace vectoriel contenu dans V $\big($voir [8], Cor 3.2$\big)$:

$$V_N = \{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N;\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N,\ b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = 0\}. \tag{3.8}$$

et l'espace de dimension finie :

$$\mathcal{W}_N = \{(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{v}_N) \in \mathbb{C}_N \times V_N;\ \forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{C}_N,\ c_N(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{v}_N; \boldsymbol{\varphi}_N) = \mathit{0}\}. \tag{3.9}$$

On observe que pour toute solution $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N)$ du problème (3.5), le couple $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ est solution du problème réduit :

$$\begin{cases} \quad Trouver\ (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\ dans\ \mathcal{W}_N\ telque : \\ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N, \quad a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) + K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = (\boldsymbol{f}_N, \boldsymbol{v}_N)_N. \end{cases} \tag{3.10}$$

Proposition 3.2.1. *Pour toute donnée* $\boldsymbol{f}$ *continue sur* $\overline{\Omega}$*, le problème* (3.10) *admet une solution* $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ *dans* $\mathcal{W}_N$*. Cette solution satisfait :*

$$\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \leq c\nu^{-1}\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{3.11}$$

Démonstration.
On introduit la forme $\boldsymbol{\Phi}_N$ de $\mathcal{W}_N$ dans son dual :

$$\forall(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \in \mathcal{W}_N, \forall(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N) \in \mathcal{W}_N,$$

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\rangle = a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{w}_N) + K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{w}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_N)_N.$$

La forme linéaire $\boldsymbol{\Phi}_N$ est continue puisque elle est définie sur un espace de dimension finie.

On muni $\mathcal{W}_N$ de la norme $\Big(\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{1/2}$.

En utilisant les mêmes arguments du Lemme 2.3.4 et (2.24), on trouve

$$K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{u}_N) = 0,$$

d'où

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\rangle = \nu(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)_N - (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N.$$

D'après la définition de $\mathcal{W}_N$, on a :

$$\forall(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \in \mathcal{W}_N : c_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{\omega}_N) = 0.$$

i.e.

$$(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\omega}_N)_N - (\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)_N = 0.$$

Comme $\boldsymbol{\omega}_N$ appartient à $\mathbb{P}_{N\text{-}1,N,N}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N,N\text{-}1,N}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N,N,N\text{-}1}(\Omega)$ alors,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_N \cdot \boldsymbol{\omega}_N &= \boldsymbol{\omega}_N^1(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\omega}_N^1(x,y,z) + \boldsymbol{\omega}_N^2(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\omega}_N^2(x,y,z) + \boldsymbol{\omega}_N^3(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\omega}_N^3(x,y,z)\\ &\in \mathbb{P}_{2N\text{-}2,2N,2N}(\Omega)\times\mathbb{P}_{2N,2N\text{-}2,2N}(\Omega)\times\mathbb{P}_{2N,2N,2N\text{-}2}(\Omega)\end{aligned}$$

avec $\quad \boldsymbol{\omega}_N =: (\boldsymbol{\omega}_N^1(x,y,z), \boldsymbol{\omega}_N^2(x,y,z), \boldsymbol{\omega}_N^3(x,y,z))^t$

i.e. $\boldsymbol{\omega}_N \cdot \boldsymbol{\omega}_N \in \mathbb{P}_{2N,2N,2N}(\Omega)$, d'où, en utilisant (1.22), on trouve

$$(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)_N = (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\omega}_N)_N \geq \|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}},$$

l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (1.22) impliquent que

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N &\leq (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \mathcal{I}_N\boldsymbol{f})_N(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N\\ &\leq 3^{\frac{d}{2}}\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\rangle &= \nu(\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)_N - (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N\\ &\geq \nu\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} - (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}_N)_N\\ &\geq \nu\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} - 3^{\frac{d}{2}}\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $\boldsymbol{u}_N$ dans V_N, il existe $\boldsymbol{\Psi}_N$ dans $\mathbb{C}_N$, tel que : $\boldsymbol{u}_N = \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\Psi}_N$ $\big($voir [8], Lem 3.4 & 3.5$\big)$ qui satisfait

$$\|\boldsymbol{\Psi}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \leq c\,\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{3.12}$$

Pour tout $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ dans $\mathcal{W}_N$, on a

$$c_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{\Psi}_N) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\Psi}_N \in \mathbb{C}_N$$

i.e.

$$(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N = (\boldsymbol{u}_N, \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\Psi}_N)_N = (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\Psi}_N)_N$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, (1.22) puis (3.12), on trouve

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N &= (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\Psi}_N)_N\\ &\leq 3^d\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}\|\boldsymbol{\Psi}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}\\ &\leq 3^d c\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}\\ &\leq 3^d c\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d'où

$$(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N^{\frac{1}{2}} \leq c\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}. \tag{3.13}$$

par conséquent

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\rangle \geq \nu\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} - c\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}}.$$

Pour que la quantité $\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\rangle$ soit positive il suffit que

$$\nu\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \geq c\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d} \tag{3.14}$$

Maintenant, (3.13) et (1.22) nous donnent

$$c\;\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \geq \|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}$$

ce qui implique

$$\max\{1, c\}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \geq \|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}$$

d'où

$$2\max\{1, c\}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \geq \|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^d}$$

En utilisant la relation $(a+b) \geq \sqrt{2}\;(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ on trouve

$$\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}\max\{1, c\}}\left(\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donc pour que (3.14) soit vérifiée, il suffit que

$$\left(\|\boldsymbol{\omega}_N\|^2_{L^2(\Omega)^{\frac{d(d-1)}{2}}} + \|\boldsymbol{u}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}c\max\{1, c\}}{\nu}\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}$$

Alors,
$\forall\;(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \in \mathcal{W}_N \cap S_\mu$ avec S_μ est la sphère de rayon $\mu_N = \dfrac{\sqrt{2}c\max\{1, c\}}{\nu}\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}$, on a

