RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE JIJEL

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE

Pour Obtenir
LE DIPLÔME DE MASTER

Spécialité : **Mathématiques**
Option : **EDP et Applications**

Thème

Problème d'interface avec des opérateurs d'ordre différent dans des polygones

Présenté par
Lalmi Younès **Sâadallah Afaf**

Soutenu le : 25/Juin/2018
Devant les membres du jury :

S. Maarouf	**M.C.B Univ. de Jijel**	**Présidente.**
S. Ariche	**M.C.B Univ. de Jijel**	**Encadrante.**
I. Touil	**M.C.B Univ. de Jijel**	**Examinatrice.**

Promotion : 2017/2018

Dédicace

À

Mon defunt père vivant dans mon coeur.

Ma très chère maman.

Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté.

Qui je dois tout.

Mon frère Amine.

Mes soeurs Nour el houda, Amal, Meryem et Zeyneb.

Qui je souhaite un avenir radieux et plein de réussite.

Tous mes amis.

Tous ceux qui me chers.

L. Younès.

Dédicace

À

Au meilleur des pères.

Ma très chère maman.

Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté.

Qui je dois tout.

Mes Frères Nadjibe, Djamel eddine et Mouhammed

Qui je souhaite un avenir radieux et plein de réussite.

Tous mes amis.

Tous ceux qui me chers.

S. Afaf.

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, nous remercions ALLAH qui nous a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et gratitude à notre encadrante Mlle Ariche Sadjia, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Nous remercions aussi en particulier tous les enseignants du spécialité EDP sans exception pour leur fidélité et leur patience.

Nous remercions les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.

S. maarouf, qui nous fait l'honneur de présider ce jury ;
I. Touil, pour avoir accepté d'être examinatrice de ce travail.

Nous tenons particulièrement à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

À TOUS, UN GRAND MERCI.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des singularités des problèmes elliptiques connait une longue histoire, aussi bien de vue de l'ingénieur que du mathématicien. Ainsi, on s'intéresse depuis longtemps au comportement de la solution au voisinage des singularités géométriques (coins, arêtes, sommets, pointes,$\cdots$ etc.) dont l'objectif est de donner explicitement les fonctions singulières qui permettent de décomposer la solution en une partie régulière et une partie singulière.

Dans des domaines avec coins, des résultats de régularité ont été donnés par Kondrat'ev [7] dans les espaces de Sobolev avec poids, où il décompose la solution en une partie régulière et une partie singulière.

Une étude très détaillée de la théorie des singularités des problèmes elliptiques du seconde ordre a été menée par Grisvard [7, 8]. À la suite des travaux de Grisvard, Nicaise a commencé l'étude des problèmes aux limites sur des polygones [12]. Le sujet a été abordé dans toute sa généralité par Dauge [5]. Dans [10, 11], les auteurs traitent des problèmes aux limites elliptiques sur des cônes, des domaines a coins, des domaines avec arêtes et des polyèdres de façon plus générale.

L'objectif de ce mémoire est de détailler un article de Abderrahmane Maghnouji et Serge Nicaise [9] intitulé : *"On a Coupled Problem between the Plate Equation and the Membrane Equation on Polygons"*.

Le but principal des auteurs est d'étudier la régularité de la solution d'un problème couplé défini dans un domaine polygonale $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont des domaines polygonaux, plus précisément, au voisinage des coins en commun de Ω_1 et Ω_2. La nouveauté dans ce travail par rapport aux anciens travaux est que l'ordre des opérateurs différentiels partiels (le laplacien et le bilaplacien) est différent sur chaque face Ω_1 et Ω_2.

Notre travail va être décomposé en trois chapitres, dans le premier, on définit les espaces de Sobolev appropriés pour l'étude de ce type des équations aux dérivées partielles elliptiques, on rappelle quelques propriétés utiles dans la suite comme la notion de trace, les formules de Green et le Théorème de compacité de Rellich. A la fin on énonce le fameux lemme de Lax-Milgram qui permettra de déduire l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle de notre problème.

Le chapitre 2, on a pour but de donner une formulation variationnelle du problème, ainsi de montrer l'existence d'une unique solution variationnelle dans un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ en appliquant le lemme de Lax-Milgram.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à la régularité de la solution obtenue au chapitre 2. D'abord, pour des données intérieures dans L^2 et ensuite pour des données plus régulières. On donne une décomposition de la solution variationnelle de notre problème en une partie régulière avec la régularité optimale et une partie singulière :

$$\vec{u} = \vec{u}_R + C\vec{u}_S,$$

telle que :

- $\vec{u}_R$ est la partie dont le comportement n'a pas été affecté par la présence des coins, et qui appartient à $H^2(\Omega_1) \times H^4(\Omega_2)$.
- $\vec{u}_S$ est la partie singulière donnée explicitement.
- C est un coefficient de singularité qui dépend continûment des données de notre problème.

L'idée est de décomposer notre problème en deux problèmes découplés, notamment le problème de Laplace et le bilaplacien, et d'utiliser les résultats de décompositions pour des problèmes aux limites non homogènes pour chaque problème.

Dans la deuxième partie, pour des données plus régulières, en utilisant une procédure itérative et un argument de perturbation en plus des propriétés de Fredholm, la solution variationnelle est décomposée de la même façon mais cette fois avec une partie régulière plus régulier, c-à-d dans $H^{s_1+1}(\Omega_1) \times H^{s_2+2}(\Omega_2)$ avec des conditions sur s_1 et s_2.

CHAPITRE 1

CADRE FONCTIONNEL ET PROPRIÉTÉS

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions de base, des définitions des espaces appropriés pour l'étude de notre problème avec quelques propriétés utiles dans la suite. Pour les preuves, le lecteur peut consulter [4, 6, 13].

Notant que dans toute la suite, on considère que n est un entier naturel positif.

1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx :

- On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, c-à-d :

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f(x)|dx < \infty \right\}.$$

On pose :$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx$.

- Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

On note :$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$, la norme de f dans $L^p(\Omega)$.

- On pose :

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que } |f(x)| \leqslant C, \ p.p \ sur \ \Omega \Big\}.$$

On note : $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \Big\{ C \ \big| \ |f(x)| \leqslant C, \ p.p \ sur \ \Omega \Big\}$, la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

1.2 Espaces de Sobolev standards

Définition 1.2.1. ***(Les espaces de Sobolev** $W_p^s(\Omega)$**)***
Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty]$ et s un entier naturel. On définit l'espace de Sobolev $W_p^s(\Omega)$ par :

$$W_p^s(\Omega) = \Big\{ u \in L^P(\Omega) \ tel \ que \ \ D^\alpha u \in L^P(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ avec \ |\alpha| \leq s \Big\},$$

où α est un multi-indice, $D^\alpha u$ est une dérivé partielle de u au sens faible (ou sens des distributions).
On munit cet espace vectoriel $W_p^s(\Omega)$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha u\|_{L^p}, & si \quad p = +\infty \end{cases}$$

Définition 1.2.2. *Pour $s > 0$, on note par $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_p^s(\Omega)$. On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace de toutes les fonctions de C^∞ à support compact dans Ω.*

Remarque 1.2.1. *On note que on a en générale $\mathring{W}_p^s(\Omega)$ est différent de $W_p^s(\Omega)$. Une exception est le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, où on a :*

$$\mathring{W}_p^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n), \quad pour \ \ s > 0.$$

Définition 1.2.3. *Pour $s > 0$, on note par $\tilde{W}_p^s(\Omega)$, l'espace des fonctions $u \in W_p^s(\Omega)$ telles que $\tilde{u}$, le prolongement de u par zéro à l'extérieur de Ω, appartient à $W_p^s(\mathbb{R}^n)$.*
$W_p^s(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{\tilde{W}_p^s(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{W_p^s(\mathbb{R}^n)}, \forall u \in \tilde{W}^{s,p}(\Omega).$$

Remarques 1.2.1.

- *Dans le cas $p = 2$, les espaces de Sobolev ont un intérêt particulier car il s'agit alors des espaces de Hilbert, leur norme est induite par le produit intérieur suivant :*

$$(u, v)_s = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_s,$$

où $(u, v) = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$ est le produit intérieur dans $L^2(\Omega)$, produit scalaire dans le cas réel, hermitien dans le cas complexe. Dans ce cas on a :

$$H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega).$$

- *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $s \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ est formé par l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant s$. ce qui implique que : $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*
- *L'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*
- *Les fonctions de $H^s(\Omega)$ ne sont pas toujours continues ou régulières (cela dépend de s et de la dimension n), mais si s est suffisamment grand alors toute fonction de $H^s(\Omega)$ est continue.*

Définition 1.2.4. *$H_0^s(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.*

Remarque 1.2.2. *$H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{s,\Omega}$, car $H_0^s(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^s(\Omega)$ donc complet.*

Définition 1.2.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, pour tout $j = 1, 2$, on définit les espaces :*

$$E(\Delta^j, L^p(\Omega)) = \{u \in H^j(\Omega) : \Delta^j u \in L^p(\Omega)\},$$

Ils sont des espaces de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{E(\Delta^j; L^p(\Omega))} = \|u\|_{j,\Omega} + \|\Delta^j u\|_{0,\Omega}, \text{ pour tout } j = 1, 2.$$

Proposition 1.2.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec une frontière Γ suffisamment régulière, alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $E(\Delta^j; L^p(\Omega))$, pour tout $j = 1, 2$.*

Proposition 1.2.2. ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de . $\mathbb{R}^n$ Il existe une constante $c_\Omega > 0$ telle que, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration: Voir la Proposition 2.3.10 de [1]. ∎

Théorème 1.2.3. *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, supposons que $mes(\Gamma_0) > 0$.*
On considère :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0(v) = 0 \ sur\ \Gamma_0\},$$

alors la semi-norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ induit une norme sur V équivalente à celle induite par la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Démonstration: Voir le Théorème 2.3.1 de [15]. ∎

Théorème 1.2.4. ***(Théorème de compacité de Rellich)***
Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Démonstration: Voir le Théorème IX.16 de [4]. ∎

Théorème 1.2.5. ***(Injections de Sobolev)***
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, s et m deux entiers positifs telles que $s > m$ on a l'injection :

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega),$$

est continue.

Démonstration: Soit $u \in H^s(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,\Omega} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{0,\Omega}, \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq s} \|D^\alpha u\|^2_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

car $s > m$, donc :

$$\|u\|_{m,\Omega} \leq \|u\|_{s,\Omega},$$

d'où le résultat.

■

Avant d'énoncer le théorème suivant qu'on utilisera dans les chapitres suivants, on a besoin de la définition suivante :

Définition 1.2.6. *Le graphe d'une fonction f de E dans F est le sous ensemble G des couples liées par la correspondance :*

$$G = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Théorème 1.2.6. ***(Théorème de graphe fermé)***
Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, $G(T)$ est fermé dans $E \times F$. Alors, T est continu.

