République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes Et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.
Option : EDP et applications.

Thème

Étude d'une inégalité variationnelle du second ordre sur un domaine non borné dans un espace de Hilbert

Présenté par :

Boufrouaa Imane
Bouainah Soumia

Soutenu le : 27 juin 2018
Devant le jury composé de :

Président	**: Benhassine Hani**	**M.C.B**	**Université de Jijel**
Encadreur	**: Lounis Sabrina**	**M.C.B**	**Université de Jijel**
Examinateur	**: Kecis Ilyas**	**M.C.B**	**Université de Jijel**

Promotion **2017/2018**

Remerciements

*Tout d'abord, nous remercions **Allah**, le tout puissant, de nous avoir donnés la santé, la volonté et la patience pour mener à terme notre formation de Master.*

*Nous remercions Madame **Lounis Sabrina** qui a fourni le sujet de ce mémoire et a guidé de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'elle a témoigné tout au long de ce travail.*

A messieurs les membres du jury
Nous remercions :

*Monsieur **Benhassine Hani** qui nous fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire, qu'il veuille bien trouver ici l'expression de notre déférence et de notre profonde gratitude.*
*Monsieur **Kecis Ilyas** pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'examiner ce travail.*

Nous remercions nos parents qui ont soutenue, encouragées et motivées tout au long de nos études.

Enfin, nous ne pourrions terminer ces remerciements sans référence à l'ensemble de nos enseignants qui sont à l'origine de tout notre savoir.

De TOUT CŒUR MERCI..MERCI..MERCI..MERCI..

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

***A mes très chèrs parents* RDJEM *et* AKILA**

Qui sont la graine de mon existence et la source de ma réussite,

pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

***Et a ma grand mère* ZINAB.**

A mes très chers frères et sœurs

Je vous remercie pour votre confiance, votre soutien

Je ne sait comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

***A mes grande familles* BOUFROUAA.**

A mes amies.

A mes enseignants.

Imane

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie, je dédie ce mémoire

A mes très chères parents Youcef et Naima

Qui m'ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin .

A mes frères et mes sœurs.

Ainsi a toute la famille Bouainah.

A tous mes enseignants.

Soumia Bouainah

Étude d'une inégalité variationnelle du second ordre sur un domaine non borné dans un espace de Hilbert

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes.
$\overline{\mathbb{R}}$	$[-\infty, +\infty]$.
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
$\mathbb{R}^n$	l'ensemble des vecteurs de dimension n à coordonnées réelles.
H	un espace de Hilbert.

Soit E un espace vectoriel. On note par

E'	espace dual de E.
E''	espace bidual de E.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire dans la dualité E', E.
$\sigma(E, E')$	la topologie faible sur E.
$\sigma(E', E)$	la topologie faible* sur E'.
$\rightarrow$	la convergence forte.
$\rightharpoonup$	la convergence faible.
$\rightharpoonup^*$	la convergence faible étoile.

$L^1(\Omega, E)$ l'espace des applications Lebesgue-intégrables définies sur Ω à valeurs dans l'espace de Banach E muni du crochet de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle f, g \rangle_{L^1} = \int_0^T \langle f(x), g(x) \rangle dx,$$

et de la norme $\|.\|_{L^1}$.

$\mathscr{C}(E, F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|.$$

$\mathscr{C}^1([a,\, b];\, \mathrm{E})$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [a,\, b] \to \mathrm{E}$ ayant une dérivée continue $\dot{u}$, muni de la norme

$$\|u\|_{\mathscr{C}^1} = \max\{\max_{t\in[a,\, b]} \|u(t)\|,\, \max_{t\in[a,\, b]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

$\overline{\mathbb{B}}_{\mathrm{E}}(0,\, 1)$	la boule unité fermée de E.
$\mathrm{co}(\mathrm{C})$	l'enveloppe convexe de l'ensemble C.
$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{C})$	l'enveloppe convexe fermé de l'ensemble C.
$\mathrm{int}(\mathrm{C})$	l'intérieure de C.
$\overline{\mathrm{C}}$	l'adhérence de C.
p.p	presque partout.
i.e	c'est à dire.

Introduction

La notion de processus de Rafle trouve ses racines à l'origine dans les œuvres de J.J Moreau. Jean Jacques Moreau qui a écrit plus de 25 articles consacrés au traitement des aspects théoriques et numériques du processus de Rafle ainsi que ses applications dans la mécanique unilatérale (voir par exemple [13, 14]). Il a d'abord été envisagé de modéliser l'évolution Quasi-statique des systèmes elasto-plastiques. Le processus de Rafle consiste à trouver une trajectoire $t \in [0, \mathrm{T}] \mapsto u(t) \in \mathrm{C}(t)$ qui satisfait le problème de Cauchy suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t)}(u(t)) \quad p.p\ t \in [0, \mathrm{T}], \\ u(0) = u_0 \in \mathrm{C}(0), \end{cases}$$

où $\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t)}(u(t))$ est le cône normal à l'ensemble des contraintes $\mathrm{C}(t)$ au point $u(t)$ dans le sens d'analyse convexe. C'est une classe merveilleuse de problèmes d'évolution soumis à des contraintes unilatérales.

L'objectif de ce mémoire est de détailler un article de Samir. Adly et Ba Khiet [3]. Le but principale des auteurs de cet article est de généraliser les résultats obtenus dans un espace de Hilbert de dimension finie à un espace de Hilbert de dimension infinie avec un ensemble des contraintes qui peut être non borné et ne dépend pas seulement de t à l'aide de la mesure de non compacité de Kuratowski.

Notre travail est composé de deux chapitres. Le but dans le premier est de donner des notions, des définitions de base et quelques résultats fondamentaux qui nous seront utilises par la suite.

Dans la première section du deuxième chapitre nous rentrerons dans le vif du sujet, c'est à dire, l'étude d'existence de solutions pour l'inclusion différentielle suivante

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t,\, u(t))}(\dot{u}(t)) - \mathrm{F}(t,\, u(t), \dot{u}(t)) \quad , p.p\ t \in [0, \mathrm{T}], \\ u(0) = u_0,\ \dot{u}(0) = v_0 \in \mathrm{C}(0,\, u_0). \end{cases}$$

Où C est non vide, convexe fermé et admet une variation lipschitzienne et $\mathrm{F} :\ \mathrm{gph}(\mathrm{C}) \rightrightarrows \mathrm{H}$ est une m-application à valeurs convexes faiblement compactes dans H qui est un espace de

Hilbert séparable du dimension infinie, semi-continue supérieurement et vérifie la condition de croissance linéaire.
On propose dans cette étude un schéma de discrétisation implicite comme dans [12] avec différentes techniques pour analyser le processus de Rafle de second ordre avec une perturbation dans les espaces de Hilbert.
La deuxième section du deuxième chapitre, est consacré à l'étude de l'unicité de la solution pour le même problème d'évolution, mais dans ce cas on suppose que l'ensemble de contraintes dépend de t seulement.

Chapitre 1

Notions et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons des notions, des définitions de base et quelques résultats fondamentaux qui nous seront utiles dans notre travail.

1.1 Rappels Topologiques

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *Une distance sur un ensemble* E *est une application* $d : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. $d(x, y) = 0$ *si est seulement si* $x = y$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *pour tous* $x, y, z \in \mathrm{E}$.

Définition 1.1.2. *Un espace métrique est un couple* (E, d) *où* E *est un ensemble et* d *est une distance sur* E.

Exemple 1.1.3. *(1) L'ensemble des réels muni de la distance* $d(x, y) = |x - y|$ *est un espace métrique.*

(2) Si E *est un ensemble quelconque, on définit une distance sur* E *par*

$$\begin{cases} d(x, y) = 0, \ \text{si}\, x = y, \\ d(x, y) = 1, \ \text{si}\, x \neq y. \end{cases}$$

On dit que d *est la distance discrète sur* E*, alors* (E, d) *est un espace métrique.*

Définition 1.1.4. *On appelle diamètre d'une partie* A *d'un espace métrique* (E, d) *et on note* $\mathrm{diam}(A)$ *la quantité*

$$\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y),\, x \in A,\, y \in A\}.$$

Définition 1.1.5. *Soit* $(\mathrm{E},\, d)$ *un espace métrique, soit* $x \in \mathrm{E}$ *et soit* $r \in \mathbb{R}_+^*$. *On appelle boule ouverte (respectivement boule fermée) de centre* x *et de rayon* r *l'ensemble*

$$\mathbb{B}(x,\, r) = \{y \in \mathrm{E},\, d(x,\, y) < r\}$$

$$(resp.\ \ \overline{\mathbb{B}}(x,\, r) = \{y \in \mathrm{E},\, d(x,\, y) \leq r\}).$$

Pour $0 < r < r'$ *les inclusions* $\mathbb{B}(x,\, r) \subset \overline{\mathbb{B}}(x,\, r) \subset \mathbb{B}(x,\, r')$ *sont des conséquences directes de la définition.*

Définition 1.1.6. *Soient* A, B *deux sous ensembles fermés d'un espace métrique* $(\mathrm{E},\, d)$. *Posons*

$$d(x,\, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

- *On appelle écart entre* A *et* B *que l'on note* $e(A,\, B)$ *la quantité définie par*

$$e(A,\, B) = \sup_{x \in A} \{\inf_{y \in B} d(x,\, y)\}.$$

- *On appelle distance de Hausdorff entre* A *et* B *et on la note* $d_{\mathrm{E}}(A,\, B)$ *la quantité définie par*

$$d_{\mathrm{H}}(A,\, B) = \max\{e(A,\, B);\, e(B,\, A)\}.$$

Remarquons que $d_{\mathrm{H}}(A,\, B) = d_{\mathrm{H}}(B,\, A)$.

Définition 1.1.7. *Soit* $(\mathrm{E},\, d)$ *un espace métrique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. *On dit que* A *est dense dans* E *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$.

Exemple 1.1.8. $(\mathrm{E},\, d) = (\mathbb{R},\, |.|)$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.9. *On dit qu'un espace métrique* $(\mathrm{E},\, d)$ *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ *dénombrable et dense.*

1.1.2 Limites d'ensembles

Les limites d'ensembles ont été introduites par Painlevé en 1902. Elles ont été popularisés par Kuratowski dans son célèbre livre "Topologie" et donc, souvent appelées limites supérieure et inférieure de Kuratowski de suites d'ensembles.

Définition 1.1.10. *Soit* (K_n) *une suite de sous ensembles d'un espace métrique* $(\mathrm{E},\, d)$. *Nous disons que le sous-ensemble*

$$\limsup_{n \to +\infty} K_n = \{x \in \mathrm{E} / \liminf_{n \to +\infty} d(x,\, K_n) = 0\},$$

est la limite supérieure de la suite (K_n) *et que le sous ensemble*

$$\liminf_{n \to +\infty} K_n = \{x \in \mathrm{E} / \limsup_{n \to +\infty} d(x,\, K_n) = 0\},$$

est sa limite inférieure.
Un sous ensemble K est appelé limite ou limite ensembliste de la suite (K_n) si

$$K = \liminf_{n\to+\infty} K_n = \limsup_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} K_n.$$

1.1.3 Espaces métriques complets

Définition 1.1.11. *Soit (E, d) un espace métrique, on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E tend ou converge vers un point x de E si $d(x_n, x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, ou encore si pour toute boule $\mathbb{B}$ de centre x et de rayon strictement positif il existe $N > 0$ tel que $n > N$ implique $x_n \in \mathbb{B}(x, r)$, on écrit alors*

$$x_n \to x \qquad ou \qquad x = \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Définition 1.1.12. *Soit (E, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de E. On dit que A est fermé, si pour tout suite $(x_n)_n$ de A telle que x_n converge vers un élément x de A, i.e,*

$$x_n \in \mathrm{A} \quad , \quad x_n \to x \in \mathrm{A}.$$

Définition 1.1.13. *Une suite $(x_n)_n$ dans un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si $d(x_p, x_q)$ tend vers 0 lorsque p et q tendent vers l'infini, donc si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n > 0 : \, p \geq n, \, q \geq n \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

Définition 1.1.14. *Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

1.1.4 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.15. *On appelle norme sur un espace vectoriel E réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{E} : \; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

ii) $\forall x \in \mathrm{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \; \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$,

iii) $\forall x, \, y \in \mathrm{E} : \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Toute norme définit naturellement une distance

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Définition 1.1.16. *On appelle espace vectoriel normé le couple $(\mathrm{E}, \|.\|)$.*

Définition 1.1.17. *Si E est complet pour une norme, on dit que c'est un espace de Banach.*

Définition 1.1.18. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *On désigne par* E' *le dual topologique de* E, *i.e, l'espace des formes linéaires continues sur* E. E' *est muni de la norme duale*

$$\|f\|_{\mathrm{E}'} = \sup_{x\in \mathrm{E},\, \|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{x\in \mathrm{E},\, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in \mathrm{E},\, \|x\|\leq 1} \langle f,\, x\rangle,$$

où $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ *est le crochet de dualité entre* E' *et* E.

1.2 Analyse Hilbertienne

1.2.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Un produit scalaire sur* E *est une application* $\mathrm{E}\times\mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ *notée* $\langle\cdot,\,\cdot\rangle$ *telle que*

1. $x \mapsto \langle x,\, y\rangle$ *est linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$, $\forall y \in \mathrm{E}$,
2. $\langle x,\, y\rangle = \overline{\langle y,\, x\rangle}$, $\forall x,\, y \in \mathrm{E}$,
3. $\langle x,\, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathrm{E}$,
4. $\langle x,\, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in \mathrm{E}$.

Définition 1.2.2. *Un espace* E *muni d'un produit scalaire est un espace pré-hilbertien (réel ou complexe).*
Si E *est un espace pré-hilbertien, il est normé par*

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Corollaire 1.2.3. *L'application* $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *vérifie les axiomes d'une norme*

i) pour tous $x \in \mathrm{E} : \|x\| \geq 0$, *et* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
ii) pour tous $x,\, y \in \mathrm{E} : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
iii) pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, *et pour tout* $x,\, y \in \mathrm{E} :$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Proposition 1.2.4. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *Dans un espace préhilbertien* E, *on a*

$$\forall x,\, y \in \mathrm{E},\, |\langle x,\, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|,$$

en posant $\|x\| = \langle x,\, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ *et* $\|y\| = \langle y,\, y\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.2.5. *Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien complet (pour la distance associée à sa norme).*

Exemple 1.2.6. *1) L'espace* $\mathbb{C}^n$ *muni du produit scalaire*

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

est un espace pré-hilbertien complet.