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)\rangle \geq 0.$$

Et d'après le Lemme de Brouwer (voir annexe), il existe un couple $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \in \mathcal{W}_N$ tel que :

$$\forall(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N) \in \mathcal{W}_N, \quad \langle \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\rangle = 0$$

plus l'estimation (3.11). ■

Lemme 3.2.2. *Il existe une constante $\beta_* > 0$ indépendante de N tel que la forme $b_N(.,.)$ satisfait la condition inf-sup suivante :*

$$\forall q_N \in \mathbb{M}_N, \qquad \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N} \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}} \geq \beta_* \|q_N\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.15}$$

Démonstration. (voir [8], Lem 3.9). ■

Remarque 3. *La condition* (3.15) *est souvent appelée* ***"la condition inf-sup discrète"*** *ou bien* ***"la condition LBB discrète"****, elle exprime que le choix des sous-espaces V_N et $\mathcal{W}_N$ ne peut pas être fait indépendamment l'un de l'autre puisque il y a une relation de compatibilité entre les deux espaces et peut être vérifié seulement pour des choix tout à fait spéciale. Cette condition, lorsqu'elle est satisfaite, exprime en faite la stabilité uniforme du schéma numérique pour la variable auxiliaire, elle peut être satisfaite pour un certain domaine et pas pour un autre, sa vérification est par fois très difficile. En pratique, pour démontrer que la condition de compatibilité* (3.15) *est satisfaite, on utilise souvent ce qu'on appelle "le critère de Fortin".*

Théorème 3.2.3. *Pour toute donnée $\boldsymbol{f}$ continue sur $\overline{\Omega}$, le problème* (3.5) *admet une solution $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N)_N$ dans $\mathbb{C}_N \times \mathbb{D}_N \times \mathbb{M}_N$. De plus, la partie $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ de cette solution vérifie* (3.11).

Démonstration. L'existence de $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ a été démontrée dans le Lemme 3.2.2.
D'autre part, de (3.5) et (3.10) on a :

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{v}_N \in V_N,\ b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) &= (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) - K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N)\\ &= 0.\end{aligned}$$

L'existence d'une solution p_N dans $\mathbb{M}_N$ est alors une conséquence de la condition (3.15) et le lemme 2 (voir annexe). ■

3.3 Estimation d'erreur

L'estimation d'erreur entre la solution exacte du problème continu (2.2) et le problème variationnel discret (3.5) est basée sur le théorème des fonctions implicites discrète de **Brezzi-Rappaz-Raviart**, que l'on a rappelé dans l'annexe. L'estimation sera faite seulement en dimension 2.

Soit $\chi = H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \times V$, et soit $\mathcal{S}$ l'opérateur de Stokes défini comme suit

Pour tout $\boldsymbol{f} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$, on note $\mathcal{S}\boldsymbol{f}$ la solution $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ du problème réduit

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \textit{ dans } \mathcal{W} \textit{ telque} \\ \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle. \end{cases} \tag{3.16}$$

Le fait que $\mathcal{S}$ est bien défini vient de [8, Cor 2.4].

On introduit aussi la forme G définie de χ dans $H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$ par :

$$\forall (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \in \chi, \;\; \forall \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega), \;\; \langle G(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle = K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle. \tag{3.17}$$

Le problème réduit (2.23) est donc équivalent au problème

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \textit{ dans } \mathcal{W} \textit{ telque} \\ \qquad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) + \mathcal{S}G(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Soit maintenant $\chi_N = \mathbb{C}_N \times V_N$.

On introduit le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) + K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle, & \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N \\ b_N(\boldsymbol{u}_N, q_N) = 0, & \forall q_N \in \mathbb{M}_N \\ c_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\varphi}_N) = 0, & \forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{C}_N \end{cases} \tag{3.19}$$

On note que la seule différence entre le problème (3.19) et le problème (3.5) vient du remplacement de l'intégration exacte du second membre par une intégration numérique, afin de pouvoir construire l'opérateur $\mathcal{S}_N$ qui est l'analogue discret de l'opérateur $\mathcal{S}$.

Pour tout $\boldsymbol{f} \in H_0(\mathrm{div}, \Omega)'$, on note $\mathcal{S}_N\boldsymbol{f}$ la solution $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ du problème

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \textit{ dans } \mathcal{W}_N \textit{ telque} \\ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N, \;\; a_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle. \end{cases} \tag{3.20}$$

On rappelle de [3, Cor 3.8, Thm 4.6 & Cor 4.7] les estimations suivantes :

La première est l'estimation de stabilité sur l'opérateur $\mathcal{S}_N$,

$$\|\mathcal{S}_N \boldsymbol{f}\|_\chi \leq c \sup_{\boldsymbol{v}_N \in V_N} \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}}, \tag{3.21}$$

La deuxième estimation est déduite de l'estimation de l'erreur : pour tout $\boldsymbol{f}$, tel que $\mathcal{S}\boldsymbol{f}$ appartient à $H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)^2$, s ≥ 1, on a :

$$\|(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N)\boldsymbol{f}\|_\chi \leq cN^{-s}\|\mathcal{S}\boldsymbol{f}\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}. \tag{3.22}$$

A présent, on définit l'opérateur G_N de χ_N dans l'espace dual de $\mathbb{D}_N$ par la relation :

$$\langle G_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle = K(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N. \tag{3.23}$$

Enfin, le problème (3.10) devient équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) \textit{ dans } \chi_N \textit{ telque} \\ \quad (\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) + \mathcal{S}_N G_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Maintenant, on introduit $(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)$ dans χ_N une approximation de $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$. Pour des raisons techniques on choisit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N = \Pi_N^{1,0}\boldsymbol{\omega}$ et $\tilde{\boldsymbol{u}}_N$ a été construit dans [8, §4], et on a

$$\|(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_\chi \leq cN^{-s}\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)} \tag{3.25}$$