Démonstration: Voir le Théorème 2.7 de [4].

■

Remarque 1.2.3. *Bien entendu la réciproque est vraie puisque toute application continue (linéaire ou non linéaire) a un graphe fermé.*

1.3 Notion de trace

Les fonctions de H^1 ne sont pas nécessairement continues. Pour définir leur valeur au bord on introduit la notion de trace de ces fonctions, et on a le Théorème suivant :

Théorème 1.3.1. ***(Théorème de trace pour H^1)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors l'application trace :

$$\begin{cases} \gamma_0 : \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{C}^0, \\ \qquad v & \mapsto & \gamma_0(v) = v_{|\Gamma}, \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. Cela implique en particulier :

$$\exists C > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \|\gamma_0(v)\|_{0,\Gamma} \leq C\|v\|_{1,\Omega}.$$

Remarque 1.3.1. *L'image de γ_0 n'est pas $L^2(\Gamma)$ tout entier, mais un espace intermédiaire entre $L^2(\Gamma)$ et $H^1(\Gamma)$.*

Corollaire 1.3.2. *Le noyau de γ_0 est en fait $H_0^1(\Omega)$,*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \;\; \gamma_0(v) = 0\}.$$

Théorème 1.3.3. ***(Théorème de trace pour H^2)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors l'application trace définie de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^0(\Gamma) \times \mathcal{C}^0(\Gamma)$ par

$$v \mapsto (\gamma_0 v, \gamma_1 v) = (v_{|\Gamma}, (\partial_n v)_{|\Gamma}),$$

se prolonge pa continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Corollaire 1.3.4. *De la même façon,*

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega), \;\; \big(\gamma_0(v), \gamma_1(v)\big) = (0,0)\}.$$

1.4 La géométrie polygonale

Nous allons donner dans ce paragraphe les notations concernant les domaines polygonaux de $\mathbb{R}^2$, mais avant, on a besoin de la définition suivante :

Définition 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que sa frontière Γ est continue (resp. lipschitzienne, continûment différentiable, de classe $\mathcal{C}^{k,1}$, m fois continûment différentiable "k, m des entiers ≥ 1 peuvent être $+\infty$") si pour tout $x \in \Gamma$, il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{R}^n$ et des nouveaux axes de coordonnées orthogonaux $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ tels que :*

1. *V est un hypercube dans les nouveaux axes de coordonnées :*

$$V = \{(y_1, y_2, ..., y_n) \mid -a_j < y_j < a_j, \; 1 \leq j \leq n\};$$

2. *Il existe une fonction continue (resp lipschitzienne, continûment différentiable, de classe $\mathcal{C}^{k,1}$, m fois continûment différentiable), φ, défini dans :*

$$V' = \{(y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \mid -a_j < y_j < a_j, \; 1 \leq j \leq n-1\},$$

et telle que :

$$|\varphi(y')| \leq \frac{a_n}{2} \;\; \text{pour tout} \;\; y' = (y_1, ..., y_{n-1}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \; |y_n < \varphi(y')\},$$

$$\Gamma \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \; |y_n < \varphi(y')\}.$$

En d'autres termes, dans un voisinage de x, la frontière Γ est le graphe de φ. Nous rappelons que dire que φ est de classe $\mathcal{C}^{k,1}$ signifie qu'elle est continûment différentiable et ses dérivées d'ordre k sont lipschitziennes continues.

Si un ouvert Ω a une frontière continue Γ, alors Ω est d'un seul coté de Ω en tout point de Γ. Par exemple, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ n'a pas une frontière continue au sens de la Définition 1.4.1. De même un domaine avec un fissure ne vérifie pas les conditions de la Définition 1.4.1.

Nous appelons *"polygone du plan"* un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à frontière lipschitzienne et polygonale (ce qui exclut un domaine contenant une fissure ou coupure). La frontière Γ est constituée des segments $\Gamma_j, j = 1, ..., N$ où les Γ_j sont deux à deux disjoints.

Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines polygonaux bornés simplement liés du plan tels que leurs frontières aient un coté commun Γ, on désigne par Γ_1 (resp Γ_2) la frontière de Ω_1 (resp Ω_2) sauf Ω i.e. $\Gamma_j = \partial\Omega_j\backslash\bar{\Gamma}$. pour $j = 1, 2$.

Pour$j = 1, 2, \nu_j$ est le vecteur unitaire normale sur la frontière $\partial\Omega_j$ et τ_j est le vecteur tangentiel le long de $\partial\Omega_j$, de façon que (ν_j, τ_j) forme une base orthonormale directe. Le long du coté commun Γ, on écrit juste (ν, τ) au lieu de (ν_j, τ_j), pour $j = 1, 2$.

On peut designer par S_{jk}, pour $k = \{1 \cdots N_j\}$ les sommets de Ω_j, numérotés dans le sens trigonométrique pour Ω_1 et numérotés dans le sens directe (horaire) pour Ω_2.

w_{jk} sera l'angle intérieur à S_{jk}, de plus, on suppose que $S_{11} = S_{21}$ et $S_{12} = S_{22}$ appartiennent à $\bar{\Gamma}$ et on les note S_1 et S_2 respectivement, on note aussi par η_{jk} la fonction de troncature qui est égale à 1 dans un voisinage de S_{jk} et égal 0 dans un voisinage des autres sommets. comme précédament on peut supposer que $\eta_{11} = \eta_{21} =: \eta_1$ et $\eta_{12} = \eta_{22} =: \eta_2$.

Finalement γ_j désigne l'opérateur trace dans la frontière $\partial\Omega_j$ de Ω_j,$\gamma_{j\Gamma}$ soit la restriction de γ_j à Γ.

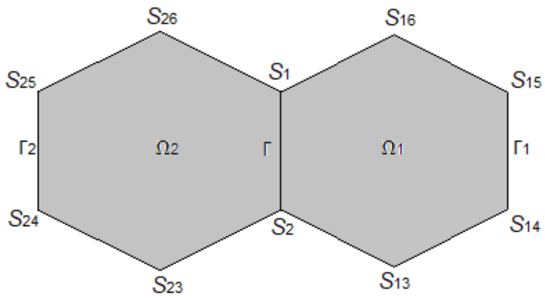

FIGURE 1.1 – domaine polygonale

1.5 Formule de Green

Lemme 1.5.1. *Soit Ω un domaine polygonale tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Pour tous $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \partial_i u \partial_i v dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{\Gamma_j} \gamma_j \frac{\partial u}{\partial \nu_j} \gamma_j v \, d\sigma_j.$$

Lemme 1.5.2. *Soit Ω un domaine polygonale tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et soit la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ définie sur $H^2(\Omega)$ par :*

$$a(u,v) = \rho \int_\Omega \Big[\Delta u \Delta v - (1-\sigma)\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\} \Big] dxdy.$$

Pour tout $v \in H^2(\Omega)$, si $u \in H^4(\Omega)$ alors,

$$a(u,v) = \rho \int_\Omega \Delta^2 u v \, dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{\Gamma_j} \Big(M_j u \gamma_j \frac{\partial v}{\partial \nu_j} - N_j u \gamma_j v \Big) d\sigma_j.$$

1.6 Espaces de Sobolev à poids $V_\gamma^{k,p}$

Définition 1.6.1. *Soient γ un nombre réel arbitraire et $p \in \mathbb{N}$, soit Ω un domaine polygonale du plan. On note $V_\gamma^{k,p}(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaisant :*

$$r^{\gamma+|\beta|-k} D^\beta u \ \in L^p(\Omega), \forall \beta \in \mathbb{N}^2 : |\beta| \leq k,$$

où $r(x)$ dénote la distance entre x et le sommet de Ω, $V_\gamma^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{V_\gamma^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leq k} \int_\Omega r^{(\gamma+|\beta|-k)} |D^\beta u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Théorème 1.6.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$,on a :*

$$V_0^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega).$$

Démonstration: Voire le Corollaire 1.25 de [14].

■

1.7 Un résultat d'existence (Lemme de Lax-Milgram)

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert V, rappelons qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire notée $(.,.)_V$, qui est complet pour la norme associé à ce produit scalaire, noté $\|u\|_v = \sqrt{\langle u, u \rangle_v}$.

On considère la formulation variationnelle de type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \forall v \in V; \tag{1.1}$$

Les hypothèses sur $a(\cdot,\cdot)$ et $L(\cdot)$ sont :

- $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V .i.e :

$$\exists c > 0, \text{ tel que } : |L(v)| \leq c\|v\|_V, \quad \forall v \in V. \tag{1.2}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur V .i.e :

$$\exists M > 0, \text{ tel que } : |a(v,w)| \leq M\|v\|_V\|w\|_V, \quad \forall v, w \in V. \tag{1.3}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ est coercive (ou v-elliptique), c-à-d que :

$$\exists \alpha > 0, \text{ tel que} : a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Théorème 1.7.1. ***(Lax-Milgram)***
Soient V un espace de Hilbert réel, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (1.1) *admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire $L(.)$.*

Démonstration: Voir le Théorème 1.3.1 de [13].

■

1.8 Opérateurs de Fredholm

Dans cette section, nous allons donnée une définition et quelques propriétés des opérateurs de Fredholm qu'on utilisera dans le dernier chapitre :

Définition 1.8.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur borné $T : X \longmapsto Y$ est appelé un opérateur de Fredholm si $Im\, T$ est fermé et si $dim(Ker\, T)$ est finie.*

Remarque 1.8.1. *Un opérateur borné $T : X \longmapsto Y$ est dit semi-Fredholm si $dim(Ker\, T)$ est finie seulement.*

Proposition 1.8.1. ***(Théorème de perturbation compacte)***
Soit X un espace de Banach. Si T est un opérateur de Fredholm et K est un opérateur compact, alors $T + K$ est un opérateur de Fredholm.

Démonstration: Voir le Théorème 3.16 de [2].

■

CHAPITRE 2

FORMULATION VARIATIONNELLE ET RÉSULTAT D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Ce chapitre est consacré à la présentation du problème d'interface pour les opérateurs de Laplace et biharmonique avec des conditions aux limites. On donne une formulation variationnelle de ce problème permettant une démonstration aisée de l'existence et l'unicité de la solution.