2) L'espace $\mathbb{K}^n$ *avec l'une des normes*

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|, \ \|x\|_\infty = \sup_{0\le i\le n} |u_i|$$

n'est pas un espace de Hilbert car l'inégalité du parallélogramme n'est pas vraie pour ces normes.

3) L'espace l^2 *des suites de carrés sommable est un espace de Hilbert*

$$l^2 = \left\{ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}, \ (u,\, v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}.$$

1.3 Espaces L^p

Définition 1.3.1. *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \le p < \infty$*. On appelle espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^p(\Omega,\, \mathrm{E})$ *l'espace*

$$\mathrm{L}^p(\Omega,\, \mathrm{E}) = \{f : \Omega \to \mathrm{E};\ f \textit{ mesurable et } \|f\|^p \in \mathrm{L}^1(\Omega,\, \mathrm{E})\}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(\Omega,\, \mathrm{E})$*, on pose*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.3.2. *L'espace de Lebesgue* $\mathrm{L}^\infty(\Omega,\, \mathrm{E})$ *est défini par*

$$\mathrm{L}^\infty(\Omega,\, \mathrm{E}) = \{f : \Omega \to \mathrm{E};\ f \textit{ mesurable et } \exists\, \textit{une constante } C \textit{ tel que } \|f(x)\| \le C \textit{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega,\, \mathrm{E})$*, on pose*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{C;\ \|f(x)\| \le C \textit{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.3.3. ***(Fischer-Riesz)*** L^p *est un espace de Banach pour tout* $1 \le p \le \infty$*.*

Théorème 1.3.4. *Soit* $\Phi \in (\mathrm{L}^1)'$*. Alors il existe* $u \in \mathrm{L}^\infty$ *unique tel que*

$$\langle \varphi,\, f\rangle = \int uf,\ \forall\, f \in \mathrm{L}^1.$$

On a de plus

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|\varphi\|_{(\mathrm{L}^1)'}.$$

Remarque 1.3.5. *Le théorème 1.3.4 affirme que toute forme linéaire et continue sur* L^1 *se représente à l'aide d'une fonction de* L^∞*. L'application* $\varphi \mapsto u$ *est une isométrie surjective qui permet d'identifier* $(\mathrm{L}^1)'$ *et* L^∞*. Dans la suite on fera systématiquement l'identification*

$$(\mathrm{L}^1)' = \mathrm{L}^\infty.$$

Proposition 1.3.6. *Soient* $p,\, q \in \mathbb{R}_+$ *tels que* $1 \le p < q \le +\infty$*. Alors,* $\mathrm{L}^q_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}$*. De plus, il existe* C*, indépendant de* p *et* q*, tel que* $\|f\|_p \le C\|f\|_q$ *pour tout* $f \in \mathrm{L}^q$*.*

1.4 Analyse convexe

Pour plus de détails se réfère à [2].

1.4.1 Ensembles Convexes

Définition 1.4.1. *On dit qu'un sous-ensemble* C *d'un espace vectoriel* E *est convexe si et seulement si*

$$\forall (u,\, v) \in \mathrm{C}^2,\ \forall \lambda \in [0,\, 1] :\ \lambda u + (1-\lambda) v \in \mathrm{C}.$$

Exemple 1.4.2.
1. *Dans un espace vectoriel normé réel, toute boule ouverte ou fermée est convexe.*
2. *L'intersection d'une famille quelconque de sous- ensembles convexes est convexe.*
3. *L'intérieur* $int(\mathrm{C})$ *et l'adhérence* $\overline{\mathrm{C}}$ *d'un ensemble convexe le sont aussi.*

Définition 1.4.3. *Soit* C *une partie de* E*, l'enveloppe convexe de* C*, noté* $\mathrm{co}(\mathrm{C})$ *est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant* C*, et donc c'est le plus petit convexe qui contient* C*, i.e.* $\mathrm{C} \subset \mathrm{co}(\mathrm{C})$.

Proposition 1.4.4. *Soit* E *un espace vectoriel et* $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$*. Alors,*

$$\mathrm{co}(\mathrm{C}) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\, x_i \in \mathrm{C},\, \lambda_i \geq 0 \ \text{\textit{tel que}} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.4.5. *Soit* C *une partie quelconque de* E*, on désigne par l'enveloppe convexe-fermée de* C*, et on la note* $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{C})$*, l'adhérence* $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{C})}$ *de son enveloppe convexe.*

1.4.2 Fonctions Convexes

Dans cette section, on considère des fonctions $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 1.4.6. *On appelle graphe de* f *l'ensemble définie par*

$$\mathrm{gph}\, f := \{(x,\, f(x)),\, x \in \mathrm{E}\}.$$

Définition 1.4.7. *On rappelle que l'épigraphe de* f *est la partie de l'espace produit* $\mathrm{E} \times \mathbb{R}$ *qui est au-dessus de son graphe*

$$\mathrm{epi}\, f := \{(x,\, t) \in \mathrm{E} \times \mathbb{R} :\ f(x) \leq t\}.$$

Définition 1.4.8. *On appelle domaine de* f *l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur* $+\infty$ *(elle peut y prendre la valeur* $-\infty$*, mais nous considérons le plus souvent des fonctions ne prenant pas cette valeur). On le note*

$$\mathrm{dom}\, f := \{x \in \mathrm{E} :\ f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.4.9. *On dit qu'une fonction* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est convexe si pour tous* $x, y \in \operatorname{dom} f$ *et pour tout* $\lambda \in [0, 1]$*, on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Exemple 1.4.10.
1. *Un supremum de fonctions convexes est une fonction convexe.*
2. *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* f *une fonction convexe. Alors* (αf) *est convexe.*
3. *La somme de deux fonctions convexes est convexe.*
4. *La fonction* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \langle a, x\rangle + b$ *où* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est convexe. En effet, soient* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in [0, 1]$*, on a*

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \langle a, (\lambda x + (1-\lambda)y)\rangle + b \\ &= \lambda\langle a, x\rangle + (1-\lambda)\langle a, y\rangle + \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= \lambda[\langle a, x\rangle + b] + (1-\lambda)[\langle a, y\rangle + b] \\ &= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y). \end{aligned}$$

5. *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *car si* $\lambda \in [0, 1]$ *et* $x \neq y$*, alors*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda^2x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2y^2 \\ &\leq \lambda^2x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2+y^2) + (1-\lambda)^2y^2 \\ &= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2. \end{aligned}$$

Définition 1.4.11. *Soit* C *un sous ensemble non vide de* E*, la fonction indicatrice associée à* C*,* $\mathcal{I}_\mathrm{C} : \mathrm{E} \to [0, +\infty]$ *est définie par*

$$\mathcal{I}_\mathrm{C}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathrm{C}, \\ +\infty, & x \notin \mathrm{C}. \end{cases}$$

- $\operatorname{dom} \mathcal{I}_\mathrm{C} = \{x \in \mathrm{E}, \mathcal{I}_\mathrm{C}(x) < +\infty\} = \mathrm{C}$,
- $\operatorname{epi} \mathcal{I}_\mathrm{C} = \{(x, t) \in \mathrm{E} \times \mathbb{R}, \mathcal{I}_\mathrm{C}(x) \leq t\} = \mathrm{C} \times [0, +\infty[$,

Théorème 1.4.12. *La fonction* $f : \mathrm{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *est convexe si est seulement si son épigraphe* $\operatorname{epi} f$ *est convexe dans* $\mathrm{E} \times \mathbb{R}$.

Remarque 1.4.13. *La fonction* $\mathcal{I}_\mathrm{C}$ *est convexe si est seulement si* C *est convexe.*

Définition 1.4.14. *Soient* E *un espace normé,* E' *son duale topologique et* C *un ensemble non vide de* E'*. La fonction support de* C *(ou la fonction d'appui de* C*), est la fonction notée* σ_C *définie par*

$$\begin{aligned} \sigma_\mathrm{C} :\ & \mathrm{E}' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x \mapsto \sigma_\mathrm{C}(x) := \sup_{z \in \mathrm{C}} \langle x, z\rangle. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.15. *[6] **(Projection sur un convexe fermé)** Soient* E *un espace de Hilbert et* C *un sous ensemble non vide, convexe et fermé de* E*. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{E}$*, il existe une unique projection de* x *sur* C*, i.e, l'unique* $y \in \mathrm{C}$ *tel que*

$$\|x - y\| = \min_{z \in \mathrm{C}} \|x - z\|.$$

On le note alors $\mathrm{proj}(\mathrm{C},\, x)$ *l'opérateur de projection orthogonal sur* C*, défini par*

$$\mathrm{proj}(\mathrm{C},\, x) = \{y \in \mathrm{C},\, \|x - y\| = \mathrm{d}(x, \mathrm{C})\}.$$

Proposition 1.4.16. ***(Caractérisation d'une projection)*** *Soit* $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$ *un convexe non vide et fermé. Un point* $y \in \mathrm{C}$ *est une projection de* $x \in \mathrm{E}$ *sur* C *si est seulement si la condition suivante est vérifiée*

$$\langle x - y,\, s - y\rangle \leq 0,\, \forall\, s \in \mathrm{C}.$$

Définition 1.4.17. *Une fonction* $f : \mathrm{E} \to \overline{\mathbb{R}}$ *est dite semi-continue inférieurement* (*s.c.i*) *sur* E *si pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et pour tout suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *converge vers* x *on a*

$$\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Exemple 1.4.18.

1. *Un supremum de fonctions semi-continues inférieurement est semi-continue inférieurement.*
2. *La fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *définie par* $f(x) = \|x\|$ *est semi-continue inférieurement.*
3. *Toute fonction continue sur* E *est s.c .i.*

Définition 1.4.19. *On dit qu'une fonction* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est semi-continue supérieurement* (*s.c.s*) *sur* E *si pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *et pour tout suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *converge vers* x *on a*

$$f(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} f(x_n).$$

1.4.3 Cône normal

Définition 1.4.20. *Soit* C *un sous ensemble convexe de* E *et* $\overline{x} \in \mathrm{C}$*, le cône normal à* C *en* $\overline{x}$ *est l'ensemble défini par*

$$\mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) := \{v \in \mathrm{E} :\, \langle v,\, x - \overline{x}\rangle \leq 0,\, pour\, tout\, x \in \mathrm{C}\}.$$

Exemple 1.4.21.

1. *Soit* $\mathrm{C} = [0,\, 1]$ *un sous ensemble de* $\mathbb{R}$*, alors le cône normal à* C *en* $\overline{x} = 0$ (*respectivement* $\overline{x} = 1$) *est* $]-\infty,\, 0]$ (*respectivement* $[0,\, +\infty[$).
2. *Soit* $\mathrm{C} = [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ *un sous ensemble de* $\mathbb{R}^2$*, le cône normal à* C *en* $\overline{x} = (0,\, 0)$ *est* $]-\infty,\, 0] \times [-\infty,\, 0[$.

Remarque 1.4.22. ***(la relation entre le cône normal et la projection)*** *Soit* C *un convexe fermé de* E, *si* $y = \mathrm{proj}_{\mathrm{C}}(x)$, *alors* $y = (\mathrm{I} + \mathcal{N}_{\mathrm{C}})^{-1}(x)$, *donc*

$$(\mathrm{I} + \mathcal{N}_{\mathrm{C}})^{-1}(\cdot) = \mathrm{proj}_{\mathrm{C}}(\cdot).$$

En effet,

$$\begin{aligned} y = \mathrm{proj}_{\mathrm{C}}(x) &\Leftrightarrow \langle x - y,\, z - y \rangle \leq 0,\, \forall z \in \mathrm{C} \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(y) \\ &\Leftrightarrow x \in y + \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(y) \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathrm{I} + \mathcal{N}_{\mathrm{C}})(y) \\ &\Leftrightarrow y = (\mathrm{I} + \mathcal{N}_{\mathrm{C}})^{-1}(x), \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{C}}(\cdot) = (\mathrm{I} + \mathcal{N}_{\mathrm{C}})^{-1}(\cdot).$$

Proposition 1.4.23. ***(La relation entre la fonction support et le cône normal)*** $z \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(x)$ *si est seulement si pour tout* $x \in \mathrm{C}$

$$\sigma_{\mathrm{C}}(z) = \langle z,\, x \rangle.$$

1.4.4 Sous différentiel d'une fonction

Pour plus de détails on réfère à [2].

Définition 1.4.24. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction convexe et soit* $\overline{x} \in \mathrm{dom} f$, *un élément* $\xi \in \mathrm{E}$ *est dit sous-gradient de* f *en* $\overline{x}$ *si*

$$\langle \xi,\, x - \overline{x} \rangle \leq f(x) - f(\overline{x}),\ pour\, tout\, x \in \mathrm{E}.$$

La collection de tous les sous-gradients de f *en* $\overline{x}$ *est appelée le* sous différentiel *de* f *en* $\overline{x}$ *et noté* $\partial f(\overline{x})$.

