الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد الصديق بن يحي –جيجل–

كلية العلوم الدقيقة والإعلام الآلي

قسم الرياضيات

أطروحة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه العلوم

تخصص: رياضيات

الدوال المولّدة والتناظرية لجداءات أعداد k-متوازنة وكثيرات الحدود تشيبيتشاف

إعداد: فاطمة يعقوبي

لجــنة المناقشـــــة:

الطاهر حداد	أستاذ التعليم العالي	جامعة جيجل	رئيسا
علي بوسعيود	أستاذ محاضر-أ-	جامعة جيجل	مقررا ومشرفا
يوسف جنيحي	أستاذ محاضر -أ-	جامعة سطيف 1	عضوا ممتحنا
مراد شلغام	أستاذ محاضر -أ-	جامعة جيجل	عضوا ممتحنا
لطفي مدور	أستاذ محاضر-أ-	جامعة قسنطينة 1	عضوا ممتحنا
صهيب ميلاس	أستاذ محاضر-أ-	المركز الجامعي بريكة	عضوا ممتحنا
محمد كرادة	أستاذ التعليم العالي	جامعة جيجل	مدعوا

تاريخ المناقشة: 04 جوان 2023.

شكر و عرفان

أوّلا وقبل كل شيء أشكر الله العلي القدير الذي وفقني وأعانني على إنجاز وإتمام هذا العمل من غير حول منّي ولا قوة، فهو الذي له الفضل أ وّلا وآخرا.

أتقدم بالشكر الجزيل لأستاذي المشرف الدكتور "علي بوسعيود" على إشرافه على هذه الرسالة
وإرشاده لي في انجاز هذه الأطروحة.

كما أتقدم بخالص الشكر والامتنان للبروفيسور "الطاهر حداد" على قبوله ترأس لجنة المناقشة التي أشكر جميع أعضائها المكونة من الأساتذة "يوسف جنيحي"، "مراد شلغام"، "صهيب ميلاس" والأستاذ "لطفي مدور" الذين تكرموا عليّ بوقتهم الثمين من أجل مناقشة هذا العمل.

كما أتوجه بخالص الشكر والامتنان إلى الأستاذ البروفيسور "محمد كرادة" الذي لم تفارق نصائحه القيمة وتوجيهاته السديدة طيلة انجاز هذا العمل. فله كل الشكر والتقدير ورزقه الله الصحة ان شاء الله.

كما أتقدم بكل الشكر والامتنان لكل أعضاء فرقة البحث TNFS دون استثناء خصوصا هند مرزوق.

"رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحاً ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين"

إهـــداء

الحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه، سبحانك لا نحصي ثناء عليك أنت كما أثنيت على نفسك خلقت فأبدعت، وأعطيت فأفضيت، فلا حصر لنعمك ولا حدود لفضلك؛ وصل الله وسلم على أشرف عبادك وأكمل خلقك خاتم المرسلين ومعلم المعلمين نبينا ورسولنا محمد الأمين

إلى من علمني حب العمل والكفاح لبلوغ النجاح
أبي رحمه الله.

إلى من كان دعاؤها سر نجاحي أمي الغالية حفظها الله

إلى زوجي وأولادي

إلى إخواني وأخواتي

إلى جميع أساتذتي وأصدقائي

إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل المتواضع

الباحثة: فاطمة يعقوبي

العنوان

الدوال المولّدة والتناظرية لجداءات أعداد k -متوازنة وكثيرات الحدود تشيبيتشاف

الملخص

في هذه الأطروحة، نقوم أولا بتعريف بعض متتاليات الأعداد وكثيرات الحدود مثل: أعداد k- متوازنة، أعداد k -لوكاس المتوازنة، أعداد k -فيبوناتشي... وكثيرات الحدود تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة، ونقوم بدراسة بعض خصائصها المثيرة للاهتمام نذكر على سبيل المثال: الدالة المولدة، الحل العام والصيغة الصريحة. بعد ذلك نقوم بحساب الدوال المولدة لجداءات هذه الأعداد وكثيرات الحدود وجداءات أخرى باستعمال المؤثر التناظري.

الكلمات المفتاحية

أعداد k -متوازنة، أعداد k -لوكاس المتوازنة، كثيرات الحدود تشيبيتشاف، الدوال المولدة، التوابع التناظرية.

Title

Generating and symmetric functions for products of k −balancing numbers and Chebyshev polynomials.

Abstract

In this thesis, we first define some sequences of numbers and polynomials such as: k -balancing, k -Lucas balancing, k -Fibonacci ..., and the four types of Chebyshev polynomials, and we study some of their interesting properties, for example example the generating function, Binet's formula, the explicit formula. Then we calculate the generating functions of the products of these numbers and polynomials and other products using the symmetric operator.

Key Words

k -balancing numbers, k -Lucas balancing numbers, Chebyshev polynomial, generating functions, symmetric functions.

Titre

Fonctions génératrices et symétriques pour les produits de nombres k-balancing et de polynômes de Chebyshev.

Résumé

Dans cette thèse, nous définissons d'abord quelques suites de nombres et polynômes tels que : k-balancing, k-Lucas balancing, k-Fibonacci ..., et les quatre types de polynômes de Chebyshev, et nous étudions certaines de leurs propriétés intéressantes, par exemple la fonction génératrice, la formule de Binet, la formule explicite. Ensuite nous calculons les fonctions génératrices des produits de ces nombres et polynômes et autres produits en utilisant l'opérateur symétrique.

Mots clés

Nombres k-balancing, nombres k-Lucas balancing, polynômes de Chebyshev, fonctions génératrices, fonctions symétriques.

الفهرس

الفهـــــــرس

الفصل الرابع: تطبيقات على التوابع التناظرية التامة

قائمة المقالات العلمية

المقالات العلمية

[1] **F. Yakoubi** , A. Boussayoud , B. Aloui , H. Merzouk, k -balancing numbers and new generating functions with some special numbers and polynomials, *J. Sci. Arts.*, **22**(4), 929- 940**, 2022**.

[2] **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, K. V. V. Kanuri, A New class of ordinary generating functions of binary products of k -Lucas balancing numbers with Chebyshev polynomials, *Math. Eng. Sci. Aerosp. (MESA)*, **12**(1), 135- 150, **2021**.

الملتقيات الدولية والوطنية

[1] **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, A New class of ordinary generating functions of binary products of k -Lucas balancing numbers with Chebyshev polynomials, The first online International Conference on Pure and Applied Mathematics, IC-PAM' 21 May 26- 27, **2021**, Ouargla, Algeria..

[2] **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, Generating functions of products of k -balancing numbers, The First Conference on Mathematics and Applications of Mathematics (1st CMAM 2021), June 30 and July 01, **2021**, Jijel, Algeria.

مقدمــة

يحتوي علم الرياضيات على العديد من المتتاليات العددية، ومن أهم هذه المتتاليات وأكثرها استعمالا متتالية فيبوناتشي والتي أول رقمين فيها هما صفر وواحد ويكون كل رقم فيها عبارة عن ناتج مجموع الرقمين السابقين له في المتتالية وبذلك تكون متتالية فيبوناتشي على الشكل التالي $\{0,1,1,2,3,5,8,...\}$ وهناك بعض المدارس حذفت الحد الأول $F_0=0$ واستبدلته بالحد $F_0=1$ لكي تصبح المتتالية على هذا الشكل $\{1,1,2,3,5,8,...\}$. ولا تقتصر أهمية المتتاليات العددية على علوم الرياضيات فقط بل تلعب دورا هاما في مختلف الميادين والعلوم مثل علم الحاسوب، الفيزياء، الاقتصاد، البيولوجيا... إلخ. فمتتالية فيبوناتشي مثلا استخدمت في الترتيبات البيولوجية مثل ترتيب الأوراق على ساق النبات. كما لا ننسى ذكر متتالية أعداد بال المعرفة بـ $\{0,1,2,5,12,29,...\}$ والتي حظيت باهتمام كبير من طرف عدد هائل من العلماء والباحثين نظرا لأهميتها الكبيرة في مختلف العلوم ولقد لقيت تعميمات هذه الأعداد اهتماما كبيرا من قبل مؤلفين وباحثين فمثلا متتالية فيبوناتشي تم تعميمها في العديد من الأبحاث العلمية وبأشكال مختلفة حيث قام هوردام (A. H. Horadam) في مقاله: The generalized Fibonacci sequences [48] بتقديم تعميم لفيبوناتشي وذلك بالحفاظ على العلاقة التراجعية والتغيير في الشروط الابتدائية، بينما اتجه كل من ن. صابة، ع. بوسعيود في مقالهم:

- N. Saba, A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Symmetric and generating functions of generalized (p, q)-numbers, *Kuwait J. Sci.*, **48**(4), 1-15, **2021**.

بتعميم (p,q)-أعداد حيث غيروا في الشروط الابتدائية والعلاقة التراجعية وهي تعميما لأعداد (p,q)-فيبوناتشي التي عرفها (A. Suvarnamani, M. Tatong) [77].

يمكن تعريف وتصنيف متتاليات الأعداد من خلال العلاقة التراجعية الخطية لها، حيث توجد بعض المتتاليات ترتبط مع بعضها البعض فالأعداد المتوازنة $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ترتبط مع أعداد لوكاس المتوازنة $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ لكونهما يملكان نفس العلاقة التراجعية ويختلفان في الشروط الابتدائية والعلاقة بينهما:

$$C_n = B_{n+1} - 3B_n.$$

تجدر الإشارة إلى أن الأعداد المتوازنة B_n تعرف بالعلاقة التراجعية التالية [11]:

$$\begin{cases} B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1}, & n \geq 1 \\ B_0 = 0, \quad B_1 = 1 \end{cases}$$

أما أعداد لوكاس المتوازنة C_n فتعرف بالعلاقة التراجعية التالية [67]:

$$\begin{cases} C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}, & n \geq 1 \\ C_0 = 1, \quad C_1 = 3 \end{cases}$$

تُعد العبارة الصريحة للأعداد المتوازنة وأعداد لوكاس المتوازنة مهمة جدا لاشتقاق التسلسلات الخاصة بكل نوع من هذه الأعداد وتعطى بالعلاقتين التاليتين على التوالي [11، 67]:

$$B_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2},$$

حيث: $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$

إن تفكير العلماء في إيجاد تطبيقات لمتتاليات الأعداد وكثيرات الحدود التي قاموا بتعريفها دفعهم لحساب الدوال المولدة لها سواء كانت عادية أو أسية نظرا لأهميتها في فروع الرياضيات والفيزياء وحتى في نظرية المعلومات، حيث قام بعض الباحثون بحساب الدوال المولدة العادية لبعض الأعداد وكثيرات الحدود الشهيرة بالطريقة الكلاسيكية (التقليدية) مثل الدوال المولدة لأعداد فيبوناتشي $\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n\right)$ أعداد بال $\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n\right)$ والأعداد المتوازنة $\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n\right)$وكثيرات الحدود تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة $\left(\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n, \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^n\right)$ وغيرها، إلا أن هذه الطريقة غير فعالة من حيث المبدأ لأنها لا تسمح بحساب الدوال المولدة للجداءات سواء كانت متتاليات الأعداد أو كثيرات الحدود أو جداؤهما معا، وهذا ما دفع الباحثان فواطا وهان (D. Foata, G. N. Han) في سنة 1994 إلى استعمال تقنية التحليل التوافقي في مقالهما: Nombres de Fibonacci et polynômes orthogonaux [43]، والتي سمحت لهما بحساب الدوال المولدة لبعض الجداءات مثل الدالة المولدة لجداءات فيبوناتشي مع كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الأول $\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n T_n(x) z^n\right)$ والدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوع الأول والثاني $\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) U_n(x) z^n\right)$ وغيرها، وهذه الطريقة هي الأخرى غير ناجعة لأنها بالإضافة لكونها طويلة ومعقدة من حيث الأسلوب فإنها لا تسمح بحساب الدوال المولدة لكل الجداءات، فلا يمكن حساب الدوال المولدة لجداءات متتاليات الأعداد وكثيرات الحدود في حالة الحد الأول لأحد طرفي الجداء يكون معدوما مثل الدالة المولدة لجداء أعداد بال وأعداد لوكاس $\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n L_n z^n\right)$.

تحتل التوابع التناظرية مكانا هاما في الرياضيات الكلاسيكية حيث توصل العديد من الباحثين (أ. لاسكو، ع. عبد الرزاق، ع. بوسعيود، م. كرادة، ن. صابة...) إلى العديد من النتائج الجديد والمهمة وذلك باستعمال المؤثر التناظري $\delta_{e_1 e_2}^{k}$ الذي عرفه كل من ع. بوسعيود، ع. عبد الرزاق و م. كرادة سنة 2013 في مقالهم:

- A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A generalization of some orthogonal polynomials, *Springer Proc. Math. Stat.*, **41**, 229-235, **2013**.

وفي المقالات التالية: ع. بوسعيود ومن معه

- A. Boussayoud, On some identities and generating functions for Pell Lucas numbers, *Online Journal of Analytic combimatorics*, **2017**.
- A. Boussayoud, N. Harouche, Complete symmetric functions and k-Fibonacci numbers, *Communications in Applied Analysis*, **2016**.
- A. Boussayoud, A. Abderrezzak, M. Kerada, Some applications of symmetric functions, *Integer Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, **2015**.
- A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, W. Rouibah, Some applications on generating functions, *Journal of Concrete and Aolicable Mathematics*, **2014**.

قاموا بإيجاد عدة دوال مولدة جديدة بالاعتماد على المؤثر التناظري السابق والتي بنى عليها بعض الباحثين العديد من الأفكار.

وفي سنة 2018، طبق ع. بوسعيود ومن معه بتطبيق المؤثر السابق على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right) e_1^{n+k} z^n$ ، وتحصلوا على الدالة المولدة لأعداد مارسان والدوال المولدة لجداءات أعداد فيبوناتشي وبال مع أعداد مارسان بالإضافة إلى الدوال المولدة لجداءات أعداد مارسان مع كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوعين الأول والثاني وهذا في مقالهم:

- A. Boussayoud, M. Chelgham, S. Boughaba, On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Numbers*, **6**(3), 93-97, **2018**.

في سنة 2019، ع. بوسعيود ومن معه في مقالهم:

- Boussayoud, S. Boughaba, M. Kerada, S .Araci, M. Acikgoz, Symmetric functions of binary products of k-Fibonacci and orthogonal polynomials, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas.*, **113** (3), 2575-2586, **2019**.

وباستعمال تأثير المؤ ثر $\delta_{e_1 e_2}^{-k}$ على السلسلة الشكلية القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(A\right) e_1^n z^n$ ، تحصلو ا على الدوال المولدة للجداءات المتوالية وغير المتوالية لكل من أعداد k-فيبوناتشي، أعداد k-بال، وكذلك الدوال المولدة لجداءات أعداد k-فيبوناتشي مع كثيرات حدود فيبوناتشي وكثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثاني بالإضافة إلى عدة نتائج أخرى جديدة.

في نفس السنة س. بوغابة و ع. بوسعيود في مقالهما:

- S. Boughaba, A .Boussayoud, On some identities and generating function of both Kjacobsthal numbers and symmetric functions in several variables, *Konuralp Journal of Mathematics.*, **7**(2), 235-242, **2019**.

قاما حبساب الدوال المولدة لمربع أعداد k -فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال، أعداد k -بال لوكاس وأعداد k -جاكوبستال ذات الدليل السالب، بالإضافة إلى جداءات أخرى.

أما الدوال المولدة لبعض كثيرات الحدود بمتغيرين على غرار كثيرات الحدود فيبوناتشي ولوكاس بمتغيرين $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x,y) z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y) z^n$ فقد تم إيجادها باستعمال تقنية التوابع التناظرية سنة 2020 من طرف صابة وبوسعيود (A, Boussayoud & N, Saba) في المقال الموسوم بعنوان:

- N. Saba, A. Boussayoud, Complete homogeneous symmetric functions of Gauss Fibonacci polynomials and bivariate Pell polynomials. *Open J. Math. Sci.*, **4**(1), 179-185, **2020**.

وفي نفس السنة قامت صابة وبوسعيود(A, Boussayoud & N, Saba) في مقالهما المعنون بـ:

- N. Saba, A. Boussayoud, Ordinary generating functions of binary products of (p,q)-modified Pell numbers and k-numbers at positive and negative indices. *J. Sci. Arts*., **20**.3(52), 627-646, **2020**.

بحساب الدوال المولدة لجداءات (p,q) -بال المعدلة مع بعض k -أعداد بالدليلين الموجب والسالب فتحصلوا على عدة سلاسل نذكر منها ما يلي: $\sum_{n=0}^{\infty} MP_{p,q,n}J_{k,n}z^{n}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} MP_{p,q,n}J_{k,-n}z^{n}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} MP_{p,q,n}L_{k,n}z^{n}$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} MP_{p,q,n}L_{k,-n}z^{n}$ ...إلخ. وفي العام الذي يليه قام مؤلفو هذين المقالين:

- N. Saba, A. Boussayoud, M. Ferkioui, S. Boughaba, Symmetric functions of binary products of Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials and Chebyshev polynomials, *Palestine Journal of Mathematics*, **10**(2), 452-464, **2021**.

- N. Saba, S. Boughaba, A. Boussayoud, Symmetric functions of binary products of bivariate complex Lucas polynomials and some special numbers and orthogonal polynomials. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Math.*, **67**(2), 187-211, **2021**.

بحساب الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوعين الأول والثاني مع بعض كثيرات الحدود الغوصية وجداءات كثيرات الحدود لوكاس المركبة بمتغيرين مع بعض الأعداد وكثيرات الحدود من الرتبة الثانية .

هدف وهيكل الأطروحة:

نتيجة للدور الهام الذي تلعبه متتاليات وكثيرات الحدود الكلاسيكية في مختلف العلوم الحديثة، قمنا في هذه الأطروحة بتخصيص دراسة بعض الأنواع من هذه المتتاليات وهي أعداد k-متوازنة و k -لوكاس المتوازنة، وكذلك بعض كثيرات الحدود الشهيرة وهي كثيرات الحدود تشيبيتشاف من الأنواع الأربعة، وقد قمنا بدراسة خصائصها المثيرة للاهتمام نذكر على سبيل المثال الدالة المولدة، الحل العام، الصيغة الصريحة، ولعل أهم هذه الخصائص وأبرزها الدالة المولدة نظرا لأهميتها في مختلف العلوم بصفة عامة وفي الرياضيات والفيزياء بصفة خاصة، لذلك فقد خصصنا جزءا كبيرا من هذه الأطروحة لحساب الدوال المولدة الجديدة لجداءات بعض الأعداد مع كثيرات الحدود الكلاسيكية من الرتبة الثانية، وذلك باستعمال التوابع التناظرية والتي تحتل بدورها مكانا هاما في الرياضيات البحتة.

وقد تم تقسيم هذه الأطروحة إلى أربعة فصول.

الفصل الأول: مفاهيم عامة

في الفصل الأول قدمنا بعض التعاريف والمفاهيم التي سنستخدمها في الفصول القادمة، حيث تطرقنا إلى السلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية، إضافة إلى الدوال المولدة لأعداد k-متوازنة، k -لوكاس المتوازنة، k-فيبوناتشي، k-بال، k-جاكوبستال، بالإضافة إلى الدوال المولدة لكثيرات الحدود تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة.