2.1 Formulation variationnelle

Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines polygonaux bornés simplement liés du plan tels que leurs frontières aient un coté commun Γ. Pour $E > 0$ et $\sigma \in]0.1[$, on pose $P = E/(1-\sigma^2)$ et on introduit les opérateurs définis seulement sur la frontière Γ :

$$Mu = \rho\gamma_{2\Gamma}(\sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2}),$$

$$Nu = \rho\gamma_{2\Gamma}(\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + (1-\sigma)\frac{\partial^3 u}{\partial\nu\partial\tau^2}).$$

On considère le problème d'interface suivant :

Étant données $f_1 \in H^{s_1-1}(\Omega_1)$, $f_2 \in H^{s_2-2}(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{s_1-1/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{s_2-3/2}(\Gamma)$, pour

$s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ avec $s_2 \geq 2$,

trouver $u_1 \in H^{s_1+1}(\Omega_1), u_2 \in H^{s_2+2}(\Omega_2)$, solutions de (2.1)-(2.7) ci-dessus :

$$\Delta u_1 = f_1, \qquad \text{dans } \Omega_1, \tag{2.1}$$

$$\Delta^2 u_2 = f_2, \qquad \text{dans } \Omega_2, \tag{2.2}$$

$$\gamma_1 u_1 = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{2.3}$$

$$\gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, \qquad \text{sur } \Gamma_2, \tag{2.4}$$

$$\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2, \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{2.5}$$

$$M u_2 = h_1, \qquad \text{sur } \Gamma, \tag{2.6}$$

$$N u_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = h_2, \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{2.7}$$

On commence par donner une formulation variationnelle de ce problème. D'abord, on définit l'espace V par :

$$V = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2), \text{satisfaisant (2.3), (2.4) et (2.5)}\}.$$

Lemme 2.1.1. *V est un espace de Hilbert équipé du produit interne induit par $H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ avec la norme associée :*

$$\|\vec{u}\|_V = (\|u_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|u_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2}.$$

Démonstration: La démonstration est facile comme le produit $H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ est un espace de Hilbert.

■

2.2 Résultats d'existences

Définissons la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ comme suit :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2),$$

où on prend :

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx,$$

$$a_2(u_2,v_2)=\rho\int_{\Omega_2}\Big\{\Delta u_2\Delta v_2-(1-\sigma)\Big(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1\partial x_2}\Big)\Big\}dx.$$

Théorème 2.2.1. *Pour tous $f_1\in L^2(\Omega_1)$, $f_2\in L^2(\Omega_2)$, et h_1, $h_2\in L^2(\Gamma)$, il existe une solution unique $\vec{u}\in V$ de :*

$$a(\vec{u},\vec{v})=-\int_{\Omega_1}f_1v_1dx+\rho\int_{\Omega_2}f_2v_2dx+\int_\Gamma\{h_1\gamma_2\frac{\partial v_2}{\partial\nu}-h_2\gamma_2v_2\}d\sigma,\tag{2.8}$$

pour tout $\vec{v}\in V$.

Démonstration: La preuve de ce théorème est basée sur l'application du lemme de Lax-Milgram, on a besoin alors de vérifier ses hypothèses.

On note :

$$L(v)=-\int_{\Omega_1}f_1v_1dx+\rho\int_{\Omega_2}f_2v_2dx+\int_\Gamma\{h_1\gamma_2\frac{\partial v_2}{\partial\nu}-h_2\gamma_2v_2\}d\sigma,\ \text{pour tout }\vec{v}\in V.$$

- V est un espace de Hilbert (par le Lemme 2.1.1).
- La bilinéarité de la forme $a(\cdot,\cdot)$ s'écoule directement de la linéarité de la dérivation et l'intégration.
- La forme $a(\cdot,\cdot)$ est continue. En effet :

  soient $\vec{u},\vec{v}\in V$ tels que : $\vec{u}=(u_1,u_2)$ et $\vec{v}=(v_1,v_2)$, on a :

$$\begin{aligned}
|a(\vec{u},\vec{v})| &= |a_1(u_1,v_1)+a_2(u_2,v_2)|\\
&\le |a_1(u_1,v_1)|+|a_2(u_2,v_2)|\\
&\le \Big|\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1dx\Big|+\Big|\rho\int_{\Omega_2}\Big\{\Delta u_2\Delta v_2-(1-\sigma)\Big(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1^2}\\
&\quad -2\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1\partial x_2}\Big)\Big\}dx\Big|\\
&\le \Big|\int_{\Omega_1}\nabla u_1\nabla v_1dx\Big|+\rho\Big\{\Big|\int_{\Omega_2}\Delta u_2\Delta v_2dx\Big|+(1-\sigma)\Big(\Big|\int_{\Omega_2}\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_2^2}dx\Big|\\
&\quad +\Big|\int_{\Omega_2}\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1^2}dx\Big|+2\Big|\int_{\Omega}\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1\partial x_2}dx\Big|\Big)\Big\}\\
&\le \int_{\Omega_1}\Big|\nabla u_1\nabla v_1\Big|dx+\rho\Big\{\int_{\Omega_2}\Big|\Delta u_2\Delta v_2\Big|dx+(1-\sigma)\Big(\int_{\Omega_2}\Big|\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_2^2}\Big|dx\\
&\quad +\int_{\Omega_2}\Big|\frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1^2}\Big|dx+2\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2v_2}{\partial x_1\partial x_2}\Big|dx\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|a(\vec{u},\vec{v})| &\leq \|\nabla u_1\|_{0,\Omega_1}\|\nabla v_1\|_{0,\Omega_1} + \rho\Big[\|\Delta u_2\|_{0,\Omega_2}\|\Delta v_2\|_{0,\Omega_2} \\
&\quad +(1-\sigma)\Big\{\|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\|_{0,\Omega_2}\|\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\|_{0,\Omega_2} + \|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\|_{0,\Omega_2}\|\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\|_{0,\Omega_2} \\
&\quad +2\|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\|_{0,\Omega_2}\|\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\|_{0,\Omega_2}\Big\}\Big] \\
&\leq \|u_1\|_{1,\Omega_1}\|v_1\|_{1,\Omega_1} + 5\rho\|u_2\|_{2,\Omega_2}\|v_2\|_{2,\Omega_2} \\
&\leq \max(1,5\rho)(\|u_1\|_{1,\Omega_1}\|v_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_2\|_{2,\Omega_2}\|v_2\|_{2,\Omega_2}) \\
&\leq 2\max(1,5\rho)(\|u_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|u_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2}(\|v_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|v_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2} \\
&\leq 2\max(1,5\rho)\|\vec{u}\|_V\|\vec{v}\|_V.
\end{aligned}$$

- La forme $a(\cdot,\cdot)$ est coercive. En effet :

  Soit $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V$, d'une part, en utilisant l'inégalité de Poincaré généralisée on obtient :

$$a_1(v_1,v_1) = \int_{\Omega_1}(\nabla v_1)^2 dx = \|\nabla v_1\|^2_{0,\Omega_1} = |v_1|^2_{1,\Omega_1} \geq \|v_1\|^2_{1,\Omega_1}, \tag{2.9}$$

  d'autre part, pour la coercivité de a_2, par le Lemme 5.2. de [14] ou le Lemme 4.1. on a :

$$a_2(v_2,v_2) \geq \rho(1-\sigma)|v_2|^2_{2,\Omega_2} \geq \rho(1-\sigma)\|v_2\|^2_{2,\Omega_2}. \tag{2.10}$$

  Donc de (2.9) et (2.10) on a :

$$\begin{aligned}
a(\vec{v},\vec{v}) &= a_1(v_1,v_1) + a_2(v_2,v_2) \\
&\geq \|v_1\|^2_{1,\Omega_1} + \rho(1-\sigma)\|v_2\|^2_{2,\Omega_2} \\
&\geq \min(1,\rho(1-\sigma))(\|v_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|v_2\|^2_{2,\Omega_2}) \\
&= \min(1,\rho(1-\sigma))\|\vec{v}\|^2_V.
\end{aligned}$$

- Il est facile à vérifier la linéarité de la forme $L(\cdot)$. Il reste à montrer la continuité de $L(\cdot)$: Soit $\vec{v} \in V$,

$$\begin{aligned}
|L(\vec{v})| &= \left| -\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \rho\int_{\Omega 2} f_2 v_2 dx + \int_{\Gamma}\{h_1\gamma_2\frac{\partial v_2}{\partial \nu} - h_2\gamma_2 v_2\}dx\right| \\
&\leq \left|\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx\right| + \rho\left|\int_{\Omega 2} f_2 v_2 dx\right| + \left|\int_{\Gamma} h_1\gamma_2\frac{\partial v_2}{\partial \nu}dx\right| + \left|\int_{\Gamma} h_2\gamma_2 v_2 dx\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$|L(\vec{v})| \leq \|f_1\|_{0,\Omega_1}\|v_1\|_{0,\Omega_1} + \rho\|f_2\|_{0,\Omega_2}\|v_2\|_{0,\Omega_2} + \|h_1\|_{0,\Gamma}\left\|\gamma_2\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\right\|_{0,\Gamma} + \|h_2\|_{0,\Gamma}\|\gamma_2 v_2\|_{0,\Gamma}.$$

L'application trace γ_2 étant continue, on a :

$$\begin{aligned}
|L(\vec{v})| &\leq \|f_1\|_{0,\Omega_1}\|v_1\|_{1,\Omega_1} + \rho\|f_2\|_{0,\Omega_2}\|v_2\|_{2,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma}\|v_2\|_{2,\Omega_2} + c\|h_2\|_{0,\Gamma}\|v_2\|_{2,\Omega_2} \\
&\leq \|f_1\|_{0,\Omega_1}\|v_1\|_{0,\Omega_1} + (\rho\|f_2\|_{0,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma} + c\|h_2\|_{0,\Gamma})\|v_2\|_{2,\Omega_2} \\
&\leq \max(\|f_1\|_{0,\Omega_1}, (\rho\|f_2\|_{0,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma} + c\|h_2\|_{0,\Gamma}))(\|v_1\|_{1,\Omega_1} + \|v_2\|_{2,\Omega_2}) \\
&\leq 2\max(\|f_1\|_{0,\Omega_1}, (\rho\|f_2\|_{0,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma} + c\|h_2\|_{0,\Gamma}))(\|v_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|v_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2} \\
&\leq 2\max(\|f_1\|_{0,\Omega_1}, (\rho\|f_2\|_{0,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma} + c\|h_2\|_{0,\Gamma}))\|\vec{v}\|_V.
\end{aligned}$$

Donc, il existe $c_1 = 2\max(\|f_1\|_{0,\Omega_1}, (\rho\|f_2\|_{0,\Omega_2} + c\|h_1\|_{0,\Gamma} + c\|h_2\|_{0,\Gamma}))$ tel que :

$$|L(\vec{v})| \leq c_1\|\vec{v}\|_V, \qquad \forall \vec{v} \in V.$$

D'où la continuité de $L(\cdot)$.

Les hypothèses du lemme de Lax-Milgram étant vérifiées, en l'appliquant, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle $\vec{u} \in V$ du problème (2.1)-(2.7).

■

Lemme 2.2.2. *L'application :*

$$(u_1, u_2) \mapsto (Mu_2, Nu_2 - \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}),$$

qui est définie sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$, admet un unique prolongement comme un opérateur de $E(\Delta, L^2(\Omega_1)) \times E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))$ dans $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)' \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)'$.