Et on considère les trois quantités suivantes :

$$\gamma_N = \|(\mathrm{Id} + \mathcal{S}_N DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\chi)}$$
$$\varepsilon_N = \|(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) + \mathcal{S}_N G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_\chi$$

et enfin

$$C_N(\alpha) = \sup_{(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\in\chi_N, \|(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)-(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_\chi\leq\alpha} \big(\|(\mathcal{S}_N DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - \mathcal{S}_N DG_N(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_{\mathcal{L}(\chi)}\big)$$

On s'intéresse donc à majorer les trois quantités γ_N, ε_N et $C_N(\alpha)$. Un résultat intermédiaire consiste à estimer la différence

$$K(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) - K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N).$$

Pour cela on commence par un résultat préliminaire qui sera utile ultérieurement :

Lemme 3.3.1. *En $d = 2$, on a la propriété suivante*
$\forall\ \boldsymbol{\omega}_N \in \mathbb{C}_N,\ \forall\ \boldsymbol{u}_N \in \mathbb{D}_N,\ \forall\ \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N,$

$$|K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N)| \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{H(\mathbf{curl},\Omega)}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}. \tag{3.26}$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{\omega}_N \in \mathbb{C}_N$ et $\boldsymbol{u}_N := (\boldsymbol{u}_N^x, \boldsymbol{u}_N^y)^t \in \mathbb{D}_N$, $\boldsymbol{v}_N := (\boldsymbol{v}_N^x, \boldsymbol{v}_N^y)^t \in \mathbb{D}_N$

$$K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = ((\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y), \boldsymbol{v}_N)_N - ((\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^x), \boldsymbol{v}_N)_N$$

puisque $\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y \in \mathbb{P}_{2N-1,2N}$ et pour pouvoir appliquer (1.22) on écrit $(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y) = (\mathcal{I}_N(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y)$ par définition de $\mathcal{I}_N$. D'où

$$K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) = (\mathcal{I}_N(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y), \boldsymbol{v}_N)_N - (\mathcal{I}_N(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^x), \boldsymbol{v}_N)_N.$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.22) à la fois on trouve

$$|K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N)| \leq c\|\mathcal{I}_N(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N)\|_{L^2(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

d'après (1.23) et comme les produits $(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^x)|_\Omega$ et $(\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N^y)|_\Omega$ appartiennent à $\mathbb{P}_{2N}(\Omega)$ on a le résultat suivant

$$|K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N)| \leq c\|\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

en appliquant l'inégalité de Hölder (Théorème 2 dans l'annexe) on trouve

$$|K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N)| \leq c\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{L^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

d'où, en utilisant l'inégalité inverse (1.15) on obtient l'estimation (3.26). ∎

Pour pouvoir appliquer le Théorème de ***BRR*** (théorème 1 de l'annexe) on a besoin de faire les deux hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.3.1. *L'opérateur* $\mathrm{Id} + \mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})$ *est un isomorphisme de* χ *où* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ *est une solution du problème* (2.10).

Hypothèse 3.3.2. *La solution* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; p)$ *introduite dans l'hypothèse précédente appartient à* $H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)^2 \times H^s(\Omega)$, *$s > 0$.*

Avant d'introduire le lemme suivant et pour des raisons techniques qu'on va voir dans la démonstration du lemme, on utilise une "super-intégration". C'est-à-dire, l'exactitude de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto sera faite dans $\mathbb{P}_{2m(N)-1}$ avec
$m(N) = (1+\mu)N$, $0 < \mu \leq 1$.

Lemme 3.3.2. *En $d = 2$, Si l'hypothèse* 3.3.1 *est vérifiée, il existe un entier N_0 tel que $\forall$ $N \geq N_0$, l'opérateur* $\mathrm{Id} + \mathcal{S}_N DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)$ *est un isomorphisme de χ. De plus, la norme de son inverse γ_N est bornée par une constante indépendante de N.*

Démonstration. La démonstration repose sur le Lemme 4 dans l'annexe.
Pour cela, on considère la décomposition élémentaire suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Id} + \mathcal{S}_N DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) &= \mathrm{Id} + \mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - \big(\mathcal{S} - \mathcal{S}_N\big)DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - \mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) \\ &\quad - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big) - \mathcal{S}_N\big(DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big).\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Id}+\mathcal{S}_N DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_{\mathcal{L}(\chi)} \leq\ & \|\mathrm{Id}+\mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}(\chi)}\\ &+\|\big(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N\big)DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}(\chi)}\\ &+\|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})-DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{L}(\chi)}\\ &+\|\mathcal{S}_N\big(DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)-DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{L}(\chi)}\end{aligned}$$

donc, on va traiter chacun de ces quatre termes séparément.

1. D'après l'hypothèse : $\mathrm{Id}+\mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})$ est un isomorphisme de χ. On note γ la norme de son inverse.
2. On réfère à [22, Chap.4] pour prouver que $\mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{w})$ appartient à $H^2(\Omega)\times H^1(\Omega)^2$, d'où, d'après l'estimation (3.22) on a
$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\|(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N)DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}}=0. \tag{3.27}$$
3. En combinant d'une part l'estimation de stabilité (3.21), et d'autre part la continuité de l'application linéaire DG on conclut que le troisième terme aussi tend vers zéro. En effet, d'après la proposition 3 (voir annexe) on a : pour tout $(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{w}_N)\in\chi_N$ et $\boldsymbol{v}_N\in V_N$
$$\langle DG(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{w}_N),\boldsymbol{v}_N\rangle=K(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{v}_N)+K(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}_N)$$
de même
$$\langle DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\cdot(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{w}_N),\boldsymbol{v}_N\rangle=K(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{v}_N)+K(\boldsymbol{\vartheta}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N;\boldsymbol{v}_N)$$
d'où
$$\langle DG(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\cdot(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{w}_N),\boldsymbol{v}_N\rangle=K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{v}_N)+K(\boldsymbol{\vartheta}_N,\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N;\boldsymbol{v}_N)$$
En appliquant l'inégalité de Hölder sur K, d'une part on a
$$K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{w}_N;\boldsymbol{v}_N)\leq\|\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{L^p(\Omega)}\|\boldsymbol{w}_N\|_{L^q(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$
comme $H^1(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^p(\Omega)$ pour tout p $<\infty$ avec la norme $\leq$ c $p^{\frac{1}{2}}$ (voir [29]), donc
$$K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}_N;\boldsymbol{v}_N)\leq cp^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^q(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$
en utilisant l'inégalité inverse (1.16) on obtient
$$K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}_N;\boldsymbol{v}_N)\leq cp^{\frac{1}{2}}N^{\frac{4}{p}}\|\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