الفصل الثاني: التوابع التناظرية الأولية والتامة

في الفصل الثاني، ذكرنا بالمفاهيم الأساسية حول التوابع التناظرية فقد بدأنا الفصل بتقديم تعاريف المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية، وبعدها عرفنا التوابع التناظرية. وفي الأخير، قدمنا خصائص التوابع التناظرية.

الفصل الثالث: الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة مع بعض الأعداد وكثيرات الحدود تشيبيتشاف

الهدف من الفصل الثالث، اعتمدنا على النظرية 1 في حالة الأبجديتين A وB من أجل $k=1$ التي مكنتنا من الحصول على الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس متوازنة مع بعض الأعداد الشهيرة (k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال و k-جاكوبستال) ومع كثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوع الأول، الثاني، الثالث والرابع، وهذا هو الهدف من مقالنا الذي تم نشره في المجلة الدولية:

- **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, K. V. V. Kanuri, A New class of ordinary generating functions of binary products of k-Lucas balancing numbers with Chebyshev polynomials, *Math. Eng. Sci. Aerosp. (MESA)*, **12**(1)135- 150, **2021**

الفصل الرابع: تطبيقات على التوابع التناظرية التامة

في الفصل الرابع من الأطروحة فكان الهدف منه هو الحصول على الدوال المولدة الجديدة وذلك بالاعتماد على المؤثر التناظري $\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}$ المطبق على السلسلة الشكلية القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)b_1^n c_1^n z^n$ الذي يسمح لنا بالحصول على دوال مولدة جديدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع بعض الأعداد الشهيرة، وكذا مع كثيرات الحدود تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة. وهو الهدف من المقال الذي تم نشره في المجلة الدولية:

- **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, B. Aloui, H. Merzouk, k-balancing numbers and new generating functions with some special numbers and polynomials, *J. Sci. Arts.*, **22**(4), 929- 940, **2022**.

الفصل الأول

مفاهيم عامة

في هذا الفصل سنقدم بعض المفاهيم العامة والأساسية، نستهله بتعريف السلاسل الشكلية، العلاقات التراجعية لأعداد- kمتوازنة، - kلوكاس المتوازنة - kفيبوناشي، - k بال، - k بال لوكاس و - k مارسان. بعدها سنعرف كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية لكل من تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة، وأخيرا نقدم مفهوم التوابع المولدة العادية وطريقة إيجاد الدوال المولدة لهذه الأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة السابق ذكرها، وللمزيد من المعلومات يمكن الرجوع للمراجع [1، 2، 5].

1.1 السلاسل الشكلية

1.1.1 حلقة السلاسل الشكلية

ليكن $(IK,+,.)$حقل تبديلي ($IK=\mathbb{C}$ أو $IK=\mathbb{R}$)

تعريف 1.1:

لتكن المجموعة $\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in IK\right\} = IK\,[\![X]\!]$ حيث $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ هي السلاسل الشكلية، معاملاتها a_n في IK. x^n يسمى بالحد وحيد الدرجة n من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

المعامل a_0 هو الحد الثابت للسلسة الشكلية.

تعريف 2.1:

لتكن السلسلتين الشكليتين u و v حيث: $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $v=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

نعرف مجموعهما بالعلاقة التالية:

$$(u+v)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n, \qquad (1.1)$$

أما الجداء فيعطى بـ:

$$(u.v)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ / \ c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \qquad (2.1)$$

أما جداء هادامار فيعطى بـ:

$$\begin{aligned}(u\otimes v)&=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\otimes\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,\ \ c_n=a_n b_n.\end{aligned} \qquad (3.1)$$

2.1.1 العمليات على السلاسل الشكلية

1) الضرب في سلمي:

جداء السلسلة الشكلية $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بالسلمي k هو السلسلة الشكلية $v=\sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n$

2) الاشتقاق:

المشتق الشكلي للسلسلة $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بالنسبة إلى x هو السلسلة الشكلية $v=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

3) المكاملة:

ناتج مكاملة الشكلية للسلسلة $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بالنسبة إلى x هو السلسلة الشكلية $v=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

3.1.1 السلاسل القابلة للقلب

تعريف 3.1:

نقول أن السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا وجدت سلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ حيث:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=1.$$

خاصية 1.1:

السلسلة الشكلية $u=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان $a_0 \neq 0$.

البرهان:

تكون السـلسـلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للقلب في $IK[\![x]\!]$ إذا وفقط إذا وجد $u^{-1}=\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ في $IK[\![x]\!]$ بحيث $u u^{-1}=1$.

هذا معناه:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = 0 \end{cases}.$$

- إذا كانت u قابلة للقلب إذن مما سبق فإن $a_0 b_0 = 1$ و بالتالي a_0 قابل للقلب في الحقل IK ومنه $a_0 \neq 0$.
- وبالعكس، إذا كان $a_0 \neq 0$ فإن الجملة مثلثية علوية:

$$(S)\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n = 0 \end{cases}.$$

تقبل حل وحيدا لأن $\det(S)=a_0^{n+1}\neq 0$ من أجل كل n، إذن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للقلب.

وهو المطلوب.

أمثلـــة:

1- السلسلة $u=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ قابلة للقلب و مقلوبها $v=1-x$.

2- السلسة $u=\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ قابلة للقلب ومقلوبها $v=1+x$.

2.1 العلاقات التراجعية الخطية المتجانسة

في هذه الفقرة سنركز اهتمامنا على العلاقات التراجعية الخطية من الرتبة الثانية والمتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

تعريف 4.1:

لتكن $d_1, d_2, ..., d_k$ عبارة عن معاملات ثابتة في الحقل IK و $d_k \neq 0$. لدينا:

$$u_n + d_1 u_{n-1} + d_2 u_{n-2} + \cdots + d_k u_{n-k} = 0. \qquad (4.1)$$

هي علاقة تراجعية خطية متجانسة من الرتبة k ذات معاملات ثابتة.

نظرية 1.1: "مبدأ التراكب"

إذا كان $u_n^{(1)}$ و $u_n^{(2)}$ حلين للعلاقة التراجعية (4.1) فإن $c_1 u_n^{(1)} + c_2 u_n^{(2)}$ هو أيضا حل للعلاقة التراجعية (4.1) حيث c_1 و c_2 ثابتان من الحقل IK.

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}
&c_1 u_n^{(1)} + c_2 u_n^{(2)} + d_1\left(c_1 u_{n-1}^{(1)} + c_2 u_{n-1}^{(2)}\right) + d_2\left(c_1 u_{n-2}^{(1)} + c_2 u_{n-2}^{(2)}\right) + \cdots + d_k\left(c_1 u_{n-k}^{(1)} + c_2 u_{n-k}^{(2)}\right) = \\
&= c_1 u_n^{(1)} + d_1 c_1 u_{n-1}^{(1)} + d_2 c_1 u_{n-2}^{(1)} + \cdots + d_k c_1 u_{n-k}^{(1)} + c_2 u_n^{(2)} + d_1 c_2 u_{n-1}^{(2)} + d_2 c_2 u_{n-2}^{(2)} + \cdots + d_k c_2 u_{n-k}^{(2)} \\
&= c_1\left(u_n^{(1)} + d_1 u_{n-1}^{(1)} + d_2 u_{n-2}^{(1)} + \cdots + d_k u_{n-k}^{(1)}\right) + c_2\left(u_n^{(2)} + d_1 u_{n-1}^{(2)} + d_2 u_{n-2}^{(2)} + \cdots + d_k u_{n-k}^{(2)}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

إذن: $c_1 u_n^{(1)} + c_2 u_n^{(2)}$ هو حل للعلاقة التراجعية (4.1).

وهو المطلوب.

ملاحظات:

1. $u_n = 0$ هو الحلّ الصفري (التافه) للمعادلة (4.1).
2. إذا كان $u_n = \alpha^n \neq 0$ حلا للمعادلة (4.1) فإنّ:

$$\alpha^n + d_1 \alpha^{n-1} + d_2 \alpha^{n-2} + \cdots + d_k \alpha^{n-k} = 0.$$

و:

$$\alpha^{n-k}\left(\alpha^k + d_1 \alpha^{k-1} + d_2 \alpha^{k-2} + \cdots + d_k\right) = 0.$$

يكون لدينا التعريف التالي بالاعتماد على الملاحظة 2.

تعريف 5.1: (كثير الحدود المميز)

كثير الحدود المميز المرفق للعلاقة التراجعية الخطية (4.1) هو:

$$p(x) = x^k + d_1 x^{k-1} + d_2 x^{k-2} + \cdots + d_k. \qquad (5.1)$$

ملاحظة 1.1:

من أجل $p(x) = 0$، تدعى هذه العلاقة بالمعادلة المميزة (المساعدة) للعلاقة التراجعية (4.1) وتسمى جذورها بالجذور المميزة.

نظرية 2.1: [3]

لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ الجذور المميزة للعلاقة التراجعية (4.1) المختلفة عن بعضها البعض، إذن من أجل الثوابت $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ تنتمي إلى الحقل IK لدينا العبارة:

$$u_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n. \qquad (6.1)$$

هذه العبارة حل للعلاقة التراجعية (4.1).

نظرية 3.1:

إذا كان للعلاقة التراجعية (4.1) حلا من الشكل (6.1) يحقق الشروط $u_0 = b_0$, $u_1 = b_1, \ldots, u_{k-1} = b_{k-1}$ حيث $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ ثوابت معطاة، فإن هذا الحل وحيد.

البرهان:

باستخدام الشروط المذكورة في النظرية 3.1 نجد:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_k = b_0 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_k\alpha_k = b_1 \\ \vdots \\ c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + c_k\alpha_k^{k-1} = b_{k-1} \end{cases}$$

إذا كانت A هي مصفوفة المعاملات للجملة السابقة فإن:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

وهذا المحدد (محدد فاندرموند) غير معدوم لأن $\alpha_i \neq \alpha_j$ إذن يوجد حل وحيد للجملة السابقة وبالتالي العلاقة التراجعية تقبل حل وحيد من الشكل (6.1).

وهو المطلوب.

3.1 تعميم أعداد فيبوناتشي

تعريف 6.1[69]**:**

نعرف تعميم أعداد فيبوناتشي بالعلاقة التراجعية من الرتبة الثانية التالية:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \\ u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}, n \geq 2, \end{cases} \qquad (7.1)$$

حيث الثوابت $p,q \in \mathbb{Z}^*$ و $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^*$.

الجدول التالي يوضح لنا كيفية الحصول على العلاقات التراجعية لبعض الأعداد بالاعتماد على العلاقة (7.1).

الأعداد	α	β	p	q	العلاقة التراجعية
$\{B_{n,k}\}_{n\geq 2}$ متوازنة - k	0	1	$6k$	-1	$\begin{cases} B_{k,n+1}=6kB_{k,n}-B_{k,n-1} \\ B_{k,0}=0,\ B_{k,1}=1 \end{cases}$
$\{C_{k,n}\}_{n\geq 2}$ لوكاس المتوازنة - k	1	$3k$	$6k$	-1	$\begin{cases} C_{k,n+1}=6kC_{k,n}-C_{k,n-1} \\ C_{k,0}=1,\ C_{k,1}=3k \end{cases}$
$\{F_{k,n}\}_{n\geq 2}$ فيبوناتشي - k	1	k	k	1	$\begin{cases} F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2} \\ F_{k,0}=0,\ F_{k,1}=1 \end{cases}$
$\{L_{k,n}\}_{n\geq 0}$ لوكاس - k	1	k	k	1	$\begin{cases} L_{k,n}=kL_{k,n-1}+L_{k,n-2}, \\ L_{k,0}=2,\ L_{k,1}=k \end{cases}$
$\{P_{k,n}\}_{n\geq 0}$ بال - k	0	1	2	k	$\begin{cases} P_{k,n}=2P_{k,n-1}+kP_{k,n-2}, \\ P_{k,0}=0,\ P_{k,1}=k \end{cases}$
$\{J_{k,n}\}_{n\geq 0}$ جاكوبستال - k	0	1	k	2	$\begin{cases} J_{k,n}=kJ_{k,n-1}+2J_{k,n-2}, \\ J_{k,0}=0,\ J_{k,1}=1 \end{cases}$
$\{M_{k,n}\}_{n\geq 0}$ مارسان - k	0	1	$3k$	-2	$\begin{cases} M_{k,n}=3kM_{k,n-1}-2M_{k,n-2}, \\ M_{k,0}=0,\ M_{k,1}=1 \end{cases}$

الجدول 1.1: العلاقات التراجعية لبعض الأعداد.

ملاحظة 2.1:

بوضع $k=1$ في الجدول السابقة نتحصل على العلاقات التراجعية لكل من أعداد متوازنة، لوكاس المتوازنة، فيبوناتشي، لوكاس، بال، جاكوبستال ومارسان.

خاصية 2.1:

الحل العام للعلاقة التراجعية (7.1) يعطى بـ:

$$u_n=\frac{\lambda_1 x_1^n-\lambda_2 x_2^n}{x_1-x_2},$$

مع $\lambda_1=\beta-\alpha x_2$ و $\lambda_2=\beta-\alpha x_1$ حيث x_1 و x_2 هما حليين للمعادلة المميزة للعلاقة التراجعية و $x_1\neq x_2$.

البرهان:

لدينا: $x^2-px-q=0$ المعادلة المميزة المرفقة بالعلاقة التراجعية (7.1).

إذا كان $x_1,\ x_2$ $(x_1\neq x_2)$ حليّ هذه المعادلة حيث:

$$x_1=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2},\ x_2=\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

فإن الحل العام يكون كالتالي:

$$u_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n,\ c_1,\ c_2\in\mathbb{R}$$

لدينا الشروط الابتدائية $u_0=\alpha,\ u_1=\beta$ إذن:

$$\begin{cases} u_0 = c_1 + c_2 = \alpha \\ u_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\beta - \alpha x_2}{x_1 - x_2} \\ c_2 = \dfrac{\alpha x_1 - \beta}{x_1 - x_2} \end{cases}$$

يعطى الحل العام كالتالي:

$$u_n = \frac{\lambda_1 x_1^n - \lambda_2 x_2^n}{x_1 - x_2},$$

حيث: $\begin{cases} \lambda_1 = \beta - \alpha x_2 \\ \lambda_2 = \beta - \alpha x_1 \end{cases}$.

وهو المطلوب.

انطلاقا من الخاصية 2.1، يمكن الحصول على الحل العام لبعض العلاقات التراجعية الموضحة في الجدول التالي:

الأعداد	الحل العام
k-متوازنة $\{B_{n,k}\}_{n\geq 0}$	$B_{k,n} = \dfrac{1}{2\sqrt{9k^2-1}}\left[\left(3k+\sqrt{9k^2-1}\right)^n - \left(3k-\sqrt{9k^2-1}\right)^n\right]$
k-لوكاس المتوازنة $\{C_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$C_{k,n} = \dfrac{1}{6k}\left[\left(6k-\sqrt{9k^2-1}\right)\left(3k+\sqrt{9k^2-1}\right)^n + \sqrt{9k^2-1}\left(3k-\sqrt{9k^2-1}\right)^n\right]$
k - فيبوناتشي $\{F_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$F_{k,n} = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left[\left(\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^{n+1}\right]$
k - لوكاس $\{L_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$L_{k,n} = \left(\dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n$
k - بال $\{P_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$P_{k,n} = \dfrac{k}{2\sqrt{k+1}}\left[\left(1+\sqrt{k+1}\right)^n - \left(1-\sqrt{k+1}\right)^n\right]$
k - بال لوكاس $\{Q_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$Q_{k,n} = \left(1+\sqrt{k+1}\right)^n - \left(1-\sqrt{k+1}\right)^n$
k-جاكوبستال $\{J_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$J_{k,n} = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+8}}\left[\left(\dfrac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n\right]$
k - جاكوبستال لوكاس $\{j_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$j_{k,n} = \left(\dfrac{k+\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{k-\sqrt{k^2+8}}{2}\right)^n$
k - مارسان $\{M_{k,n}\}_{n\geq 0}$	$M_{k,n} = \dfrac{1}{\sqrt{9k^2-8}}\left[\left(\dfrac{3k+\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{3k-\sqrt{9k^2-8}}{2}\right)^n\right]$

الجدول 2.1: الحل العام لبعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية.

4.1 كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية

كان تشيبيتشاف أول عالم رياضيات على الأرجح يدرك وجود مفهوم عام لكثيرات الحدود المتعامدة بالرغم من وجود بعض كثيرات الحدود المتعامدة التي كانت معروفة قبل عمله .استخدم ليجندر ولابلاص في نهاية القرن الثامن عشر كثيرات حدود ليجندر في عملهم على الميكانيكا السماوية (فرع من فروع علم الفلك يهتم بدراسة مسارات الأجرام السماوية)، اهتم لابلاص بإيجاد كثيرات حدود هريميت ودراستها في سياق اكتشافاته في نظرية الإحتمالات مع بداية القرن التاسع عشر، تشيبيتشاف أول من رأى إمكانية وجود نظرية عامة لكثيرات الحدود وتطبيقاتها حيث انبثقت الكثير من النظريات المرتبطة بكثيرات الحدود المتعامدة كنظرية التقريب (بمختلف صيغها)، الاستقطاب كنوع من التقريب...

تعريف 7.1:

لتكن $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيرات الحدود حيث $P_n(x)$ كثير حدود من الدرجة n، إذا وجد مجال $a<x<b$ ودالة وزن $w(x)>0$ ، وإذا كان:

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx=0,\ n\neq m$$

$$\int_a^b P_n^2(x)w(x)dx\neq 0,\ n=m$$

نقول أن $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ كثيرات حدود متعامدة على المجال $a<x<b$ بالنسبة إلى دالة الوزن $w(x)$

نظرية 4.1[36]**:**

نعرف متتالية كثيرات الحدود النظامية $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ بالعبارة التالية:

$$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_1$$

نقول عنها أنها متتالية كثيرات حدود متعامدة منتظمة إذا وفقط إذا وجدنا متتاليتين عقديتين تنتميان إلى $(\mathbb{C})$ $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق العلاقة التراجعية الآتية:

$$\begin{cases}P_{n+1}(x)=(x-\alpha_n)P_n(x)-\beta_nP_{n-1}(x)\\ P_{-1}(x)=0,\ P_0(x)=1\end{cases}\qquad(8.1)$$

نظرية 5.1[1، 36]**:**

لتكن $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناظرية لكثيرات الحدود المتعامدة إذن العلاقتين التاليتين متكافئتين

1. $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$

2. $\begin{cases}P_{n+1}(x)=xP_n(x)-\beta_nP_{n-1}(x)\\ P_{-1}(x)=0,\ P_0(x)=1\end{cases},\ n\geq 1.$

نظرية 6.1[36]**: « Favadad's Theorem »**

كل متتالية كثيرات الحدود $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ من الرتبة الثانية عبارة عن كثيرات حدود متعامدة.

تعريف 8.1:

نسمي كثيرات الحدود تشيبيتشاف من الدرجة n كل الدوال التي تأخذ الشكل:

$$T_n : [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto T_n(x) = \cos(n(\arccos x))$$

وتسمى العائلة $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الأول.

ملاحظة 3.1:

يمكن كذلك تعريف التابع T_n بـ: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ حيث أن: $\theta \in [0,\pi]$.