Démonstration: Le Lemme peut être montré grâce à la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $E(\Delta^j, L^2(\Omega))$ (voir Proposition 1.2.1).

Étape 1 : Montrons en premier temps, que pour tout $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, il existe $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \gamma_1 v_1 = \gamma_2 v_2 = w_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = w_1, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.11}$$

avec l'estimation :

$$\|\vec{v}\|_V \leq C\Big\{\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}\Big\}, \tag{2.12}$$

où la constante C est indépendante de w_1 et w_2.

Etape 1.1 : Montrons d'abord que pour tout $w_2 \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, il existe $v_1 \in H^1(\Omega_1)$, tel que :

$$\begin{cases} \gamma_1 v_1 = w_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_1 v_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

et satisfait :

$$\|v_1\|_{1,\Omega_1} \leq C\|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}.$$

En effet, soit $w_2 \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$ alors son prolongement par 0 en dehors de Γ,

$\tilde{w}_2 \in H^{3/2}(\mathbb{R}) = W_2^{3/2}(\mathbb{R})$. Et par le Théorème 1.13 de [14] on a :

$$W_2^{3/2}(\mathbb{R}) \hookrightarrow W_p^{1-1/p}(\mathbb{R}),$$

on conclut donc que $\tilde{w}_2 \in W_p^{1-1/p}(\mathbb{R})$, ce qui implique que $w_2 \in \tilde{W}_p^{1-1/p}(\Gamma)$. Or par le Corollaire 1.20 de [14] ou le Théorème 4.6., pour tout $p > 2$:

$$\tilde{W}_p^{1-1/p}(\Gamma) = \mathring{W}_p^{1-1/p}(\Gamma),$$

on déduit finalement que : $w_2 \in \mathring{W}_p^{1-1/p}(\Gamma)$.

Une application du Théorème 1.30 de [14] ou le Théorème 4.3. assure l'existence de $v_1 \in W_p^1(\Omega_1)$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma_1 v_1 = -w_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_1 v_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.13}$$

De plus, l'application $\gamma_1 : W_p^1(\Omega_1) \to \mathring{W}_p^{1-1/p}(\Gamma)$ étant linéaire continue et surjective et grâce au théorème de graphe fermé, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|v_1\|_{W_p^1(\Omega_1)} \leq C\|w_2\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}.$$

En effet, soit(w_n, v_n) une suite convergente de $G(\gamma_1^{-1})$, alors, $(w_n, v_n) \in \mathring{W}_p^{1-1/p}(\Gamma) \times W_p^1(\Omega_1)$ tel que : $\gamma_1^{-1}(w_n) = v_n$ et (w_n, v_n) converge dans $\mathring{W}_p^{1-1/p}(\Gamma) \times W_p^1(\Omega_1)$.

Soient

$$w := \lim_{n\to+\infty} w_n,$$

et :

$$v := \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \gamma_1^{-1}(w_n).$$

Montrons que (w_n, v_n) converge dans $G(\gamma_1^{-1})$, c-à-d on va montrer que $v = \gamma_1^{-1}(w)$.

On a : $\gamma_1^{-1}(w_n) \longrightarrow v$, en utilisant la continuité de l'application trace γ_1, on déduit que :

$$\gamma_1(\gamma_1^{-1}(w_n)) \longrightarrow \gamma_1(v), \qquad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty. \tag{2.14}$$

Or l'application trace γ_1 étant surjective, on a $\gamma_1(\gamma_1^{-1}(w_n)) = w_n$, ceci implique par (2.14) que $w_n \longrightarrow \gamma_1 v$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Par unicité de la limite, on conclut que $w = \gamma_1(v)$ ce qui donne comme γ_1 est surjective que $v = \gamma_1^{-1}(w)$.

En utilisant l'injection $W_p^1(\Omega_1) \hookrightarrow H^1(\Omega_1)$, on conclut qu'il existe $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ satisfait (2.13) et une constante $C > 0$ (indépendante de w_2) telle que :

$$\|v_1\|_{1,\Omega_1} \leq C\|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}.$$

<u>**Etape 1.2 :**</u> Montrons maintenant que pour tout $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, il existe $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma_2 v_2 = w_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_2 v_2 = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = w_1, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Soit $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$ alors, son prolongement par $(0,0)$ en dehors de Γ, $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) \in H^{1/2}(\mathbb{R}) \times H^{3/2}(\mathbb{R}) = W_2^{1/2}(\mathbb{R}) \times W_2^{3/2}(\mathbb{R})$, ce qui implique que $(w_1, w_2) \in \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{W}_2^{3/2}(\Gamma)$.

Et par le Théorème 1.35 de [14] ou le Théorème 4.5., pour $p = 2$ et $s = 2$ on a :

$$V_0^{1/2,2}(\Gamma) = \tilde{W}_2^{1/2}(\Gamma), V_0^{3/2,2}(\Gamma) = \tilde{W}_2^{3/2}(\Gamma).$$

on conclut donc que : $(w_1, w_2) \in V_0^{1/2,2}(\Gamma) \times V_0^{3/2,2}(\Gamma)$.

Une application de Théorème 1.31 de [14] ou le Théorème 4.4., assure l'existence de $v_2 \in V_0^{2,2}(\Omega_2)$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma_2 v_2 = w_2, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_2 v_2 = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = w_1, & \text{sur } \Gamma, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.15}$$

De plus, l'application $\gamma_2 : V_0^{2,2}(\Omega_2) \mapsto V_0^{3/2,2}(\Gamma) \times V_0^{1/2,2}(\Gamma)$ est linéaire continue et surjective. Comme dans l'étape 1.1, en utilisant le théorème de graphe fermé on a l'application :
$\gamma_2^{-1} =: V_0^{3/2,2}(\Gamma) \times V_0^{1/2,2}(\Gamma) \mapsto V_0^{2,2}(\Omega_2)$ est aussi linéaire continue, on déduit que :

$$\|v_2\|_{V_0^{2,2}(\Omega_2)} \leq C'\{\|w_1\|_{V_0^{1/2,2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{V_0^{3/2,2}(\Gamma)}\}.$$

Or $V_0^{2,2}(\Omega_2) \hookrightarrow H^2(\Omega_2)$ (par le Théorème 1.6.1), on conclut qu'il existe $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ satisfaite (2.15) et une constante $C > 0$ (indépendante de w_1 et w_2) telle que :

$$\|v_2\|_{2,\Omega_2} \leq C\{\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}\}.$$

D'où (2.11) et (2.12).

Etape 2 : Pour $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ fixé, on pose :

$$l(w_1, w_2) = \int_\Gamma \{Mu_2 w_1 - (Nu_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} w_2)\} d\sigma. \tag{2.16}$$

Et on montre que : pour tout $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, il existe $\vec{v} = (v_1, v_2) \in V$ tel que :

$$l(w_1, w_2) = a(\vec{u}, \vec{v}) + \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx - \rho \int_{\Omega_1} \Delta^2 u_2 v_2 dx. \tag{2.17}$$

On a :

$$\begin{aligned} l(w_1, w_2) &= \int_\Gamma \{Mu_2 w_1 - (Nu_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) w_2\} d\sigma \\ &= \int_\Gamma (Mu_2 w_1 - Nu_2 w_2) d\sigma + \int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} w_2 d\sigma. \end{aligned}$$

Par l'étape 1, on a montré que pour tout $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$ il existe $(v_1, v_2) \in V$ satisfaisant(2.11) avec l'estimation (2.12). Donc

$$l(w_1, w_2) \;=\; \int_\Gamma (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma + \int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma.$$

D'une part, par le Lemme 1.39 de [14], pour tous $u_1 \in H^2(\Omega_1)$ et $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx &= -\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int_{\Gamma_1} \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma + \int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma \\
&= -\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma \\
&= -a_1(u_1, v_1) + \int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma,
\end{aligned}$$

car $\int_{\Gamma_1} \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma = 0$, d'après (2.3). Donc :

$$\int_\Gamma \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \gamma_1 v_1 d\sigma \;=\; a_1(u_1, v_1) + \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx. \tag{2.18}$$

D'autre part, Par le Lemme 1.5.2, pour tous $u_2 \in H^4(\Omega_2)$ et $v_2 \in H^2(\Omega_2)$ on a

$$\begin{aligned}
a_2(u_2, v_2) &= \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx + \sum_{j=1}^{2} \int_{\Gamma_j} (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma \\
&= \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx + \int_{\Gamma_2} (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma + \int_\Gamma (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma \\
&= \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx + \int_\Gamma (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma,
\end{aligned}$$

car $\int_{\Gamma_2} (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma = 0$ d'après (2.4). Donc

$$\int_\Gamma (Mu_2\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - Nu_2\gamma_2 v_2) d\sigma \;=\; a_2(u_2, v_2) - \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx. \tag{2.19}$$

On remplace (2.18) et (2.19) dans l'expression $l(w_1, w_2)$ on en déduit (2.17).

Etape 3 : Montrons la continuité de $l(w_1, w_2)$ sur $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, en utilisant la continuité de $a(\cdot,\cdot)$ sur $V \times V$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|l(w_1,w_2)| &= |a(\vec{u},\vec{v}) + \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx - \rho \int_{\Omega_1} \Delta^2 u_2 v_2 dx| \\
&\leq |a(\vec{u},\vec{v})| + |\int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx| + \rho| \int_{\Omega_1} \Delta^2 u_2 v_2 dx| \\
&\leq c\|\vec{u}\|_V \|\vec{v}\|_V + \|\Delta u_1\|_{0,\Omega_1} \|v_1\|_{0,\Omega_1} + \rho \|\Delta^2 u_2\|_{0,\Omega_2} \|v_2\|_{0,\Omega_2} \\
&\leq c\|\vec{u}\|_V \|\vec{v}\|_V + \|\Delta u_1\|_{0,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1} + \rho \|\Delta^2 u_2\|_{0,\Omega_2} \|v_2\|_{2,\Omega_2} \\
&\leq c(\|u_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|u_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2} \|\vec{v}\|_V + \max(1,\rho)(\|\Delta u_1\|_{0,\Omega_1} \|v_1\|_{1,\Omega_1} + \|\Delta^2 u_2\|_{0,\Omega_2} \|v_2\|_{2,\Omega_2}) \\
&\leq c(\|u_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_2\|_{2,\Omega_2}) \|\vec{v}\|_V + \max(1,\rho)(\|\Delta u_1\|^2_{0,\Omega_1} + \|\Delta^2 u_2\|^2_{0,\Omega_2})^{1/2} \\
&\quad (\|v_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|v_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2} \\
&\leq c(\|u_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_2\|_{2,\Omega_2}) \|\vec{v}\|_V + \max(1,\rho)(\|\Delta u_1\|_{0,\Omega_1} + \|\Delta^2 u_2\|_{0,\Omega_2}) \|\vec{v}\|_V \\
&\leq \max(c, \max(1,\rho))(\|u_1\|_{1,\Omega_1} + \|u_2\|_{2,\Omega_2} + \|\Delta u_1\|_{0,\Omega_1} + \|\Delta^2 u_2\|_{0,\Omega_2}) \|\vec{v}\|_V \\
&\leq \max(c, \max(1,\rho))(\|u_1\|_{E(\Delta, L^2(\Omega_1))} + \|u_2\|_{E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))}) \|\vec{v}\|_V.
\end{aligned}$$

Par l'étape 1, on a déjà montré que :

$$\|\vec{v}\|_V \leq c_1(\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}),$$

on obtient alors,

$$|l(w_1,w_2)| \leq c_2\{\|u_1\|_{E(\Delta,L^2(\Omega_1))} + \|u_2\|_{E(\Delta^2,L^2(\Omega_2))}\}\{\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}\},$$

où $c_2 = c_1 \cdot \max(1, \max(1,\rho))$.