finalement, en prenant $p = \log N$ on aura

$$K(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.28)$$

D'autre part, on a

$$K(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq \|\boldsymbol{\vartheta}_N\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$

en utilisant l'inégalité inverse (1.15) on trouve

$$K(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\vartheta}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_\chi \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \big(\|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{w}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{\vartheta}_N\|_{H^1(\Omega)} \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\big) \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \Big(\|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} (\|\boldsymbol{w}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\boldsymbol{\vartheta}_N\|_{H^1(\Omega)}) \\
&\qquad + (\|\boldsymbol{\vartheta}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{w}_N\|_{L^2(\Omega)^2}) \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\Big) \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} \Big(\|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\Big) \|(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_\chi.
\end{aligned}$$

En appliquant (1.18) et (3.25), on obtient

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_\chi \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}} N^{-s} \big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)}\big) \|(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N)\|_\chi.
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} \|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{L}(\chi)} = 0.$$

4. D'après la définition de G et G_N, les produits $((\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \times \boldsymbol{w}_N) \cdot \boldsymbol{v}_N)|_\Omega$ et $((\boldsymbol{\vartheta}_N \times \tilde{\boldsymbol{u}}_N) \cdot \boldsymbol{v}_N)|_\Omega$ appartiennent à $\mathbb{P}_{2m(N)-1}(\Omega)$. Donc, le dernier terme sera nul.
En effet, soient

$$\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \in \mathbb{P}_N(\Omega) \ \text{ et } \ \tilde{\boldsymbol{u}}_N =: (\boldsymbol{u}_N^1(x,y), \boldsymbol{u}_N^2(x,y))^t \in \mathbb{P}_{N,N\text{-}1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N\text{-}1,N}(\Omega), \\
&\boldsymbol{\vartheta}_N \in \mathbb{P}_N(\Omega) \ \text{ et } \ \boldsymbol{w}_N =: (\boldsymbol{w}_N^1(x,y), \boldsymbol{w}_N^2(x,y))^t \in \mathbb{P}_{N,N\text{-}1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N\text{-}1,N}(\Omega)
\end{aligned}$$

on a

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \times \boldsymbol{w}_N = \ \big(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \boldsymbol{w}_N^2 - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \boldsymbol{w}_N^1\big) \in \mathbb{P}_{2N-1,2N} \times \mathbb{P}_{2N,2N-1}$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_N \times \tilde{\boldsymbol{u}}_N = \ \big(\boldsymbol{\vartheta}_N \tilde{\boldsymbol{u}}_N^2 - \boldsymbol{\vartheta}_N \tilde{\boldsymbol{u}}_N^1\big) \in \mathbb{P}_{2N-1,2N} \times \mathbb{P}_{2N,2N-1}$$

alors
$\forall\ \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}_{N,N-1}(\Omega) \times \mathbb{P}_{N-1,N}(\Omega)$

$$(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N \times \boldsymbol{w}_N) \cdot \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}_{2m(N)-1} \text{ et } (\boldsymbol{\vartheta}_N \times \tilde{\boldsymbol{u}}_N) \cdot \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{P}_{2m(N)-1}$$

avec $m(N) = (1+\mu)N$ tel que $\mu = \frac{1}{2}$.

Soit $\gamma = \|(\mathrm{Id}+\mathcal{S}DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}))^{-1}\|_{\mathcal{L}}$, si on prend N assez grand pour que $\Big(\|(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N)DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}}$ $+ \|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{L}}\Big)$ soit $\leq \frac{1}{4\gamma}$, d'après le Lemme 4 on trouve

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{Id} + \mathcal{S}_N DG_N(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}}\|^{-1} \\
&\quad \leq \frac{\gamma}{1-\gamma\Big(\|(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N)DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{\mathcal{L}} + \|\mathcal{S}_N\big(DG(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - DG(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{L}(\chi)}\Big)} \\
&\quad \leq 2\gamma.
\end{aligned}$$

avec $\mathrm{Id} + \mathcal{S}_N DG_N(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme. ∎

Lemme 3.3.3. *En $d = 2$, on a la propriété suivante*
$\forall\ (\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*) \in \chi_N$

$$\|\mathcal{S}_N(DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*))\|_{\mathcal{L}} \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\|(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N - \boldsymbol{\omega}_N^*, \tilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{u}_N^*)\|_{\chi}. \quad (3.29)$$

Démonstration. D'après la proposition 3 dans l'annexe on a
$\forall\ (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N),\ (\boldsymbol{\omega}_N^*, \mathbf{u}_N^*) \in \chi_N,\ \forall\ \boldsymbol{v}_N \in V_N,$

$$\begin{aligned}
&\langle (DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*)) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle \\
&\qquad = K_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N - \boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{w}_N; \boldsymbol{v}_N) + K_N(\boldsymbol{\vartheta}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{u}_N^*; \boldsymbol{v}_N)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\langle (DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*)) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\Big(\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N - \boldsymbol{\omega}_N^*\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{u}_N^*\|_{L^2(\Omega)^2}\Big)\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\vartheta})\|_{\chi}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\langle (DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*)) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\vartheta})\|_{\chi}} &\leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\Big(\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N - \boldsymbol{\omega}_N^*\|_{H^1(\Omega)} \\
&\qquad + \|\tilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{u}_N^*\|_{L^2(\Omega)^2}\Big)
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
&\sup_{(\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N) \in \chi_N} \sup_{\boldsymbol{v}_N \in V_N} \frac{\langle (DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*, \boldsymbol{u}_N^*)) \cdot (\boldsymbol{\vartheta}_N, \boldsymbol{w}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}\|(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\vartheta})\|_{\chi}} \\
&\qquad \leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\Big(\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N - \boldsymbol{\omega}_N^*\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{u}}_N - \boldsymbol{u}_N^*\|_{L^2(\Omega)^2}\Big)
\end{aligned}$$