تعريف 9.1:

نسمي كثيرات الحدود تشيبيتشاف من الدرجة n كل الدوال التي تأخذ الشكل:

$$U_n : [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto U_n(x) = \frac{\sin(n(\arccos x))}{\sin(\arccos x)}$$

وتسمى العائلة $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثاني.

تعريف 10.1:

نسمي كثيرات الحدود تشيبيتشاف من الدرجة n كل الدوال التي تأخذ الشكل:

$$V_n : [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto V_n(\cos x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

وتسمى العائلة $(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثالث.

تعريف 11.1:

نسمي كثيرات الحدود تشيبيتشاف من الدرجة n كل الدوال التي تأخذ الشكل:

$$W_n : [-1,1] \to [-1,1]$$
$$x \mapsto W_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

وتسمى العائلة $(W_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الرابع.

تعريف 12.1[2]:

تعطى العلاقة التراجعية لكثيرات الحدود المعمّمة لفيبوناتشي كالتالي:

$$\begin{cases} P_n(x) = pxP_{n-1}(x) + qP_{n-2}(x), \ \forall n \geq 2 \\ P_0(x) = \alpha, \ P_1(x) = \beta x + \gamma \end{cases} \quad (9.1)$$

حيث: $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ و $p,\ q \in \mathbb{Z}$.

بالاعتماد على العلاقة (9.1)، نتحصل على النتائج المدونة في الجدول الموالي:

متتالية كثيرات الحدود	العلاقة التراجعية
تشيبيتشاف من النوع الأول $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$	$\begin{cases} T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \\ T_0(x) = 1,\ \ T_1(x) = x \end{cases}$
تشيبيتشاف من النوع الثاني $\{U_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$	$\begin{cases} U_{n+2}(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_n(x) \\ U_0(x) = 1,\ \ U_1(x) = 2x \end{cases}$
تشيبيتشاف من النوع الثالث $\{V_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$	$\begin{cases} V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x) \\ V_0(x) = 1,\ \ V_1(x) = 2x - 1 \end{cases}$
تشيبيتشاف من النوع الرابع $\{W_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$	$\begin{cases} W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x) \\ W_0(x) = 1,\ \ W_1(x) = 2x + 1 \end{cases}$

الجدول 3.1: العلاقات التراجعية لكثيرات الحدود تشيبيتشاف بأنواعها الأربعة.

5.1 الدوال المولدة

في هذه الفقرة سنتطرق إلى الدوال المولدة العادية لبعض الأعداد وكثيرات الحدود المتعامدة، للمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع لـ [1، 2، 5].

1.5.1. الدوال المولدة العادية

تعريف 13.1:

نرفق بكل متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ السلسلة المولدة العادية التالية:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \qquad (10.1)$$

تسمّى $g(x)$ بالدالة المولدة العادية المرفقة بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

نظرية 7.1:

لتكن متتالية تعميم فيبوناتشي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بالعلاقة التراجعية التالية:

$$\begin{cases} u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2},\ \ \forall n \geq 2 \\ u_0 = \alpha,\ u_1 = \beta \end{cases}.$$

حيث: $p,q \in \mathbb{N}^*$ و $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{C}^*$.

الدالة المولدة المرفقة بـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي:

$$g(z) = \frac{\alpha + (\beta - p\alpha)z}{1 - pz - qz^2}.$$

البرهان:

لدينا:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n$$

ومنه:

$$\begin{aligned}g(z)&=u_0+u_1z+\sum_{n=2}^{+\infty}u_n z^n\\&=\alpha+\beta z+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(pu_{n-1}+qu_{n-2}\right)z^n\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}g(z)&=\alpha+\beta z+p\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-1}z^n+q\sum_{n=2}^{+\infty}u_{n-2}z^n\\&=\alpha+\beta z+pz\sum_{n=1}^{+\infty}u_n z^n+qz^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n\end{aligned}$$

أي:

$$\begin{aligned}g(z)&=\alpha+\beta z+pz\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n z^n-\alpha\right)+qz^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_n z^n\\&=\alpha+\beta z-p\alpha z+pzg(z)+qz^2g(z),\end{aligned}$$

ومنه ينتج لدينا:

$$g(z)=\frac{\alpha+\left(\beta-p\alpha\right)z}{1-pz-qz^2}.$$

وهو المطلوب.

انطلاقا من النظرية 7.1، نتحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي:

الدالة المولدة	q	p	β	α	**الأعداد**
$\frac{z}{1-6kz+z^2}$	-1	$6k$	1	1	k-متوازنة
$\frac{1-3kz}{1-6kz+z^2}$	-1	$6k$	$3k$	1	k-لوكاس المتوازنة
$\frac{1}{1-kz-z^2}$	1	k	k	1	k-فيبوناتشي
$\frac{2-kz}{1-kz-z^2}$	1	k	k	2	k-لوكاس
$\frac{kz}{1-2z-kz^2}$	k	0	1	0	k-بال

k-جاكوبستال	0	1	k	2	$\frac{z}{1-kz-2z^2}$
k-مارسان	0	1	$3k$	-2	$\frac{z}{1-3kz+2z^2}$

الجدول 4.1: الدوال المولدة لبعض الأعداد الشهيرة.

نظرية 8.1:

من أجل $g(x)$ و $h(x)$ الدالتان المولدتان للمتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ على الترتيب، لدينا الخواص التالية:

1. الدالة المولدة للمتتالية $(c_1a_n+c_2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي $c_1g(x)+c_2h(x)$ حيث c_1 و c_2 ثابتان.
2. الدالة المولدة للمتتالية $(a_0+a_1+\cdots+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تعطى بـ $\frac{g(x)}{1-x}$.
3. الدالة مولدة للمتتالية $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي $xg'(x)$ حيث $g'(x)=\frac{dg(x)}{dx}$.
4. $g(x)h(x)$ دالة مولدة لمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)_{n\in\mathbb{N}}$.

البرهان:

1. لدينا:

$$\begin{aligned} c_1g(x)+c_2h(x) &= c_1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+c_2\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)x^n. \end{aligned}$$

ومنه: $c_1g(x)+c_2h(x)$ الدالة المولدة للمتتالية $(c_1a_n+c_2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{1-x} &= \frac{1}{1-x}\times\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)x^n. \end{aligned}$$

ومنه: $\frac{g(x)}{1-x}$ الدالة المولدة للمتتالية $(a_0+a_1+...+a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. لدينا:

$$\begin{aligned} xg'(x) &= x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)' = x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n = \sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n. \end{aligned}$$

ومنه: $xg'(x)$ الدالة المولدة للمتتالية $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. لدينا:

$$g(x)h(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n.$$

ومنه: $g(x)h(x)$ الدالة المولدة لمتتالية الالتفاف $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)$.
وهو المطلوب.

2.5.1 الدوال المولدة المرفقة بكثيرات الحدود المتعامدة

نظرية 9.1:

الدالة المولدة المرفقة بمتتالية كثيرات الحدود تشيبيتشاف المعممة المعرفة بالعلاقة التراجعية (9.1) تعطى بـ:

$$g(z)=\frac{\alpha+((\beta-\alpha p)x+\gamma)z}{1-pxz-qz^2}.$$

البرهان:

بنفس طريقة برهان النظرية 7.1.

انطلاقا من النظرية 9.1 يمكننا استنتاج الجدول التالي:

كثيرات الحدود	p	q	α	β	γ	الدوال المولدة
$T_n(x)$	2	-1	1	1	0	$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$
$U_n(x)$	2	-1	1	2	0	$\frac{1}{1-2xz+z^2}$
$V_n(x)$	2	-1	1	2	-1	$\frac{1-z}{1-2xz+z^2}$
$W_n(x)$	2	-1	1	2	1	$\frac{1+z}{1-2xz+z^2}$

الجدول 5.1: الدوال المولدة لكثيرات الحدود لتشيبيتشاف بأنواعها الأربعة.

3.5.1 الصيغة الصريحة لبعض الأعداد الشهيرة

فيما يلي سنقدم الصيغ الصريحة لبعض الأعداد نعتمد في برهانها على الدوال المولدة لها.

نظرية 10.1:

من أجل كل عدد طبيعي n، تعطى الصيغة الصريحة لأعداد k-متوازنة و k-مارسان بالعلاقتين التاليتين:

$$B_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(6k)^{n-2j-1}. \tag{11.1}$$

$$M_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(3k)^{n-2j-1}2^j. \qquad (12.1)$$

على الترتيب.

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}z^n&=\frac{z}{1-6kz+z^2}\\&=\frac{z}{1-\left(6kz-z^2\right)}\\&=z\sum_{n=0}^{\infty}\left(6kz-z^2\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(6k)^{n-j}z^{n+j+1}.\end{aligned}$$

باستبدال $(n+j+1)$ بـ (n) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(6k)^{n-2j-1}z^n.$$

بالمطابقة نجد:

$$B_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(6k)^{n-2j-1}.$$

وهي الصيغة الصريحة لأعداد k-متوازنة المعطاة بالعلاقة (11.1). بنفس الطريقة نتحصل على العلاقة (12.1).

وهو المطلوب.

نظرية 11.1:[4]

من أجل n عدد طبيعي، تعطى الصيغة الصريحة لأعداد k-فيبوناتشي بالعلاقة التالية:

$$F_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{j}k^{n-2j}. \qquad (13.1)$$

نظرية 12.1:[4]

من أجل n عدد طبيعي، تعطى الصيغة الصريحة لأعداد k-بال و k-جاكوبستال على الترتيب بالعلاقتين التاليتين:

$$P_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-j-1}{j}2^{n-2j-1}k^j, \qquad (14.1)$$

$$J_{k,n}=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-j-1}{j}k^{n-2j-1}2^j. \qquad (15.1)$$

نظرية 13.1:

الصيغة الصريحة لكثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوع الثاني تعطى بالعلاقة التالية:

$$U_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(2x)^{n-2j},\ \ n\in\mathbb{N}. \qquad (16.1)$$

البرهان:

باستعمال نفس طريقة برهان النظرية 11.1، نجد المطلوب.

الخاتمة:

في الختام، نذكر بأننا قدمنا في هذا الفصل بعض المفاهيم العامة التي سنلجأ إليها في الفصول القادمة، حيث تم التطرق إلى بعض التعريفات الخاصة أعداد-kمتوازنة، k-لوكاس المتوازنة، k-فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال و k-مارسان. كما قمنا بتعريف كثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوع الأول، الثاني، الثالث والرابع، وكذا الدوال المولدة المرفقة لكل نوع.

الفصل الثاني

التوابع التناظرية الأولية والتامة

سنتطرق في هذا الفصل إلى أهم العناصر المتعلقة بنظرية التوابع التناظرية كالمعادلات الجبرية من الدرجة الثانية، التي تساعدنا في تقديم تعاريف وخصائص التوابع التناظرية الأولية والتامة.

1.2 المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية

لتكن المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية $x^2-a_1x-a_2=0$ (حيث: a_1 و a_2 من الحقل IK).

تعريف 1.2: (المصفوفة المرافقة)

المصفوفة $M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ المرفقة بالمعادلة الجبرية من الدرجة الثانية وتسمى بالمصفوفة المرافقة.

نعتبر متتالية فيبوناتشي المعممة المعرفة بـ:

$$\begin{cases} u_{n+1}=a_1u_n+a_2u_{n-1}, & n\geq 1 \\ u_0=0, \; u_1=1 \end{cases}.$$

ويمكن كتابتها على الشكل المصفوفي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}; \; u_0=0, \; u_1=1,$$

إذن:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$u_{n+1}=a_1u_n+a_2u_{n-1},$$

وَ:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}=M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

حيث M هي المصفوفة المرافقة لتعميم فيبوناتشي.

نضع: $q_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$، نتحصل على العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} q_{n+1}&=\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}=\frac{a_1u_{n+1}+a_2u_n}{u_{n+1}}=\frac{a_1u_{n+1}}{u_{n+1}}+\frac{a_2u_n}{u_{n+1}} \\ &=a_1+\frac{a_2u_n}{u_{n+1}}=a_1+\frac{a_2}{q_n}, \end{aligned}$$

بالتكرار نجد:

$$q_{n+1}=a_1+\frac{a_2}{q_n}=a_1+\cfrac{a_2}{a_1+\cfrac{a_2}{q_{n-1}}}=a_1+\cfrac{a_2}{a_1+\cfrac{a_2}{a_1+\cfrac{a_2}{q_{n-1}}}}=\ldots,$$

حيث q_{n+1} هو نشر لكسور مستمرة.

خاصية 1.2:

إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} q_n = l$ فإنّ : $l=\lambda_1$ أو $l=\lambda_2$.

البرهان:

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} q_n = l$ ، و $f(x)=a_1+\frac{a_2}{x}$ هو التابع المرافق لـ (q_n). حيث $f(x)$ مستمر على $\mathbb{C}^*$

ومنه: $l=a_1+\frac{a_2}{l}$

إذن: $l^2=a_1l+a_2$، وبالتالي نجد المعادلة:

$$l^2-a_1l-a_2=0, \qquad (1.2)$$

إذن حلول (1.2) هي: $l=\lambda_1$ أو $l=\lambda_2$.

❖ **القيم والأشعة الذاتية للمصفوفة M**

كثير الحدود المميز المرفق بالمصفوفة M يعطى بـ:

$$P_M(\lambda)=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-a_1\lambda-a_2$$

حلول $P_M(\lambda)=0$ هي: λ_1 أو λ_2 وهي القيم الذاتية للمصفوفة M وهي أيضا حلول المعادلة $x^2=a_1x+a_2$.

حيث: $a_1^2>4a_2$ ، $\lambda_{1,2}=\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2}$.

الأشعة الذاتية المرفقة لـ λ_1 و λ_2 تعطى كالتالي:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ i=1,2$$

إذن:

$$\begin{cases} a_1x+a_2y=\lambda_i x \\ x=\lambda_i y \end{cases}$$

مما سبق ينتج لنا: $x=\lambda_i y$

إذن: $v_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v_2=\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هي الأشعة الذاتية للمصفوفة M.

نفرض $\lambda_1\neq\lambda_2$ وَ $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ بماأن القيم الذاتية بسيطة فإن M قابلة للتقطير، المصفوفة القطرية هي D تعطى بـ :

$$D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ مع } P=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}،$$

لدينا:
$$M=PDP^{-1},$$

إذن:

$$M=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

و:
$$M^n = PD^nP^{-1},$$

وعليه المصفوفة M^n تعطى بـ:
$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{\lambda_1^{n}-\lambda_2^{n}}{\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

ملاحظة 1.2:

في الحالة الخاصة للمعادلة $x^2 = 6kx-1$ فإنّ الجذور λ_1, λ_2 هي $\lambda_1 = 3k+\sqrt{9k^2-1}$ وآخر $\lambda_2 = 3k-\sqrt{9k^2-1}$ والمتتالية (u_n) هي متتالية k-المتوازنة $B_{k,n}$.

2.2 التوابع التناظرية

في هذه الفقرة سنتطرق إلى التوابع التناظرية الأولية والتامة، وتقديم بعض الخصائص حولها، للمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع للمراجع [1، 2، 5].

تعريف 2.2:

نقول أن التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ذو n متغير أنه متناظر على الحقل IK، إذا كان من أجل كل تبديلة δ من المجموعة $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ تحقق العلاقة التالية:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_{\delta(1)}, x_{\delta(2)}, \ldots x_{\delta(n)}).$$

1.2.2 التوابع التناظرية الأولية

فيما يلي نعتبر $n, k \in \mathbb{N}$.

تعريف 3.2:

نعرف التابع التناظري الأولي $e_k^{(n)}$ من الرتبة k بـ:

$$e_k^{(n)} = e_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}.$$

مع $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n = 1 \vee 0$.

أمثلة:

1- تقبل كل معادلة من الدرجة الثانية جذرين مختلفين λ_1, λ_2 حيث:

$$\begin{cases} e_0^{(2)} = 1 \\ e_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2. \\ e_2^{(2)} = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

2- تقبل كل معادلة من الدرجة الثالثة ثلاث جذور λ_1 , λ_2 , λ_3 حيث:

$$\begin{cases} e_0^{(3)} = 1 \\ e_1^{(3)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ e_2^{(3)} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ e_3^{(3)} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases}.$$

خاصية 2.2:

مهما يكن $n,k \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}.$$

البرهان:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)} &= \lambda_{n+1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n} \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0} \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+1=k-1+1=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0} \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+1=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$e_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} e_{k-1}^{(n)} + e_k^{(n)}$$

وهو المطلوب.

خاصية 3.2:

الدالة المولدة للتوابع التناظرية الأولية تعطى بـ:

$$E(z) = \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} z^n = \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z).$$

مع $e_k^{(n)}$ معدومة من أجل $k \geq n$.

البرهان:

للبرهان على الخاصية 3.2 نستعمل البرهان بالتراجع.

نضع:

$$P(n):\ E(z) = \sum_{k=0}^{n} e_k^{(n)} z^n = \prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i z)$$

من أجل $n=2$

$$\prod_{i=1}^{2}(1+\lambda_i z)=(1+\lambda_1 z)(1+\lambda_2 z)$$
$$=1+(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2 z^2$$
$$=e_0^{(2)}+e_1^{(2)}z+e_2^{(2)}z^2$$
$$=\sum_{k=0}^{2}e_k^{(2)}z^k$$

نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن:

$$\sum_{k=0}^{n+1}e_k^{(n)}z^n=\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)$$

لدينا:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)=\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i z)\left(1+\lambda_{n+1}z\right)$$

أي:

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)=\sum_{k=0}^{n}e_k^{(n)}z^k\left(1+\lambda_{n+1}z\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}e_k^{(n)}z^k+\lambda_{n+1}\sum_{k=0}^{n}e_k^{(n)}z^{k+1}$$
$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)=\sum_{k=0}^{n}e_k^{(n)}z^k+\lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}e_{k-1}^{(n)}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(e_k^{(n)}+\lambda_{n+1}e_{k-1}^{(n)})z^k$$
$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+\lambda_i z)=\sum_{k=0}^{+\infty}e_k^{(n)}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}e_k^{(n)}z^k$$

وهو المطلوب.

2.2.2 التوابع التناظرية التامة

تعريف 4.2:

نعرّف التابع التناظري التام $h_k^{(n)}$ من الرتبة k بـ:

$$h_k^{(n)}=h_k(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n},\ (k\geq 0),$$

مع: $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \geq 0$.

أمثلة:

1- تقبل كل معادلة من الدرجة الثانية حلين λ_1, λ_2 حيث:

$$\begin{cases} h_0^{(2)} = 1 \\ h_1^{(2)} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ h_2^{(2)} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 \\ h_3^{(2)} = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2 \\ \vdots \end{cases}$$

2- معادلة من الدرجة الثالثة تقبل ثلاث جذور $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ حيث:

$$\begin{cases} h_0^{(3)} = 1 \\ h_1^{(3)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ h_2^{(3)} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ h_3^{(3)} = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda^2{}_2 + \lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3^2 + \lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ \vdots \end{cases}$$

خاصية 4.2:

مهما يكن $n, k \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n-1)} + h_k^{(n)}$$

البرهان:

1- لدينا:

$$\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} = \lambda_{n+1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}$$

$$= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k-1} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i_{n+1}+1} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}$$

$$= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+(i_{n+1}+1)=k-1+1=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{(i_{n+1}+1)} + \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+0=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{0}$$

لدينا: $i_{n+1} \geq 1$ إذن: $i_{n+1}+1 \geq 1$ نضع: $i'_{n+1} = i_{n+1}+1 \vee 0$ وبالتالي: $i'_{n+1} \geq 0$

إذن:

$$\lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)} = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n+i'_{n+1}=k} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}\lambda_{n+1}^{i'_{n+1}}.$$

فينتج لنا المطلوب:

$$h_k^{(n+1)} = \lambda_{n+1} h_{k-1}^{(n+1)} + h_k^{(n)}.$$

وهو المطلوب.