Exemple 1.4.25. 1. *Soit la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = |x|$. *Alors*

$$\partial f(x) = \begin{cases} 1; & si\ \ x > 0, \\ [-1, 1]; & si\, x = 0, \\ -1; & si\ x < 0. \end{cases}$$

2. *La boule fermée* $\overline{\mathbb{B}}(0,\, 1)$ *est le sous différentiel en* $\overline{x} = 0$ *de la fonction* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *définie par* $g(x) = \|x\|$. *En effet, soit* $\xi \in \overline{\mathbb{B}}(0,\, 1)$, *i.e,* $\|\xi\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \langle \xi,\, x - 0 \rangle &\leq \|\xi\|.\|x\|,\, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\leq \|x\| = g(x) - g(\overline{x}) \\ &\Rightarrow \xi \in \partial g(\overline{x}) \\ &\Rightarrow \overline{\mathbb{B}}(0,\, 1) \subset \partial g(0). \end{aligned}$$

Inversement, soit $\xi \in \partial g(0)$

$$\xi \in \partial g(0) \quad \Rightarrow \quad \langle \xi,\, x - 0\rangle \leq g(x) - g(0),\; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

or

$$\langle \xi,\, x\rangle \leq \|x\|,\; \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

en particulier, $x = \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle \xi,\, \xi\rangle &\leq \|\xi\|^2 \leq \|\xi\| \\ &\Rightarrow \|\xi\| \leq 1 \\ &\Rightarrow \xi \subset \overline{\mathbb{B}}(0,\, 1) \\ &\Rightarrow \partial g(0) \subset \overline{\mathbb{B}}(0,\, 1), \end{aligned}$$

donc

$$\partial g(0) = \overline{\mathbb{B}}(0,\, 1).$$

3. *Soit* C *un ensemble convexe de* $\mathbb{R}^n$*, le sous différentiel de la fonction indicatrice* $\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x})$ *est le cône normal* $\mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x})$*. En effet, pour tout* $\overline{x} \in \mathrm{C}$*, soit* $\xi \in \partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x})$

$$\begin{aligned} \xi \in \partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \quad &\Rightarrow \quad \langle \xi,\, x - \overline{x}\rangle \leq \mathcal{I}_{\mathrm{C}}(x) - \mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}),\; \forall x \in \mathrm{H} \\ &\Rightarrow \quad \langle \xi,\, x - \overline{x}\rangle \leq \mathcal{I}_{\mathrm{C}}(x),\; \forall x \in \mathrm{H}, \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \in \mathrm{C}$

$$\xi \in \partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \Rightarrow \langle \xi,\, x - \overline{x}\rangle \leq 0,$$

i.e,

$$\xi \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}),$$

et donc

$$\partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \subset \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}).$$

Inversement, soit $\xi \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x})$

$$\begin{aligned} \xi \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \quad &\Rightarrow \quad \langle \xi,\, x - \overline{x}\rangle \leq 0,\; \forall x \in \mathrm{C} \\ &\Rightarrow \quad \langle \xi,\, x - \overline{x}\rangle \leq \mathcal{I}_{\mathrm{C}}(x) - \mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \subset \partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}), \end{aligned}$$

d'où

$$\partial\mathcal{I}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) = \mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}).$$

Proposition 1.4.26. *Soit* E *un espace de Banach,* C *un sous-espace non vide fermé et convexe de* E*, et soit* $\overline{x} \in \mathrm{C}$*, alors*

$$\mathcal{N}_{\mathrm{C}}(\overline{x}) \cap \overline{\mathbb{B}}_{\mathrm{E}}(0,\, 1) = \partial d_{\mathrm{C}}(\overline{x}).$$

1.5 Théorèmes Fondamentaux

1.5.1 Théorème de compacité d'Ascoli

Pour plus de détails se référer à [1]

Définition 1.5.1. *Nous dirons qu'un sous ensemble* $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *de l'espace des applications continues de* E *dans* F *est équi-continu en* x_0 *si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta = \eta(\varepsilon, x_0, \mathrm{A})$ *(dépendant de* A *et non des fonctions* f *de* A*) tel que*

$$\forall f \in \mathrm{A}, d(f(x),\ f(x_0)) \leq \varepsilon \text{ ds que } d(x,\ x_0) \leq \eta = \eta(\varepsilon,\ x_0,\ \mathrm{A}).$$

Nous dirons qu'un sous ensemble $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est équi-continu s'il est équi-continu en tout point de* E *et qu'il est uniformément équi-continu si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\eta = \eta(\varepsilon, \mathrm{A})$ *indépendant de* $x \in \mathrm{E}$ *tel que*

$$\forall f \in \mathrm{A}, d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \text{ ds que } d(x,\ y) \leq \eta = \eta(\varepsilon,\ \mathrm{A}).$$

Théorème 1.5.2. ***(Théorème d'Ascoli-Arzéla)*** *Soient* K *un espace compact et* (E, d) *un espace métrique. L'espace* $\mathscr{C}(K, \mathrm{E})$ *des fonctions continues de* K *dans* E*, muni de la topologie de la convergence uniforme, est un espace métrique.*
Une partie A *de* $\mathscr{C}(K, \mathrm{E})$ *est relativement compacte si est seulement si, pour tout point* x *de* K

1. *A est équi-continue en x, i.e, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que*
$$\forall f \in A,\ \forall y \in V,\ d(f(x),\ f(y)) < \epsilon,$$
2. *l'ensemble $A(x) = \{f(x),\ f \in A\}$ est relativement compact.*

Théorème 1.5.3. *On considère* $x_k(\cdot)$ *comme une suite d'une fonction absolument continue d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans un espace de Banach* E *satisfaisant*

i) $\forall\, t \in I,\ (x_k(t))_{k \in \mathrm{N}}$ *est un sous ensemble relativement compact de* E*,*

ii) il existe une fonction $c(\cdot) \in \mathrm{L}^1(I)$ *tel que pour presque tout* $t \in I$*,* $\|x_k^{'}(t)\| \leq c(t)$*.*
Alors, il existe une sous suite de $(x_k)_k$ *qu'on la note toujours* $x_k(\cdot)$ *qui converge vers une fonction absolument continue* $x : I \to \mathrm{E}$ *au sens suivant*

1) $x_k(\cdot)$ *converge uniformément vers* $x(\cdot)$ *sur les sous-ensemble compactes de* I*.*

2) $x_k^{'}(\cdot)$ *converge faiblement vers* $x^{'}(\cdot)$ *dans* $\mathrm{L}^1(I,\ \mathrm{E})$*.*

1.5.2 Lemme de Gronwall

Lemme 1.5.4. ***(Lemme de Gronwall discret)*** *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n \geq 0}$ *deux suites telles que pour tout* $n \geq 0$ *on ait :* $a_n \geq 0$ *et* $b_n \geq 0$*. On suppose qu'il existe une constante*

$\mathrm{M} \geq 0$ *telle que pour tout* $n \geq 0$

$$a_{n+1} \leq \mathrm{M} + \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Alors, pour tout n *on ait*

$$a_{n+1} \leq \mathrm{M} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Corollaire 1.5.5. ***(corollaire du Lemme de Gronwall)*** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1([a, b]; \mathbb{R})$ *vérifiant*

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a, b], \ \|f'(t)\| \leq \beta + \alpha \|f(t)\|.$$

Alors,

$$\forall t \in [a, b], \ \|f(t)\| \leq \|f(a)\| \mathrm{e}^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(t-a)} - 1\right).$$

1.6 Multi-application

Pour plus de détails sur cette section se référer à [9].

Définition 1.6.1. *Soient* X *et* Y *deux ensembles non vides. Une multi-application* (*ou fonction multivoque*) F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *est une fonction qui à chaque élément* $x \in \mathrm{X}$ *associe un sous ensemble* $\mathrm{F}(x)$ *de* Y*, on note* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ *ou* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{P(Y)}$, (P(Y) *est l'ensemble des parties de* Y).
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ *sont donnés par*

$$\mathrm{Dom(F)} = \{x \in \mathrm{X}; \, \mathrm{F}(x) \neq \emptyset\},$$

$$\mathrm{gph(F)} = \{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} : \, x \in \mathrm{Dom\ F}, \, y \in \mathrm{F}(x)\},$$

$$\mathrm{Im(F)} = \bigcup_{x \in \mathrm{Dom\,F}} \mathrm{F}(x).$$

Définition 1.6.2. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ *une multi-application. Alors* F *est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point* $x_0 \in \mathrm{X}$*, si pour tout ouvert* V *de* Y *tel que* $\mathrm{F}(x) \subset \mathrm{V}$*, il existe un ouvert* U *de* X *tel que* $x_0 \in \mathrm{U}$ *et* $\mathrm{F}(x_0) \subset \mathrm{V}, \forall x \in \mathrm{U}$.
On dit que F *est s.c.s sur* X *si elle est s.c.s en tout point* $x \in \mathrm{X}$.

Définition 1.6.3. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ *une multi-application. Alors* F *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point* $x_0 \in \mathrm{X}$*, si pour tout ouvert* V *de* Y *tel que* $\mathrm{F}(x_0) \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$*, il existe un ouvert* U *de* X *tel que* $x_0 \in \mathrm{U}$ *et* $\mathrm{F(U)} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset$.
On dit que F *est s.c.i sur* X *si elle est s.c.i en tout point* $x \in \mathrm{X}$.

Exemple 1.6.4. *1) La multifonction* $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F_1(x) = \begin{cases} [-1,1], & si\, x \neq 0, \\ \{0\}, & si\, x = 0, \end{cases}$$

est s.c.i en zéro mais n'est pas s.c.s en zéro.

2) La multifonction $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & si\, x \neq 0, \\ [-1,1], & si\, x = 0, \end{cases}$$

est s.c.s en zéro mais n'est pas s.c.i en zéro.

Voici quelques caractérisations de la semi-continuité supérieure et inférieure.

Proposition 1.6.5. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F *est semi-continue supérieurement sur* X*,*

ii) l'ensemble $F_+^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}$ *est un ouvert de* X *pour tout ouvert* G *de* Y*,*

iii) l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \cap M \neq \emptyset\}$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* M *de* Y*.*

Proposition 1.6.6. *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) F *est semi-continue inférieurement sur* X*,*

ii) l'ensemble $F_+^{-1}(G) = \{x \in X : F(x) \subset M\}$ *est un fermé de* X *pour tout fermé* M *de* Y*,*

iii) l'ensemble $F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ *est un ouvert de* X *pour tout ouvert* G *de* Y*.*

Définition 1.6.7. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application, nous dirons que*

$$\limsup_{x' \longrightarrow x} F(x') = \{y \in Y : \liminf_{x' \longrightarrow x} d(y, F(x')) = 0\},$$

est la limite supérieure de $F(x')$ *quand* $x' \to x$*, et que*

$$\liminf_{x' \longrightarrow x} F(x') = \{y \in Y : \limsup_{x' \longrightarrow x} d(y, F(x')) = 0\},$$

est la limite inférieure de $F(x')$ *quand* $x' \to x$*.*

Elles sont évidement fermées. Nous observons aussi que, pour tout $x \in \mathrm{Dom}(F)$ *on a*

$$\liminf_{x' \longrightarrow x} F(x') \subset \overline{F(x)} \subset \limsup_{x' \longrightarrow x} F(x').$$

Notation : Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{X}$ et A_n une suite de sous ensembles contenant dans X. Notons que si $\mathrm{A} = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \mathrm{A}_n$, alors

$$\mathrm{A} = \bigcap_{n} \overline{\bigcup_{m \geq n} \mathrm{A}_m}.$$

Rappelons que la $\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \mathrm{A}_n$ est l'ensemble des points d'accumulation des suites $(x_n)_n$ telles que $x_n \subset \mathrm{A}_n$.

Théorème 1.6.8. *Considérons une suite* K_n *de sous ensembles contenant dans un ensemble compact* K *d'un espace de Banach séparable* E. *Alors*

$$\overline{co}(\limsup_{n \to \infty} \mathrm{K}_n) = \bigcap_{N>0} \overline{co}(\bigcup_{n \geq N} \mathrm{K}_n).$$

Théorème 1.6.9. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques,* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ *une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x' \to x} \mathrm{F}(x') = \mathrm{F}(x).$$

Définition 1.6.10. *Soit* E *un espace de Hilbert. Un opérateur* $\mathrm{A} : \mathrm{E} \rightrightarrows 2^{\mathrm{E}}$ *est dit monotone si est seulement si*

$$\forall (x_1,\, y_1) \in \mathrm{gph(A)},\, \forall (x_2,\, y_2) \in \mathrm{gph(A)} : \ \langle y_1 - y_2,\, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Exemple 1.6.11. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *une fonction propre convexe, alors le sous différentiel, qui est un opérateur multivoque est monotone. En effet, soient* $(x_1,\, y_1) \in \mathrm{gph}\, \partial f$ *et* $(x_2,\, y_2) \in \mathrm{gph}\, \partial f$

$$\begin{cases} (x_1,\, y_1) \in \mathrm{gph}\, \partial f \Rightarrow y_1 \in \partial f(x_1), \\ (x_2,\, y_2) \in \mathrm{gph}\, \partial f \Rightarrow y_2 \in \partial f(x_2), \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \langle y_1,\, z - x_1 \rangle \leq f(z) - f(x_1),\, \forall z \in \mathbb{R}^n, \\ \langle y_2,\, z - x_2 \rangle \leq f(z) - f(x_2),\, \forall z \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \langle y_1,\, x_2 - x_1 \rangle \leq f(x_2) - f(x_1), \\ \langle y_2,\, x_1 - x_2 \rangle \leq f(x_1) - f(x_2), \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} \langle y_1,\, x_1 - x_2 \rangle \geq f(x_1) - f(x_2), \\ \langle -y_2,\, x_1 - x_2 \rangle \geq f(x_2) - f(x_1), \end{cases}$$

en additionnant, on obtient

$$\langle y_1 - y_2,\, x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

et par conséquent, le sous différentiel d'une fonction est un opérateur monotone.

1.7 Mesure de Kuratowski pour les ensembles non compacts

Soit $(\mathrm{E},\, d)$ un espace métrique. On pose $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}$ la classe de tous les ensembles bornés d'un espace métrique.

Définition 1.7.1. *Soit* $(\mathrm{E},\, d)$ *un espace métrique complet. La fonction* $\gamma : \mathcal{M}_{\mathrm{X}} \to [0,\, +\infty]$ *définie par*

$$\gamma(\mathrm{B}) = \inf\{r \geq 0 : \mathrm{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \operatorname{diam}(\mathrm{B}_i) \leq r\}.$$

Est appelée la mesure du non-compacité de Kuratowski .

Lemme 1.7.2. *Soit* $(\mathrm{E},\, \langle\cdot,\, \cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert de dimension infinie et Soient* B_1 *et* B_2 *deux ensembles bornés de* H*, alors*

i) $\gamma(\mathrm{B}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B}_1$ *est relativement compact.*

ii) Si $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}_2$*, alors* $\gamma(\mathrm{B}_1) \leq \gamma(\mathrm{B}_2)$.

iii) $\gamma(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2) \leq \gamma(\mathrm{B}_1) + \gamma(\mathrm{B}_2)$.

iv) $\gamma(x_0 + r\mathbb{B}(0,\, 1)) = 2r$ *pour tout* $x_0 \in \mathrm{H}$ *et tout* $r \geq 0$.

1.8 topologies faibles

Pour plus de détail se référer à [6].

1.8.1 Topologie faible

Définition 1.8.1. *Soit* E *un espace de Banach et* $f \in \mathrm{E}'$*, considérons l'application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_f : & \mathrm{E} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \varphi_f(x) := \langle f,\, x\rangle, \end{array}$$

on appelle topologie faible sur E*, notée* $\sigma(\mathrm{E},\, \mathrm{E}')$*, la topologie la moins fine rendant continus toutes les applications* $(\varphi_f)_{f\in\mathrm{E}'}$.

Notation Étant donnée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{E},\, \mathrm{E}')$.

Proposition 1.8.2. *Soit* E *un espace de Banach, soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E*. On a les propriétés suivantes*

1. $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ *ssi* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$ *pour tout* $f \in \mathrm{E}'$.
2. *Si* $x_n \to x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$, *alors* $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* E *et* $\|x\|_{\mathrm{E}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_{\mathrm{E}}$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* E' *(i.e,* $\|f_n - f\| \to 0$*) alors* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Corollaire 1.8.3. ***(Lemme de Mazur)*** *Soit* E *un espace de Banach. Si* $(x_n)_n$ *une suite qui converge faiblement vers* x *dans* E. *Alors, il existe une suite* $(y_n)_n$ *avec chaque* y_n *combinaison convexe des* $\{x_k, k \geq n\}$ *qui converge fortement vers* x *dans* E.