■

Lemme 2.2.3. *Soit $\vec{u} \in V$ l'unique solution de (2.8) alors, $\vec{u}$ est solution du problème aux limites (2.1)-(2.7).*

Démonstration: Soit $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ la solution de (2.8) et soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2) \subset$

$H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ on a :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla \varphi_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta u_2 \Delta \varphi_2 dx - \rho(1-\sigma)\Big[\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} dx - 2\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}$$
$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} dx\Big] = -\int_{\Omega_1} f_1 \varphi_1 dx + \rho \int_{\Omega_1} f_2 \varphi_2 dx + \int_{\Omega_2} h_1 \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} dx - \int_{\Omega_2} h_2 \gamma_2 \varphi_2 dx,$$
$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2);$$

comme $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ et $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, alors φ_1 et φ_2 sont des fonctions à support compact dans Ω_1 et Ω_1 respectivement, et les intégrales définies sur le bord s'annulent, on obtient donc :

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla \varphi_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta u_2 \Delta \varphi_2 dx - \rho(1-\sigma)\Big[\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} dx$$
$$-2\int_{\Omega_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} dx\Big] = -\int_{\Omega_1} f_1 \varphi_1 dx + \rho \int_{\Omega_1} f_2 \varphi_2 dx,$$
$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2).$$

On peut écrire cette formule sous la forme :

$$\langle \nabla u_1, \nabla \varphi_1 \rangle_{\Omega_1} + \rho \langle \Delta u_2, \Delta \varphi_2 \rangle_{\Omega_2} - \rho(1-\sigma)\Big[\langle \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_2^2} \rangle_{\Omega_2} + \langle \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2} \rangle_{\Omega_2} - 2\langle \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \rangle_{\Omega_2}\Big]$$
$$= -\langle f_1, \varphi_1 \rangle_{\Omega_1} + \rho \langle f_2, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2}, \qquad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2),$$

où pour $i = 1, 2$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_i}$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega_i)$ et $\mathcal{D}(\Omega_i)$ (puisque $\partial^j u_j \in L^2(\Omega_j) \subset \mathcal{D}'(\Omega_j) \ \ \forall\, j \leq 2$ *et* $f_1, f_2 \in L^2(\Omega_j) \subset \mathcal{D}'(\Omega_j)$).

En dérivant au sens des distributions (une fois pour u_1 et deux fois pour u_2), on obtient :

$$-\langle \Delta u_1, \varphi_1 \rangle_{\Omega_1} + \rho \langle \Delta^2 u_2, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2} - \rho(1-\sigma)\Big[\langle \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2} + \langle \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2} - 2\langle \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_2^2 \partial x_1^2}, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2}\Big]$$
$$= -\langle f_1, \varphi_1 \rangle_{\Omega_1} + \rho \langle f_2, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2}, \qquad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2),$$

ce qui implique que :

$$\langle -\Delta u_1 + f_1, \varphi_1 \rangle_{\Omega_1} + \rho \langle \Delta^2 u_2 - f_2, \varphi_2 \rangle_{\Omega_2} = 0 \ , \qquad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2),$$

ou encore :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + f_1 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_1), \\ \Delta^2 u_2 - f_2 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_2), \end{cases}$$

il résulte puisque $f_1 \in L^2(\Omega_1), f_2 \in L^2(\Omega_2)$, que :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1 \quad \text{dans } L^2(\Omega_1), \\ \Delta^2 u_2 = f_2 \quad \text{dans } L^2(\Omega_2). \end{cases}$$

En résumé, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ satisfait (2.1) et (2.2), de plus on a :

$$u_1 \in E(\Delta, L^2(\Omega_1)) \text{ et } u_2 \in E(\Delta^2, L^2(\Omega_2)).$$

Vérifions à présent que (u_1, u_2) satisfait les conditions aux limites (2.6) et (2.7).

Soit $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$ quelconque, par (2.17) on a l'existence de $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tel que :

$$l(w_1, w_2) = a(\vec{u}, \vec{v}) + \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx - \rho \int_{\Omega_1} \Delta^2 u_2 v_2 dx,$$

Comparons cette dernière avec (2.8), on a :

$$-\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx + \int_{\Gamma} \{h_1 \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - h_2 \gamma_2 v_2\} d\sigma = l(w_1, w_2) - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx.$$

Rappelons que $\vec{v}$ satisfait (2.11) et (2.16), on en déduit donc que :

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx + \int_{\Gamma} \{h_1 w_1 - h_2 w_2\} d\sigma \quad &= \quad \int_{\Gamma} \{M u_2 w_1 - (N u_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) w_2\} d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx. \end{aligned}$$

Utilisons le fait que $\vec{u}$ satisfait (2.1) et (2.2), on obtient :

$$\int_{\Gamma} \{M u_2 w_1 - (N u_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) w_2\} d\sigma = \int_{\Gamma} \{h_1 w_1 - h_2 w_2\} d\sigma,$$

ou encore,

$$\int_{\Gamma} M u_2 w_1 d\sigma - \int_{\Gamma} (N u_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) w_2 d\sigma = \int_{\Gamma} h_1 w_1 d\sigma - \int_{\Gamma} h_2 w_2 d\sigma.$$

Alors :

$$\int_{\Gamma} (M u_2 - h_1) w_1 d\sigma - \int_{\Gamma} ((N u_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}) - h_2) w_2 d\sigma = 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma).$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} Mu_2 = h_1 & \text{dans } L^2(\Gamma), \\ Nu_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = h_2 & \text{dans } L^2(\Gamma), \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} Mu_2 = h_1 & \text{sur } \Gamma, \\ Nu_2 - \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = h_2 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Il en résulte les équations (2.6) et (2.7).

Il reste à vérifier (2.3), (2.4) et (2.5). On a par définition de V :

$V = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2),$ satisfaisant :

$$\gamma_1 u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \ \Gamma_2 \ et \ \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 \text{ sur } \Gamma\},$$

donc les conditions (2.3), (2.4) et (2.5) sont satisfaites.

■

CHAPITRE 3

RÉSULTATS DE RÉGULARITÉ

On se propose dans ce chapitre d'étudier des propriétés qualitatives de la solution du problème (2.1)-(2.7) dans un domaine $\Omega_1 \times \Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont des domaines polygonaux. Le Théorème 2.2.1 établi au chapitre précédente, assure l'existence et l'unicité d'une solution $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dans l'espace V, on cherche alors à montrer une régularité optimale pour cette solution.

Le problème se pose au voisinages des coins, où la solution présente des singularités, lorsque l'angle formé par les coins est supérieur à π, on donne alors une forme explicite de ces singularités.

3.1 Régularité pour des données intérieures dans L^2

Dans cette section, on cherche des conditions sur $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $h_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$, qui assurant que u_1 et u_2 ont une régularité optimale c-à-d $u_1 \in H^2(\Omega_1)$, $u_2 \in H^4(\Omega_2)$, effectivement on doit prouver que u_1 et u_2 admettent une décomposition en une partie régulière avec la régularité optimale et une somme finie de fonctions singulières. Ceci se fait en étudiant les deux problèmes aux limites découplés posés sur Ω_1 et Ω_2. Des résultats de décomposition de ces deux problèmes découplés permet à la fin de déduire la décomposition de la solution du problème (2.1)-(2.7).

3.1.1 Résultat de décomposition pour des problèmes découplés

Dans le but d'étudier le problème (2.1)-(2.7), et de trouver une décomposition de sa solution, on va passer par l'étude de deux problèmes, dont le premier est le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace dans Ω_1 avec des conditions aux limites non homogènes c-à-d :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1, & \text{dans } \Omega_1, \\ \gamma_1 u_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \gamma_1 u_1 = g, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.1}$$

Le deuxième est le problème aux limites mêlé pour l'opérateur biharmonique dans Ω_2 suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = f_2, & \text{dans } \Omega_2, \\ \gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ M u_2 = h_1, & \text{sur } \Gamma, \\ N u_2 = h_2, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dans le cas d'un domaine régulier, les résultats classiques de régularité montrent qu'à une donnée f dans $L^2(\Omega)$ correspond une solution u de classe $H^2(\Omega)$ (resp. $H^4(\Omega)$) pour le problème (3.1) (resp. (3.2)). Ceci reste vrai si le domaine est polygonale et convexe. Par contre si un ou plusieurs angles du polygone ont une mesure supérieur à π, la solution de (3.1) (resp. (3.2)) n'appartient pas, en général, à $H^2(\Omega)$ (resp. $H^4(\Omega)$).

La régularité de la solution du problème (3.1) a été donnée dans le Théorème 5.1.3.5 de [6], alors que le problème (3.2) a été étudié dans le Théorème 5.2 de [13] (voir aussi [3]). Afin de rappeler ces résultats, définissions les exposants singuliers et les fonctions singulières des problèmes (3.1) et (3.2).

Fonctions singulières :

Pour le problème (3.1), on pose :

$$\Lambda_{1k} = \Big\{\frac{m\pi}{w_{1k}}, m \in \mathbb{N}\Big\}, \forall k \in \{1 \cdots N_1\}. \tag{3.3}$$

Pour $\lambda \in \Lambda_{1k}$, la fonction singulière associée est :

$$\sigma_{lap}^{k\lambda}(r,\theta) = \begin{cases} r^{\lambda} sin(\lambda\theta), & \text{si } \lambda \notin \mathbb{N}, \\ r^{\lambda}\{\ln r sin(\lambda\theta) + \theta cos(\lambda\theta)\}, & \text{si } \lambda \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

où (r,θ) sont les coordonnées polaires dans le plan d'origine S_{1k} (tel que les demi-lignes $\theta = 0$ et $\theta = w_{1k}$ contiennent les arêtes contenant S_{1k}).