خاصية 5.2:

الدالة المولدة للتوابع التناظرية التامة من الرتبة k تعطى بـ:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{n} h_k^{(n)} z^n = \prod_{i=1}^{n} (1-\lambda_i z)^{-1}.$$

البرهان:
للبرهان على الخاصية 5.2 بنفس طريقة برهان الخاصية 3.2.

3.2 التوابع التناظرية التامة والأولية وبعض خصائصها

لإعطاء تعريف للتوابع التناظرية نعتمد على المصفوفة M^n المعطاة في الفقرة 1.2 واعتمادا على التعريف 4.2 للتابع التناظري التام لدينا التعريف أدناه:

تعريف 5.2:

لتكن $E=\{e_1,e_2\}$ أبجدية، نعرف التابع المتناظر S_n المرفق بالأبجدية E بـ:

$$S_n(E)=S_n(e_1+e_2)=\frac{e_1^{n+1}-e_2^{n+1}}{e_1-e_2},$$

من أجل $n<0$ لدينا دائما: $S_n(E)=0$.

مع:

$$\begin{aligned}&S_0(E)=h_0=1,\\&S_1(E)=h_1=e_1+e_2,\\&S_2(E)=h_2={e^2}_1+{e^2}_2+e_1e_2,\\&\vdots\end{aligned}$$

تعريف 6.2[7]**:**

لتكن الأبجديتين A و B، نرمز بـ$S_n(A-B)$ لمعاملات السلسلة المعرفة بـ:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(A-B)z^n=\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{\prod_{a\in A}(1-az)}. \qquad (2.2)$$

خاصية 6.2:

لتكن $A=\{a\}$ أبجدية، لدينا:

$$\frac{\prod_{b\in B}(1-bz)}{1-az}=1+\cdots+z^{j-1}S_{j-1}(a-B)+z^j\frac{S_j(a-B)}{1-az}.$$

للبرهان على الخاصية 6.2 نستعمل التوطئة التالية:

توطئة 1.2[25]**:**

لتكن الأبجديتين $A=\{a\}$ و $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ لدينا:

$$S_{n+k}(a-B)=a^kS_n(a-B).$$

البرهان على الخاصية 6.2:
لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(a-B)z^n=1+S_1(a-B)+\cdots+S_n(a-B)z^n+S_{n+1}(a-B)z^{n+1}+\cdots$$

من التوطئة 1.2 نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a-B)z^n = 1+S_1(a-B)+\cdots+z^n\left(S_n(a-B)+S_{n+1}(a-B)z+\cdots\right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a-B)z^n = 1+S_1(a-B)+\cdots+z^n\left(S_n(a-B)+aS_n(a-B)z+a^2S_n(a-B)z^2+\cdots\right)$$

أي:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a-B)z^n = 1+S_1(a-B)+\cdots+S_{n-1}(a-B)z^{n-1}+z^nS_n(a-B)(1+az+a^2z^2+\cdots)$$

نعلم أنّ:

$$\frac{1}{1-az} = 1+az+(az)^2+\cdots$$

فينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(a-B)z^n = 1+S_1(a-B)+\cdots+S_{n-1}(a-B)z^{n-1}+z^nS_n(a-B)(1+az+a^2z^2+\cdots)$$

$$= 1+\cdots+S_{n-1}(a-B)z^{n-1}+z^n\frac{S_{n-1}(a-B)}{1-az}.$$

وهو المطلوب.

نتيجة 1.2:

- من أجل $B=\{0,0,\ldots 0\}$ في (2.2) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n = \frac{1}{\prod_{b\in B}(1-az)} = H(z).$$

- من أجل $A=\{0,0,\ldots 0\}$ في (2.2) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-B)z^n = \prod_{b\in B}(1-bz) = E(-z).$$

خاصية 7.2[6]**:**

بأخذ $A=\{0,0,\ldots 0\}$ أو $B=\{0,0,\ldots 0\}$ ينتج لنا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A-B)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-B)z^n. \qquad (3.2)$$

ملاحظة 4.2:

من العلاقتين (2.2) و(3.2) ومن أجل $A=B$، نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)z^n = 1,$$

من الملاحظة 4.2 لدينا:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(A)z^n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)z^n}, \qquad (4.2)$$

مع: $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n(-A)z^n = \prod_{a\in A}(1-az)$

من (3.2) نجد أن:

$$S_n(A-B)=\sum_{k=0}^{n} S_{n-k}(A)S_k(-B).$$

ملاحظة 5.2:

لما $n > Card\ (B)$، لدينا: $S_n(-B)=0$.

في هذا الجزء، سنتطرق للعبارة الصريحة بواسطة التابع التناظري S_n والتي تم الحصول عليها من طرف ن. صابة [4] ونعيد التذكير بالبرهان للفائدة.

نظرية 1.2:

من أجل كل عدد طبيعي n، الصيغة الصريحة للتابع التناظري $S_n\left(a_1+[-a_2]\right)$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$S_n\left(a_1+[-a_2]\right)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-j}{j}\left(a_1-a_2\right)^{n-2j}\left(a_1a_2\right)^j. \tag{5.2}$$

البرهان:

من العلاقة (4.2) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)z^n=\frac{1}{1-\left(a_1-a_2\right)z-a_1a_2z^2}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)z^n=\frac{1}{1-\left(\left(a_1-a_2\right)z+a_1a_2z^2\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(a_1-a_2\right)z+a_1a_2z^2\right)^n$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\left(a_1-a_2\right)z\right)^{n-j}\left(a_1a_2z^2\right)^j$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(a_1-a_2\right)^{n-j}\left(a_1a_2\right)^j z^{n+j}.$$

باستبدال $(n+j)$ بـ (n) نجد:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-j}{j}\left(a_1-a_2\right)^{n-2j}\left(a_1a_2\right)^j z^n.$$

بالمطابقة نجد:

$$S_n\left(a_1+[-a_2]\right)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-j}{j}\left(a_1-a_2\right)^{n-2j}\left(a_1a_2\right)^j.$$

وهو المطلوب.

من العلاقة (5.2) نجد العلاقة:

$$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-j-1}{j}\left(a_1-a_2\right)^{n-2j-1}\left(a_1a_2\right)^j. \tag{6.2}$$

انطلاقا من النظرية 1.2 والعلاقة (6.2) نتحصل على الجدول التالي:

الأعداد	التابع التناظري	العبارة الصريحة
k-متوازنة $B_{n,k}$	$S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)$	$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}(6k)^{n-2j-1}$
k-لوكاس المتوازنة $C_{n,k}$	$S_n\left(a_1+[-a_2]\right)+(3-6k)S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)$	$\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j-1}{j}\left(\frac{j}{n-2j}+\frac{1}{2k}\right)(6k)^{n-2j}$

الجدول 1.2: التابع التناظري والعبارة الصريحة لأعداد k-متوازنة و k-لوكاس المتوازنة.

نظرية 2.2:[4]

الصيغة الصريحة لكثيرات الحدود تشيبيتشاف من النوع الأول تعطى بـ:

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}(2x)^{n-2j}.$$

الخاتمة:

في هذا الفصل قدمنا بعض خصائص وتعاريف الدوال التناظرية الأولية والتامة، التي تساعدنا على ايجاد الدوال المولدة لأعداد وكثيرات الحدود والتي سنتكلم عنها في الفصول الموالية.

الفصل الثالث

الدوال المولدة لجداءات $k-$ أعداد متوازنة مع بعض الأعداد كثيرات الحدود تشيبيتشاف

في هذا الفصل سنتطرق الى دراسة تأثير المؤثر $\delta_{e_1e_2}^{2-l}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+a_2\right)e_1^n z^n$ والذي يسمح لنا بالحصول على الدوال المولدة لجداءات كل من أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس المتوازنة مع بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية، بالإضافة إلى جداءات كل من أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس المتوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الأول، الثاني، الثالث والرابع و ذلك بإجراء تطبيقات على النظرية 1.3 أدناه و هذا هو الهدف من المقال المنشور في المجلة:

- **F. Yakoubi**, A. Boussayoud, K. V. V. Kanuri, A New class of ordinary generating functions of binary products of k -Lucas balancing numbers with Chebyshev polynomials, *Math. Eng. Sci. Aerosp. (MESA)*, **12**(1), 135- 150, **2021**.

1.3 تعاريف ومفاهيم

في هذه الفقرة سنقدم بعض المفاهيم والتعاريف التي نحتاجها في الفقرات الموالية، وللمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع للمراجع التالية [26، 27].

تعريف 1.3:

ليكن g تابع معرف على $\mathbb{R}^n$. نعرف الفرق المقسوم ∂ بالعبارة التالية:

$$\partial_{x_i x_{i+1}} g(x_1,x_2,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)=\frac{g(x_1,x_2,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)-g(x_1,x_2,\cdots,x_{i+1},x_i,\cdots,x_n)}{x_i-x_{i+1}}.$$

تعريف 2.3:

نعتبر الأبجدية $A=\{a_1,a_2\}$ ، نعرف التابع المتناظر المرفق بالأبجدية A كما يلي:

$$S_n(A)=S_n(a_1+a_2)=\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{a_1-a_2},\ \ n\in\mathbb{N}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
S_0(A)&=h_0\left(a_1,a_2\right)=1,\\
S_1(A)&=h_1\left(a_1,a_2\right)=a_1+a_2,\\
S_2(A)&=h_2\left(a_1,a_2\right)=a^2{}_1+a^2{}_2+a_1a_2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

و $S_n(A)=0$ من أجل $n<0$.

تعريف 3.3[23]**:**

لتكن $A=\{a_1,a_2\}$ أبجدية، نعرف المؤثر التناظري $\delta_{a_1a_2}^k$ بـ:

$$\delta_{a_1a_2}^k f(a_1)=\frac{a_1^k f(a_1)-a_2^k f(a_2)}{a_1-a_2}. \qquad (1.3)$$

من أجل $f(a)=a$ في العلاقة (1.3) لدينا:

$$\delta_{a_1a_2}^{k} f(a_1)=\frac{a_1^{k+1}-a_2^{k+1}}{a_1-a_2}$$
$$=S_k(a_1+a_2).$$

2.3 نتائج أساسية

نظرية 1.3:

لتكن الأبجديتين $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ ، $E=\{e_1,e_2\}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)S_{n-l+1}(E)z^n=\frac{S_{1-l}(E)-e_1^{2-l}e_2^{2-l}z^{3-l}\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-l+3}(-A)S_n(E)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)},\ l\in\{0,1,2\}. \tag{2.3}$$

البرهان:

بإدخال المؤثر التناظري $\delta_{e_1e_2}^{2-l}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(e_1z)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)e_1^nz^n$ نجد:

$$\delta_{e_1e_2}^{2-l}\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)e_1^nz^n=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)e_1^{2-l+n}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)e_2^{2-l+n}z^n}{e_1-e_2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)\frac{e_1^{2-l+n}-e_2^{2-l+n}}{e_1-e_2}z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(A)S_{n-l+1}(E)z^n$$

من جهة أخرى وبإدخال المؤثر التناظري $\delta_{e_1e_2}^{2-l}$ على السلسلة القابلة للقلب $f(e_1z)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)e_1^nz^n}$ لدينا:

$$\delta_{e_1e_2}^{2-l}\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n}=\frac{\frac{e_1^{2-l}}{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n}-\frac{e_2^{2-l}}{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n}}{e_1-e_2}$$

$$=\frac{e_1^{2-l}\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n-e_2^{2-l}\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n}{(e_1-e_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)\left(\frac{e_1^{2-l}e_2^n-e_2^{2-l}e_1^n}{e_1-e_2}\right)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}e_1^ne_2^nS_n(-A)S_{1-l-n}(E)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)},$$

ومنه:

$$\delta_{e_1e_2}^{2-l}\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n}=\frac{\sum_{n=0}^{1-l}e_1^ne_2^nS_n(-A)S_{1-l-n}(E)z^n+\sum_{n=3-l}^{\infty}e_1^ne_2^nS_n(-A)S_{1-l-n}(E)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{\sum_{n=0}^{1-l}e_1^ne_2^nS_n(-A)S_{1-l-n}(E)z^n-\sum_{n=3-l}^{\infty}S_n(-A)e_1^{2-l}e_2^{2-l}\frac{e_1^{n+l-2}-e_2^{n+l-2}}{e_1-e_2}z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{S_{1-l}(E)-e_1^{2-l}e_2^{2-l}\sum_{n=3-l}^{\infty}S_n(-A)S_{n+l-3}(E)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{S_{1-l}(E)-e_1^{2-l}e_2^{2-l}z^{3-l}\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-l+3}(-A)S_n(E)z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(-A)(e_2z)^n\right)}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 2.3:

لتكن الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ ، $E=\{e_1,e_2\}$ و k عدد طبيعي لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_{n+l-1}(e_1+e_2)z^n=\frac{S_{l-1}(e_1+e_2)+e_1e_2S_1(a_1+a_2)S_{l-2}(e_1+e_2)z-a_1a_2e_1e_2\delta_{e_1e_2}(e_2^{l-1})z^2}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_2z)^n\right)}. \tag{3.3}$$

البرهان:

بإدخال المؤثر $\delta_{e_1e_2}$ على السلسلة $f(e_1z)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)e_1^{n+l}z^n$ نجد:

$$\delta_{e_1e_2}\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)e_1^{n+l}z^n=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)e_1^{n+l}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)e_2^{n+l}z^n}{e_1-e_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)\frac{e_1^{n+l}-e_2^{n+l}}{e_1-e_2}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1,a_2)S_{n+l-1}(e_1,e_2)z^n$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\delta_{e_1e_2}\frac{e_1^l}{\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_1z)^n}=\frac{\frac{e_1^l}{\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_1z)^n}-\frac{e_2^l}{\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_2z)^n}}{e_1-e_2}$$

$$=\frac{e_1^l\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_2z)^n-e_2^l\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_1z)^n}{(e_1-e_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n(a_1,a_2)(-e_2z)^n\right)},$$

أي:

$$\delta_{e_1e_2}\frac{e_1^l}{\sum_{n=0}^{\infty}e_n\left(a_1,a_2\right)(-e_1z)^n}=\frac{e_1^l-e_2^l-\left(a_1+a_2\right)\left(e_1^le_2-2e_2^le_1\right)z-a_1a_2e_1e_2\dfrac{\left(e_1e_2^{l-1}-e_2e_1^{l-1}\right)z^2}{e_1-e_2}}{\left(e_1-e_2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n\left(a_1,a_2\right)(-e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n\left(a_1,a_2\right)(-e_2z)^n\right)}$$

$$=\frac{S_{l-1}\left(e_1,e_2\right)+e_1e_2S_1\left(a_1,a_2\right)S_{l-2}\left(e_1,e_2\right)z-a_1a_2e_1e_2\delta_{e_1e_2}\left(e_2^{l-1}\right)z^2}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n\left(a_1,a_2\right)(-e_1z)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}e_n\left(a_1,a_2\right)(-e_2z)^n\right)}.$$

وهو المطلوب.

بوضع $l=1$ في النظرية 1.3 نجد الخاصية التالية:

خاصية 1.3[16]**:**

لتكن الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ و $E=\{e_1,e_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(e_1+e_2)z^n=\frac{1-e_1e_2a_1a_2z^2}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1-e_2az)}. \tag{4.3}$$

من العلاقة (4.3) لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(a_1+a_2)S_{n-1}(e_1+e_2)z^n=\frac{z-e_1e_2a_1a_2z^3}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1-e_2az)}. \tag{5.3}$$

بوضع $l=2$ في النظرية 1.3 نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 2.3[16]**:**

لتكن الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ و $E=\{e_1,e_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_{n-1}(e_1+e_2)z^n=\frac{(a_1+a_2)z-a_1a_2\left(e_1+e_2\right)z^2}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1-e_2az)}. \tag{6.3}$$

بوضع $l=3$ في النظرية (2.3) نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 3.3:

نعتبر الأبجديتين $A=\{a_1,a_2\}$ و $E=\{e_1,e_2\}$، لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_{n+2}(e_1+e_2)z^n=\frac{\left(\left(e_1+e_2\right)^2-e_1e_2\right)-e_1e_2\left(a_1+a_2\right)\left(e_1+e_2\right)z+a_1a_2e_1^2e_2^2z^2}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1-e_2az)}. \tag{7.3}$$

بالاعتماد على العلاقة (7.3) نجد العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}(a_1+a_2)S_{n+1}(e_1+e_2)z^n=\frac{\left(\left(e_1+e_2\right)^2-e_1e_2\right)z-e_1e_2\left(a_1+a_2\right)\left(e_1+e_2\right)z^2+a_1a_2e_1^2e_2^2z^3}{\prod_{a\in A}(1-e_1az)\prod_{a\in A}(1-e_2az)}. \tag{8.3}$$

- باستبدال e_2 بــ $(-e_2)$ و a_2 بــ $(-a_2)$ في كل من (4.3)- (8.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_n\left(e_1+[-e_2]\right) z^n=\frac{1-e_1 e_2 a_1 a_2 z^2}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}, \tag{9.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right) z^n=\frac{z-e_1 e_2 a_1 a_2 z^3}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}, \tag{10.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(a_1+[-a_2]\right) S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right) z^n=\frac{(a_1-a_2) z+a_1 a_2\left(e_1-e_2\right) z^2}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}, \tag{11.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+[-a_2]) S_{n+2}(e_1+[-e_2]) z^n=\frac{\left((e_1-e_2)^2+e_1 e_2\right)+e_1 e_2\left(a_1-a_2\right)\left(e_1-e_2\right) z-a_1 a_2 e_1^2 e_2^2 z^2}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}, \tag{12.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2]) S_{n+1}(e_1+[-e_2]) z^n=\frac{\left((e_1-e_2)^2+e_1 e_2\right) z+e_1 e_2\left(a_1-a_2\right)\left(e_1-e_2\right) z^2-a_1 a_2 e_1^2 e_2^2 z^3}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}, \tag{13.3}$$

على الترتيب.

ومن العلاقة (11.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right) S_n\left(e_1+[-e_2]\right) z^n=\frac{\left(e_1-e_2\right) z+e_1 e_2(a_1-a_2) z^2}{(1-e_1 a_1 z)(1+e_1 a_2 z)(1+e_2 a_1 z)(1-e_2 a_2 z)}. \tag{14.3}$$

مع:

$$\begin{aligned}(1-a_1 e_1 z)(1+a_2 e_1 z)(1+a_1 e_2 z)(1-a_2 e_2 z)=&1-(e_1-e_2)(a_1-a_2) z\\&+\left[a_1 a_2\left((e_1-e_2)^2+2 e_1 e_2\right)+e_1 e_2(a_1-a_2)^2\right] z^2\\&-a_1 a_2 e_1 e_2(e_1-e_2)(a_1-a_2) z^3+e_1^2 e_2^2 a_1^2 a_2^2 z^4.\end{aligned}$$

3.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس المتوازنة مع بعض الأعداد من الرتبة الثانية

في هذه الفقرة سنتطرق إلى إيجاد الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس المتوازنة مع أعداد من الرتبة الثانية.