1.8.2 Topologie faible *

Soit E un espace de Banach. On sait que E' est aussi un espace de Banach. On rappelle que E'' est le dual topologique de E', i.e, l'ensemble des formes linéaires continues sur E' et qu'on peut le munir de la norme

$$\forall \xi \in \mathrm{E}'' : \|\xi\|_{\mathrm{E}''} = \sup_{f\in\mathrm{E}',\, \|f\|\leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

C'est encore un espace de Banach appelé bidual de E.
Sur E' sont déjà définies deux topologies (séparées)

- la "topologie forte" associée à la norme de E',
- la "topologie faible" sur E' notée $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$.

On va définir une troisième topologie sur E' c'est "la topologie faible*" que l'on note $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$.

Définition 1.8.4. *Soit* E *un espace de Banach et* $x \in \mathrm{E}$, *considérons l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_x : \ & \mathrm{E}' \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \varphi_x(f) := \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

On appelle topologie faible* sur E', *notée* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$, *la topologie la moins fine rendant continus toutes les applications* $(\varphi_x)_{x\in\mathrm{E}}$.

Notation Étant donnée une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E', on désigne par $f_n \rightharpoonup^* f$ la convergence de f_n vers f pour la topologie faible* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$.

Proposition 1.8.5. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E'. *On a les propriétés suivantes*

1. $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ *ssi* $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$.
2. *Si* $f_n \to f$ *fortement, alors* $f_n \to f$ *faiblement pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$.
   Si $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$, *alors* $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$.

3. *Si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$, *alors* $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* E' *et* $\|f\|_{\mathrm{E}'} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathrm{E}'}$.
4. *Si* $x_n \to x$ *fortement dans* E *et si* $f_n \rightharpoonup^* f$ *pour* $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$, *alors* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Théorème 1.8.6. *Soit* E *un espace de Banach, la boule unité fermée de* E'

$$\mathbb{B}_{\mathrm{E}'}(0,\, 1) = \{f \in \mathrm{E}',\ \|f\|_{\mathrm{E}'} \leq 1\},$$

*est compacte pour la topologie faible** $\sigma(\mathrm{E}', \mathrm{E})$.

Lemme 1.8.7. *Soient* E *un espace de Hilbert et pour tout* $t \in \Omega$, $\mathrm{C}(t)$ *un sous ensemble non vide , convexe fermé de* E *et satisfait*

$$\exists \mathrm{L_C} > 0,\ d_{\mathrm{H}}(\mathrm{C(t)},\, \mathrm{C(s)}) \leq \mathrm{L_C}|t-s|,\ \forall\, s,\, t \in \Omega.$$

La fonction ϕ *définie de* $\mathrm{L}^\infty(\Omega,\, \mathrm{E})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$\phi(v) = \int_\Omega \sigma(\mathrm{C}(s);\, v(s)ds,$$

est faiblement semi-continue inférieure, i.e,

$$\phi(v) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi(v_n),$$

pour tout $v_n \rightharpoonup^* v$ *dans* $\mathrm{L}^\infty(\Omega,\, \mathrm{E})$.

Chapitre 2

Étude d'une inégalité variationnelle du second ordre

2.1 Résultats d'existence

L'objectif principal de cette section est de montrer l'existence de solutions pour le problème d'évolution du second ordre suivant

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} \ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t,\, u(t))}(\dot{u}(t)) - \mathrm{F}(t,\, u(t), \dot{u}(t)) \quad , \, p.p \; t \in [0,\, \mathrm{T}], \\ u(0) = u_0,\, \dot{u}(0) = v_0 \in C(0,\, u_0). \end{cases}$$

Où C est non vide, convexe fermé et admet une variation lipschitzienne et $\mathrm{F} : \mathrm{gph(C)} \rightrightarrows \mathrm{H}$ est une m-application à valeurs convexes faiblement compactes dans H qui est un espace de Hilbert séparable du dimension infinie, semi-continue supérieurement et vérifie la condition de croissance linéaire.
Pour montrer ce résultat on utilise un schéma de discrétisation implicite. On suppose qu' on a les hypothèses suivantes
$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$ et $x \in \mathrm{H}$; $\mathrm{C}(t,\, x) \subset \mathrm{H}$ est non vide, convexe fermé et il existe deux constantes $\mathrm{L_C} > 0$ et $\mathrm{L_F} > 0$ telle que

$$\Gamma(t,\, x,\, s,\, y) \leq \mathrm{L_C}(|t - s| + \|x - y\|), \tag{2.1}$$

pour tous $t,\, s \in [0,\, \mathrm{T}]$ et tous $x,\, y \in \mathrm{M_1}\mathbb{B}$ où

$$\Gamma(t,\, x,\, s,\, y) := \begin{cases} d_{\mathrm{H}}\left(\mathrm{C}(t,\, x) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B};\, \mathrm{C}(s,\, y) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B}\right), & si\; \mathrm{C}(t,\, x) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} \neq \emptyset,\, \mathrm{C}(s,\, y) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} \neq \emptyset, \\ e\left(\mathrm{C}(t,\, x) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B};\, \mathrm{C}(s, y)\right), & si\; \mathrm{C}(t,\, x) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} \neq \emptyset,\, \mathrm{C}(s,\, y) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} = \emptyset, \\ 0, & si\; \mathrm{C}(t,\, x) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} = \emptyset,\, \mathrm{C}(s,\, y) \cap \mathrm{M_1}\mathbb{B} = \emptyset, \end{cases}$$

et

$$\mathrm{M_1} := 1 + (\|u_0\| + \|v_0\| + (\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F})\mathrm{T})\, e^{(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F} + 1)\mathrm{T}} \tag{2.2}$$

$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, $\mathrm{C}(t, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}$ est relativement compact dans H, i.e,

$$\gamma(\mathrm{C}(t, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}) = 0, \tag{2.3}$$

où γ est la mesure du non-compacité de Kuratowski.
$(\mathcal{H}_3)$ La multi-application $\mathrm{F} : \mathrm{gphC} \rightrightarrows \mathrm{H}$ est semi-continue supérieurement à valeurs convexes faiblement compactes dans H et satisfait la condition de croissance linéaire suivante
il existe une constante $\mathrm{L_F} > 0$ telle que, pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, $x \in \mathrm{H}$ *et* $y \in \mathrm{C}(t, x)$ on ait

$$\mathrm{F}(t, x, y) \cap \mathrm{L_F}(1 + \|x\| + \|y\|)\mathbb{B} \neq \emptyset,$$

où gph(C) est le graphe de C.
Nous somme maintenant en mesure de donner notre premier résultat d'existence.

Théorème 2.1.1. ***(Existence)*** *Soit* H *un espace de Hilbert séparable, supposons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *sont satisfaites. Alors, pour tous* $u_0 \in \mathrm{H}$, $v_0 \in \mathrm{C}(0, u_0)$ *il existe au moins une solution u telle que*

1. $(\mathcal{S})$ *est satisfaite pour presque tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$,
2. $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$,
3. $u \in \mathscr{C}^1([0, \mathrm{T}]; \mathrm{H})$ *et* $\ddot{u} \in \mathrm{L}^\infty([0, \mathrm{T}]; \mathrm{H})$.

Preuve. la démonstration se fait en 7 étapes :
Etape 01 : discrétisation de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$
D'abord, pour montrer l'existence on considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la partition suivante de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$

$$\begin{cases} t_0^n = 0, \\ t_i^n = i.\frac{\mathrm{T}}{n}, \; \forall\, 0 \leq i \leq n, \\ t_{i+1}^n = t_i^n + \frac{\mathrm{T}}{n}. \end{cases}$$

Etape 02 : algorithme de projection
Choisissons un entier positif n tel que $\mathrm{M}_1\frac{\mathrm{T}}{n} < 1$, soit $h_n := \mathrm{T}/n$, et $t_i^n = ih_n$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, en définissant u_i^n et v_i^n, donc on peut construire u_{i+1}^n, v_{i+1}^n qui vérifient

$$\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n} + f_i^n \in -\mathcal{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n)}(v_{i+1}^n), \tag{2.4}$$

et

$$u_{i+1}^n = u_i^n + h_n v_i^n, \tag{2.5}$$

où $f_i^n \in \mathrm{F}(t_i^n, u_i^n, v_i^n)$. Il est clair que u_{i+1}^n est définie uniquement en termes de u_i^n et v_i^n.
On peut réécrire (2.4) sous la forme suivante

$$v_{i+1}^n - v_i^n + h_n f_i^n \in -\mathcal{N}_{C(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n)}(v_{i+1}^n),$$

ce qui est équivalent à écrire

$$v_{i+1}^n = \text{proj}(\mathrm{C}(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n);\, v_i^n - h_n f_i^n), \tag{2.6}$$

et on a l'algorithme qui construit les suites $(u_i^n)_{i=0}^n$, $(v_i^n)_{i=0}^n$ et $(f_i^n)_{i=0}^n$ par

Initialisation : Soient $u_0^n := u_0$, $v_0^n := v_0 \in \mathrm{C}(0,\, u_0)$, choisissons $f_0^n \in \mathrm{F}(0,\, u_0,\, v_0) \cap \mathrm{L_F}(1 + \|u_0\| + \|v_0\|)\mathbb{B}$.

Itération : On a les points u_i^n, v_i^n *et* f_i^n. Calculons $u_{i+1}^n := u_i^n + h_n v_i^n$ et

$$v_{i+1}^n := \text{proj}(\mathrm{C}(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n);\, v_i^n - h_n f_i^n).$$

Alors, choisissons $f_{i+1}^n \in \mathrm{F}(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n,\, v_{i+1}^n) \cap \mathrm{L_F}(1 + \|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\|)\mathbb{B}$, cet algorithme est bien défini grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.

Etape 03 : bornitude des suites $(u_i^n)_{i=0}^n$, $(v_i^n)_{i=0}^n$, $\left(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\right)_{i=0}^n$ **et** $(f_i^n)_{i=0}^n$

Montrons maintenant que les suites $(u_i^n)_{i=0}^n$, $(v_i^n)_{i=0}^n$, $\left(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\right)_{i=0}^n$ et $(f_i^n)_{i=0}^n$ sont uniformément bornées. En particulier, on va démontrer que

$$\|u_i^n\| + \|v_i^n\| \le \mathrm{M}_1 - 1. \tag{2.7}$$

Il est clair que pour $i = 0$ l'inégalité (2.7) est satisfaite. Supposons maintenant que (2.7) est satisfaite pour i et montrons qu'elle est satisfaite aussi pour $i + 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n - v_i^n + h_n f_i^n\| &\le \|v_{i+1}^n - v_i^n\| + h_n\|f_i^n\| \\
&\le d(\mathrm{C}(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n),\, v_i^n) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le e(\mathrm{C}(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n),\, \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le \Gamma(t_{i+1}^n,\, u_{i+1}^n,\, t_i^n,\, u_i^n) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le \mathrm{L_C}(|t_{i+1}^n - t_i^n| + \|u_{i+1}^n - u_i^n\|) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le \mathrm{L_C}(|t_{i+1}^n - t_i^n| + \|u_i^n + h_n v_i^n - u_i^n\|) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le \mathrm{L_C}(h_n + h_n\|v_i^n\|) + h_n\|f_i^n\| \\
&\le h_n\mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + h_n\|f_i^n\|.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| - \|v_i^n + h_n f_i^n\| &\le \|v_{i+1}^n - v_i^n + h_n f_i^n\| \\
&\le h_n\mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + h_n\|f_i^n\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|v_{i+1}^n\| &\le h_n\mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + h_n\|f_i^n\| + \|v_i^n + h_n f_i^n\| \\
&\le h_n\mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + \|v_i^n\| + 2h_n\|f_i^n\|.
\end{aligned}$$

Comme

$$f_i^n \in F(t_i^n,\, u_i^n,\, v_i^n) \cap \mathrm{L_F}(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|)\mathbb{B},$$

alors
$$\|f_i^n\| \leq \mathrm{L_F}(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|),$$
par conséquent
$$\begin{array}{rcl}
\|v_{i+1}^n\| & \leq & \|v_i^n\| + h_n\mathrm{L_C}(1+\|v_i^n\|) + 2h_n\mathrm{L_F}(1+\|u_i^n\|+\|v_i^n\|) \\
& \leq & \|v_i^n\| + h_n(\mathrm{L_C}+\mathrm{L_C}\|v_i^n\| + 2\mathrm{L_F} + 2\mathrm{L_F}\|u_i^n\| + 2\mathrm{L_F}\|v_i^n\|) \\
& \leq & \|v_{i-1}^n\| + 2h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F}) + 2h_n\mathrm{L_F}(\|u_i^n\|+\|u_{i-1}^n\|) \\
& + & h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F})(\|v_i^n\|+\|v_{i-1}^n\|) \\
& \leq & \|v_{i-2}^n\| + h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F}) + 2h_n\mathrm{L_F}\|u_{i-2}^n\| + h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F})\|v_{i-2}^n\| + 2h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F}) \\
& + & 2h_n\mathrm{L_F}(\|u_i^n\|+\|u_{i-1}^n\|) + h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F})(\|v_i^n\|+\|v_{i-1}^n\|) \\
& \leq & \|v_{i-2}^n\| + 3h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F}) + 2h_n\mathrm{L_F}(\|u_i^n\|+\|u_{i-1}^n\|+\|u_{i-2}^n\|) \\
& + & h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F})(\|v_i^n\|+\|v_{i-1}^n\|+\|v_{i-2}^n\|),
\end{array}$$
par récurrence on obtient
$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_0\| + (i+1)h_n(\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F}) + h_n(2\mathrm{L_F}\sum_{j=0}^{i}\|u_j^n\| + (\mathrm{L_C}+2\mathrm{L_F})\sum_{j=0}^{i}\|v_j^n\|). \quad (2.8)$$
D'autre part
$$\begin{array}{rcl}
\|u_{i+1}^n\| & = & \|u_i^n + h_nv_i^n\| \\
& \leq & \|u_i^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
& \leq & \|u_{i-1}^n\| + h_n\|v_{i-1}^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
& \leq & \|u_{i-2}^n\| + h_n\|v_{i-2}^n\| + h_n\|v_{i-1}^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
& \leq & \|u_{i-3}^n\| + h_n\|v_{i-3}^n\| + h_n\|v_{i-2}^n\| + h_n\|v_{i-1}^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
& \leq & \|u_{i-3}^n\| + h_n(\|v_{i-3}^n\| + \|v_{i-2}^n\| + \|v_{i-1}^n\| + \|v_i^n\|),
\end{array}$$
par récurrence on obtient
$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0\| + h_n\sum_{j=0}^{i}\|v_j^n\|. \quad (2.9)$$