alors, (3.21) nous donne

$$\|\mathcal{S}_N(DG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)-DG_N(\boldsymbol{\omega}_N^*,\boldsymbol{u}_N^*))\|_{\mathcal{L}}\leq c|\log N|^{\frac{1}{2}}\Big(\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N-\boldsymbol{\omega}_N^*\|_{H^1(\Omega)}+\|\tilde{\boldsymbol{u}}_N-\boldsymbol{u}_N^*\|_{L^2(\Omega)^2}\Big)$$

■

Lemme 3.3.4. *On suppose que la donnée $\boldsymbol{f}$ dans $H^\sigma(\Omega)^d$, $\sigma>1$, si l'hypothèse* 3.3.2 *est satisfaite alors on a l'estimation suivante*

$$\|(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)+\mathcal{S}_NG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_{\mathcal{X}}\leq c(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\Big(N^{-s}\|(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}+N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big).\tag{3.30}$$

Démonstration. On commence par faire la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)+\mathcal{S}_NG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)&=(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)-(\boldsymbol{\omega}_N,\boldsymbol{u}_N)+(\mathcal{S}_N-\mathcal{S})G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\\&\quad+\mathcal{S}_N(G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})-G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N))+\mathcal{S}_N(G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)-G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N))\end{aligned}$$

on utilise l'inégalité triangulaire et on majore chacun des termes

$$\begin{aligned}\|(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)+\mathcal{S}_NG_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_{\mathcal{X}}&\leq\|(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_{\mathcal{X}}+\|(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N)G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{X}}\\&\quad+\|\mathcal{S}_N(G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})-G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N))\|_{\mathcal{X}}+\|\mathcal{S}_N\big(G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)-G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{X}}.\end{aligned}$$

L'estimation du premier terme vient de l'hypothèse 3.3.2 et (3.25), d'où on a

$$\|(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N)\|_{\mathcal{X}}\leq cN^{-s}\|(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}$$

Pour le deuxième terme, en combinant l'hypothèse 3.3.2 et (3.22) en remplaçant $\mathcal{S}\boldsymbol{f}$ par $\mathcal{S}G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})=-(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})$, on obtient

$$\|(\mathcal{S}-\mathcal{S}_N)G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{\mathcal{X}}\leq cN^{-s}\|(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}.$$

En ce qui concerne le terme $\|\mathcal{S}_N(G(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u})-G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N))\|_{\mathcal{X}}$, on commence par calculer la différence :

$$\begin{aligned}&K(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}_N)-K(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\tilde{\boldsymbol{u}}_N;\boldsymbol{v}_N)\\&\qquad=K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}_N)+K(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N;\boldsymbol{v}_N)-K(\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N,\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{u}}_N;\boldsymbol{v}_N).\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que pour prouver l'estimation (3.28) et l'estimation (3.25), on trouve

$$K(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}_N) \leq c(\boldsymbol{u}) |\log N|^{\frac{1}{2}} N^{-s} \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$

et

$$K(\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq N^{-s} \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$

d'autre part, en appliquant l'inégalité de Hölder sur le deuxième terme on trouve

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2},$$

d'après l'estimation (3.25) on a

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N; \boldsymbol{v}_N) \leq c(\boldsymbol{\omega}) N^{-s} \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)^2} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$$

donc, en combinant ces résultats avec (3.21) on trouve

$$\|\mathcal{S}_N(G(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) - G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N))\|_{\mathcal{X}} \leq c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) N^{-s} (1 + N^{-s} |\log N|^{\frac{1}{2}}) \|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)^2}.$$

Concernant maintenant le dernier terme qui s'avère plus compliqué. On va appliquer l'estimation de stabilité (3.21) à $G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)$,

$$\langle G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N), \boldsymbol{v}_N \rangle = \langle G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N), \boldsymbol{v}_N \rangle - \langle G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N), \boldsymbol{v}_N \rangle.$$

Or, d'après la définition de G et G_N on a

$$\langle G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N), \boldsymbol{v}_N \rangle - \langle G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N), \boldsymbol{v}_N \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N.$$

d'où, pour étudier $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N$ on introduit un polynôme $\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}$ et d'après l'exactitude de la formule (1.14), on voit que $(\boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N \rangle = 0$. alors

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle| = |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N - (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)|$$

comme $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N = (\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N$, et en appliquant l'inégalité triangulaire on obtient

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle| \leq |(\mathcal{I}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)_N| + |(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{v}_N)|,$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle| \leq \big(\mathcal{I}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \mathcal{I}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\big)_N^{\frac{1}{2}} \big(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N\big)_N^{\frac{1}{2}} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)}$$

d'où, en utilisant l'inégalité (1.22) on trouve

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle| &\leq 3 \|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big) \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{\boldsymbol{v}_N \in V_N} \frac{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N \rangle}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)}} \leq c\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big) \tag{3.31}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}_N\big(G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{X}} &\leq c\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big) \\ &\leq c\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \Pi_{N-1} \boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)}\big)\end{aligned}$$

D'après les estimations (1.17) et (1.20), voir aussi ([12], Thms 7.1 et 14.2), on a

$$\|\mathcal{S}_N\big(G(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N) - G_N(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N, \tilde{\boldsymbol{u}}_N)\big)\|_{\mathcal{X}} \leq c N^{-\sigma} \|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}.$$

■

Avant d'énoncer le théorème principal de ce mémoire, on a besoin de démontrer le lemme suivant