انطلاقا من العلاقات (9.3) -(14.3) نجد الحالات التالية:

❖ **الحالة الأولى:** بأخذ الشروط الابتدائية التالية $\begin{cases}a_1-a_2=6k\\a_1a_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}e_1-e_2=6k\\e_1e_2=-1\end{cases}$ وبتعويضهما في العلاقة (10.3) نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 4.3:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لمربع أعداد k-متوازنة تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 z^n=\frac{z-z^3}{1-36k^2 z-\left(2-72k^2\right) z^2-36k^2 z^3+z^4}.$$

ولدينا النتيجة التالية:

نتيجة 1.3:

العبارة التالية تبقى صحيحة دوما من أجل $n \in \mathbb{N}$

$$B_{k,n}^2 = S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(e_1 + [-e_2]\right).$$

❖ **الحالة الثانية:** انطلاقا من الشـــروط الابتدائية التالية $\begin{cases} a_1 - a_2 = k \\ a_1 a_2 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = 6k \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$ والعلاقة (11.3) نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 5.3:

من أجل $n \in \mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء أعداد k-فيبوناشي مع أعداد k-متوازنة تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} B_{k,n} z^n = \frac{kz + 6kz^2}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right) z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}.$$

ومنه نستخلص النتيجة التالية:

نتيجة 2.3:

العبارة التالية تبقى صحيحة من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$F_{k,n} B_{k,n} = S_n\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(e_1 + [-e_2]\right).$$

❖ **الحالة الثالثة:** اعتمادا على العلاقة (10.3) وتحت الشروط التالية $\begin{cases} a_1 - a_2 = k \\ a_1 a_2 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = 6k \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$

نستخلص الخاصية الموالية:

خاصية 6.3:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-جاكوبستال مع أعداد k-متوازنة تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} B_{k,n} z^n = \frac{z + 2z^3}{1 - 6k^2 z - \left(72k^2 - k - 4\right) z^2 + 12k^2 z^3 + 4z^4},\ n \in \mathbb{N}.$$

ولدينا النتيجة التالية:

نتيجة 3.3:

من أجل $n \in \mathbb{N}$، العبارة التالية تبقى صحيحة دوما:

$$J_{k,n} B_{k,n} = S_{n-1}\left(a_1 + [-a_2]\right) S_{n-1}\left(e_1 + [-e_2]\right).$$

❖ **الحالة الرابعة:** بأخذ الشـــروط الابتدائية التالية $\begin{cases} a_1 - a_2 = 6k \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = 6k \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$ في العلاقات (9.3)-(11.3) و(14.3) نتحصل على النظرية التالية:

نظرية 3.3:

من أجل $n \in \mathbb{N}$، تعطى الدالة المولدة لمربع أعداد k-لوكاس المتوازنة بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n}^{2} z^{n} = \frac{1-27k^{2}z+\left(36k^{2}-1\right)z^{2}-9k^{2}z^{3}}{1-36k^{2}z+\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}.$$

البرهان:

لدينا:

$$C_{k,n} = S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)-3kS_{n-1}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right),$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n}^{2} z^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)-3kS_{n-1}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)\right)\left(S_{n}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)-3kS_{n-1}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)\right)z^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}-3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n-1}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}\\ &\quad -3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}+9k^{2}\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n-1}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}.\end{aligned}$$

باستعمال العلاقات (9.3) - (11.3) و(14.3) نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n}^{2} z^{n} &= \frac{1-z^{2}}{1-36k^{2}z-\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}-\frac{3k\left(6kz-6kz^{2}\right)}{1-36k^{2}z-\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}\\ &\quad -\frac{3k\left(6kz-6kz^{2}\right)}{1-36k^{2}z-\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}+\frac{9k^{2}\left(z-z^{3}\right)}{1-36k^{2}z-\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}\\ &= \frac{1-27k^{2}z+\left(36k^{2}-1\right)z^{2}-9k^{2}z^{3}}{1-36k^{2}z+\left(2-72k^{2}\right)z^{2}-36k^{2}z^{3}+z^{4}}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

❖ **الحالة الخامسة:** انطلاقا من العلاقتين (9.3) و(11.3) واتحت الشروط التالية $\begin{cases} a_{1}-a_{2}=k \\ a_{1}a_{2}=1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_{1}-e_{2}=6k \\ e_{1}e_{2}=-1 \end{cases}$ نجد النظرية التالية:

نظرية 4.3:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-فيبوناشي مع أعداد k-لوكاس المتوازنة تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}C_{k,n} z^{n} = \frac{1+\left(1-3k^{2}\right)z-18k^{2}z^{2}}{1-6k^{2}z-\left(2-35k^{2}\right)z^{2}+6k^{2}z^{3}+z^{4}},\quad n \in \mathbb{N}.$$

البرهان:

لدينا من[18]:

$$F_{k,n} = S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right),$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}C_{k,n} z^{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)\left(S_{n}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)-3kS_{n-1}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)\right)z^{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}-3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(a_{1}+[-a_{2}]\right)S_{n-1}\left(e_{1}+[-e_{2}]\right)z^{n}\end{aligned}$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} C_{k,n} z^n = \frac{1+z^2}{1-6k^2z-\left(2-35k^2\right)z^2+6k^2z^3+z^4} - 3k\,\frac{\left(kz+6kz^2\right)}{1-6k^2z-\left(2-35k^2\right)z^2+6k^2z^3+z^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n} C_{k,n} z^n = \frac{1+\left(1-3k^2\right)z-18k^2z^2}{1-6k^2z-\left(2-35k^2\right)z^2+6k^2z^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

❖ **الحالة السادسة:** بأخذ الشروط الابتدائية التالية $\begin{cases} a_1-a_2=k \\ a_1a_2=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1-e_2=6k \\ e_1e_2=-1 \end{cases}$ في العلاقتين (10.3) و(14.3) نتحصل على النظرية التالية:

نظرية 5.3:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-جاكوبستال مع أعداد k-لوكاس المتوازنة هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} C_{k,n} z^n = \frac{3kz-kz^2-6kz^3}{1-6k^2z+\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4},\ n\in\mathbb{N}.$$

البرهان:

من [18] لدينا: $J_{k,n} = S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right),$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} C_{k,n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)\left(S_n\left(e_1+[-e_2]\right)-3kS_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_n\left(e_1+[-e_2]\right)z^n - 3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(a_1+[-a_2]\right)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n,$$

باستعمال العلاقتين (11.3) و(13.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} C_{k,n} z^n = \frac{6kz-kz^2}{1-6k^2z+\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4} - 3k\,\frac{\left(z+2z^3\right)}{1-6k^2z+\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{k,n} C_{k,n} z^n = \frac{3kz-kz^2-6kz^3}{1-6k^2z+\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4},\ n\in\mathbb{N}.$$

وهو المطلوب.

4.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة و أعداد k- لوكاس المتوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف

في هذه المرة سنعوض (a_1) بـــ $(2a_1)$، a_2 بـــ $(-2a_2)$ و (e_2) بـــ $(-e_2)$ في العلاقتين (4.3) و(6.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_n\left(e_1+[-e_2]\right)z^n = \frac{1-4e_1e_2a_1a_2z^2}{\left(1-2e_1a_1z\right)\left(1+2e_1a_2z\right)\left(1+2e_2a_1z\right)\left(1-2e_2a_2z\right)}, \quad (15.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n = \frac{2(a_1-a_2)z+4a_1a_2\left(e_1-e_2\right)z^2}{\left(1-2e_1a_1z\right)\left(1+2e_1a_2z\right)\left(1+2e_2a_1z\right)\left(1-2e_2a_2z\right)}. \quad (16.3)$$

من العلاقتين (15.3) و(16.3) نتحصل على العلاقتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{z-4e_1e_2a_1a_2z^3}{(1-2e_1a_1z)(1+2e_1a_2z)(1+2e_2a_1z)(1-2e_2a_2z)}, \tag{17.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{(e_1-e_2)z+2e_1e_2(a_1-a_2)z^2}{(1-2e_1a_1z)(1+2e_1a_2z)(1+2e_2a_1z)(1-2e_2a_2z)}. \tag{18.3}$$

بأخذ الشروط الابتدائية التالية: $\begin{cases} e_1-e_2=6k, \\ e_1e_2=-1, \end{cases}$ و $\begin{cases} a_1-a_2=x, \\ 4a_1a_2=-1, \end{cases}$ وتعويضها في العلاقات (15.3)، (16.3)، (17.3) و (18.3) نتحصل على العلاقات التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{1-z^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}, \tag{19.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{2xz-6kz^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}, \tag{20.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{z-z^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}, \tag{21.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)S_{n}\left(e_1+[-e_2]\right)z^n=\frac{6kz-2xz^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}. \tag{22.3}$$

على الترتيب.

وعليه لدينا النظريات التالية:

نظرية 6.3:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ ، الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الأول هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}T_n(x)z^n=\frac{xz-6kz^2+xz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

البرهان:

من [21] لدينا: $T_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right),$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}T_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)\left(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n-x\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n,$$

باستعمال العلاقتين (20.3) و(21.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}T_n(x)z^n=\frac{2xz-6kz^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}-\frac{xz-xz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}T_n(x)z^n=\frac{xz-6kz^2+xz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 7.3:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-لوكاس المتوازنة مع كثيرات الحدود تشـيبتشـاف من النوع الأول تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} T_n(x) z^n = \frac{1-\left(2x^2+18k^2-3kx\right)z+\left(12kx-1\right)z^2-3kxz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4},\ n\in\mathbb{N}.$$

البرهان:

من [21] لدينا:

$$T_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right),$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} T_n(x) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n\left(e_1+[-e_2]\right)+(3-6k)S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)\left(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right)z^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n\\
&\quad -3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n+3kx\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n,\end{aligned}$$

باستعمال العلاقات (19.3) – (22.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} T_n(x) z^n = \frac{1-\left(2x^2+18k^2-3kx\right)z+\left(12kx-1\right)z^2-3kxz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4},\ n\in\mathbb{N}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 8.3:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ ، الدالة المولدة لجداء k-أعداد متوازنة في كثيرات الحدود تشـيبتشـاف من النوع الثاني هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} U_n(x) z^n = \frac{2xz-6kz^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

البرهان:

من [28] لدينا:

$$U_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right),$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} U_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} U_n(x) z^n = \frac{2xz-6kz^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 9.3:

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n ، الدالـة المولدة لجداء أعداد k-لوكـاس المتوازنـة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الثاني تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} U_n(x) z^n = \frac{1-18k^2z-\left(1-6kx\right)z^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

البرهان:

من [28] لدينا:
$$U_n(x)=S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right),$$
ومنه:
$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{k,n}U_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)-3kS_{n-1}\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)\right)S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_n\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)z^n-3k\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)z^n,$$
اعتمادا على العلاقتين (19.3) و(22.3) نجد:
$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{k,n}U_n(x)z^n=\frac{1-18k^2z-(1-6kx)z^2}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$
وهو المطلوب.

نظرية 10.3:

من أجل كل عدد طبيعي n، تعطى الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشـيبتشـاف من النوع الثالث بالعلاقة التالية:
$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}V_n(x)z^n=\frac{(2x-1)z-6kz^2+z^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$
البرهان:

من [10] لدينا:
$$V_n(x)=S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right),$$
ومنه:
$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}V_n(x)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)\left(S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)\right)z^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)z^n-\sum_{n=0}^{\infty}S_{n-1}\left(e_1+\left[-e_2\right]\right)S_{n-1}\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)z^n,$$
باستعمال العلاقتين (21.3) و(22.3) نجد:
$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}V_n(x)z^n=\frac{(2x-1)z-6kz^2+z^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$
وهو المطلوب.

نظرية 11.3:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء أعداد k-لوكاس المتوازنة مع كثيرات الحدود تشـيبتشـاف من النوع الثالث هي:
$$\sum_{n=0}^{\infty}C_{k,n}V_n(x)z^n=\frac{1-\left(18k^2-3k+2x\right)z+(6k+6kx-1)z^2-3kz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$
البرهان:

من [10] لدينا:
$$V_n(x)=S_n\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+\left[-2a_2\right]\right),$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(S_n\left(e_1+[-e_2]\right)-3kS_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)\right)\left(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right)z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} V_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n$$

$$-3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n + 3k\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n,$$

باستعمال العلاقات (19.3)، (20.3)، (21.3) و(22.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} V_n(x) z^n = \frac{1-\left(18k^2-3k+2x\right)z+\left(6k+6kx-1\right)z^2-3kz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 12.3:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} W_n(x) z^n = \frac{\left(2x+1\right)z-6kz^2-z^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4},\ n\in\mathbb{N}.$$

البرهان:

من [10] لدينا: $W_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right),$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)\left(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right)z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right)S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)z^n,$$

انطلاقا من العلاقتين (21.3) و(22.3) نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} W_n(x) z^n = \frac{\left(2x+1\right)z-6kz^2-z^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 13.3:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء أعداد k-لوكاس المتوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الرابع تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} W_n(x) z^n = \frac{1+\left(2x-18k^2-3k\right)z-\left(1+6k-6kx\right)z^2+3kz^3}{1-12kxz+\left(218k^2-1+2x\right)z^2-12kxz^3+z^4}.$$

البرهان:

من [10] لدينا: $W_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)+S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right),$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} W_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(S_n\left(e_1+[-e_2]\right) - 3k S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right) \right)\left(S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right) + S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right) \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right) S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(e_1+[-e_2]\right) S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right) z^n$$

$$-3k \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right) S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right) z^n - 3k \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(e_1+[-e_2]\right) S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right) z^n,$$

بالاعتماد على العلاقات $(19.3) - (22.3)$ نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k,n} W_n(x) z^n = \frac{1+\left(2x-18k^2-3k\right)z - \left(1+6k-6kx\right)z^2 + 3kz^3}{1-12kxz + \left(218k^2-1+2x\right)z^2 - 12kxz^3 + z^4}.$$

وهو المطلوب.

5.3 الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة ذو الدليل المتوالي وغير المتوالي

في هذا الجزء، قمنا بحساب دوال مولدة جديدة لجداءات أعداد k-متوازنة ذات الدليلين المتواليين وغير المتواليين مع بعض الأعداد الشهيرة.

اعتمادا على العلاقتين (12.3) و(13.3) نميز الحالات التالية:

❖ **أولا:** بوضع: $\begin{cases} a_1 - a_2 = k \\ a_1 a_2 = 1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = 6k \\ e_1 e_2 = -1 \end{cases}$ في (13.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1+[-a_2]) S_{n+1}(e_1+[-e_2]) z^n = \frac{\left(36k^2-1\right)z - 36k^2z^2 + z^3}{1-36k^2z - \left(2-72k^2\right)z^2 - 36k^2z^3 + z^4}.$$

ومنه نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 7.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} B_{k,n+2} z^n = \frac{\left(36k^2-1\right)z - 36k^2z^2 + z^3}{1-36k^2z - \left(2-72k^2\right)z^2 - 36k^2z^3 + z^4}.$$

مع: $$B_{k,n} B_{k,n+2} = S_{n-1}(a_1+[-a_2]) S_{n+1}(e_1+[-e_2]).$$

نظرية 14.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} B_{k,n+1} z^n = \frac{\left(36k^2-2\right)z - 36k^2z^2 + 2z^3}{6k - 216k^3z - 6k\left(2-72k^2\right)z^2 - 216k^3z^3 + 6kz^4}.$$

البرهان:

نعلم أن: $$B_{k,n+2} = 6kB_{k,n+1} - B_{k,n}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}B_{k,n+2}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}\left(6kB_{k,n+1} - B_{k,n}\right)z^n$$

$$= 6k\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}B_{k,n+1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 z^n,$$

ولدينا مما سبق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 z^n = \frac{z - z^3}{1 - 36k^2 z - \left(2 - 72k^2\right)z^2 - 36k^2 z^3 + z^4}.$$

وعليه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}B_{k,n+1}z^n = \frac{1}{6k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}B_{k,n+2}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 z^n\right)$$

$$= \frac{1}{6k}\left(\frac{\left(36k^2 - 1\right)z - 36k^2 z^2 - z^3}{1 - 36k^2 z - \left(2 - 72k^2\right)z^2 - 36k^2 z^3 + z^4} + \frac{z - z^3}{1 - 36k^2 z - \left(2 - 72k^2\right)z^2 - 36k^2 z^3 + z^4}\right)$$

$$= \frac{\left(36k^2 - 2\right)z - 36k^2 z^2 + 2z^3}{6k - 216k^3 z - 6k\left(2 - 72k^2\right)z^2 - 216k^3 z^3 + 6kz^4}.$$

وهو المطلوب.

❖ **ثانيا:** بأخذ: $\begin{cases} a_1 - a_2 = 6k \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = k \\ e_1 e_2 = 1 \end{cases}$ في العلاقة (13.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1 + [-a_2])S_{n+1}(e_1 + [-e_2])z^n = \frac{\left(k^2 + 1\right)z + 6k^2 z^2 + z^3}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right)z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}.$$

ومنه نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 7.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالة المولدة لجداء أعداد k-فيبوناتشـــي و k-متوازنة بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}F_{k,n+1}z^n = \frac{\left(k^2 + 1\right)z + 6k^2 z^2 + z^3}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right)z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}.$$

مع:

$$B_{k,n}F_{k,n+1} = S_{n-1}(a_1 + [-a_2])S_{n+1}(e_1 + [-e_2]).$$

نظرية 15.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالـة المولـدة لجداء أعداد k-فيبونـاتشـــي مع أعداد k-متوازنة بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}F_{k,n+2}z^n = \frac{k\left(k^2 + 2\right)z + 6k\left(k^2 + 1\right)z^2 + kz^3}{k - 6k^3 z - 2k\left(18k^2 - 1\right)z^2 + 6k^3 z^3 + kz^4}.$$

البرهان:

نعلم أن:

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} F_{k,n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} \left(kF_{k,n+1} + F_{k,n}\right) z^n$$
$$= k\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} F_{k,n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} F_{k,n} z^n,$$

ولدينا مما سبق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} F_{k,n} z^n = \frac{kz + 6kz^2}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right) z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}.$$

إذن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} F_{k,n+2} z^n = \frac{k\left(k^2+1\right) z + 6k^3 z^2 + kz^3}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right) z^2 + 6k^2 z^3 + z^4} + \frac{kz + 6kz^2}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right) z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}$$
$$= \frac{k\left(k^2+2\right) z + 6k\left(k^2+1\right) z^2 + kz^3}{1 - 6k^2 z - 2\left(18k^2 - 1\right) z^2 + 6k^2 z^3 + z^4}.$$

وهو المطلوب.