De (2.8) et (2.9) on trouve que,

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| &\leq \|u_0\| + h_n \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\| + \|v_0\| + (i+1)h_n(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) \\
&+ h_n(2\mathrm{L_F} \sum_{j=0}^{i} \|u_j^n\| + (\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\|) \\
&\leq \|u_0\| + \|v_0\| + h_n(2\mathrm{L_F} \sum_{j=0}^{i} \|u_j^n\| + (\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F} + 1) \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\|) \\
&+ \mathrm{T}(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) \\
&\leq \|u_0\| + \|v_0\| + \mathrm{T}(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) + h_n(1 + \mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F})(\sum_{j=0}^{i} \|u_j^n\| + \sum_{j=0}^{i} \|v_j^n\|) \\
&\leq \|u_0\| + \|v_0\| + \mathrm{T}(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) + h_n(1 + \mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}) \sum_{j=0}^{i} (\|u_j^n\| + \|v_j^n\|),
\end{aligned}$$

on pose

$$\alpha := \|u_0\| + \|v_0\| + \mathrm{T}(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}),$$

et

$$\beta := \mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F} + 1,$$

on a donc

$$\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| \leq \alpha + \beta h_n \sum_{j=0}^{i} (\|u_j^n\| + \|v_j^n\|),$$

en appliquent le Lemme 1.5.4, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| + \|v_{i+1}^n\| &\leq \alpha \exp(\sum_{j=0}^{i} h_n \beta) \\
&\leq \alpha \exp(\underbrace{(i+1)h_n}_{\mathrm{T}} \beta) \\
&\leq \alpha \exp(\mathrm{T}\beta) \\
&\leq \mathrm{M_1} - 1,
\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$\|u_i^n\| + \|v_i^n\| \leq \mathrm{M_1} - 1.$$

D'autre part, pour tout $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
\|f_i^n\| &\leq \mathrm{L_F}(1 + \|u_i^n\| + \|v_i^n\|) \\
&\leq \mathrm{L_F}(1 + \mathrm{M_1} - 1) \\
&\leq \mathrm{L_F}\mathrm{M_1}.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\| &= \|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n} - f_i^n + f_i^n\| \\
&\leq \|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n} - f_i^n\| + \|f_i^n\| \\
&\leq \mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + \|f_i^n\| + \|f_i^n\| \\
&\leq \mathrm{L_C}(1 + \|v_i^n\|) + 2\|f_i^n\| \\
&\leq \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1 - 1) + 2\mathrm{L_F}\mathrm{M}_1 \\
&\leq \mathrm{L_C}\mathrm{M}_1 + 2\mathrm{L_F}\mathrm{M}_1 \\
&\leq \mathrm{M}_1(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}),
\end{aligned}$$

on pose

$$\mathrm{M}_2 := \mathrm{M}_1(\mathrm{L_C} + 2\mathrm{L_F}),$$

alors

$$\|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\| \leq \mathrm{M}_2,\ \forall\, 1 \leq i \leq n. \tag{2.10}$$

Il en résulte donc que les suites $(u_i^n)_{i=0}^n$, $(v_i^n)_{i=0}^n$ sont uniformément bornées par M_1 (plus précisément par $\mathrm{M}_1 - 1$) et $(\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n})_{i=0}^n$, $(f_i^n)_{i=0}^n$ sont uniformément bornées par M_2.

Etape 04 : la suite des solution approchées

Nous allons construire maintenant les suites des fonctions $(u_n(.))_n$, $(v_n(.))_n$, $(f_n(.))_n$, $(\theta_n(.))_n$ et $(\eta_n(.))_n$ de $[0,\, \mathrm{T}]$ à valeurs dans H, donc en définit leurs restriction sur chaque intervalle $[t_i^n,\, t_{i+1}^n[$, $(0 \leq i \leq n-1)$ comme suit

$$u_n(t) := u_i^n + \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_n}(t - t_i^n),$$

$$v_n(t) := v_i^n + \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(t - t_i^n),$$

$$f_n(t) := f_i^n,$$

$$\theta_n(t) := t_i^n,$$

et

$$\eta_n(t) := t_{i+1}^n.$$

Alors pour tout $t \in [t_i^n,\, t_{i+1}^n[$, nous avons

$$\dot{u}_n(t) = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_n} = v_i^n \in \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n),$$

$$\dot{v}_n(t) = \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n},$$

et

$$\max\{\sup_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} |\theta_n(t) - t|,\ \sup_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} |\eta_n(t) - t|\} \leq h_n \to 0, \tag{2.11}$$

lorsque $n \to +\infty$.

Etape 05 : compacité de $(v_n)_n$

La suite des fonctions $(v_n(.))_n$ est équi-lipschitzienne. puisque

$$\|\dot{v}_n(t)\| = \|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\| \leq \mathrm{M}_2,$$

on conclut alors que la suite de fonction $(v_n(.))_n$ est équi-lipschitzienne de rapport M_2. Montrons maintenant que l'ensemble $\Omega(t) = \{v_n(t)\}$ est relativement compact pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, on utilise le raisonnement par l'absurde, i.e, on suppose qu'il existe $t_0 \in [0,\, \mathrm{T}]$ tel que $\Omega(t_0)$ n'est pas relativement compact. Alors, soit $3\sigma := \gamma(\Omega(t_0)) > 0$, on a $\Omega(t_0) \subset \mathrm{M}_1\mathbb{B}$, en effet, $\Omega(t_0) = \{v_n(t_0)\}$, et

$$\begin{aligned} v_n(t_0) &= v_i^n + \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(t_0 - t_i^n) \\ &= (1 - \frac{t_0 - t_i^n}{h_n})v_i^n + (\frac{t_0 - t_i^n}{h_n})v_{i+1}^n, \end{aligned}$$

grâce à la convexité de l'ensemble $\mathrm{M}_1\mathbb{B}$, et le fait que $\dfrac{t_0 - t_i^n}{h_n} < 1$ on trouve que $\Omega(t_0) \subset \mathrm{M}_1\mathbb{B}$ et on en déduit d'après le Lemme 1.7.2 que

$$\begin{aligned} 3\sigma &= \gamma(\Omega(t_0)) \\ &\leq \gamma(\mathrm{M}_1\mathbb{B}) \\ &\leq 2\mathrm{M}_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma \leq \frac{2}{3}\mathrm{M}_1,$$

et par suite

$$\sigma < \mathrm{M}_1.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver i tel que $t_0 \in [t_i^n,\, t_{i+1}^n[$. Alors,

$$\begin{aligned} \|v_n(t_0) - v_i^n\| &= \|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\|.\|t_0 - t_i^n\| \\ &\leq \mathrm{M}_2 h_n. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $v_i^n \in \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n)$ et $\|v_i^n\| \leq \mathrm{M}_1$, donc $v_i^n \in \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}$, et par suite

$$\begin{aligned} d(v_i^n, \mathrm{C}(t_0,\, u_i^n)) &\leq e(\mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},\, \mathrm{C}(t_0,\, u_i^n))) \\ &\leq \Gamma(t_i^n,\, u_i^n,\, t_0,\, u_i^n), \\ &\leq \mathrm{L_C}(|t_i^n - t_0| + \|u_i^n - u_i^n\|) \\ &< \mathrm{L_C} h_n, \end{aligned}$$

donc
$$v_i^n \in \mathrm{C}(t_0,\, u_i^n) + \mathrm{L_C} h_n \mathbb{B}.$$
Nous avons, pour tout $0 \leq i \leq n-1$
$$v_n(t_0) = v_i^n + \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(t_0 - t_i^n),$$
et comme
$$\|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(t_0 - t_i^n)\| < \mathrm{M}_2 h_n,$$
on obtient
$$v_n(t_0) \in \mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) + (\mathrm{L_C} + \mathrm{M}_2) h_n \mathbb{B},$$
on peut trouver, alors n_0 suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, on obtient $(\mathrm{L_C} + \mathrm{M}_2)h_n = (\mathrm{L_C} + \mathrm{M}_2)\frac{\mathrm{T}}{n} \leq \sigma$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|v_n(t_0)\| < \mathrm{M}_1$, donc
$$v_n(t_0) \in (\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B}.$$
En effet, on a
$$v_n(t_0) \in \mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B},$$
et
$$\begin{aligned} \|v_n(t_0)\| &< \mathrm{M}_1 \\ &< \mathrm{M}_1 + \sigma, \end{aligned}$$
alors
$$v_n(t_0) \in (\mathrm{M}_1 + \sigma)\mathbb{B},$$
donc
$$v_n(t_0) \in (\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B}) \cap (\mathrm{M}_1 + \sigma)\mathbb{B},$$
ce qui implique que
$$v_n(t_0) \in \mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B} \;\; et \;\; \|v_n(t_0)\| < \mathrm{M}_1 + \sigma,$$
alors, il existe $v_{n_1}(t_0) \in \mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B})$ *et* $v_{n_2}(t_0) \in \sigma\mathbb{B}$ tels que
$$v_n(t_0) = v_{n_1}(t_0) + v_{n_2}(t_0) \;\; et \;\; \|v_n(t_0)\| < \mathrm{M}_1 + \sigma.$$
D'autre part
$$\|v_{n_1}(t_0)\| < \mathrm{M}_1 + \sigma,$$
et
$$\|v_{n_2}(t_0)\| < \sigma < \mathrm{M}_1 + \sigma,$$
donc
$$v_{n_1}(t_0) \in \mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap (\mathrm{M}_1 + \sigma)\mathbb{B},$$

et

$$v_{n_2}(t_0) \in \sigma\mathbb{B} \cap (\mathrm{M}_1 + \sigma)\mathbb{B} = \sigma\mathbb{B},$$

d'où

$$v_n(t_0) \in (\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap (\mathrm{M}_1 + \sigma)\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B},$$

ce qui implique

$$v_n(t_0) \in (\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \sigma\mathbb{B}.$$

Notons que l'ensemble $(\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B})$ est relativement compact, donc d'après le Lemme 1.7.2 on en déduit que $\gamma(\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}) = 0$, et par conséquent

$$\begin{aligned} 3\sigma &= \gamma(\Omega(t_0)) \\ &= \gamma(\{v_n(t_0) : n \geq n_0\}) \\ &\leq \gamma(\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B} + \sigma\mathbb{B}) \\ &\leq \gamma(\mathrm{C}(t_0,\, \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \cap 2\mathrm{M}_1\mathbb{B}) + \gamma(\sigma\mathbb{B}) \\ &\leq 2\sigma. \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction, et par suite l'ensemble $\Omega(t) = \{v_n(t),\, n \geq 1\}$ est relativement compact pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$.
Le théorème d'Ascoli-Arzelà assure l'existence d'une fonction lipschitzienne $v(.) : [0,\, \mathrm{T}] \to \mathrm{H}$ de rapport M_2 telle que

- $v_n(.)$ converge uniformément vers $v(.)$ dans $\mathscr{C}([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$;
- $\dot{v}_n(.)$ converge faiblement vers $\dot{v}(.)$ dans $\mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$.

D'autre part, on a $\|\dot{v}_n(t)\| \leq \mathrm{M}_2$, alors $\dfrac{\|\dot{v}_n(t)\|}{\mathrm{M}_2} \leq 1$ et par suite $\dfrac{\dot{v}_n(t)}{\mathrm{M}_2} \in \overline{\mathbb{B}}_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})}(0,\, 1)$ qui est faiblement* compact, d'après le Théorème 1.8.6 et donc on peut extraire de $(\dot{v}_n(.))$ une sous suite qu'on la note toujours $(\dot{v}_n(.))$ qui converge faiblement* dans $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$ vers w.
Montrons maintenant que $w = \dot{v}$. Pour tout $y \in \mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \dot{v}_n(.),\, y(.) \rangle = \langle w(.),\, y(.) \rangle,$$

i.e

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \langle \dot{v}_n(s),\, y(s) \rangle ds = \int_0^t \langle w(s),\, y(s) \rangle ds,$$

en particulier, pour $y(.) = \mathcal{I}_{]0,\, t]}(.) e_j$ (cette suite existe car H est séparable), alors on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \int_0^t \dot{v}_n(s),\, e_j \rangle ds = \langle \int_0^t w(s),\, e_j \rangle ds,\ \forall j,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^t \dot{v}_n(s) ds = \int_0^t w(s) ds,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}[v_n(t)-v_n(0)] = \int_0^t w(s)ds,$$

donc

$$v(t) = v(0) + \int_0^t w(s)ds,$$

et par conséquent

$$\dot{v}(t) = w(t).$$

En particulier, $v(0) = v_0$. Soit maintenant l'application u définie de $[0,\, \mathrm{T}]$ à valeurs dans H par $u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds$. Puis $u(0) = u_0$, $\dot{u} = v$ et $\dot{v} = \ddot{u} \in \mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$. Alors $u_n(.)$ converge fortement vers $u(.)$ dans $\mathscr{C}([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)-u(t)\| &= \|u_n(0) + \int_0^t v_n(\theta_n(s))ds - u(0) - \int_0^t v(s)ds\| \\
&= \|\int_0^t (v_n(\theta_n(s)) - v_n(s) + v_n(s) - v(s))ds\| \\
&\leq \int_0^t (\|v_n(\theta_n(s)) - v_n(s)\| + \|v_n(s)-v(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^t (\|v_i^n + \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(\theta_n(s) - t_i^n) - v_i^n - \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}(s - t_i^n)\| \\
&+ \|v_n(s)-v(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^t (\|\frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_n}\|\|\theta_n(s) - s\| + \|v_n(s)-v(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{M}_2|\theta_n(s) - s| + \|v_n(s)-v(s)\|)ds \to 0,
\end{aligned}$$

alors

$$\max_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} \|u_n(t)-u(t)\| \leq \int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{M}_2|\theta_n(s) - s| + \|v_n(s)-v(s)\|)ds \to 0,$$

lorsque n tend vers $+\infty$, grâce à la convergence forte de $v_n(.)$ dans $\mathscr{C}([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$ et (2.11).

Etape 06 : viabilité de $v(t)$

Montrons maintenant que pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, on a $\dot{u}(t) \in \mathrm{C}(t,\, u(t))$.