Lemme 3.3.5. *Si $p \in L_0^2(\Omega)$, alors, $\Pi_{N-1} p \in \mathbb{M}_N$.*

Démonstration. Par définition de la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_{N-1}$, on a

$$\langle p - \Pi_{N-1} p, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathbb{P}_{N-1}$$

i.e.

$$\int_\Omega (p - \Pi_{N-1} p)(x) \psi(x) dx = 0,$$

en particulier pour ψ égale à une constante c différente de zéro, on obtient

$$c \int_\Omega (p - \Pi_{N-1} p)(x) dx = 0,$$

ce qui implique

$$0 = \int_\Omega p(x) dx = \int_\Omega \Pi_{N-1} p(x) dx,$$

donc $\Pi_{N-1} p \in L_0^2(\Omega)$. ■

Conclusion

En combinant ces résultats avec le Théorème 1 de l'annexe on peut énoncer le théorème suivant

Théorème 3.3.6. *Supposons que la donnée* $\boldsymbol{f}$ *dans* $H^\sigma(\Omega)^2$, $\sigma > 1$, *et pour tout* $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, p) \in H^{s+1}(\Omega) \times H^s(\Omega)^2 \times H^s(\Omega)$, $s > 1$, *solution du problème* (2.10) *vérifiant l'hypothèse* 3.3.1, *alors, il existe un entier* $N_\diamond$ *et une constante* $c_\diamond$ *tels que* $\forall\ N \geq N_\diamond$, *le problème* (3.5) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N, p_N)$ *tel que*

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq c_\diamond |\log N|^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.32}$$

De plus, cette solution vérifie l'estimation d'erreur suivante

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} + |\log N|^{-\frac{1}{2}}\ \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2} + \|p\|_{H^s(\Omega)}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big). \tag{3.33}$$

Démonstration. L'existence de la solution $(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N)$ est une conséquence immédiate du théorème de **BRR**. En effet, on a l'inégalité suivante

$$\|\boldsymbol{\omega}_N - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_N - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \alpha.$$

d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \alpha$$

D'après le choix de $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_N$ et $\tilde{\boldsymbol{u}}_N$, en utilisant l'estimation (3.25) on trouve

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq cN^{-s}\big(\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{H^s(\Omega)}\big) + \alpha$$

en choisissant α de sorte qu'elle soit $\leq |\log N|^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} &\leq \Big(c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})N^{-s}|\log N|^{\frac{1}{2}} + 1\Big)|\log N|^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq c_\diamond |\log N|^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

d'où, l'estimation (3.32).

Pour l'estimation d'erreur on note tout d'abord, d'après le même théorème l'inégalité suivante

$$\|\boldsymbol{\omega}_N - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_N - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N \mathcal{C}_N(\alpha)}\varepsilon_N.$$

On a d'après l'inégalité triangulaire

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \frac{\gamma_N}{1 - \gamma_N \mathcal{C}_N(\alpha)}\varepsilon_N$$

On rappelle que $\gamma_N \leq 2\gamma$ et $C_N(\alpha) \leq c$ d'après le choix de α, donc, les deux sont bornés indépendamment de N. Il vient alors

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \|\boldsymbol{\omega} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + c\varepsilon_N$$

En combinant entre (3.25) et (3.30), on trouve

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} \leq c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big). \tag{3.34}$$

Soient maintenant p_N, $q_N \in \mathbb{M}$ deux solutions du problème (3.5). D'après (3.15) on a

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N, \qquad \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N)}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}}, \\ &\leq \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) - b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)}{\|\boldsymbol{v}_N\|_{H(\mathrm{div},\Omega)}}.\end{aligned}$$

mais, de (3.5) on a

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N),$$

d'où $p_N = q_N$.
d'après (3.5), $\forall\ \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{D}_N$ on a

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N - a_N(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) - K_N(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N),$$

de plus, pour tout q_N dans $\mathbb{M}_N$ on a

$$\begin{aligned}b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = {} & b(\boldsymbol{v}_N, p - q_N) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N\rangle + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N + a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) \\ & + (a - a_N)(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) + K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}_N) - K_N(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N).\end{aligned}$$

d'après l'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto on a

$$\begin{aligned}b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = {} & b(\boldsymbol{v}_N, p - q_N) - \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N\rangle + (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_N)_N + a(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) \\ & + K(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{v}_N) + K(\boldsymbol{\omega}_N - \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N) + K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N; \boldsymbol{v}_N).\end{aligned}$$

en combinant entre (3.15), (3.32), (2.18) et (3.26) on obtient

$$\begin{aligned}\beta_*\|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} \leq {} & \beta\|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} + c\big(\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big) \\ & + \nu\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} + c(\boldsymbol{u})|\log N|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)} \\ & + c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})|\log N|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^3} \\ & + c(\boldsymbol{\omega})|\log N|^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N\|_{L^2(\Omega)^3},\end{aligned}$$

en utilisant (3.34) on trouve

$$\begin{aligned}\beta_*\|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta\|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} &+ c\big(+ \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{L^2(\Omega)}\big)\\ &+ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)\\ &+ |\log N|^{\frac{1}{2}}c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)\end{aligned}$$

tel que $c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f}) = 1 + c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\Big(\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + \|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)$.
en prenant $q_N = \Pi_N p$ et en appliquant (1.17) et (1.21), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_*\|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta c N^{-s}\|p\|_{H^s(\Omega)} &+ cN^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)}\\ &+ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)\\ &+ |\log N|^{\frac{1}{2}}c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big).\end{aligned}$$

l'inégalité triangulaire nous donne

$$\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \|p - q_N\|_{L^2(\Omega)} + \|p_N - q_N\|_{L^2(\Omega)}$$

alors, en utilisant les résultats précédents on trouve

$$\begin{aligned}|\log N|^{-\frac{1}{2}}\|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq cN^{-s}\|p\|_{H^s(\Omega)} &+ cN^{-s}\|p\|_{H^s(\Omega)} + cN^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)}\\ &+ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)\\ &+ c(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{f})\Big(N^{-s}\big(\|(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u})\|_{H^{s+1}(\Omega)\times H^s(\Omega)^2}\big) + N^{-\sigma}\|\boldsymbol{f}\|_{H^\sigma(\Omega)^2}\Big)\end{aligned}$$

d'où, en combinant cette dernière inégalité avec (3.34) on trouve l'estimation (3.33). ∎