❖ **ثالثا:** بأخذ: $\begin{cases} a_1 - a_2 = 6k \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1 - e_2 = k \\ e_1 e_2 = 2 \end{cases}$ في العلاقة (13.3) نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1 + [-a_2]) S_{n+1}(e_1 + [-e_2]) z^n = \frac{\left(k^2+2\right) z + 12k^2 z^2 + 2z^3}{1 - 6k^2 z - \left(72k^2 - k - 4\right) z^2 + 12k^2 z^3 + 4z^4}.$$

ومنه نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 8.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالة المولدة لجداء أعداد k-جاكوبستال و k-متوازنة بدليلين غير متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+2} z^n = \frac{\left(k^2+2\right) z + 12k^2 z^2 + 2z^3}{1 - 6k^2 z - \left(72k^2 - k - 4\right) z^2 + 12k^2 z^3 + 4z^4}.$$

مع:

$$B_{k,n} J_{k,n+2} = S_{n-1}(a_1 + [-a_2]) S_{n+1}(e_1 + [-e_2]).$$

نظرية 16.3:

من أجل n عدد طبيعي، الدالة المولدة لجداء أعداد k-جاكوبستال مع أعداد k-متوازنة بدليلين متواليين تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+1} z^n = \frac{k^2 z + 12k^2 z^2 - 2z^3}{k - 6k^3 z - k\left(72k^2 - k - 4\right) z^2 + 12k^3 z^3 + 4kz^4}.$$

البرهان:

نعلم أن:

$$J_{k,n+2} = kJ_{k,n+1} + 2J_{k,n}.$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} \left(kJ_{k,n+1} + 2J_{k,n}\right) z^n$$
$$= k\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+1} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n} z^n,$$

ولدينا مما سبق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n} z^n = \frac{z+2z^3}{1-6k^2z-\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4}.$$

إذن:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+1} z^n &= \frac{1}{k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n+2} z^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n} z^n\right)\\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{\left(k^2+2\right)z+12k^2z^2+2z^3}{1-6k^2z-\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4} - \right.\\ &\qquad \left.\frac{2z+4z^3}{1-6k^2z-\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^2z^3+4z^4}\right)\\ &= \frac{k^2z+12k^2z^2-2z^3}{k-6k^3z-k\left(72k^2-k-4\right)z^2+12k^3z^3+4kz^4}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

الخاتمة:

ختاما قمنا من خلال هذا الفصل بحساب التوابع المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة وأعداد k-لوكاس المتوازنة مع بعض الأعداد من الرتبة الثانية وكذا مع كثيرات الحدود تشيبتشاف بأنواعها الأربعة وكذا الجداءات المتوالية وغير المتوالية لأعداد k-متوازنة اعتمدنا في ذلك على النظرية 1.3.

وانطلاقا من النتائج المتحصل عليها فإنه يمكننا إيجاد دوال مولدة جديدة لجداء أعداد k-متوازنة وأعداد k- لوكاس المتوازنة.

الفصل الرابع

تطبيقات على التوابع التناظرية

قسمنا هذا الفصل إلى جزئيين، في الجزء الأول سنقوم بحساب الدوال المولدة الجديدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية، وذلك بالاعتماد على النظرية 3.4، وهو الهدف من مقالنا المنشور في المجلة الدولية:

- **F. Yakoubi** , A. Boussayoud , B. Aloui , H. Merzouk, k -balancing numbers and new generating functions with some special numbers and polynomials, *J. Sci. Arts.*, **22**(4), 929-940, **2022**.

أما في الجزء الثاني فسنحسب الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k –متوازنة مع كثيرات الحدود المتعامدة تشيبتشاف بأنواعه الأربعة وذلك بالاعتماد على النظرية 2.4.

1.4 مفاهيم عامة

تعريف 1.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، نعرف q-مماثل بـ:

$$[n]_q=\frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}.$$

مع: $[0]_q=1$.

تعريف 2.4:

أعداد سترلينغ من النوع الأول $s(n,k)$ هي معاملات كثير الحدود $(x)_n$ المعرف بـ:

$$(x)_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k.$$

تعريف 3.4:

كثير حدود غوص يعطى بالعلاقة التالية:

$$\binom{n}{k}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\begin{cases}\dfrac{(q^{n-k+1}-1)\cdots(q^n-1)}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^k-1)} & k\le n\\ 0 & k>n\end{cases}.$$

خاصية 1.4:[11]

كثير حدود غوص يحقق العلاقتين التاليتين:

1) $$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=e^{ik(n-k)t}\prod_{r=1}^{k}\frac{\sin(n-k+r)t}{\sin rt},\ t\in[0,\pi].$$

2) $$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q=\prod_{r=1}^{k}\frac{n-k+r}{r}.$$

تعريف 4.4[17]**:**

نعرف المؤثر التناظري $\delta^k_{a_1a_2}\delta^k_{b_1b_2}$ بـ:

$$\delta^k_{a_1a_2}\delta^k_{b_1b_2}(f)=\frac{b_1^ka_1^kf(a_1b_1)-b_1^ka_2^kf(a_1b_2)+b_2^ka_2^kf(a_2b_2)}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}.$$

ملاحظة 1.4:

مهما يكن n عدد طبيعي، لدينا:

$$h_n(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)=S_n(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n).$$

نظرية 1.4:

لتكن $A=\{x\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3\ldots,\}$ أبجديتين، لدينا:

$$\prod_{b\in B}(x-b)=S_n(x-B)=x^nS_0(-B)+x^{n-1}S_1(-B)+\cdots+S_n(-B),$$

حيث: $S_k(-B)$ هي معاملات كثيرات الحدود $S_n(x-B)$ من أجل $0\leq k\leq n$.

البرهان:

لدينا:

$$S_n(A-B)=\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}(A)S_k(-B)$$

بوضع $A=\{x\}$ نجد:

$$S_n(x-B)=\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}(x)S_k(-B)$$

نعلم أن: $S_n(x)=x^n$ ومنه:

$$\begin{aligned}S_n(x-B)&=\sum_{k=0}^{n}S_{n-k}(x)S_k(-B)\\&=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}S_k(-B)\\&=x^nS_0(-B)+x^{n-1}S_1(-B)+\cdots+S_n(-B).\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

خاصية 2.4:

لتكن $A=\{1,1\}$ أبجدية، معامل ذو الحدين يعطى بـ:

$$S_n(2)=\binom{n+1}{n}.$$

البرهان:

نعلم أن [5] من أجل $n:=A=\{1,1,\ldots,1\}$ لدينا:

$$S_j(n)=\binom{n+j-1}{j}.$$

بأخذ $n=2$ ينتج لنا:

$$S_j(2)=\binom{j+1}{j},$$

بوضع $j=n$ نجد:

$$S_n(2)=\binom{n+1}{n}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 3.4:

لتكن $A=\{1,q\}$ أبجدية، لدينا:

$$S_n(A)=\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q .$$

البرهان:

لدينا: $[n]:=A=\{1,q,q^2,....,q^{n-1}\}$ ، كثير حدود غوص يعطى بالعلاقة التالية [6]:

$$S_j([n])=\begin{bmatrix} n+j-1 \\ j \end{bmatrix}_q .$$

من أجل $n=2$ نجد:

$$S_j([n])=\begin{bmatrix} j+1 \\ j \end{bmatrix}_q .$$

بوضع $j=n$ نجد:

$$S_n(A)=\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q .$$

وهو المطلوب.

نظرية 4.4:

لتكن $E=\{1,2\}$ أبجدية، لدينا:

$$S_n(E)=2^{n+1}-1.$$

البرهان:

لدينا:

$$S_n(E)=\frac{e_1^{n+1}}{(e_1-e_2)}-\frac{e_2^{n+1}}{(e_1-e_2)}.$$

من أجل $E=\{1,2\}$ نجد:

$$S_n(E)=2^{n+1}-1.$$

وهو المطلوب.

2.4 نظريات

في هذا الجزء تم التطرق إلى النظريات المهمة التالية التي تسمح لنا بالحصول على العديد من النتائج المهمة [16، 17].

نظرية 5.4:

لتكن الأبجديات $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ و $C=\{c_1,c_2\}$ ، لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_1+a_2)S_n(b_1,+b_2)S_n(c_1,+c_2)z^n=\frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\times\frac{\Pi_1}{\Pi_2},$$

حيث:

$$\Pi_1=\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_2^{n+1}z^n$$
$$-\prod_{a\in A}(1-ab_1c_2z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_2z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_1^{n+1}z^n.$$

و:

$$\Pi_2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_1^nz^n\right)$$
$$\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_2^nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_2^nz^n\right).$$

البرهان:

لتكن السلسلتين التاليتين: $\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)$ و $\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)$

حيث:
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)=1$$

نضع: $g(b_1,c_1)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)b_1^nc_1^nz^n\right)$

وبإدخال المؤثر $\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}$ على السلسلة $\mathrm{g}(b_1,c_1)$ نجد:

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\,\mathrm{g}(b_1,c_1)=\delta_{c_1c_2}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)b_1^{n+1}c_1^nz^n-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)b_2^{n+1}c_1^nz^n}{b_1-b_2}\right)$$
$$=\delta_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)\frac{b_1^{n+1}-b_2^{n+1}}{b_1-b_2}c_1^nz^n\right)$$

أي:

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\,\mathrm{g}(b_1,c_1)=\delta_{c_1c_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(b_1+b_2)c_1^nz^n\right)$$
$$=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(b_1+b_2)c_1^{n+1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(b_1+b_2)c_2^{n+1}z^n}{c_1-c_2},$$

ومنه:

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\,\mathrm{g}(b_1,c_1)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(b_1+b_2)S_n(c_1+c_2)z^n.$$

من جهة أخرى، وبإدخال نفس المؤثر السابق على السلسلة:

$$g(b_1,c_1)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n},$$

نجد:

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\,\mathrm{g}(b_1,c_1)=\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n}\right)$$

$$=\delta_{c_1c_2}\left(\frac{b_1b_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^{n-1}c_1^n z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^{n-1}c_1^n z^n}{(b_1-b_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^n c_1^n z^n\right)}\right)$$

$$=\delta_{c_1c_2}\left(\frac{-b_1b_2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_1^n z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^n c_1^n z^n\right)}\right)$$

$$\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}\,\mathrm{g}(b_1,c_1)=\frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_1^n z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^n c_2^n z^n\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1,b_2)c_1^{n+1}z^n}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^n c_1^n z^n\right)}\right)$$

نعلم أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^n c_1^n z^n=\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1z)$$

نتحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)S_n(b_1+b_2)S_n(c_1+c_2)z^n=\frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\times\frac{\Pi_1}{\Pi_2},$$

وهو المطلوب.

نظرية 6.4:

لتكن الأبجديات $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ و $C=\{c_1,c_2\}$، لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(a_1+a_2)\mathrm{S}_{n-1}(b_1+b_2)S_{n-1}(c_1+c_2)z^n=\frac{N_1}{D},$$

حيث:

$$N_1=\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1z)\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-1}(b_1+b_2)c_2^n z^n$$
$$-\prod_{a\in A}(1-ab_1c_2z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_2z)\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-1}(b_1+b_2)c_1^n z^n$$
$$=(a_1+a_2)z-a_1a_2(b_1+b_2)(c_1+c_2)z^2+c_1c_2b_1b_2(a_1+a_2)\left(2a_1a_2-(a_1+a_2)^2\right)z^3$$
$$+a_1a_2b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)(c_1+c_2)z^4$$
$$-a_1a_2b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2\left(b_1b_2(c_1+c_2)^2+c_1c_2(b_1+b_2)^2-b_1b_2c_1c_2\right)z^5+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2(c_1+c_2)(b_1+b_2)z^6.$$

و:

$$D=(c_1-c_2)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_1^nz^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_1^nz^n\right)$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_2^nz^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_2^nz^n\right)$$
$$=1-(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)z$$
$$+b_1b_2(a_1+a_2)^2(c_1+c_2)^2+\left((b_1+b_2)^2-2b_1b_2\right)\left((a_1+a_2)^2c_1c_2-2a_1a_2c_1c_2+a_1a_2(c_1+c_2)^2\right)z^2$$
$$-(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$$
$$\times\left(b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2+a_1a_2b_1b_2(c_1+c_2)^2+a_1a_2c_1c_2(b_1+b_2)^2-5a_1a_2b_1b_2c_1c_2\right)z^3$$
$$+\begin{pmatrix}a_1^2a_2^2c_1^2c_2^2(b_1+b_2)^4+b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2(a_1+a_2)^4+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2(c_1+c_2)^4\\ -a_1a_2b_1b_2c_1c_1\begin{pmatrix}4b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2+4a_1a_2c_1c_2(b_1+b_2)^2\\ +4a_1a_2b_1b_2(c_1+c_2)^2-(a_1+a_2)^2(b_1+b_2)^2(c_1+c_2)^2\end{pmatrix}+6a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2\end{pmatrix}z^4$$
$$-a_1a_2b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$$
$$\times\left(a_1a_2c_1c_2(b_1+b_2)^2+b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2+a_1a_2b_1b_2(c_1+c_2)^2-5a_1a_2b_1b_2c_1c_2\right)z^5$$
$$+\begin{pmatrix}a_1^2a_2^2b_1^3b_2^3c_1^2c_2^2(a_1+a_2)^2(c_1+c_2)^2+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2\left((b_1+b_2)^2-2b_1b_2\right)\\ \times\left(c_1c_2(a_1+a_2)^2-2a_1a_2c_1c_2+a_1a_2(c_1+c_2)^2\right)\end{pmatrix}z^6$$
$$-a_1^3a_2^3b_1^3b_2^3c_1^3c_2^3(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)z^7+a_1^4a_2^4b_1^4b_2^4c_1^4c_2^4z^8.$$

البرهان:

نفس طريقة برهان النظرية 5.4 لكن في هذه الحالة نستعمل عبارة الفرق المقسوم $\partial_{c_1,c_2}\partial_{b_1,b_2}$.

3.4 الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع بعض الأعداد و كثيرات الحدود تشيبتشاف

هذه الفقرة قسمناها إلى جزئيين، في الجزء الأول سنقوم بحساب الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع بعض الأعداد الشهيرة من الرتبة الثانية، أما الجزء الثاني فخصصناه لإيجاد الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف.

1.3.4 الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k - متوازنة مع بعض الأعداد من الرتبة الثانية

نظرية 7.4:

لتكن الأبجديات $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ و $C=\{c_1,c_2\}$، لدينا العلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(a_1+a_2)S_{n-1}(b_1+b_2)S_{n-1}(c_1+c_2)z^n$$

$$=\frac{b_1b_2}{c_1-c_2}\times\frac{\begin{pmatrix}\prod_{a\in A}(1-ab_1c_1z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_1z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_2^{n+1}z^{n+1}\end{pmatrix} -\begin{pmatrix}\prod_{a\in A}(1-ab_1c_2z)\prod_{a\in A}(1-ab_2c_2z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)S_{n-2}(b_1+b_2)c_1^{n+1}z^{n+1}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_1^nz^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_1^nz^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_1^nc_2^nz^n\times\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e_n(a_1,a_2)b_2^nc_2^nz^n\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{N_2}{D},$$

حيث:

$$\begin{aligned}N_2 &= z-\left(a_1a_2c_1c_2(b_1+b_2)^2+a_1a_2b_1b_2(c_1+c_2)^2+b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)^2-3a_1a_2b_1b_2c_1c_2\right)z^3\\ &+2a_1a_2b_1b_2c_1c_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)z^4-(a_1^2a_2^2b_1b_2c_1^2c_2^2(b_1+b_2)^2+\\ &+a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1c_2(c_1+c_2)^2+a_1a_2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2(a_1+a_2)^2-3a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2c_1^2c_2^2)z^5+a_1^3a_2^3b_1^3b_2^3c_1^3c_2^3z^7.\end{aligned}$$

❖ **الحالة 1:** بتعويض a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وبأخذ الشروط التالية $\begin{cases}a_1-a_2=6k\\ a_1a_2=-1\end{cases}$، $\begin{cases}b_1-b_2=6k\\ b_1b_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}c_1-c_2=6k\\ c_1c_2=-1\end{cases}$ في النظرية 7.4 نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 1.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لمكعب أعداد k-متوازنة تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}^3z^n=\frac{z-\left(108k^2-3\right)z^3+432k^3z^4-\left(108k^2-3\right)z^5+z^7}{D_{B_{k,n}B_{k,n}B_{k,n}}},$$

حيث:

$$\begin{aligned}D_{B_{k,n}B_{k,n}B_{k,n}} &=1-216k^3z-4\left(270k^2+648k^4+1\right)z^2\\ &-216k^3\left(108k^2-5\right)z^3+6\left(648k^4+7776k^6-72k^2+1\right)z^4\\ &+216k^3\left(108k^2-5\right)z^5-4\left(972k^4-54k^2+1\right)z^6-216k^3z^7+z^8.\end{aligned}$$

❖ **الحالة 2:** بتعويض a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ في النظرية 7.4 وبأخذ الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=6k \\ a_1a_2=-1 \end{cases}$، $\begin{cases} b_1-b_2=6k \\ b_1b_2=-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} c_1-c_2=k \\ c_1c_2=1 \end{cases}$ نجد الخاصية الموالية:

خاصية 2.4:

تعطى الدالة المولدة لجداء مربع أعداد k-متوازنة في أعداد k-فيبوناتشي بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 F_{k,n}\ z^n = \frac{z-\left(71k^2+3\right)z^3-72k^3z^4-\left(71k^2-3\right)z^5-z^7}{D_{B_{k,n}^2F_{k,n}}},\ n\in\mathbb{N}$$

حيث:

$$\begin{aligned} D_{B_{k,n}^2F_{k,n}} &= 1-36k^3z+\left(36k^4-\left(36k^2-2\right)\left(35k^2-2\right)\right)z^2 \\ &+36k^3\left(71k^2-5\right)z^3+\left(2593k^4-292k^2+1296k^6+6\right)z^4 \\ &-36k^3\left(71k^2-5\right)z^5+\left(36k^4+\left(36k^2-2\right)\left(37k^2-2\right)\right)z^6+36k^3z^7+z^8. \end{aligned}$$

❖ **الحالة 3:** باستبدال a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ في النظرية 7.4 وتحت الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=6k \\ a_1a_2=-1 \end{cases}$، $\begin{cases} b_1-b_2=6k \\ b_1b_2=-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} c_1-c_2=2 \\ c_1c_2=k \end{cases}$ نجد الخاصية الموالية:

خاصية 3.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء مربع أعداد k-متوازنة مع أعداد k-بال تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 P_{k,n}\ z^n = \frac{z+\left(72k^3-3k-4\right)z^3-144k^3z^4-\left(72k^3-3k-4\right)kz^5-k^3z^7}{D_{B_{k,n}^2P_{k,n}}},$$

مع:

$$\begin{aligned} D_{B_{k,n}^2P_{k,n}} &= 1-72k^2z+4\left(k-36k^3+324k^5+2\right)z^2 \\ &-72k^2\left(5k-72k^3+4\right)z^3+\left(2592k^6-288k^4-5184k^5+6k^2+16k+16\right)z^4 \\ &+72k^3\left(5k-72k^3+4\right)z^5-4k^2\left(k-72k^2-36k^3+324k^5+2\right)z^6+72k^5z^7+k^4z^8. \end{aligned}$$

❖ **الحالة 4:** باستبدال a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وتحت الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=6k \\ a_1a_2=-1 \end{cases}$، $\begin{cases} b_1-b_2=6k \\ b_1b_2=-1 \end{cases}$ و $\begin{cases} c_1-c_2=k \\ c_1c_2=2 \end{cases}$ في النظرية 7.4 نجد الخاصية التالية:

خاصية 4.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء مربع أعداد k-متوازنة مع أعداد k-جاكوبستال تعطى بالعلاقة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^2 J_{k,n}\ z^n = \frac{z-\left(6-143k^2\right)z^3-144k^3z^4-\left(286k^2-12\right)z^5-8z^7}{D_{B_{k,n}^2J_{k,n}}},$$