Pour tout $0 \leq i \leq n-1$ on a $v_i^n \in \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n)$, alors pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$ on trouve que

$v_n(\theta_n(t)) \subset \mathrm{C}(t,\, u(t)) + \mathrm{L_C}\{|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t) - u(t)\}\mathbb{B}$. En effet,

$$\begin{aligned} d(v_n(\theta_n(t));\, \mathrm{C}(t,\, u(t))) &\leq e((\mathrm{C}(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t))) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B};\, \mathrm{C}(t,\, u(t))) \\ &\leq \Gamma(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t)),\, t,\, u(t)) \\ &\leq \mathrm{L_C}\{|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t) - u(t))\|\}, \end{aligned}$$

alors

$$v_n(\theta_n(t)) \in \mathrm{C}(t,\, u(t)) + \mathrm{L_C}\{|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|\}\mathbb{B}.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, on a

$$\begin{aligned} \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| &= \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t) + v_n(t) - v(t)\| \\ &\leq \|v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\| + \|v_n(t) - v(t)\| \\ &\leq \mathrm{M}_2|\theta_n(t) - t| + \|v_n(t) - v(t)\| \\ &\leq \mathrm{M}_2 h_n + \|v_n(t) - v(t)\| \\ &\leq \mathrm{M}_2 h_n + \max_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} \|v_n(t) - v(t)\|, \end{aligned}$$

donc

$$\max_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} \|v_n(\theta_n(t)) - v(t)\| \leq \mathrm{M}_2 h_n + \max_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} \|v_n(t) - v(t)\| \to 0,$$

lorsque $n \to +\infty$, alors $v_n(\theta_n(t)) \to v(t) = \dot{u}(t)$ et $|\theta_n(t) - t| + \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ grâce à (2.11) et la convergence forte de $u_n(.)$ vers $u(.)$ dans $\mathscr{C}([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, et comme $\mathrm{C}(t,\, u(t))$ est fermé, on trouve que $\dot{u}(t) \in \mathrm{C}(t,\, u(t))$ pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$.

Etape 07 : $\dot{u}(.)$ est solution de (S)

Pour ce but on définit, pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, l'ensemble

$$\mathrm{D}(t) := \mathrm{C}(t,\, u(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},$$

$\mathrm{D}(t)$ est non vide, fermé et convexe. En effet, d'abord, d'après ce qui précède

$$\dot{u}(t) = v(t) \in \mathrm{C}(t,\, u(t)), \tag{2.12}$$

donc

$$\|\dot{u}(t)\| = \|v(t)\|.$$

Comme $v_n(.)$ est converge fortement vers $v(.)$ dans $\mathscr{C}([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, alors

$$\max_{t\in[0,\,\mathrm{T}]} \|v_n(t) - v(t)\| < \varepsilon,$$

d'où

$$\|v_n(t) - v(t)\| < \varepsilon,$$

mais

$$|\|v_n(t)\| - \|v(t)\|| < \varepsilon,$$

et par suite
$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t)\| = \|v(t)\|.$$
Puisque
$$\|v_n(t)\| < \mathrm{M}_1,$$
alors
$$\lim_{n\to\infty} \|v_n(t)\| < \mathrm{M}_1,$$
donc
$$\|v(t)\| < \mathrm{M}_1,$$
par conséquent
$$\|\dot{u}(t)\| < \mathrm{M}_1,$$
ce qui implique
$$\dot{u}(t) \in \mathrm{M}_1\mathbb{B}. \tag{2.13}$$
D'après les formules (2.12) et (2.13), on obtient
$$\dot{u}(t) \in \mathrm{C}(t,\, u(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},$$
alors, $\mathrm{D}(t)$ est non vide.
Montrons maintenant que D(t) est fermé. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments dans $\mathrm{D}(t)$ telle que z_n converge vers z, pour montrer que D(t) est fermé, il suffit de montrer que $z \in \mathrm{D}(t)$. On a $z_n \in \mathrm{D}(t)$ alors $z_n \in \mathrm{C}(t,\, u(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}$, d'où $z_n \in \mathrm{C}(t,\, u(t))$ et $z_n \in \mathrm{M}_1\mathbb{B}$, comme z_n converge vers z et $\mathrm{C}(t,\, u(t))$ fermé on trouve donc que $z \in \mathrm{C}(t,\, u(t))$ et puisque $z_n \in \mathrm{M}_1\mathbb{B}$ alors
$$\|z_n\| < \mathrm{M}_1,$$
passons à la limite quand n tend vers $+\infty$ on trouve
$$\lim_{n\to\infty} \|z_n\| < \mathrm{M}_1,$$
d'où
$$\|z\| < \mathrm{M}_1,$$
ce qui montre que $z \in \mathrm{D(t)}$.
Pour montrer la convexité, on doit montrer que pour tous $z, w \in \mathrm{D(t)}$ et pour $\lambda \in [0,\, 1]$, on a
$$\lambda z + (1-\lambda)w \in \mathrm{D(t)},$$
i.e
$$\lambda z + (1-\lambda)w \in \mathrm{C}(t,\, u(t)),$$
et
$$\|\lambda z + (1-\lambda)w\| < \mathrm{M}_1.$$

Soient $z, w \in \mathrm{D(t)}$ et $\lambda \in [0,\, 1]$. Grâce à la convexité de $\mathrm{C}(t,\, u(t))$ on trouve que $\lambda z + (1-\lambda)w \in C(t,\, u(t))$. D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda z + (1-\lambda)w\| & \leq & \lambda\|z\| + (1-\lambda)\|w\| \\ & < & \lambda \mathrm{M}_1 + (1-\lambda)\mathrm{M}_1 \\ & < & \mathrm{M}_1, \end{array}$$

d'où la convexité de $\mathrm{D}(t)$. De plus, pour tous $t, s \in [0,\, \mathrm{T}]$, on a

$$\begin{array}{rcl} d_H(\mathrm{D}(t),\, \mathrm{D}(s)) & = & d_H(\mathrm{C}(t,\, u(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},\, \mathrm{C}(s,\, u(s)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \\ & \leq & \Gamma(t,\, u(t),\, s,\, u(s)) \\ & \leq & \mathrm{L_C}\{|t-s| + \|u(t)-u(s)\|\}, \end{array}$$

comme

$$\begin{aligned} \|u(t)-u(s)\| &= \|u_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau - u_0 + \int_0^s v(\tau)d\tau\| \\ &= \|\int_s^t v(\tau)d\tau\|, \end{aligned}$$

et puisque

$$\|v(\tau)\| < \mathrm{M}_1,$$

on trouve alors

$$\begin{aligned} \|u(t)-u(s)\| &< \mathrm{M}_1 \int_s^t d\tau \\ &< \mathrm{M}_1|t-s|, \end{aligned}$$

donc

$$d_H(\mathrm{D(t)},\, \mathrm{D}(s)) \leq \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)|t-s|.$$

De (2.4), nous avons, pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$

$$\dot{v_n}(t) + f_n(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_n(\eta_n(t))),$$

et comme

$$\|v_n(\eta_n(t))\| \leq \mathrm{M}_1 - 1,$$

on en déduit que

$$\dot{v_n}(t) + f_n(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{D}(\eta_n(t))}(v_n(\eta_n(t))), \tag{2.14}$$

posons, pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$

$$\gamma_n(t) := -(\dot{v}_n(t) + f_n(t)).$$

D'après la définition du cône normal, on a pour tout $c \in \mathrm{D}(\eta_n(t))$

$$\langle \gamma_n(t),\, c - v_n(\eta_n(t))\rangle \leq 0,$$

alors

$$\langle \gamma_n(t),\, c\rangle + \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle \leq 0,$$

comme

$$\gamma_n(t) \in \mathcal{N}_{\mathrm{D}(\eta_n(t))}(v_n(\eta_n(t))),$$

donc d'après la Proposition 1.4.23

$$\langle \gamma_n(t),\, c\rangle = \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t);\, \gamma_n(t)),\ \textit{pour tout } c \in \mathrm{D}(\eta_n(t)),$$

par conséquent

$$\sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t)) + \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle \leq 0.$$

Par une intégration sur l'intervalle [0, T], on obtient

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \int_0^{\mathrm{T}} \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt \leq 0. \tag{2.15}$$

Commençons par le second terme de (2.15). Montrons tout d'abord que

$$\int_0^{\mathrm{T}} \langle \ddot{u}(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \langle \dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\mathrm{T}} \langle \ddot{u}(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d}{dt}\dot{u}^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2}(v^2(\mathrm{T}) - v^2(0)) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(v_n^2(\mathrm{T}) - v_n^2(0)) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d}{dt}v_n^2(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}} \langle \dot{v}_n(t),\, v_n(t)\rangle dt.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(t)\rangle dt-\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(t)-v_n(\eta_n(t))\rangle dt\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}|\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(t)-v_n(\eta_n(t))\rangle| dt\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\|\dot{v}_n(t)\|\|v_n(t)-v_n(\eta_n(t))\| dt\\
&\leq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_2.\mathrm{M}_2|t-\eta_n(t)| dt\\
&\leq \mathrm{M}_2^2\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}|t-\eta_n(t)| dt\to 0,
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(t)\rangle dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt,$$

par conséquent

$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle\ddot{u}(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt. \tag{2.16}$$

Pour tout $t\in[0,\, \mathrm{T}]$, on a $\|f_n(t)\|\leq \mathrm{M}_2$, alors $\dfrac{\|f_n(t)\|}{\mathrm{M}_2}\leq 1$ et par suite $\dfrac{f_n(t)}{\mathrm{M}_2}\in\overline{\mathbb{B}}_{\mathrm{L}^\infty(\mathrm{H})}(0,\, 1)$ qui est faiblement* compact, d'après le Théorème 1.8.6 et donc on peut extraire de $f_n(t)$ une sous suite qu'on la note toujours $f_n(t)$ qui converge faiblement* vers $f(t)$ dans $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, tel que $\|f(t)\|\leq \mathrm{M}_2$.
Maintenant on montre que f_n converge faiblement vers f dans $\mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$.
Pour tout $\xi\in \mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\mathrm{H})$, et comme $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})\subset \mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$ alors, pour tout $\xi\in \mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n(t),\, \xi(t)\rangle=\langle f(t),\, \xi(t)\rangle,$$

et par suite f_n converge faiblement vers f dans $\mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$. D'autre part, on sait que, la suite $v_n(\eta_n(t))$ converge fortement vers $\dot{u}(.)$ dans $\mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, donc

$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle f_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt. \tag{2.17}$$

De (2.16) et (2.17), on obtient

$$\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt+\int_0^{\mathrm{T}}\langle f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle\dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt+\lim_{n\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}}\langle f_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt,$$

alors

$$\int_0^{\mathrm{T}} \langle \dot{v}(t) + f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \langle \dot{v}_n(t) + f_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt,$$

et par suite

$$\int_0^{\mathrm{T}} \langle \dot{v}(t) + f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle dt,$$

pour le premier terme de (2.15), on trouve que $\gamma_n(t) = -(\dot{v_n}(t) + f_n(t))$, $\forall\, t \in [0,\, \mathrm{T}]$, $\dot{v_n}(.)$ converge faiblement* vers $\dot{v}(.)$ dans $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, et aussi $f_n(.)$ est converge faiblement* vers $f(.)$ dans $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, il en résulte donc que $\gamma_n(.) \rightharpoonup^* \dot{v}(.) - f(.)$ dans $\mathrm{L}^\infty([0,\, \mathrm{T}];\, \mathrm{H})$, et comme $\phi(\gamma(t)) = \int_0^{\mathrm{T}} \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt$, est faiblement semi continue inférieure, alors d'après le Lemme 1.8.7, on trouve que

$$\int_0^{\mathrm{T}} \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^{\mathrm{T}} \sigma(\mathrm{D}(t);\, \gamma_n(t))dt, \tag{2.18}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} d_H(\mathrm{D}(t),\, \mathrm{D}(\eta_n(t))) &= d_H(\mathrm{C}(t,\, u(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},\, \mathrm{C}(\eta_n(t),\, u(\eta_n(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \\ &\leq \Gamma(t,\, u(t),\, \eta_n(t),\, u(\eta_n(t))) \\ &\leq \mathrm{L_C}\{|t - \eta_n(t)| + \|u(t) - u(\eta_n(t))\|\} \\ &\leq \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)|t - \eta_n(t)|, \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{D}(t) \subset \mathrm{D}(\eta_n)(t) + \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)|t - \eta_n(t)|\mathbb{B},$$

par conséquent

$$\mathrm{D}(t) \subset \mathrm{D}(\eta_n)(t) + \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)h_n\mathbb{B},$$

alors, pour tout $z \in \mathrm{D}(t)$ et tout $h \in \mathrm{D}(\eta_n(t))$

$$\begin{aligned} \langle z,\, \gamma_n(t)\rangle &\leq \langle h,\, \gamma_n(t)\rangle + \langle \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)h_n,\, \gamma_n(t)\rangle \\ &\leq \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t)) + \langle \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)h_n,\, \gamma_n(t)\rangle, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{z\in \mathrm{D}(t)} \langle z,\, \gamma_n(t)\rangle \leq \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t)) + \langle \mathrm{L_C}(1 + M_1)h_n,\, \gamma_n(t)\rangle,$$

d'où

$$\sigma(\mathrm{D}(t),\, \gamma_n(t)) \leq \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t)) + \langle \mathrm{L_C}(1 + \mathrm{M}_1)h_n,\, \gamma_n(t)\rangle,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, \gamma_n(t))dt &\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t)),\, \gamma_n(t))dt + \int_0^T \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n\|\gamma_n(t)\|dt \\
&\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n \int_0^T \|\gamma_n(t)\|dt \\
&\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n \int_0^T \|-\dot{v}_n(t) - f_n(t)\|dt \\
&\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n \int_0^T (\|\dot{v}_n(t)\| + \|f_n(t)\|)dt \\
&\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\gamma_n(t))dt + \mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n(\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_2) \int_0^T dt \\
&\leq \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + 2\mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n\mathrm{M}_2\mathrm{T},
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, \gamma_n(t))dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \lim_{n\to\infty}(2\mathrm{L_C}(1+\mathrm{M}_1)h_n\mathrm{T}\mathrm{M}_2),$$

donc

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, \gamma_n(t))dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt, \tag{2.19}$$

de (2.18) et (2.19), on obtient

$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, \gamma(t))dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt,$$

de (2.15) on a

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt + \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle \leq 0,$$

et comme

$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \sigma(\mathrm{D}(\eta_n(t));\, \gamma_n(t))dt,$$