Pour le problème (3.2), afin d'éviter des notations trop compliquées, on rappelle seulement que les exposants singuliers sont les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$sin^2(\lambda-1)w_{2k} + \frac{1-\sigma}{3+\sigma}(\lambda-1)sin^2 w_{2k} - \frac{4}{(1-\sigma)(3+\sigma)} = 0\ ,\ k = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$sin^2(\lambda-1)w_{2k} + (\lambda-1)^2 sin^2 w_{2k} = 0\ , \qquad k \in \{3 \cdots N_2\}. \tag{3.5}$$

On dit seulement qu'il existe un ensemble Λ_{2k} des racines de l'équation (3.4) pour $k \leq 2$ et de (3.5) pour $k \geq 3$, répétés selon leur multiplicités : pour chaque $\lambda \in \Lambda_{2k}$ correspond a une fonction singulière noté $\sigma_{bi}^{k\lambda}$ (pour plus de détails voir [12]).

Pour $k = 1.2$, la résolution polynomiale comme dans §3.c de [13] et (2.9) de [3] implique que $\lambda = 2$ induit une fonction singulière donnée par :

$$\sigma_{bi}^{k2}(r,\theta) = r^2\theta + P_k(r,\theta), k = 1, 2$$

où (r,θ) sont les coordonnées polaires dans le plan d'origine S_{2k} et P_k est un polynôme de degré 2 (dans les coordonnées cartésiennes). Remarquons que $\sigma_{bi}^{k2} \in H^2(\Omega_2)$. Donc, pour plus de commodité, on va ajouter $\lambda = 2$ à Λ_{2k} pour $k = 1.2$ et en gardant toujours la même notation Λ_{2k}.

Énonçons les deux théorèmes suivants qui donnent une décomposition des solutions des problèmes (3.1) et (3.2).

Théorème 3.1.1. *Soit $s_1 \in \mathbb{N}$. Soient $f_1 \in H^{s_1-1}(\Omega_1)$, $g \in H^{s_1+1/2}(\Gamma)$ satisfaisant $g(S_1) = g(S_2) = 0$. On suppose que :*

$$s_1 \notin \Lambda_{1k}, \forall k = 1 \cdots N_1, \tag{3.6}$$

alors il existe une solution unique $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ du problème (3.1) qui admet la décomposition suivante :

$$u_1 = u_{10} + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(s_1)} c_{1k\lambda} \eta_{1k} \sigma_{lap}^{k\lambda}, \tag{3.7}$$

où $u_{10} \in H^{s_1+1}(\Omega_1)$, $c_{1k\lambda} \in \mathbb{C}$ dépend continûment de f_1 et g et $\Lambda_{1k}(s_1) = \Lambda_{1k} \cap]0, s_1], \eta_{1k}$, $k = 1 \cdots N_1$ désigne une fonction de troncature égale à 1 dans un voisinage de sommet S_{1k} et 0 dans les voisinage des autres sommets.

Théorème 3.1.2. *Soit $s_2 \in \mathbb{N}$ avec $s_2 \geq 2$ et soient $f_2 \in H^{s_2-2}(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{s_2-1/2}(\Gamma)$ et $h_2 \in H^{s_2-3/2}(\Gamma)$. On suppose que :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \Re\lambda = s_2 + 1\} \cap \Lambda_{2k} = \emptyset, \quad \forall k = 1 \cdots N_2, \tag{3.8}$$

alors il existe une solution unique $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ du problème (3.2) telle que :

$$u_2 = u_{20} + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\lambda}, \tag{3.9}$$

où $u_{20} \in H^{s_2+2}(\Omega_2)$, $c_{2k\lambda} \in \mathbb{C}$ dépend continument de f_2, h_1, h_2 et $\Lambda_{2k}(s_2)$ est donné par :

$$\Lambda_{2k}(s_2) = \{\lambda \in \Lambda_{2k},\ 1 \leq \Re\lambda \leq s_2 + 1\}.$$

3.1.2 Un résultat de décomposition pour le laplacien couplé avec le bilaplacien

Revenons maintenant à notre problème aux limites (2.1)-(2.7). Loin de l'interface Γ, on vois qu'il correspond à l'étude des problèmes (3.1) et (3.2), dont la régularité de leurs solutions u_1 et u_2 peut être montrée grâce aux deux théorèmes précédents (3.1.1 et 3.1.2). Dans la suite, on va montrer qu'à partir des résultats de régularités données loin de l'interface Γ, on peut prouver que u_1 et u_2 ont une régularité optimale dans un voisinage des sommets de Γ. Étudions donc le comportement de u_1 et u_2 aux voisinages des points communs de Ω_1 et Ω_2.

Théorème 3.1.3. *Soient $f_1 \in L^2(\Omega_1), f_2 \in L^2(\Omega_2), h_1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{3/2}(\Gamma)$ et soit $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ la solution de (2.1)-(2.7). Pour $k \in \{1, 2\}$ on a :*

- *Si $\omega_{1k} > \pi$ alors, u_1 admet la décomposition suivante dans un voisinage ν_k de S_k :*

$$u_1 = u_{10} + c_k \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}} \text{ dans } \nu_k \cap \Omega_1, \tag{3.10}$$

  où $u_{10} \in H^2(\Omega_1), c_k \in \mathbb{C}$.
- *Si $\omega_{1k} \leq \pi$ alors, $u_1 \in H^2(\nu_k \cap \Omega_1)$.*

Démonstration: Soit $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ la solution de (2.1)-(2.7), on peut considérer $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ comme solution de :

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1, & \text{dans } \Omega_1, \\ \gamma_1 u_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.11}$$

De plus, par définition de V, $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ satisfait (2.4). Ceci implique par le Théorème 1.30 de [13] que :

$$\gamma_{2\Gamma} u_2 \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma). \tag{3.12}$$

Appliquons le Théorème 3.1.1 avec $s_1 = 1$ au problème (3.11) on obtient le résultat sauf pour le cas $\omega_{1k} = \pi$, en effet :

- Si $\omega_{1k} > \pi$, pour $k \in \{1, 2\}$, on a $s_1 = 1 \notin \Lambda_{1k}$ et alors (3.6) est vérifiée. Les hypothèses du Théorème 3.1.1 étant satisfaites, en l'appliquant, on déduit que u_1 admet la décomposition :

$$u_1 = u_{10} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(1)} c_{1k\lambda} \eta_{1k} \sigma_{lap}^{k\lambda}, \tag{3.13}$$

  avec $u_{10} \in H^2(\Omega_1)$, $c_{1k\lambda} \in \mathbb{C}$ dépend continûment de f_1 avec $\Lambda_{1k}(1) = \Lambda_{1k} \cap\,]0, 1]$, $k = \{1, 2\}$.
- Dans le cas où $\omega_{1k} < \pi$, comme : $\Lambda_{1k}(1) = \Lambda_{1k} \cap\,]0, 1] = \emptyset$, on a :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(1)} c_{1k\lambda} \eta_{1k} \sigma_{lap}^{k\lambda} = 0,$$

  et (3.7) implique alors que $u_1 = u_{10}$, avec $u_{10} \in H^2(\nu_k \cap \Omega_1)$.

- Il reste à étudier le cas $\omega_{1k} = \pi$. Dans ce cas, (3.12) permet de considérer (3.11) dans un voisinage $\nu_k \cap \Gamma_{1k}$, comme un problème de Dirichlet dans le demi-plan $\mathbb{R}^2_+$ avec une donnée intérieur dans $L^2(\mathbb{R}^2_+)$ et une donnée de la condition de Dirichlet dans $H^{3/2}(\mathbb{R})$. Les résultats classiques dans les domaines réguliers permettent de conclure.

$\blacksquare$

Grâce au résultat de décomposition de u_1 donné dans le Théorème précédent, on peut maintenant énoncer le résultat de décomposition de u_2 et on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.4. *Soit $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ la solution faible de* (2.1)-(2.7) *avec les données $f_1 \in L^2(\Omega_1), f_2 \in L^2(\Omega_2), h_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $h_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$. Pour $k = 1$ ou 2, on suppose que :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda = 3\} \cap \Lambda_{2k} = \emptyset.$$

Alors, u_2 admet la décomposition suivante dans un voisinage de S_k :

$$u_2 = u_{20} + \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(2)} c_{2k\lambda}\sigma_{bi}^{k\lambda} + c_k\tau_2^k, \tag{3.14}$$

où $u_{20} \in H^4(\Omega_2)$, $c_k, c_{2k\lambda} \in \mathbb{C}$ et le dernier terme de coté droite de (3.14) *est zéro si $\omega_{1k} \leq \pi$.*

Démonstration: Afin d'étudier la régularité de u_2, on utilise maintenant les équation (2.2), (2.4), (2.6) et (2.7), c-à-d u_2 est considérée comme solution de :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_2 = f_2, & \text{dans } \Omega_2 \cap \nu_k, \\ \gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cap \nu_k, \\ M u_2 = 0, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \\ N u_2 = \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \end{cases} \tag{3.15}$$

dans un voisinage ν_k de S_k. Notre but est d'appliquer le Théorème 3.1.2 et donc de vérifier ses hypothèses.

- Si $\omega_{1k} \leq \pi$, par le Théorème 3.1.3 on a $u_1 \in H^2(\Omega_1)$, alors $\gamma_{1\Gamma}(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}) \in H^{1/2}(\Gamma \cap \nu_k)$, on peut appliquer directement le Théorème 3.1.2 avec $s_2 = 2$.
- Si $\omega_{1k} > \pi$, par le Théorème 3.1.3, u_1 admet la décomposition en une partie régulière u_{10} et une partie singulière. Seulement $\gamma_1(\partial u_{10}/\partial \nu)$ a la régularité adéquate $H^{1/2}(\Gamma)$, tant

que la dérivée normale de la fonction singulière $\sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}$ ne l'as pas.

L'idée est d'utiliser un argument de perturbation afin de pouvoir appliquer le Théorème 3.1.2. Pour cela, on considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta^2 \tau_2^k = 0, & \text{dans } \Omega_2 \cap \nu_k, \\ \gamma_2 \tau_2^k = \gamma_2 \frac{\partial \tau_2^k}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cap \nu_k, \\ M\tau_2^k = 0, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \\ N\tau_2^k = \gamma_1 \frac{\partial \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}}{\partial \nu}, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k. \end{cases} \tag{3.16}$$

D'après la Section 4.4 de [13], en utilisant les coordonnées polaires et en effectuant un changement de variable d'Euler $r = e^t$ et un argument de réduction d'ordre, on trouve que le problème (3.16) est équivalent au problème :

$$(\frac{\partial}{\partial t} - A)u(t) = e^{\lambda t} \sum_{q=0}^{Q} t^q f_q, \tag{3.17}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}, Q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $f_q \in L^2(\Omega_2)$, pour tout $q \in \{0, ..., Q\}$. Ce problème admet, par le Théorème 4.14 de [13] une solution $\tau_2^k \in H^2(\Omega_2 \cap \nu_k)$.