مع:

$$\begin{aligned}D_{B_{k,n}^2J_{k,n}} &=1-36k^3z-2\left(20k^2-1\right)\left(63k^2-4\right)z^2+36k^2\left(143k^2-10\right)z^3\\&-\left(1144k^2-10369k^4+2592k^6-24\right)z^4+72k^3\left(143k^2-10\right)z^5\\&-8\left(1278k^4-161k^2+4\right)z^6+288k^3z^7+16z^8.\end{aligned}$$

❖ **الحالة 5:** بتعويض a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وبأخذ $\begin{cases}a_1-a_2=6k\\a_1a_2=-1\end{cases}$، $\begin{cases}b_1-b_2=6k\\b_1b_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}c_1-c_2=3k\\c_1c_2=-2\end{cases}$ في النظرية 7.4 نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 5.4:

تعطى الدالة المولدة لجداء مربع أعداد k-متوازنة مع أعداد k-مارسان بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}^2M_{k,n}\ z^n=\frac{z-\left(135k^2-6\right)z^3-432k^3z^4-\left(306k^2-12\right)z^5+8z^7}{D_{B_{k,n}^2M_{k,n}}},\ n\in\mathbb{N},$$

حيث:

$$\begin{aligned}D_{B_{k,n}^2M_{k,n}} &=1-108k^3z+\left(324k^4+\left(36k^2-2\right)\left(81k^2-4\right)\right)z^2-108k^3\left(153k^2-10\right)z^3\\&+\left(10449k^4-2\left(612k^2-11664k^6\right)+24\right)z^4+216k^3\left(-135k^2+10\right)z^5\\&+8\left(1620k^4-153k^2+4\right)z^6-864k^3z^7+16z^8.\end{aligned}$$

❖ **الحالة 6:** بتعويض a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وبأخذ $\begin{cases}a_1-a_2=6k\\a_1a_2=-1\end{cases}$، $\begin{cases}b_1-b_2=k\\b_1b_2=1\end{cases}$ و $\begin{cases}c_1-c_2=k\\c_1c_2=1\end{cases}$ في النظرية 7.4 نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 6.4:

الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع مربع أعداد k-فيبوناتشي تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{k,n}F_{k,n}^2\ z^n=\frac{z+\left(34k^2-3\right)z^3+12k^3z^4-\left(34k^2-3\right)z^5+z^7}{D_{B_{k,n}F_{k,n}^2}},\ n\in\mathbb{N},$$

مع:

$$\begin{aligned}D_{B_{k,n}F_{k,n}^2} &=1-6k^3z+\left(-36k^4+\left(k^2+2\right)\left(35k^2+2\right)\right)z^2-6k^3\left(34k^2-5\right)z^3\\&+\left(1298k^4-\left(136k^2-36k^6\right)+6\right)z^4-6k^3\left(34k^2-5\right)z^5\\&+\left(36k^4+\left(k^2+2\right)\left(35k^2-2\right)\right)z^6-6k^3z^7+z^8.\end{aligned}$$

❖ **الحالة 7:** باستبدال a_2 بـــ $(-a_2)$ و b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وبأخذ الشروط التالية $\begin{cases}a_1-a_2=6k\\a_1a_2=-1\end{cases}$، $\begin{cases}b_1-b_2=2\\b_1b_2=k\end{cases}$ و $\begin{cases}c_1-c_2=2\\c_1c_2=k\end{cases}$ في النظرية 7.4 نجد الخاصية الموالية:

خاصية 7.4:

من أجل $n \in \mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع مربع أعداد k-بال تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} P_{k,n}^2 \; z^n = \frac{z - \left(-8k - 3k^2 + 36k^4\right) z^3 - 48k^3 z^4 - \left(36k^6 - 8k^3 - 3k^4\right) z^5 + k^6 z^7}{D_{B_{k,n} P_{k,n}^2}},$$

حيث:

$$\begin{aligned} D_{B_{k,n} P_{k,n}^2} &= 1 - 24kz + \left(144k^3 + (4+2k)\left(36k^3 - 4 - 2k\right)\right) z^2 - 24k^2 \left(36k^3 - 5k - 8\right) z^3 \\ &+ \left(32k^2 + 1296k^8 - k^2\left(-32k - 576k^2 + 144k^4\right) + 6k^4\right) z^4 + 24k^3\left(8k + 5k^2 + 36k^4\right) z^5 \\ &- \left(144k^7 + k^4 (4+2k)\left(36k^3 - 2k - 4\right)\right) z^6 - 24k^7 z^7 + k^8 z^8. \end{aligned}$$

❖ **الحالة 8:** بتعويض a_2 بـ $(-a_2)$ و b_2 بـ $(-b_2)$ و c_2 بـ $(-c_2)$ وبأخذ $\begin{cases} a_1 - a_2 = 6k \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$، $\begin{cases} b_1 - b_2 = k \\ b_1 b_2 = 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} c_1 - c_2 = k \\ c_1 c_2 = 2 \end{cases}$ في النظرية 7.4 نتحصل على الخاصية الموالية:

خاصية 8.4:

تعطى الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع مربع أعداد k-جاكوبستال بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} J_{k,n}^2 \; z^n = \frac{z - \left(140k^2 - 12\right) z^3 + 48k^3 z^4 - \left(560k^2 - 48\right) z^5 + 64 z^7}{D_{B_{k,n} J_{k,n}^2}}, \; n \in \mathbb{N},$$

مع:

$$\begin{aligned} D_{B_{k,n} J_{k,n}^2} &= 1 - 6k^3 z + \left(-72k^4 + \left(k^4 + 4\right)\left(-71k^2 + 4\right)\right) z^2 - 6k^3\left(140k^2 - 20\right) z^3 \\ &+ \left(20744k^4 - 4\left(560k^2 - 36k^6\right) + 96\right) z^4 - 24k^3\left(140k^2 - 20\right) z^5 \\ &- \left(1152k^4 + 16\left(k^2 + 4\right)\left(71k^2 - 4\right)\right) z^6 - 384k^3 z^7 + 256 z^8. \end{aligned}$$

❖ **الحالة 9:** باستبدال a_2 بـ $(-a_2)$ و b_2 بـ $(-b_2)$ و c_2 بـ $(-c_2)$ وبأخذ الشروط التالية $\begin{cases} a_1 - a_2 = 6k \\ a_1 a_2 = -1 \end{cases}$، $\begin{cases} b_1 - b_2 = 3k \\ b_1 b_2 = -2 \end{cases}$ و $\begin{cases} c_1 - c_2 = 3k \\ c_1 c_2 = -2 \end{cases}$ في النظرية 7.4 نجد الخاصية الموالية:

خاصية 9.4:

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n، الدالة المولدة لجداء أعداد k-متوازنة مع مربع أعداد k-مارسان هي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n} M_{k,n}^2 \; z^n = \frac{z - \left(180k^2 - 12\right) z^3 + 432k^3 z^4 - \left(720k^2 - 48\right) z^5 + 64 z^7}{D_{B_{k,n} M_{k,n}^2}},$$

مع:

$$\begin{aligned}D_{B_{k,n}M_{k,n}^2} &= 1-54k^3z+\left(-648k^4+\left(9k^2-4\right)\left(4-81k^2\right)\right)z^2-54k^3\left(180k^2-20\right)z^3\\&+\left(2138k^4-2880k^2+11664k^6+96\right)z^4-216k^3\left(180k^2-20\right)z^5\\&+\left(10368k^4+16\left(9k^2-4\right)\left(81k^2-4\right)\right)z^6-3456k^3z^7+256z^8.\end{aligned}$$

2.3.4 الدوال المولدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف

في هذه الفقرة سنستعرض الدوال المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف بأنواعه الأربعة، من أجل ذلك نقوم باستبدال a_1 بـــ $(2a_1)$، a_2 بـــ $(-2a_2)$، b_2 بـــ $(-b_2)$ و c_2 بـــ $(-c_2)$ وبأخذ الشروط التالية $\begin{cases}a_1-a_2=x\\4a_1a_2=-1\end{cases}$، $\begin{cases}b_1-b_2=6k\\b_1b_2=-1\end{cases}$ و $\begin{cases}c_1-c_2=6k\\c_1c_2=-1\end{cases}$ في النظريتين 6.4 و7.4 نتحصل على الخاصية والنظريات التالية:

خاصية 10.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الثاني مع مربع أعداد k-متوازنة تعطى بالعلاقة الموالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)B_{k,n}^2\,z^n=\frac{2xz-36k^2z^2+4x(1-2x^2)z^3+144k^2x^2z^4-4x^2(72k^2-1)z^5+36k^2z^6}{D_{U_n(x)B_{k,n}^2}},$$

حيث:

$$\begin{aligned}D_{U_n(x)B_{k,n}^2} &= 1-72k^2xz+(144k^2x^2+(36k^2-2)(4x^2+36k^2-2))z^2\\&-72k^2x(4x^2+72k^2-5)z^3+(2592k^4+16x^4+16x^2-288k^2+5184k^4x^2+6)z^4\\&-72k^2x(72k^2+4x^2-5)z^5+\left(144k^2x^2-\left(36k^2-2\right)(4x^2+36k^2-2)\right)z^6-72k^2xz^7+z^8.\end{aligned}$$

نظرية 8.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الأول مع مربع أعداد k-متوازنة تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)B_{k,n}^2\,z^n=\frac{N_{T_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{T_n(x)B_{k,n}^2}},$$

حيث:

$$N_{T_n(x)B_{k,n}^2}=xz-36k^2z^2+x\left(72k^2-4x^2+1\right)z^3+x\left(72k^2+4x^2-288xk^2+4x-3\right)z^5+36k^2z^6-xz^7$$

$$D_{T_n(x)B_{k,n}^2}=D_{U_n(x)B_{k,n}^2}.$$

البرهان:

لدينا:

$$T_n(x)=S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right),\ (\text{أنظر}[18])$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) B_{k,n}^2 z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)-xS_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)\right]B_{k,n}^2 z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right)B_{k,n}^2 z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)B_{k,n}^2 z^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) B_{k,n}^2 z^n - x\sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)B_{k,n}^2 z^n.\end{aligned}$$

باستعمال الخاصية 10.4 و $S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right)=\dfrac{(2a_1)^n-(-2a_2)^n}{2(a_1+a_2)}$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) B_{k,n}^2\ z^n = \frac{N_{U_n(x)B_{k,n}^2} - xz + x\left(72k^2+4x^2-3\right)z^3 - 144k^2x^2z^4 + x\left(72k^2+4x^2-3\right)z^5 - xz^7}{D_{T_n(x)B_{k,n}^2}},$$

ومنه نجد:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) B_{k,n}^2\ z^n &= \frac{N_{U_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{U_n(x)B_{k,n}^2}} - x\times\frac{z-\left(72k^2+4x^2-3\right)z^3+144k^2xz^4-\left(72k^2+4x^2-3\right)z^5+z^7}{D_{U_n(x)B_{k,n}^2}}\\ &= \frac{N_{T_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{T_n(x)B_{k,n}^2}}.\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

نظرية 9.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الثالث مع مربع أعداد k-متوازنة تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) B_{k,n}^2\ z^n = \frac{N_{V_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{V_n(x)B_{k,n}^2}},$$

حيث:

$$\begin{aligned}N_{V_n(x)B_{k,n}^2} &= (2x-1)z - 36k^2z^2 + \left(72k^2-4x\left(2x^2-1\right)+4x^2-3\right)z^3 + 144k^2x(x-1)z^4\\ &\quad + \left(72k^2-8x^2\left(36k^2-1\right)-3\right)z^5 + 36k^2z^6 - z^7,\end{aligned}$$

$$D_{V_n(x)B_{k,n}^2} = D_{U_n(x)B_{k,n}^2}.$$

البرهان:

لدينا:

$$V_n(x) = S_n\left(2a_1+[-2a_2]\right) - S_{n-1}\left(2a_1+[-2a_2]\right), \text{ (أنظر [10])}$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) B_{k,n}^2 z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[S_n(2a_1+[-2a_2]) - S_{n-1}(2a_1+[-2a_2])\right] B_{k,n}^2 z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) B_{k,n}^2 z^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n.$$

باستعمال الخاصية 10.4 و $S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) = \frac{(2a_1)^n - (-2a_2)^n}{2(a_1+a_2)}$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) B_{k,n}^2 z^n = \frac{N_{U_n(x)B_{k,n}^2} - z + (72k^2+4x^2-3)z^3 - 144k^2xz^4 + (72k^2+4x^2-3)z^5 - z^7}{D_{V_n(x)B_{k,n}^2}},$$

وعليه:
$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) B_{k,n}^2 z^n = \frac{N_{V_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{V_n(x)B_{k,n}^2}}.$$

وهو المطلوب.

نظرية 10.4:

من أجل $n \in \mathbb{N}$، الدالة المولدة لجداء كثيرات الحدود تشيبتشاف من النوع الرابع مع مربع أعداد k-متوازنة تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) B_{k,n}^2 z^n = \frac{N_{W_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{W_n(x)B_{k,n}^2}},$$

حيث:

$$N_{W_n(x)B_{k,n}^2} = (2x+1)z - 36k^2z^2 + \left(3 - 72k^2 + 4x(1-2x^2-x)\right)z^3 + 144k^2x(x+1)z^4$$
$$+ (3 - 72k^2 - 288k^2x^2)z^5 + 36k^2z^6 + z^7,$$

$$D_{W_n(x)B_{k,n}^2} = D_{U_n(x)B_{k,n}^2}.$$

البرهان:

لدينا:

$$W_n(x) = S_n(2a_1+[-2a_2]) + S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]),\ (\text{أنظر}[10])$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x) B_{k,n}^2 z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[S_n(2a_1+[-2a_2]) + S_{n-1}(2a_1+[-2a_2])\right] B_{k,n}^2 z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) B_{k,n}^2 z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) B_{k,n}^2 z^n.$$

باستعمال الخاصية 10.4 و $S_{n-1}(2a_1+[-2a_2]) = \frac{(2a_1)^n - (-2a_2)^n}{2(a_1+a_2)}$ نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) B_{k,n}^2 \; z^n = \frac{N_{U_n(x)B_{k,n}^2} + z - \left(72k^2+4x^2-3\right)z^3 + 144k^2 x z^4 - \left(72k^2+4x^2-3\right)z^5 + z^7}{D_{W_n(x)B_{k,n}^2}},$$

ومنه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) B_{k,n}^2 \; z^n = \frac{N_{W_n(x)B_{k,n}^2}}{D_{W_n(x)B_{k,n}^2}}.$$

وهو المطلوب.

4.4 تطبيقات على التوابع التناظرية التامة

في هذه الفقرة سنحاول إجراء بعض التطبيقات على النظريتين 1.3 و2.3 من الفصل الثالث للحصول على بعض الدوال المولدة لجداءات أعداد q-مماثل وأعداد سترلينغ من النوع الأول بالإضافة إلى ثنائي الحد.

1.4.4 الحالة الأولى: $A=\{1,p\}$ و $E=\{1,q\}$

بأخذ الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=[2] \\ a_1a_2=p \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1-e_2=[2] \\ e_1e_2=q \end{cases}$ في العلاقات (9.3) –(14.3) من الفصل الثالث نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 11.4:

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، الدالة المولدة لجداءات أعداد q-مماثل تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n = \frac{1-pqz^2}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n = \frac{z-pqz^3}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n = \frac{[2]z+[2]pz^2}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+3 \\ n+2 \end{bmatrix}_q z^n = \frac{\left([2]^2+q\right)+[2]^2 qz - pq^2z^2}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+2 \\ n+1 \end{bmatrix}_q z^n = \frac{\left([2]^2+q\right)z+[2]^2 qz^2 - pq^2z^3}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n = \frac{[2]z+[2]qz^2}{1-[2]^2 z + \left(p\left([2]^2+2q\right)+q[2]^2\right)z^2 - pq[2]^2 z^3 + p^2q^2z^4}.$$

2.4.4 الحالة الثانية: $A=\{1,2\}$ و $E=\{1,q\}$

بأخذ الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=3 \\ a_1a_2=2 \end{cases}$ و $\begin{cases} e_1-e_2=[2] \\ e_1e_2=q \end{cases}$ في العلاقات (9.3) – (14.3) من الفصل الثالث نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 12.4:

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، الدالة المولدة لجداءات أعداد سترلينغ من النوع الأول مع أعداد q-مماثل تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n=\frac{1-2qz^2}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-1\right)\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{z-2qz^3}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{3z+2[2]z^2}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\begin{bmatrix} n+3 \\ n+2 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{\left([2]^2+q\right)+3[2]qz-2q^2z^2}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-1\right)\begin{bmatrix} n+2 \\ n+1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{\left([2]^2+q\right)z+3[2]qz^2-2q^2z^3}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-1\right)\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n=\frac{[2]z+3qz^2}{1-3[2]z+\left(2[2]^2+13q\right)z^2-6q[2]z^3+4q^2z^4}.$$

3.4.4 الحالة الثالثة: $A=\{1,1\}$ و $E=\{1,q\}$

انطلاقا من العلاقات (9.3) - (14.3) من الفصل الثالث وتحت الشروط التالية: $\begin{cases} a_1-a_2=2 \\ a_1a_2=1 \end{cases}$ و

$\begin{cases} e_1-e_2=[2] \\ e_1e_2=q \end{cases}$ نتحصل على الخاصية التالية:

خاصية 13.4:

من أجل كل عدد طبيعي$n\geq 1$ ، الدالة المولدة لجداءات أعداد q-مماثل وثنائي الحد تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n=\frac{1-qz^2}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{z-qz^3}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{2z-[2]z^2}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}\begin{bmatrix} n+3 \\ n+2 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{\left([2]^2+q\right)+2[2]qz-q^2z^2}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix} n+2 \\ n+1 \end{bmatrix}_q z^n=\frac{\left([2]^2+q\right)z+2[2]qz^2-q^2z^3}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-1}\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_q z^n=\frac{[2]z+2qz^2}{1-2[2]z+\left([2]^2+6q\right)z^2-2[2]qz^3+q^2z^4}.$$

4.4.4 الحالة الرابعة: $E=\{1,2\}$ و $A=\{1,2\}$

بأخذ الشروط التالية $\begin{cases} a_1-a_2=e_1-e_2=3 \\ a_1a_2=e_1e_2=2 \end{cases}$ في العلاقات (9.3) – (14.3) من الفصل الثالث نجد الخاصية التالية:

خاصية 14.4:

من أجل $n\in\mathbb{N}$ ، الدوال المولدة لأعداد سترلينغ من النوع الأول تعطى بـ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)^2 z^n=\frac{1-4z^2}{1-9z+44z^2-36z^3+16z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-1\right)^2 z^n=\frac{z-4z^3}{1-9z+44z^2-36z^3+16z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n}-1\right) z^n=\frac{3z+6z^2}{1-9z+44z^2-36z^3+16z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+3}-1\right) z^n=\frac{11+36z-8z^2}{1-9z+44z^2-36z^3+16z^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n+2}-1\right) z^n=\frac{11z+36z^2-8z^3}{1-9z+44z^2-36z^3+16z^4}.$$

5.4.4 الحالة الخامسة: $E=\{1,1\}$ و $A=\{1,1\}$

بأخذ $\begin{cases} a_1-a_2=e_1-e_2=2 \\ a_1a_2=e_1e_2=1 \end{cases}$ في العلاقات (9.3)، (10.3)، (11.3)، (12.3) و(13.3) من الفصل الثالث نجد الخاصية التالية:

خاصية 15.4:

الدالة المولدة لثنائي الحد تعطى بالعلاقة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}^2 z^n=\frac{1-z^2}{1-4z+10z^2-4z^3+z^4},\ n\geq 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-1}^2 z^n=\frac{z-z^3}{1-4z+10z^2-4z^3+z^4},\ n\geq 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}\binom{n}{n-1}z^n=\frac{2z+2z^2}{1-4z+10z^2-4z^3+z^4},\ n\geq 2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{n}\binom{n+3}{n+2}z^n=\frac{5+4z-z^2}{1-4z+10z^2-4z^3+z^4},\ n\geq 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{n-1}\binom{n+1}{n+1}z^n=\frac{5z+4z^2-z^3}{1-4z+10z^2-4z^3+z^4},\ n\geq 2.$$

الخاتمة:

ختاما فإننا تطرقنا من خلال هذا الفصل لحساب التوابع المولدة باستعمال التوابع التناظرية وبالاعتماد على النظريتين 2.4 و3.4 بهدف الحصول على التوابع المولدة لجداءات مربع أعداد k-متوازنة مع أعداد k- فيبوناتشي، k-لوكاس، k-بال و k-مارسان. وكذا التوابع المولدة لجداءات أعداد k-متوازنة مع كثيرات الحدود تشيبتشاف بالأنواع الأربعة.