donc
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt + \liminf_{n\to\infty} \int_0^T \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle \le 0,$$
d'où
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt + \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle -\gamma_n(t),\, v_n(\eta_n(t))\rangle \le 0,$$
et par suite
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt + \int_0^T \langle \dot{v}(t) + f(t),\, v(t)\rangle \le 0. \tag{2.20}$$
Maintenant on montre que
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v} - f(t))dt + \int_0^T \langle \dot{v}(t) + f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt \ge 0,\, \forall\, t \in [0,\, \mathrm{T}].$$
Par définition de la fonction support, et pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, on a
$$\sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t)) = \sup_{\xi\in \mathrm{D}(t)} \langle \xi,\, -\dot{v}(t) - f(t)\rangle,$$
Puisque $\dot{u}(t) \in \mathrm{D(t)}$, donc
$$\langle \dot{u}(t),\, -\dot{v}(t) - f(t)\rangle \le \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t)),$$
d'où
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt - \int_0^T \langle \dot{u}(t),\, -\dot{v}(t) - f(t)\rangle dt \ge 0,$$
donc
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt + \int_0^T \langle \dot{v}(t) + f(t),\, \dot{u}(t)\rangle dt \ge 0, \tag{2.21}$$
de (2.20) et (2.21) on obtient
$$\int_0^T \sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t))dt = \int_0^T \langle -\dot{v}(t) - f(t),\, \dot{u}(t)\rangle,\ \textit{pour tout } t \in [0,\, \mathrm{T}],$$
par conséquent
$$\sigma(\mathrm{D}(t);\, -\dot{v}(t) - f(t)) = \langle -\dot{v}(t) - f(t),\, \dot{u}(t)\rangle\ p.p\ t \in [0,\, \mathrm{T}]$$
d'où d'après la Proposition 1.4.23, on obtient
$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) + f(t) &\in -\mathcal{N}_{\mathrm{D}(t)}(\dot{u}(t))\\ &\in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t,\, u(t))}(\dot{u}(t)),\ \textit{pour tout } t \in [0,\, \mathrm{T}].\end{aligned}$$

d'un autre côté, $f_n(t) \in F(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t)),\, v_n(\theta_n(t)))$ pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$, et comme f_n converge faiblement vers f dans $\mathrm{L}^1([0,\, \mathrm{T}]; \mathrm{H})$, alors d'après le lemme de Mazur il existe une suite (ξ_n) qui est une combinaison convexe de $\{f_j \,,\, j \geq n\}$ telle que $(f_j(t))$ converge vers $f(t)$ presque pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$. Donc

$$\begin{aligned} f(t) &\in \bigcap_n \overline{\{\xi_n(t),\, \xi_{n+1}(t), ...\}}\ p.p \\ &\in \bigcap_n \overline{co}\{f_j(t),\, j \geq n\}\ p.p \\ &\in \bigcap_n \overline{co}\{\bigcup_{j\geq n} F(\theta_j(t),\, u_j(\theta_j(t)),\, v_j(\theta_j(t))\}. \end{aligned}$$

On a d'après le Théorème 1.6.8

$$\bigcap_n \overline{co}\{\bigcup_{j\geq n} F(\theta_j(t),\, u_j(\theta_j(t)),\, v_j(\theta_j(t)))\} = \overline{co} \limsup_{n\longrightarrow\infty} F(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t)),\, v_n(\theta_n(t))).$$

Comme F est à valeurs compactes semi-continue supérieurement, on trouve grâce au Théorème 1.6.9

$$\overline{\mathrm{co}} \limsup_{n\longrightarrow\infty} F(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t)),\, v_n(\theta_n(t))) = \overline{\mathrm{co}} F(t,\, u(t),\, \dot{u}(t))\ \ p.\,p,$$

et par suite

$$f(t) \in \overline{co}\{F(t,\, u(t), \dot{u}(t))\},$$

comme F à valeurs convexes, on déduit donc que

$$f(t) \in F(t,\, u(t),\, \dot{u}(t))\ p.p,$$

par conséquent

$$\ddot{u}(t) + f(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}((t),\, u(t))}(\dot{u}(t))\ \textit{pour tout}\ t \in [0, \mathrm{T}],$$

alors

$$\ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}((t),\, u(t))}(\dot{u}(t)) - f(t)\ \textit{pour tout}\ t \in [0, \mathrm{T}],$$

donc

$$\ddot{u}(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}((t),\, u(t))}(\dot{u}(t)) - \mathrm{F}(t,\, u(t),\, \dot{u}(t))\ \textit{pour tout}\ t \in [0, \mathrm{T}],$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.1.2. *(i) il est évident que le résultat est toujours vrai si nous remplaçons l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, par la continuité lipschitzienne de* C, *i.e, il existe une constante* $\mathrm{L_C} > 0$ *telle que*

$$\|d_{\mathrm{H}}(\mathrm{C}(t,\, x);\, \mathrm{C}(s,\, y)\| \leq \mathrm{L_C}(|t-s| + \|x-y\|), \tag{2.22}$$

pour tous $0 \leq t, s \leq \mathrm{T}$ *et pour tous* $x, y \in \mathrm{H}$. *Cependant, il est difficile, pour un ensemble non borné, de tenir ce genre l'hypothèse, puisque la distance de Hausdorff*

entre deux ensembles non bornés peut être égal à l'infini.
Par exemple : l'hyperplan rotatif ne satisfait jamais (2.22) *mais il satisfait l'hypothèse* $(\mathcal{H}_1)$ *avec des paramètres convenables. Cette remarque a était étudiée également dans [18] par Tolstonogov pour le processus de Rafle du premier ordre avec l'ensemble des contraintes dépend seulement du temps et il varie dans n'importe quelle boule. Particulièrement, si* $\mathrm{F} \equiv 0$, $0 \in \mathrm{C}(t, x)$ *pour tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$, *et* $x \in \mathrm{H}$, *on peut remplacer donc l'hypothèse* $(\mathcal{H}_1)$ *par l'hypothèse suivante*

$$d_{\mathrm{H}}(\mathrm{C}(t, x) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}; \mathrm{C}(s, y) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B}) \leq \mathrm{L}_{\mathrm{C}}(|t-s| + \|x-y\|), \tag{2.23}$$

où

$$\mathrm{M}_1 := \|u_0\| + \|v_0\|\mathrm{T}.$$

En effet, d'après (2.6) *et puisque* $0 \in \mathrm{C}(t_{i+1}^n, v_{i+1}^n)$, *on a*

$$v_{i+1}^n = \mathrm{proj}(\mathrm{C}(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n), v_i^n),$$

et

$$0 \in \mathrm{C}(t_{i+1}^n, u_{i+1}^n),$$

donc

$$\langle v_i^n - v_{i+1}^n, -v_{i+1}^n \rangle \leq 0,$$

et par suite

$$\langle v_i^n, -v_{i+1}^n \rangle + \langle v_{i+1}^n, v_{i+1}^n \rangle \leq 0,$$

d'où

$$\langle v_{i+1}^n, v_{i+1}^n \rangle \leq \langle v_i^n, v_{i+1}^n \rangle,$$

alors

$$\|v_{i+1}^n\|^2 \leq |\langle v_i^n, v_{i+1}^n \rangle|,$$

donc

$$\|v_{i+1}^n\|^2 \leq \|v_i^n\| \|v_{i+1}^n\|,$$

par conséquent

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_i^n\|. \tag{2.24}$$

Répétons ce procédé on trouve que

$$\|v_{i+1}^n\| \leq \|v_0\|. \tag{2.25}$$

Maintenant, on montre que $\|u_i^n\| \leq \|u_0\| + \|v_0\|\mathrm{T}$, *on a*

$$u_{i+1}^n = u_i^n + h_n v_i^n,$$

alors

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_i^n + h_n v_i^n\| \\
&\leq \|u_i^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
&\leq \|u_{i-1}^n\| + h_n\|v_{i-1}^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
&\leq \|u_{i-2}^n\| + h_n\|v_{i-2}^n\| + h_n\|v_{i-1}^n\| + h_n\|v_i^n\| \\
&\leq \|u_{i-2}^n\| + h_n(\|v_{i-2}^n\| + \|v_{i-1}^n\| + \|v_i^n\|),
\end{aligned}$$

d'après (2.25)*, et par récurrence, on obtient*

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0\| + (i+1)h_n\|v_0\|,$$

d'où

$$\|u_{i+1}^n\| \leq \|u_0\| + \mathrm{T}h_n\|v_0\|,$$

alors

$$\|u_i^n\| \leq \|u_0\| + \mathrm{T}h_n\|v_0\|. \tag{2.26}$$

(ii) L'hypothèse de compacité sur l'ensemble des contraintes C *est également plus faible que celle utilisée dans les travaux précédents [5, 8, 10, 11] car il suffit de prendre la mesure de non-compacité de Kuratowski pour une boule fixe. De plus, la perturbation* F *doit seulement satisfaire la condition de croissance linéaire.*

Théorème 2.1.3. *Supposons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_3)$ *sont satisfaites et que* $-\mathrm{C}(t, .)$ *est monotone pour tout* $t \in [0, \mathrm{T}]$. *Supposons de plus, que* F *est monotone par rapport à la troisième variable sur* gph(C), *i.e, pour tout* $(t_i, x_i, y_i) \in \mathrm{gph(C)}$ *et* $z_i \in \mathrm{F}(t_i, x_i, y_i)$, $(i = \overline{1,2})$ *on a*

$$\langle z_1 - z_2, y_1 - y_2\rangle \geq 0.$$

Alors, pour toute condition initiale, il existe au moins une solution dans le sens du Théorème 2.1.1.

Preuve. Nous construisons les suites $(u_i^n)_{i=0}^n$, $(v_i^n)_{i=0}^n$, $(f_i^n)_{i=0}^n$ et les suites des fonctions $(u_n(.))_n$, $(v_n(.))_n$, $(f_n(.))_n$, $(\theta_n(.))_n$ *et* $(\eta_n(.))_n$. D'après la preuve du Théorème 2.1.1, il suffit de montrer que la suite $(v_n(.))_n$ converge fortement dans $\mathscr{C}([0, \mathrm{T}]; \mathrm{H})$.
D'abord, on va démontrer en premier lieu, que $u_n(.)$ converge. Pour tous entiers naturels $m \geq n$, soit

$$\varphi_{m,n}(t) := \frac{1}{2}\|u_m(t) - u_n(t)\|^2.$$

$\varphi_{m,\,n}(t)$ est différentiable pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$. Il existe donc $i,\, j$ tels que $t \in [t_i^m,\, t_{i+1}^m[\cap[t_j^n,\, t_{j+1}^n[$, maintenant, on montre que $\dfrac{d}{dt}\varphi_{m,\,n} = \langle u_m(t) - u_n(t),\, v_i^m - v_j^n\rangle$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_{m,\,n} &= \frac{1}{2}\{(u_m(t) - u_n(t))'(u_m(t) - u_n(t) + (u_m(t) - u_n(t))(u_m(t) - u_n(t))'\} \\ &= (u_m(t) - u_n(t))'(u_m(t) - u_n(t)) \\ &= \langle u_m(t) - u_n(t),\, \dot{u}_m(t) - \dot{u}_n(t)\rangle \\ &= \langle u_m(t) - u_n(t),\, v_i^m - v_j^n\rangle.\end{aligned}$$

On a

$$v_i^m \in \mathrm{C}(t_i^m,\, u_i^m) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},$$

et

$$v_j^n \in \mathrm{C}(t_i^n,\, u_i^n) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B},$$

d'où

$$v_i^m \in \mathrm{C}(t,\, u_i^m) + h_m\mathrm{L_C}\mathbb{B},$$

et

$$v_j^n \in \mathrm{C}(t,\, u_j^n) + h_n\mathrm{L_C}\mathbb{B}.$$

En utilisant la monotonie de $-\mathrm{C}(t,\, .)$ on trouve que

$$\langle v_i^m - v_j^n,\, u_i^m - u_j^n\rangle \leq 4\mathrm{L_C}h_n\mathrm{M}_1.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_{m,\,n}(t) &= \langle u_m(t) - u_n(t),\, v_i^m - v_j^n\rangle \\ &\leq \langle u_m(t) - u_i^m,\, v_i^m - v_j^n\rangle + \langle u_i^m - u_j^n,\, v_i^m - v_j^n\rangle + \langle u_j^n - u_n(t),\, v_i^m - v_j^n\rangle \\ &\leq 2\mathrm{M}_1^2h_m + 4\mathrm{M}_1\mathrm{L_C}h_n + 2\mathrm{M}_1^2h_n \\ &\leq 4\mathrm{M}_1(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L_C})h_n.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $u_m(.)$ et $u_n(.)$ sont lipschitzienne continue de rapport M_1 et comme $u_i^m,\, u_j^n$ sont bornées par M_1, on trouve que pour tout $t \in [0,\, \mathrm{T}]$

$$\frac{1}{2}\|u_m(t) - u_n(t)\|^2 \leq 4\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L_C})h_n.$$

En effet, on a

$$\frac{d}{dt}\varphi_{m,\,n}(t) \leq 4\mathrm{M}_1(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L_C})h_n,$$

en intégrant sur $[0,\, \mathrm{T}]$ on obtient

$$\int_0^{\mathrm{T}} \frac{d}{dt}\varphi_{m,\,n}(t)dt \leq \int_0^{\mathrm{T}} 4\mathrm{M}_1(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L_C})h_n dt,$$

alors

$$\varphi_{m,\,n}(t) \leq 4\mathrm{M}_1(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n \int_0^\mathrm{T} dt,$$

d'où

$$\varphi_{m,\,n}(t) \leq 4\mathrm{M}_1(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n\mathrm{T}, \tag{2.27}$$

donc

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|^2 \leq 8\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n \to 0,$$

lorsque $n,\ m \to +\infty$, ce qui montre que $(u(.)_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}([0,\ \mathrm{T}];\ \mathrm{H})$ qui est de Banach, et par suite elle converge vers une fonction lipschitzienne $u(.)$.
D'autre part

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{2\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n}.$$

En effet, de (2.27), on obtient

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2}\|u_m(t) - u_n(t)\|^2 \leq 4\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n,$$

alors

$$\|u(t) - u_n(t)\|^2 \leq 8\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n,$$

et par conséquent

$$\|u(t) - u_n(t)\| \leq 2\sqrt{2\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n}.$$