Soit u_{21} la fonction définie par :

$$u_{21} := u_2 - c_k \tau_2^k, \tag{3.18}$$

qui est solution de :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{21} = f_2, & \text{dans } \Omega_2 \cap \nu_k, \\ \gamma_2 u_{21} = \gamma_2 \frac{\partial u_{21}}{\partial \nu_k} = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cap \nu_k, \\ M u_{21} = 0, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \\ N u_{21} = \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_{10}}{\partial \nu}, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \end{cases} \tag{3.19}$$

En effet, par la définition (3.18) de u_{21} on a :

$$N u_{21} = N u_2 - c_k N \tau_2^k,$$

avec u_2 solution de (3.15) et τ_2^k solution de (3.16), alors :

$$N u_{21} = \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - c_k \gamma_1 \frac{\partial \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}}{\partial \nu}.$$

D'après le Théorème 3.1.3, u_1 est décomposée sous la forme :

$$u_1 = u_{10} + c_k \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}, \; u_{10} \in H^2(\Omega_1), c_k \in \mathbb{C}.$$

En remplaçant u_1 dans l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} Nu_{21} &= \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_{10}}{\partial \nu} + c_k \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}}{\partial \nu} - c_k \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}}{\partial \nu} \\ &= \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_{10}}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le Théorème 3.1.2 avec $s_2 = 2$ appliqué au problème (3.19) permet de conclure qu'il existe une unique solution $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ telle que :

$$u_{21} = u_{210} + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\lambda},$$

avec $u_{210} \in H^4(\Omega_2)$.

Revenons à (3.18), on conclut (3.19).

■

3.2 Résultats de régularité avec des données plus régulières

3.2.1 Propriété de Fredholm

Dans cette section, on va étudier toujours le même problème (2.1)-(2.7), mais cette fois avec des données plus régulières. Dans les Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4, si on augmente la régularité des données on s'attend que la régularité de la partie régulière de la solution va augmenter de la même façon. Ceci va être prouvé en utilisant un argument de perturbation compacte et les opérateurs de Fredholm.

Pour avoir plus de régularité, on a besoin d'introduire les espaces de Hilbert :

$$A^{(s_1,s_2)} = \{(u_1, u_2) \in H^{s_1+1}(\Omega_1) \times H^{s_2+2}(\Omega_2), satisfaisant : (2.3) - (2.5)\},$$

$$B^{(s_1,s_2)} = \{H^{s_1-1}(\Omega_1) \times H^{s_2-2}(\Omega_2) \times H^{s_2-1/2}(\Gamma) \times (H^{s_1-1/2}(\Gamma) \cup H^{s_2-3/2}(\Gamma))\}.$$

L'opérateur $L^{(s_1,s_2)}$ induit par le problème aux limites (2.1)-(2.7) est clairement le suivant :

$$\begin{aligned} L^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} &\longrightarrow B^{(s_1,s_2)} \\ (u_1,u_2) &\longmapsto (\Delta u_1, \Delta^2 u_2, Mu_2, Nu_2 + \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

On cherche des conditions sur s_1, s_2, qui assurent que $L^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur de Fredholm. Pour cela, on décompose $L^{(s_1,s_2)}$ en une partie principale $L_0^{(s_1,s_2)}$ et un reste $L_1^{(s_1,s_2)}$ définis comme suit :

$$\begin{aligned} L_0^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} &\longrightarrow B^{(s_1,s_2)} \\ (u_1,u_2) &\longmapsto (\Delta u_1, \Delta^2 u_2, Mu_2, Nu_2). \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} L_1^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} &\longrightarrow B^{(s_1,s_2)} \\ (u_1,u_2) &\longmapsto (0,0,0,-\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Évidemment, on a :

$$L^{(s_1,s_2)} = L_1^{(s_1,s_2)} + L_0^{(s_1,s_2)}.$$

Théorème 3.2.1. *Si $s_1 \in [s_2-1, s_2+1]$ et si les conditions de Fredholm (3.6) et (3.8) sont satisfaites, alors $L_0^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur de Fredholm.*

Démonstration: Soit $(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$, on cherche une solution $(u_1,u_2) \in A^{(s_1,s_2)}$ de :

$$L_0^{(s_1,s_2)}(u_1,u_2) = (f_1, f_2, h_1, h_2), \tag{3.23}$$

ce qui est équivalent à trouver u_2 solution de (3.2) et u_1 solution de (3.1) avec $g = \gamma_2 u_2$ sur Γ. Une application directe du Théorème 3.1.2 au problème (3.2) permet de déduire qu'il existe une unique solution $u_2 \in H^{s_2}(\Omega_2)$ de (3.2) qui admet la décomposition :

$$u_2 = u_{20} + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\lambda}, \tag{3.24}$$

Pour trouver u_1, on procède de la même façon comme dans le Théorème 3.1.4, c'est-à-dire qu'on utilise un argument de perturbation en plus de la décomposition (3.24) de u_2.

D'une part, pour tout $k \in \{1,2\}, \lambda \in \Lambda_{2k}$, comme précédemment en utilisant les coordonnées polaire et un changement de variable d'Euler $r = e^t$, le problème :

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{bi1}^{k\lambda} = 0, & \text{dans } \Omega_1, \\ \gamma_1\sigma_{bi1}^{k\lambda} = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \gamma_1\sigma_{bi1}^{k\lambda} = \gamma_2\sigma_{bi}^{k\lambda}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.25}$$

est équivalent au problème :

$$(\frac{\partial}{\partial t} - A)u(t) = e^{\lambda t}\sum_{q=0}^{Q} t^q f_q, \tag{3.26}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}, Q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $f_q \in L^2(\Omega_1)$, pour tout $q \in \{0, ..., Q\}$ (voir chapitre 4 de [13]).

De plus, par le Théorème 4.14 de [14], ce problème admet une solution explicite $\sigma_{bi1}^{k\lambda} \in H^1(\Omega_1)$ dans un voisinage ν_k de S_k.

D'autre part, soit :

$$v_1 = u_1 - \sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda}\sigma_{bi1}^{k\lambda},$$

v_1 est la solution de :

$$\begin{cases} \Delta v_1 = f_1, & \text{dans } \Omega_1, \\ \gamma_1 v_1 = 0, & \text{sur } \Gamma_1, \\ \gamma_1 v_1 = \gamma_2 u_{20}, & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où u_{20} est la partie régulière de la solution u_2 de (3.2). En effet :

$$\Delta v_1 = \Delta u_1 - c_{2k\lambda}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} \Delta\sigma_{bi1}^{k\lambda} = \Delta u_1 = f_1.$$

Et grâce à la décomposition (3.24) de u_2 on a :

$$\begin{aligned} \gamma_1 v_1 &= \gamma_{1\Gamma}u_1 - c_{2k\lambda}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} \gamma_{1\Gamma}\sigma_{bi1}^{k\lambda} \\ &= \gamma_{2\Gamma}u_2 - c_{2k\lambda}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} \gamma_{2\Gamma}\sigma_{bi}^{k\lambda} \\ &= \gamma_{2\Gamma}u_{20} + c_{2k\lambda}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} \gamma_{2\Gamma}\sigma_{bi}^{k\lambda} - c_{2k\lambda}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} \gamma_{2\Gamma}\sigma_{bi}^{k\lambda} \\ &= \gamma_{2\Gamma}u_{20}. \end{aligned}$$

La partie régulière u_{20} de u_2 appartient à $H^{s_2+2}(\Omega_2)$ et donc $\gamma_{2\Gamma}u_{20} \in H^{s_2+3/2}(\Gamma)$. Or comme $s_1 < s_2+1$, on a l'injection de $H^{s_2+3/2}(\Gamma)$ dans $H^{s_1+1/2}(\Gamma)$ et alors $\gamma_{2\Gamma}u_{20} \in H^{s_1+1/2}(\Gamma)$. Les hypothèses du Théorème 3.1.1 étant satisfaites, en l'appliquant on obtient la décomposition de v_1 sous la forme :

$$v_1 = v_{10} + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(s_1)} c_{1k\lambda}\sigma_{lap}^{k\lambda},$$

où $v_{10} \in H^{s_1+1}(\Omega_1)$, $c_{1k\lambda} \in \mathbb{C}$ dépend continûment de f_1. Rappelons que :

$$u_1 = v_1 + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda}\eta_k\sigma_{bi1}^{k\lambda}.$$

Selon la décomposition de v_1, u_1 est décomposée sous la forme :

$$u_1 = v_{10} + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(s_1)} c_{1k\lambda}\sigma_{lap}^{k\lambda} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda}\eta_k\sigma_{bi1}^{k\lambda}.$$

On a prouvé ainsi qu'il existe une unique solution $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ du problème (3.23) qui admet la décomposition :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N_j} \sum_{\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j)} c_{jk\lambda}\eta_{jk}\vec{\sigma}^{jk\lambda}, \tag{3.27}$$

où $\vec{u}_0 = (v_{10}, u_{20}) \in A^{(s_1,s_2)}$, $c_{jk\lambda} \in \mathbb{C}$, dépend continûment de f_1, f_2, h_1 et h_2 et tel que :

$$\vec{\sigma}^{1k\lambda} = (\sigma_{lap}^{k\lambda}, 0), \quad \forall\lambda \in \Lambda_{1k}, k = \{1 \cdots N_1\},$$

$$\vec{\sigma}^{2k\lambda} = (\sigma_{bi1}^{k\lambda}, \sigma_{bi}^{k\lambda}), \quad \forall\lambda \in \Lambda_{2k}, k = \{1 \cdots N_2\},$$

avec $\sigma_{bi1}^{k\lambda} = 0,\ si\ k \geq 3$. Cela implique que si $(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$ et telle que :

$$c_{jk\lambda} = 0,\ \forall\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j), j \in \{1,2\}, k \in \{1, ..., N_j\}. \tag{3.28}$$

alors (f_1, f_2, h_1, h_2) appartient â $\text{Im}(L_0^{(s_1,s_2)})$.

Réciproquement, si une telle donnée appartient à l'image de $L_0^{(s_1,s_2)}$, alors il existe $(u_1, u_2) \in A^{(s_1,s_2)}$, solution de (3.23). En d'autre terme u_2 est solution de (3.2) et u_1 solution de (3.1) avec la donnée $g = \gamma_{2\Gamma}u_2$. Grâce aux Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, ces solutions u_1, u_2

admettent une décomposition en une partie régulière et une partie singulière, cela implique que cette donnée satisfait (3.28).

En conclusion, on a prouvé que :

$$Im(L_0^{(s_1,s_2)}) = \{(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}, \text{ tel que } c_{jk\lambda} = 0\}.$$

ce qui veut dire que l'image de $L_0^{(s_1,s_2)}$ n'est autre que le noyau d'une application continue. [comme $c_{jk\lambda}$ dépend continûment de (f_1, f_2, h_1) et $h_2, \forall j \in \{1, 2\}, k \in \{1 \cdots N_j\}$]. Par conséquent $Im(L_0^{(s_1,s_2)})$ est fermé.