Appendice

Lemme 1. **(de Brouwer)** *:*
Soit H un espace de Hilbert de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $(.,.)$ auquel on associe la norme $|.|$. Soit $\boldsymbol{\Phi}$ une application continue de H dans H qui vérifie la propriété suivante :

Il existe un réel μ strictement positif telle que $(\boldsymbol{\Phi}(f), f) \geq 0$ pour tout f dans H avec $|f| = \mu$.
Alors, il existe un élément f_0 dans H tel que $\boldsymbol{\Phi}(f_0) = 0$ et $|f_0| \leq \mu$.

Démonstration. Voir [20, Chap IV, Cor 1.1]. ■

Lemme 2. *Les deux propriétés suivante sont équivalentes :*

1. *Il existe une constante $\beta > 0$ tel que :*

$$\forall \mu \in \mathbb{M}, \qquad \underset{\boldsymbol{v}\in\mathbb{X}}{sup} \ \frac{b(\boldsymbol{v},\mu)}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{X}}\|\mu\|_{\mathbb{M}}} \geq \beta \ ;$$

2. *l'opérateur B' est un isomorphisme de $\mathbb{M}$ dans $\overset{\circ}{V}$ et*

$$\|B'\mu\|_{\mathbb{X}'} \geq \beta\|\mu\|_{\mathbb{M}} \ \ , \ \forall \mu \in \mathbb{M}$$

avec, B' est l'opérateur dual de l'opérateur continu B tel que :

$$< B'\mu, v > = < Bv, \mu > = \ b(v,\mu) \quad \forall \mu \in \mathbb{M} \ , \ \forall v \in \mathbb{X}.$$

et

$$\overset{\circ}{V} = \{ \ g \in \mathbb{X}' \ \ ; \ < g, v >= 0, \ \ \forall v \in V \ \}.$$

Démonstration. Voir [20, Chap I, Lem 4.1]. ■

Théorème 1. *(de **Brezzi-Rappaz-Raviart**)*
Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach réflexif, de norme $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$. A toute valeur d'un paramètre δ, on

associe une application F_δ de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{X}$ dans lui même et on se donne un point $\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta$ de $\mathbb{X}$ tel que $DF_\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta)$ soit un isomorphisme de $\mathbb{X}$ dans lui même. On introduit aussi les quantités :

$$\gamma_\delta = \|(DF_\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \qquad \varepsilon_\delta = \|(DF_\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta))\|_{\mathbb{X}}$$
$$C_\delta(\alpha) = \sup_{\boldsymbol{w}\in\mathbb{X}, \|\boldsymbol{w}-\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathbb{X}\leq\alpha}} \|(DF_\delta(\boldsymbol{w}) - DF_\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})}$$

Si $2\gamma_\delta\Lambda_\delta(2\gamma_\delta\varepsilon_\delta)$ est $<$ 1, alors, pour tout $\alpha \geq 2\gamma_\delta\varepsilon_\delta$ tel que $\gamma_\delta\Lambda_\delta(\alpha)$ soit $<$ 1. Il existe une unique solution $\boldsymbol{u}_\delta$ de l'équation $F_\delta(\boldsymbol{u}_\delta) = 0$ telle que $\|\boldsymbol{u}_\delta - \tilde{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathbb{X}} \leq \alpha$. En plus, cette solution vérifie

$$\|\boldsymbol{u}_\delta - \tilde{\boldsymbol{u}}_\delta\|_{\mathbb{X}} \leq \frac{\gamma_\delta}{1-\gamma_\delta\Lambda_\delta(\alpha)}\|F_\delta(\tilde{\boldsymbol{u}}_\delta)\|_{\mathbb{X}}.$$

Démonstration. Voir [16]. ■

Lemme 3. *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme et $G \in \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\|G\| < \dfrac{1}{\|L^{-1}\|}$, alors, $L - G$ est un isomorphisme, et*

$$\|L-G\|^{-1} \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1-\|L^{-1}\|\|G\|}$$

Démonstration. En écrivant $L - G = L(I - L^{-1}G)$, on se ramène au cas $E = F$, $L = I$ et $\|G\| \leq 1$. Dans ce cas, puisque $\|G^n\| \leq \|G\|^n$, la série $\sum_{i\geq 0} G^i$ est convergente dans le banach $\mathcal{L}(E,F)$. Comme

$$(I-G)\sum_{i=0}^{n} G^i = (\sum_{i=0}^{n} G^i)(I-G) = I - G^{i+1},$$

on conclut à la limite que $\sum_{i\geq 0} G^i$ est l'inverse de $I - G$. Finalement, on a

$$\|(I-G)^{-1}\| \leq \|\sum_{i=0}^{n} G^i\| \leq \sum_{i=0}^{n}\|G^i\| = (1-\|G\|)^{-1}.$$

■

Définition 1. ***(La dérivée de Fréchet)***

Dans cette définition X et Y désignent des espaces vectoriels réels normés, f désigne une application d'un ouvert $\mathcal{O} \subset X$ à valeurs dans Y.
Soit $a \in \mathcal{O}$. Supposons qu'il existe un opérateur linéaire continu $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ et une application ε de X dans Y, tels que

$$f(a+d) = f(a) + Ld + \|d\|\varepsilon(d), \quad avec \lim_{\|d\|\longrightarrow 0} \varepsilon(d) = 0.$$

L'opérateur L est appelé différentielle de ***Fréchet*** *(ou F-différentielle) de f au point a, et f est dite* ***Fréchet*** *différentiable (ou différentiable) au point a. La différentielle de f au point a est souvent notée Df(a).*