الخاتمة

وختاما فإننا قمنا من خلال هذه الأطروحة قمنا بحسـاب الدوال المولدة بالاعتماد على عدة طرق: دوال تم عليها باسـتعمال الدالة المولدة العادية مثل الدوال المولدة لكل من أعداد k-متوازنة، k-لوكاس المتوازنة، كثيرات الحدود لتشـيبيتشـاف بأنواعها الأربعة،... إلخ، كل هذه الدوال تم الحصـول عليها باستعمال المؤثر التناظري وباستعمال المؤثر $\delta_{e_1e_2}^{2-l}$ ، $\delta_{c_1c_2}\delta_{b_1b_2}$ اللذان مكننا من الحصول على بعض الدوال المولدة الجديدة لجداءات الأعداد مع بعضـها البعض وكذلك مع كثيرات الحدود لتشـيبيتشـاف من الأنواع الأربعة وهذا باقتراح نظرية مهمة في الفصـل الثالث (نظرية 1.3) ويبقى البحث في هذا الموضـوع مفتوحا.

<u>الآفاق والأعمال المستقبلية:</u>

يفتح لنا هذا العمل العديد من الآفاق البحثية المثيرة لاهتمام نختار منها:

1. بأخذ ثلاث أبجديات $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $B=\{b_1,b_2\}$ و $C=\{c_1,c_2\}$ ، يمكننا اقتراح نظرية جديدة تسمح لنا بالحصول على عدة نتائج جديدة.

2. بأخذ ثلاث أبجديات $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ و $C=\{c_1,c_2\}$ ، يمكننا اقتراح نظرية جديدة تسمح لنا بالحصول على عدة نتائج جديدة.

3. بأخذ ثلاث أبجديات $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ و $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ و $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ ، يمكننا اقتراح نظرية جديدة تسمح لنا بالحصول على عدة نتائج جديدة.

4. حساب الدوال المولدة لبعض الأعداد المعرفة بعلاقات تراجعية غير متجانسة.

5. تعريف بعض متتاليات الأعداد الجديدة وإجراء تطبيقات عليها.

المراجع

المراجع باللغة العربية:

[1] ع. بوسعيود، دراسة تأثير المؤثر $\delta_{e_1e_2}^{k}$ على السلسلة القابلة للقلب $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(A)e_1^n t^n$ ، أطروحة دكتوراه علوم، جامعة جيجل، (2017).

[2] س. بوغابة، التوابع التناظرية و المولدة لجداءات الأعداد الشهيرة و كثيرات الحدود المتعامدة الكلاسيكية، أطروحة دكتوراه علوم، جامعة جيجل، (2021).

[3] أ. حميد شراري، م. عبد العزيز الزهيري، مقدمة في نظرية التركيبات، مطبوعات جامعة سعود، المملكة العربية السعودية، (2010).

[4] ن. صابة، التوابع التناظرية والمولدة لجداءات تعميم (p,q)-الأعداد وبعض متتاليات الأعداد وكثيرات الحدود الجديدة، أطروحة دكتوراه علوم، جامعة جيجل، (2023).

[5] هـ. مرزوق، الدوال المولدة لجداءات كثيرات الحدود 2-متعامدة باستعمال تقنية التوابع التناظرية، أطروحة دكتوراه علوم، جامعة جيجل، (2022).

المراجع باللغة الأجنبية:

[6] A. Abderrezzak, Généralisation de la transformation d'Euler d'une série formelle, *Adv. Math.*, **103**, 180 -195, 1994.

[7] A. Abderrezzak, Généralisation d'identités de Carlitz, Howard et Lehmer, *Aequationes Math.*, **99**, 36-46, 1995.

[8] A. Abderrezzak, M. Kerada, A. Boussayoud, Generalization of Some Hadamard Product, *Commun. Appl. Anal*., **20**, 301-306, 2016.

[9] A. Abderrezzak, Quelques formules d’inversion à plusieurs variables, *Eur. J. Comb*, **14**, 507-512, 1993.

[10] B. Aloui, A. Boussayoud, Generating functions of the product of the k-Fibonacci and k-Pell numbers and Chebyshev polynomials of the third and fourth kind, *Math. Eng. Sci. Aerosp. MESA*, **12**(1), 245-257, 2021.

[11] O. Bagdasar, D. Andrica, A new formula for the coefficients of Gaussian polynomials, *An. Ştiinţ. Univ. “Ovidius” Constanţa, Ser. Mat.*, **27**(3), 25- 36, 2019.

[12] A. Behera, G. K. Panda, On the square roots of triangular numbers, *Fibonacci Quart*, **37**, 98-105, 1999.

[13] A. Bénoit, Algorithmique semi-numérique rapide des séries de Tchebychev, Thèse de doctorat, Ecole doctorale de mathématiques et informatiques de Bordeaux, (2012).

[14] A. Berczes, K. Liptai, I. Pink, On generalized balancing sequences, *Fibonacci Quart*, **48**, 121-128, 2010.

[15] C. Bolat, H. Kose, On the Properties of k-Fibonacci Numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences.*, **5**, 1097-1105, 2010.

[16] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud and M. Kerada, Symmetric functions for second order recurrence sequences, *Tbil. Math. J.*, **13**, 225-237, 2020.

[17] Kh. Boubellouta, A. Boussayoud, Some identities and generating function of third-order recurrence relations, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*,**45** (1) 826-842, 2021.

[18] S. Boughaba, A. Boussayoud, M. Kerada, Construction of symmetric functions of generalized Fibonacci numbers, *Tamap J. Mathematics and Statistics*, **3**, 1–7, 2019.

[19] S. Boughaba, A. Boussayoud, On some identities and generating function of both k - Jacobsthal numbers and symmetric functions in several variables, *Konuralp Journal of Mathematics*, **7**(2), 235-242, 2019.

[20] A. Boussayoud, A. Abderrezzak, M. Kerada, Some applications of symmetric functions, *Integers.*, **48**(15), 1–7, 2015.

[21] A. Boussayoud, Complete symmetric functions and generating functions, *Nonlinear Studies*, **27**, 149-166, 2020.

[22] A. Boussayoud, M. Chelgham, S. Boughaba, On some identities and generating functions for Mersenne numbers and polynomials, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, **6**(3), 93-97, 2018.

[23] A. Boussayoud, M. Kerada, A. Abderrezzak, A generalization of some orthogonal polynomials, *Springer Proc. Math. Stat.*, **41**, 229-235, 2013.

[24] A. Boussayoud, M. Kerada, M. Boulyer, A simple and accurate method for determination of some generalized sequence of numbers, *Int. J. Pure Appl Math.***108**(3), 503- 511, 2016.

[25] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, symmetrizing operations on some orthogonal polynomials, *Int. Electron J Pure Appl Math.*, **9**, 191-199, 2015.

[26] A. Boussayoud, M. Kerada, R. Sahali, W. Rouibah, Some applications on generating functions, *J Concr Appl Math.*, **12**, 321-330, 2014.

[27] A. Boussayoud, M. Kerada, S. Araci, M. Acikgoz, A. Esi, Symmetric functions of binary products of Fibonacci and orthogonal polynomials, *Filomat.*, **33**(6), 1495-1504, 2019.

[28] A. Boussayoud A., M. Kerada, Symmetric and generating functions, *Int. Electron J Pure Appl Math.*, **7**, 195-203, 2014.

[29] A. Boussayoud A., N. Harrouche, Complete symmetric functions and k- Fibonacci numbers, *Commun. Appl. Anal.*, **20**(4), 457-467, 2016.

[30] A. Boussayoud, On some identities and generating functions for Pell-Lucas numbers, *Online. J. Anal. Comb.*, **12** (1), 1-10, 2017.

[31] A. Boussayoud, On some identities and symmetric functions for balancing numbers, *J. New Theory.*, 68-77, 2018.

[32] L. Butler, Subgroup lattices and symmetric functions, *American Mathematical Society*, 1994.

[33] P. Catarino, On generating matrices of *k*-Pell sequences, *Pure Math. Sci.*, **3**, 71-77, 2014.

[34] P. Catarino, On some identities and generating function for *k*-Pell numbers, *Int. J. Math. Anal.*,**7**, 1877-1884, 2013.

[35] M. Chelghem, A. Boussayoud. On the k-Mersenne Lucas numbers. *Notes Number Theory Discrete Math*, **27**(1), 7-13, 2021.

[36] T. S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, New York, (1978).

[37] A. Dujella, A bijective proof of Riordan's theorem on powers of Fibonacci numbers, *Disc. Math.*, **199**, 217-220, 1999.

[38] M. R. Eslahchi, S. Amani, The third and fourth kind of Chebyshev polynomials and best uniform approximation, *Mathematical and Computer Modelling*, **55**, 1746-1762, 2012.

[39] S. Falcon, A. Plaza, On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives, *Chaos. Sulutions. Fractals*, **39**, 1005-1019, 2009.

[40] S. Falcon, A. Plaza, The *k*-Fibonacci sequences and the Pascal 2-triangle, *Chaos, Sulutions & Fractals*, **33**, 38-49, 2008.

[41] S. Falcon, On the *k*-Lucas numbers of arithmetic indexes, *Appl. Math.*, **3**, 1202-1206, 2012.

[42] R. P. Finkelstein, The house problem, *Amer. Math. Monthly*, **72**, 1082-1088, 1965.

[43] D. Foata, G. Han, Principes de combinotoire classique, Université Louis Pasteur, Strasbourg Département de mathématiques. (2008).

[44] D. Foata, G. N. Han, Nombres de Fibonacci et polynômes orthogonaux, Leonardo Fibonacci: il tempo, le opere, l'eredità scientifica, 179-200, 1994.

[45] A. M. Fu, A. Lascoux, Partition Analysis and Symmetrizing Operators, *J. Comb. Theory, Ser.* A. **109**, 339-343,2005.

[46] A. D. Godse, M. B. Dhakne, On the properties of *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers, *Int. J. Math. And Mech.*, **2**, 100-106, 2014.

[47] A. F. Horadam, Bro. J. M. Mahon, Pell and Pell-Lucas polynomials, *Fibonacci Q.*, **23**, 7-20, 1985.

[48] A. F. Horadam, P. Filipponi, Derivative Sequences of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Polynomials, Fibonacci, Q., 35, 352-358, 1997.

[49] A. F. Horadam, The generalized Fibonacci sequences. *The American Math Monthly*, **68**(5), 455-459, 1961.

[50] D. Jhala D., K. Sisodiya, G.P.S. Rathor, On some identities for *k*-Jacobsthal, *Int. Journal of Math. Analisis.*, **7**, 551-556, 2013.

[51] K. V. V. Kanuri, K. N. Murty, Three-point boundary value problems associated with first order matrix difference system-existence and uniqueness via shortest and closest Lattice vector methods, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **12** (11), 720-727, 2019.

[52] H. Kayaba, The applications of *k*-Fibonacci sequences, *Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences Thesis*, (2006).

[53] T. Koshy, Fibonacci and Lucas numbers with applications, *Wiley-Interscience Publication*, 2001.

[54] T. Koshy, Pell and Pell-Lucas numbers with applications, *Springer*, 2014.

[55] A. Lascoux, Addition of ±1: application to arithmetic, séminaire lotharingien de combinatoire, **52**, 1-9, 2004.

[56] A. Lascoux, Fonctions Symétriques, Publ. I. R. M. A. Strasbourg, Actes 8emé Séminaire Lotharingien. 37-53, 1984.

[57] I. G. Macdonald I. G., Schur functions: theme and variations, in Seminaire Lotharingien de Combinatiore, Publ. I. R. M. A. Strasbourg.**489**, 5-39, 1992.

[58] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, Oxford, (15), 1979.

[59] I. G. Macdonald, Symmetric functions and orthogonal polynomials, *A. M. S.*, 1994.

[60] L. Manivel, Cours Spécialisés, Fonctions Symétriques, Polynomes de Schuet et Lieux de Dégcnérence, N3, Société Mathématiques de France, 1998.

[61] T. Mansour, A formula for the generating function of Horadam sequence, *Australas. J. Comb.*, **30**, 207-212, 2004.

[62] P. Maroni, L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **10**, 105-139, 1989.

[63] M. Merca, A generalization of the symmetry between complete and elementary symmetric functions, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **45**, 75-89, 2014.

[64] I. Mezo, Several generating function for second-order recurrence sequences, *J. Integer. Seq.*, **12**, 2009.

[65] M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites récurrentes linéaires, *theor. Comput. Sci.*, **7**, 117-121, 1978.

[66] A. Necer, Séries formelles et produit de Hadamard, *J. Théor. Nombres Bordx.*, **9**, 319-335, 1997.

[67] A. Ozkok A., Tridiagonal matrices via *k*-balancing number, *Brit. J. Math. Comput. Sci.*, **10**(4), 1-11, 2015.

[68] G. K. Panda, Some fascinating properties of balancing numbers, in: Proceedings of Eleventh International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, *Congr. Numer.*, **194**, 185-189, 2009.

[69] Y. K. Panwar, B. Singh and V. K. Gupta, Generalized Fibonacci sequences and its properties, *Palestine Journal of Mathematics.*, **3**(1), 141-147, 2014.

[70] J. S. Ramirez, On convolved generalized Fibonacci and Lucas polynomials, *Appl. Math. Comput.*, **229**, 208-213, 2014.

[71] P. K. Ray, On the properties of *k*-balancing and *k*-Lucas-balancing numbers, *Acta Commentat. Univ. Tartu. Math.*, **21**, 259-274, 2017.

[72] P. K. Ray, On the properties of *k*-balancing numbers, *Ain Shams Engineering Journal*, **9**, 395-402, 2018.

[73] N. Saba, A. Boussayoud, Complete homogeneous symmetric functions of Gauss Fibonacci polynomials and bivariate Pell polynomials, *Open J. Math. Sci*. **4**(1), 179-185, 2020.

[74] N. Saba, A. Boussayoud, A. Abderrezzak, Complete homogeneous symmetric functions of third and second-order linear recurrence sequences, *Electron. J. Math. Analysis Appl.*, **9**, 226-242, 2021.

[75] N. Saba, A. Boussayoud, M. Chelgham, Symmetric and generating functions for some generalized polynomials, *Malaya J. Mat.*, **8**(4), 1756-1765, 2020.

[76] N. Saba, A. Boussayoud, K.V. Venkata Kanuri, Mersenne Lucas numbers and complete homogeneous symmetric functions, *J. Appl. Math. Comput. Sci.* **24**(1), 127–139, 2022.

[77] M. Singh, O. Sikhwal, V. Parsai, Y. K. Gupta, Generalized Fibonacci-Lucas polynomials, *International Journal of advanced mathematical sciences*, **2**, 81-87, 2014.

[78] A. Suvarnamani, M. Tatong, Some properties of (p,q)-Fibonacci numbers.

[79] F. Yakoubi, A. Boussayoud , B. Aloui , H. Merzouk, k-balancing numbers and new generating functions with some special numbers and polynomials, *J. Sci. Arts.*,**22**(4), 929- 940, 2022.

[80] F. Yakoubi., A. Boussayoud, K. V. V. Kanuri, A New class of ordinary generating functions of binary products of k-Lucas balancing numbers with Chebyshev polynomials, *Math. Eng. Sci. Aerosp. (MESA)*, **12**(1), 135- 150, 2021.

المصطلحات العلمية

المصطلحات العلمية

الرمز	انجليزي	عربي
$\mathbb{N}$	Set of non-null natural numbers	مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة
$\mathbb{N} \cup \{0\}$	Set of natural numbers	مجموعة الأعداد الطبيعية
$\mathbb{R}$	Set of real numbers	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	Set of complex numbers	مجموعة الأعداد المركبة
$\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$	Alphabet	أبجدية
$\partial_{a_1 a_2}$	Divided difference	الفرق المقسوم
$e_k^{(n)}$	Elementary symmetric function	التابع التناظري الأولي
$h_k^{(n)}$	Complete symmetric function	التابع التناظري التام
$\delta_{a_1 a_2}^k$	Symmetrizing operator	المؤثر التناظري
$S_n(E)$	Symmetric function	التابع التناظري
$\{F_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Fibonacci numbers	أعداد k-فيبوناتشي
$\{L_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Lucas numbers	أعداد k-لوكاس
$\{P_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Pell numbers	أعداد k-بال
$\{Q_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Pell Lucas numbers	أعداد k-بال لوكاس
$\{J_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Jacobsthal numbers	أعداد k-جاكوبستال
$\{j_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Jacobsthal Lucas numbers	أعداد k-جاكوبستال لوكاس
$\{B_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -balancing numbers	أعداد k-متوازنة
$\{C_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k - Lucas balancing numbers	أعداد k-لوكاس المتوازنة
$\{M_{k,n}\}_{n\geq 0}$	k -Mersenne numbers	أعداد k-مارسان
$\{F_n(x)\}_{n\geq 0}$	Fibonacci polynomial	كثيرات حدود فيبوناتشي
$\{L_n(x)\}_{n\geq 0}$	Lucas polynomial	كثيرات حدود لوكاس
$\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$	Pell polynomial	كثيرات حدود بال
$\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$	Pell Lucas polynomial	كثيرات حدود بال لوكاس
$\{J_n(x)\}_{n\geq 0}$	Jacobsthal polynomial	كثيرات حدود جاكوبستال
$\{j_n(x)\}_{n\geq 0}$	Jacobsthal Lucas polynomial	كثيرات حدود جاكوبستال لوكاس
$\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$	Chebyshev polynomial of first kind	كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الأول

$\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$	Chebyshev polynomial of second kind	كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثاني
$\{V_n(x)\}_{n\geq 0}$	Chebyshev polynomial of third kind	كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الثالث
$\{W_n(x)\}_{n\geq 0}$	Chebyshev polynomial of fourth kind	كثيرات حدود تشيبيتشاف من النوع الرابع
$[n]_q$	q -analog	q -مماثل
$\binom{n}{k}$	Binomials coefficient	ثنائي الحد