En suite nous montrons la convergence uniforme de $(v_n(.))_n$.
De (2.11), (2.27) et la continuité lipschitzienne de C, $u_n(.)$ et $v_m(.)$, on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{C}(\eta_n(t),\,u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)) &= \|v_m(t) - u_n(\eta_n(t))\| \\
&\leq \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t)) + v_m(\eta_m(t)) - u_n(\eta_n(t))\| \\
&\leq \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t))\| + \|v_m(\eta_m(t)) - u_n(\eta_n(t))\| \\
&\leq \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t))\| + d_{\mathrm{C}(\eta_n(t),\,u_n(\eta_n(t)))}(v_m(\eta_m(t))) \\
&\leq e(\mathrm{C}(\eta_m(t),\ u_m(\eta_m(t)) \cap \mathrm{M}_1\mathbb{B};\ \mathrm{C}(\eta_n(t),\ u_n(\eta_n(t)))) + \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t))\| \\
&\leq \Gamma(\eta_m(t),\ u_m(\eta_m(t)),\ \eta_n(t),\ u_n(\eta_n(t))) + \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t))\| \\
&\leq \mathrm{L}_\mathrm{C}\{|\eta_m(t) - \eta_n(t)| + \|u_m(\eta_m(t)) - u_n(\eta_n(t))\|\} + \|v_m(t) - v_m(\eta_m(t))\| \\
&\leq \mathrm{L}_\mathrm{C}\{h_m + h_n\} + \mathrm{L}_\mathrm{C}\|u_m(\eta_m(t)) - u_n(\eta_n(t))\| + \mathrm{M}_2h_m \\
&\leq (2\mathrm{L}_\mathrm{C} + \mathrm{M}_2)h_n + \mathrm{L}_\mathrm{C}\{\|u_n(\eta_n(t)) - u_n(\eta_m(t))\| + \|u_n(\eta_m(t)) - u_m(\eta_m(t))\|\} \\
&\leq (2\mathrm{L}_\mathrm{C} + \mathrm{M}_2)h_n + \mathrm{L}_\mathrm{C}\mathrm{M}_1\{h_n + h_m\} + 2\sqrt{2\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n} \\
&\leq (2\mathrm{L}_\mathrm{C} + \mathrm{M}_2)h_n + 2\mathrm{L}_\mathrm{C}\mathrm{M}_1h_n + 2\sqrt{2\mathrm{M}_1\mathrm{T}(\mathrm{M}_1 + \mathrm{L}_\mathrm{C})h_n}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t))}(v_m(t)) \to 0$ lorsque $m,\, n \to +\infty$. D'après (2.14) et comme

$$\|\dot{v}_n(t) + f_n(t)\| \leq 2M_2,$$

alors la Proposition 1.4.26 implique que pour presque tout $t \in [0,\, T]$ on trouve que

$$-\dot{v}_n(t) - f_n(t) \in 2M_2 \partial d_{C(\eta_n(t), u_n(\eta_n(t)))}(v_n(\eta_n(t))), \tag{2.28}$$

donc

$$\frac{1}{2M_2}(-\dot{v}_n(t) - f_n(t)) \in \partial d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_n(\eta_n(t))).$$

En utilisant la définition du sous différentiel de la fonction distance on obtient

$$\frac{1}{2M_2}\langle -\dot{v}_n(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(\eta_n(t))\rangle \leq d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

d'où

$$\langle -\dot{v}_n(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(\eta_n(t))\rangle \leq 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

et par suite

$$\langle \dot{v}_n(t) + f_n(t),\, v_n(\eta_n(t)) - v_m(t)\rangle \leq 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

par conséquent

$$\langle \dot{v}_n(t) + f_n(t),\, v_n(\eta_n(t)) - v_n(t) + v_n(t) - v_m(t)\rangle \leq 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

alors

$$\langle \dot{v}_n(t)+f_n(t),\, v_n(\eta_n(t))-v_n(t)\rangle+\langle \dot{v}_n(t)+f_n(t),\, v_n(t)-v_m(t)\rangle \leq 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

donc

$$\begin{aligned}
\langle \dot{v}_n(t),\, v_n(t) - v_m(t)\rangle &\leq -\langle \dot{v}_n(t),\, v_n(\eta_n(t)) - v_n(t)\rangle - \langle f_n(t),\, v_n(\eta_n(t)) - v_n(t)\rangle \\
&- \langle f_n(t),\, v_n(t) - v_m(t)\rangle + 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)) \\
&\leq \|\dot{v}_n(t)\|\|v_n(\eta_n(t) - v_n(t)\| + \|f_n(t)\|\|v_n(\eta_n(t) - v_n(t)\| \\
&- \langle f_n(t),\, v_n(t) - v_m(t)\rangle + 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)) \\
&\leq 2M_2^2 h_n - \langle f_n(t),\, v_n(t) - v_m(t)\rangle + 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)) \\
&\leq -\langle f_n(t),\, v_n(t) - v_m(t)\rangle + \beta_{n,\, m}(t),
\end{aligned}$$

où

$$\beta_{n,\, m} = 2M_2^2 h_n + 2M_2 d_{C(\eta_n(t),\, u_n(\eta_n(t)))}(v_m(t)),$$

et

$$\|\beta_{n,\, m}\|_\infty \to 0 \textit{ lorsque } m, n \to +\infty.$$

De la même manière, on obtient

$$\langle \dot{v}_m(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle \leq -\langle f_m(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle + \beta_{m,\, n}(t).$$

Par conséquent, pour presque tout $t \in [0, \mathrm{T}]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle &\leq \beta_{m,n}(t) + \beta_{n,m}(t) - \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle \\
&\leq \beta_{m,n}(t) + \beta_{n,m}(t) \\
&- \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_m(\theta_m(t)) + v_m(\theta_m(t)) \\
&- v_n(\theta_n(t)) + v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\rangle \\
&\leq \beta_{m,n}(t) + \beta_{n,m}(t) - \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\rangle \\
&- \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t))\rangle \\
&- \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\rangle \\
&\leq -\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t))\rangle + \alpha_{m,n}(t),
\end{aligned}$$

où

$$\alpha_{m,n}(t) := \beta_{m,n}(t)+\beta_{n,m}(t)-\langle f_m(t)-f_n(t),\, v_m(t)-v_m(\theta_m(t))\rangle-\langle f_m(t)-f_n(t),\, v_n(\theta_n(t))-v_n(t)\rangle.$$

Donc

$$\langle \dot{v}_m(t) - \dot{v}_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle \leq \alpha_{m,n}(t), \tag{2.29}$$

comme

$$f_m(t) \in \mathrm{F}(\theta_m(t),\, u_m(\theta_m(t),\, v_m(\theta_m(t)),$$

et

$$f_n(t) \in \mathrm{F}(\theta_n(t),\, u_n(\theta_n(t),\, v_n(\theta_n(t)),$$

et puisque F est monotone par rapport à la troisième variable, on trouve que

$$\begin{aligned}
&\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\rangle + \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\rangle \\
\leq\; &\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_m(\theta_m(t)) + v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\rangle \\
\leq\; &-\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(\theta_m(t)) - v_n(\theta_n(t))\rangle + \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle \\
\leq\; &\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\|\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_m(\theta_m(t))\rangle + \langle f_m(t) - f_n(t),\, v_n(\theta_n(t)) - v_n(t)\rangle\| \\
\leq\; &\|\langle f_m(t) - f_n(t),\, v_m(t) - v_n(t)\rangle\| \\
\leq\; &\|f_m(t) - f_n(t)\|.\|v_m(t) - v_n(t)\| \\
\leq\; &(\|f_m(t)\| + \|f_n(t)\|)\|v_m(t) - v_n(t)\| \\
\leq\; &2\mathrm{M}_2^2(h_n + h_m),
\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\|\alpha_{n,m}\|_\infty \to 0, \; lorsque \;\; m, n \to +\infty,$$

de (2.29), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t) - v_n(t)\|^2 \leq 2\alpha_{m,n}(t),$$

alors

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t) - v_n(t)\|^2 \leq 2\|\alpha_{m,n}\|_\infty,$$

par intégration sur $[0, t]$ on obtient

$$\|v_m(t) - v_n(t)\|^2 + \|v_m(0) - v_n(0)\|^2 \leq 2\mathrm{T}\|\alpha_{m,n}\|_\infty \to 0, \; lorsque \;\; m, n \to +\infty,$$

et comme $v_m(0) = v_n(0) = v_0$, on obtient

$$\|v_m(t) - v_n(t)\|^2 \leq 2\mathrm{T}\|\alpha_{m,n}\| \to 0,$$

lorsque m et $n \to +\infty$, il en résulte donc que $(v_n(.))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}([0, \mathrm{T}]; \mathrm{H})$ qui est complet, et par suite la convergence forte de $(v_n(.))_n$.
Ce qui achève la démonstration. □

2.2 Unicité de solution

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat d'unicité

Théorème 2.2.1. (***unicité***) *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.1.1 et si on suppose de plus que* F *satisfait la condition suivante, pour tous* $t \in [0, \mathrm{T}]$; $x_1, x_2 \in \mathrm{H}$; $y_1 \in \mathrm{C}(t)$, $y_2 \in \mathrm{C}(t)$ *et* $z_1 \in \mathrm{F}(t, x_1, y_1), z_2 \in \mathrm{F}(t, x_2, y_2)$, *on a*

$$\langle z_1 - z_2, y_1 - y_2\rangle \geq -\mathrm{k}(t)\{\|x_1 - x_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2\}, \tag{2.30}$$

où $\mathrm{k}(.) \in \mathrm{L}^1([0, \mathrm{T}]; \mathbb{R})$. *Alors, le problème* $(\mathcal{S})$ *admet une solution unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions $u_1(.)$, $u_2(.)$ pour le problème $(\mathcal{S})$ telles que $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ et $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = v_0$, alors il existe $f_i(t) \in \mathrm{F}(t, u_i(t), \dot{u}_i(t))$, $(i = 1, 2)$ tel que

$$\ddot{u}_i(t) + f_i(t) \in -\mathcal{N}_{\mathrm{C}(t)}(\dot{u}_i(t)), \; p.\ p\ t \in [0, \mathrm{T}] \tag{2.31}$$

i.e

$$-\ddot{u}_1(t) - f_1(t) \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}(t)}(\dot{u}_1(t)),$$

et

$$-\ddot{u}_2(t) - f_2(t) \in \mathcal{N}_{\mathrm{C}(t)}(\dot{u}_2(t)).$$

En utilisant la monotonie du cône normal et la condition (2.30), on obtient pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$

$$\langle -\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t) - f_1(t) + f_2(t), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \geq 0,$$

alors
$$\langle -\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle + \langle f_2(t) - f_1(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \geq 0,$$

donc
$$\langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle + \langle f_1(t) - f_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \leq 0,$$

d'où
$$\langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle - \mathrm{k}(t)\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\} \leq 0,$$

par suite
$$\langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \leq \mathrm{k}(t)\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\},$$

par conséquent
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|^2\} &= \langle \ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t),\, \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \\
&+ \langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t),\, u_1(t) - u_2(t)\rangle \\
&\leq \mathrm{k}(t)\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2)\} \\
&+ \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|.\|u_1(t) - u_2(t)\| \\
&\leq \mathrm{k}(t)\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\} \\
&+ \frac{1}{2}\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\} \\
&\leq (\mathrm{k}(t) + \frac{1}{2})\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \\
&+ \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\},
\end{aligned}$$

alors
$$\frac{d}{dt}\{\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|^2\} \leq 2(\mathrm{k}(t) + \frac{1}{2})\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\},$$
donc
$$\|\frac{d}{dt}\{\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|^2\}\| \leq 2\|(\mathrm{k}(t) + \frac{1}{2})\|.\|\{\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 + \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2\}\|,$$

d'après le Corollaire 1.5.5, on obtient
$$\|\{\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|^2\}\| \leq \{\|\dot{u}_1(0) - \dot{u}_2(0)\|^2 + \|u_1(0) - u_2(0)\|^2\}e^{2\|\mathrm{k}(t) + \frac{1}{2})\|t},$$
alors
$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 + \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq 0,$$
donc
$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq -\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 \leq 0,$$
et par conséquent, d'après la définition de la norme, on trouve que
$$u_1(t) = u_2(t),$$
d'où l'unicité. □

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté un résultat d'existence et un résultat d'unicité pour le processus de Rafle du second ordre dans un espace de Hilbert ont été étudiés avec soin. Il est remarquable que l'ensemble des contraintes soit éventuellement non borné et toutes les hypothèses principales (la continuité lipschitzienne et la compacité de l'ensemble des contraintes, la limite de croissance linéaire de perturbation) sont plus faibles que ceux utilisés dans les travaux antérieurs, ce qui permet plus d'applications dans la pratique.

Bibliographie

[1] **J. P. Aubin, A. Cellina**, *Differential inclusion*, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-verlag, Berlin(1984).

[2] **D. Azé**, *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, Édition Markting. 1997.

[3] **S. Adly. Ba. Khiet Le**, *Unbounded Second-Ordre State-Dependent Moureau's Sweeping Processes in Hilbert Spaces*, Springer Verlag. 2016, 169,pp.407-423.

[4] **S. Adly, T. Haddad et L. Thibault**, *Convex sweeping process in the framework of measure differential inclusions and evolution variational inequalities*, Math. Program. Ser. B 148. 5-47(2014).

[5] **M. Bounkhel**, *General existence results for second ordre nonconvex sweeping process with unbounded perturbations*, Port. Math (N.S). 60(3), 269-304(2003).

[6] **H. Brezis**, *Analyse Fonctionnelle : Théorie et application*, Dunod, Paris, 1999.

[7] **M. Bounkhel et D. L. Azzam**, *Existence results on the second-ordre nonconvex sweeping processes with perturbations*, Set Valued Anal. 12(3), 291-318(2004).

[8] **M. Bounkhel. R. Al-yusof**, *First and second ordre convex sweeping processes in reflexive smooth Banach spaces*, Set Valued Var. Anal. 18(2). 151-182(2010).

[9] **C. Castaing, M. Valdier**, *Convexe Analysis and Measurable Multifonctions*, Springer-verlag, Berlin (1977).

[10] **C. Castaing, A. G. Ibrahim et M. Yarou**, *Some contributions to nonconvex sweeping process J . Non linear Conv*, Anal. 10(1), 1-20 (2009).

[11] **M. Kunze, Monteiro Marques, M. D. P** , *An introduction to Moureau's sweeping process. In Brogliato, B. (ed). Impacts in Mechanical Systems Analysis and Modelling*, pp. 1-60. Springer, Berlin (2000).

[12] **J.J, Moreau** , *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differ. Equ 26, 347-374 (1977).

[13] **J.J. Moreau** , *Numerical aspects of the sweeping process*, Comput. Methods Appl. Mech. 177, 329-349 (1999).

[14] **J. J. Moreau, Rafle** , *par un convexe variable*, I. Sém Anal. Conv. Montp. Expo. 15 (1971).

[15] **N. Pustenlnik et J. C. Pesquet**, *Opérateurs monotones*, Ecole d'été de Peyresq, Juin 2013.

[16] **R. T. Rockaiellar**, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey (1970).

[17] **R. T. Rockaiellar et R. B. Wets**, *Variational Analysis*, Springer. Berlin (1998).

[18] **A. A. Tolstonogov**, *Sweeping process with unbounded nonconvex perturbation Nonlinear*, Anal. 108. 291-301 (2014).