Proposition 1. *Toute application multi-linéaire continue est continûment différentiable. Si $\phi \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ alors sa différentielle est donnée par*

$$d\phi(x_1, ..., x_n) \cdot (h_1, ..., h_n) = \sum_{j=1}^{n} \phi(x_1, ..., x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, ..., x_n).$$

Démonstration. Voir [7]. ■

Proposition 2. *Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés et $a \in E$. Soit f une application d'un voisinage V de a à valeurs dans F, différentiable en a.*
Si $u \in \mathcal{L}(F, G)$, $u \circ f$ est différentiable en a et

$$D(u \circ f)(a) = u \circ Df(a).$$

Démonstration. La relation

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h = \|h\|\varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ entraine

$$u \circ f(a+h) - u \circ f(a) - u \circ Df(a)h = \|h\|\varepsilon_1(h)$$

avec $\varepsilon_1(h) = u \circ \varepsilon(h)$ et donc $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$. ■

Théorème 2. ***Inégalité de Hölder***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$,et
$1 \leq r \leq \infty$, $1 \leq s \leq \infty$ et $1 \leq t \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t}$. Alors

$$\forall f \in L^r(\Omega), \forall g \in L^s(\Omega), \quad \|fg\|_{L^t(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \|g|_{L^s(\Omega)}.$$

Démonstration. Voir [15]. ■

Définition 2. *On dit qu'un espace topologique X est* ***connexe*** *s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit, pour tous ouverts disjoints U et V tels que $X = U \cup V$, alors on ait $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Bibliographie

[1] **R.A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.

[2] **M. Amara, D. Capatina-Papaghiuc, E. Chacón-Vera, D. Trujillo**, *Vorticity - Velocity - Pressure Formulation for The Navier-Stokes Equations* . Comput. Vis. Sci. 6, 47-52 (2004).

[3] **M. Amara, E. Chacón-Vera, D. Trujillo**, *Vorticity - Velocity - Pressure Formulation for The Stokes Equations* . Comput. 73, 1673-1697 (2004).

[4] **K. Amoura, C. Bernardi, N. Chorfi**, *Spectral Element Discretization Of The Vorticity, Velocity And Pressure Formulation Of The Stokes Problem*, Modél. Math. et Anal. Numer. 40 (2006).

[5] **K. Amoura, C. Bernardi, N. Chorfi, S. Saadi**, *Spectral Element Discretization Of The Vorticity, Velocity And Pressure Formulation Of The Navier-Stokes Problem.* 2007.

[6] **I. Babuška, A. K. Aziz**, *"Survey Lectures on The Mathematical Foundation of The Finite Element Method". In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pp.1-359, Academic Press, New York, 1972.

[7] **S. Benzoni-Gavage**, *Calcul Différentiel et Équations Différentielles*, Cours et exercices corrigés. Dunod, Paris, 2010 ISBN 978-2-10-053050-2.

[8] **C. Bernardi, N. Chorfi**, *Spectral Discretization Of The Vorticity, Velocity And Pressure Formulation Of The Stokes Problem*, SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 44, No. 2, pp. 826-850. 2006.

[9] **C. Bernardi, N. Chorfi, M. Azaïez**, *Spectral Discretization Of The Vorticity, Velocity And Pressure Formulation Of The Navier-Stokes Equations*, Numer. Math. 2006.

[10] **C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday**, *Polynomials in The Sobolev World*, Internal Report, Laboratoire Jacques-Louis Lions. Université Pierre et Marie Curie 2003

[11] **C. Bernardi, V.Girault, Y. Maday**, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'éléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.

[12] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Specral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V*, P.G. Ciarlet & J.L. Lions eds. North-Holland (1997), 209-485.

[13] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Specral, Spectral Element and Mortar Element Methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre 1998.

[14] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisétions Variationnelles de Problème aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

[15] **H. Brezis** : *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.

[16] **F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A Raviart**, *Finite Dimensional Approximation Of Non-linear Problems. Part I : Branches Of Nonsingular Solutions*, Numer. Math. 36, 1-25(1980).

[17] **R. Daultray, J.-L. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Licences et les Techniques*, Masson, Paris, 1987.

[18] **F. Dubois**, *Vorticity-Velocity-Pressure Formulation for The Stokes Problem. Math. Meth. Appl. Sci. 25, 1091-1119 (2002)*

[19] **F. Dubois, M. Salaün, S. Salmon**, *Vorticity-Velocity-Pressure and Stream Function-Vorticity Formulations for The Stokes Problem*, J. Math. Pures. Appl. 82, 1395-1451, 2003.

[20] **V. Girault, P. Raviart**, *Finite Element Methods For Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer. Berlin Heidelberg New York. 1986.

[21] **D. Gottlieb, S.A. Orszag**, *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, SIAM Publications, Philadelphia, 1977.

[22] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain.* Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[23] **J.-L. Lions, E. Magenes**, *Problems aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume I. Dunod. Paris. 1968.

[24] **J. Nečas**, *Les Méthodes Directe en Théorie des Equations Elliptiques.* Masson. Paris. 1967.

[25] **J. Nečas**, *Sur une Méthode Pour Résoudre Les Équations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique, Voisine de La Variationnelle.* Ann. Scuala. Norm. Sup. Pisa. 16, 305-326 1962.

[26] **S.A. Orszag**, *Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximations*. Stud. Appl. Math. $51(1972), 253-259$.

[27] **S. Salmon**, *Développement Numérique de La Formulation Tourbillon-Vitesse-Pression pour Le Problème de Stokes, Thesis*. Université Pierre et Marie Curie. Paris (1999).

[28] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*. Hermann. Paris, 1966.

[29] **G. Talenti**, *Best Constant in Sobolev Inequality*. Ann. Math. Pura ed Appl. 110 serie IV, 353-372(1976).

[30] **M. Touihri**, *Discrétisation Spectrale Des Équations De Navier-Stokes À Densité Variable*. PhD. Université de Pierre et Marie Curie. Paris 6, France. 1997