L'injectivité de $L^{(s_1,s_2)}$ est évidente (conséquence de l'estimation d'énergie).

■

Revenons à l'opérateur $L^{(s_1,s_2)}$ et montrons qu'il est un opérateur de Fredholm.

Théorème 3.2.2. *Si $s_1 \in]s_2 - 1, s_2 + 1]$ et si (3.6) et (3.8) sont satisfaites, alors $L^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur de Fredholm.*

Démonstration: Rappelons que :

$$L^{(s_1,s_2)} = L_0^{(s_1,s_2)} + L_1^{(s_1,s_2)},$$

où $L_1^{(s_1,s_2)}$ est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} L_1^{(s_1,s_2)} : H^{s_1+1}(\Omega_1) \times H^{s_2+2}(\Omega_2) \quad &\rightarrow \quad H^{s_1-1}(\Omega_1) \times H^{s_2-2}(\Omega_2) \times H^{s_2-1/2}(\Gamma) \\ &\qquad \times \big(H^{s_1-1/2}(\Gamma) \cup H^{s_2-3/2}(\Gamma)\big) \\ (u_1, u_2) \quad &\longmapsto \quad (0, 0, 0, -\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}). \end{aligned}$$

On a déjà montré dans le Théorème 3.2.1 que $L_0^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur de Fredholm. Grâce au Théorème de perturbation compacte (Proposition 1.8.1), il suffit de montrer donc que $L_1^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur compact.

Soit l'application :

$$\begin{aligned} T : H^{s_1+1}(\Omega_1) \quad &\rightarrow \quad H^{s_1-1/2}(\Gamma) \cup H^{s_2-3/2}(\Gamma) \\ u_1 \quad &\longmapsto \quad \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Montrons que T est compact. D'une part, l'application T est continue de $H^{s_1+1}(\Omega_1)$ dans $H^{s_1-1/2}(\Gamma)$ (continuité de la trace). D'autre part, par l'hypothèse $s_1 \geq s_2$ en utilisant l'injection compact de $H^{s_1-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{s_1-3/2}(\Gamma)$ (Théorème de Rellich), on déduit la compacité de T, et donc celle de l'opérateur $L_1^{(s_1,s_2)}$.

Par conséquent, l'opérateur $L^{(s_1,s_2)}$ est un opérateur de Fredholm.

■

3.2.2 Singularités

Jusqu'à présent, on n'a pas parlé du comportement asymptotique de la solution du problème (2.1)-(2.7) lorsqu'on augmente la régularité des données. Pour cela, on calcule les singularités de ce problème i.e. les singularités de l'opérateur $L^{(s_1,s_2)}$. On travaille de la même manière que M. Dauge dans [5] pour les opérateurs non homogènes, on les calcule par récurrence à partir des singularités de la partie principale $L_0^{(s_1,s_2)}$.

La méthode appliquée ici est la même utilisée par M. Dauge [5] pour les opérateurs non homogènes. Les singularités du problème (2.1)-(2.7) vont être calculées par récurrence à partir des singularités $\vec{\sigma}_{jk\lambda}$ de la partie principale $L_0^{(s_1,s_2)}$.

Selon [5] on procède comme suit, pour $k = 1, 2$, on pose :

$$\vec{\sigma}_0^{jk\lambda} = \vec{\sigma}^{jk\lambda},$$

où $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$ sont les singularités obtenues dans la décomposition de la solution. (Voir (3.27)), et pour $p \in \mathbb{N}$, $\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}$ est solution du problème :

$$L_0 \vec{\sigma}_p^{jk\lambda} = -L_1 \vec{\sigma}_{p-1}^{jk\lambda}, \quad \text{dans } \nu_k, \tag{3.29}$$

où on rappelle que ν_k est un voisinage de S_k.

Décomposons $\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}$ sous la forme :

$$\vec{\sigma}_p^{jk\lambda} = (\sigma_{p,1}^{jk\lambda}, \sigma_{p,2}^{jk\lambda}),$$

le problème (3.29) est équivalent à :

$$L_0\vec{\sigma}_p^{jk\lambda} = L_0(\sigma_{p,1}^{jk\lambda}, \sigma_{p,2}^{jk\lambda}),$$

ou encore,

$$(\Delta\sigma_{p,1}^{jk\lambda}, \Delta^2\sigma_{p,2}^{jk\lambda}, M\sigma_{p,2}^{jk\lambda}, N\sigma_{p,1}^{jk\lambda}) \quad = \quad (0,0,0,\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial\sigma_{p-1,1}^{jk\lambda}}{\partial\nu}).$$

En d'autres termes, la résolution du problème (3.29) est basée sur la résolution de ces deux problèmes résolus dans cet ordre à l'aide du Théorème 4.14 de [14] :

$$\begin{cases} \Delta^2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = 0, & \text{dans } \Omega_2 \cap \nu_k, \\ \gamma_2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = \gamma_2\frac{\partial\sigma_{p,2}^{jk\lambda}}{\partial\nu_2} = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \cap \nu_k, \\ M\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = 0, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \\ N\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = \gamma_1\frac{\partial\sigma_{p-1,1}^{jk\lambda}}{\partial\nu}, & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k, \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = 0, & \text{dans } \Omega_1 \cap \nu_k, \\ \gamma_1\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \cap \nu_k, \\ \gamma_1\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = \gamma_2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} & \text{sur } \Gamma \cap \nu_k. \end{cases} \tag{3.31}$$

Comparons avec §5.c du [5], la singularité associée à $L^{(s_1,s_2)}$ est donnée par :

$$\vec{\tau}^{jk\lambda} = \eta_k \sum_{\Re\lambda+p\leq s_2+1} \vec{\sigma}_p^{jk\lambda}. \tag{3.32}$$

On l'appelle une singularité de $L^{(s_1,s_2)}$ car elle appartient à V et non à $A^{(s_1,s_2)}$, tant que $L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda}$ appartient à $B^{(s_1,s_2)}$. Vérifions alors cette dernière assertion. Dans un voisinage ν_k de S_k, $\eta_k = 1$ et donc par (3.29) et (3.32), on a

$$\begin{aligned} L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} &= (L_0 + L_1)\vec{\tau}^{jk\lambda} \\ &= L_0\vec{\tau}^{jk\lambda} + L_1\vec{\tau}^{jk\lambda} \\ &= \sum_{\Re\lambda+p\leq s_2+1} (L_0\vec{\sigma}_p^{jk\lambda} + L_1\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}) \\ &= \sum_{\Re\lambda+p\leq s_2+1} (-L_1\vec{\sigma}_{p-1}^{jk\lambda} + L_1\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}), \end{aligned}$$

et on peut écrire :

$$L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} = L_1\vec{\sigma}^{jk\lambda}_{p_{max}}, \qquad \text{dans } \nu_k,$$

avec :

$$\Re\lambda + p_{max} \leq s_2 + 1 < \Re\lambda + p_{max} + 2. \tag{3.33}$$

Alors, $L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} \in B^{(s_1,s_2)}$ si est seulement si :

$$L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} \in B^{(s_1,s_2)}.$$

Par définition de l'opérateur $L_1^{(s_1,s_2)}$, on doit vérifier que :

$$\eta_{jk}.\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial\sigma^{jk\lambda}_{p_{max},1}}{\partial\nu} \in H^{s_2-3/2}(\Gamma). \tag{3.34}$$

Ce qui est vrai comme $\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial\sigma^{jk\lambda}_{p_{max},1}}{\partial\nu}$ se comporte comme $r^{\Re\lambda+p_{max}-1}$ dans un voisinage ν_k de S_k (Voir [5]), alors (3.33) conduit à la régularité appropriée $H^{s_2-3/2}(\Gamma)$.

Rappelons que la procédure ci-dessus concerne seulement les singularités induites par les sommets communs S_1 et S_2 (c-à-d les singularités $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$, pour $k = 1, 2$).

Effectivement, pour $k \geq 3$, les singularités sont données directement par :

$$\vec{\tau}^{jk\lambda} = \eta_{jk}\vec{\sigma}^{jk\lambda}, \forall k \geq 3. \tag{3.35}$$

Rappelons maintenant le lemme suivant qu'on l'aura besoin dans la suite et qui donne un lien entre l'espace des singularités et les opérateurs de Fredholm. Pour plus de détail, le lecteur peut consulter [5].

Lemme 3.2.3. *Soient $A_1 \subset A_0$ et $B_1 \subset B_0$ deux sous-espaces de Hilbert tels que : A_1 est dense dans A_0 et B_1 est dense dans B_0. Soit M_0 un opérateur de Fredholm de A_0 dans B_0, qui peut être restreint à un opérateur semi-Fredholm, noté par M_1, de A_1 dans B_1. On suppose qu'il existe un espace de dimension finie E ayant les propriétés suivantes :*

$$E \subset A_0, \tag{3.36}$$

$$E \cap A_0 = \{\emptyset\}, \tag{3.37}$$

$$M_0E \subset B_1. \tag{3.38}$$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- *M_1 est un opérateur de Fredholm.*
- *Pour tout $u \in A_0$ tel que $Mu \in B_1$, il existe $v \in A_1$ et $w \in E$ tels que $u = v + w$.*

On peut montrer maintenant le Théorème suivant qui fournit la décomposition de la solution avec une régularité améliorée de la partie régulière. La preuve est une application directe du Lemme précédent et le fait que l'opérateur L est un opérateur de Fredholm.

Théorème 3.2.4. *Sous les hypothèses de Théorème 3.2.2 pour $(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$ données, il existe une unique solution $\vec{u} \in V$ du problème (2.1)-(2.7) qui admet la décomposition suivante :*

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j)} c_{jk\lambda} \vec{\tau}^{jk\lambda}, \tag{3.39}$$

avec $\vec{u}_0 \in A^{(s_1,s_2)}$, $c_{jk\lambda} \in \mathbb{C}$ et $\vec{\tau}^{jk\lambda}$ sont les singularités défini dans (3.32), pour $k = 1.2$ et dans (3.35) pour $k \geq 3$.

Démonstration: La preuve de ce théorème est basée sur l'application du Lemme 3.2.3. Cherchons à vérifier alors que ses hypothèses sont vérifiées. On prend :

$$A_1 = A^{(s_1,s_2)}, \qquad B_1 = B^{(s_1,s_2)},$$

$$A_0 = V, \qquad B_0 = V',$$

$$M_0 = \Lambda, \qquad M_1 = L^{(s_1,s_2)},$$

où Λ est l'isomorphisme naturel entre V et V' défini par :

$$\langle \Lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = a(\vec{u}, \vec{v}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

- Comme conséquence de l'injection de Sobolev on a $A^{(s_1,s_2)} \subset V$. (Voir Théorème 1.2.5)
- $B^{(s_1,s_2)}$ peut être identifié à un sous-espace de V' grâce à l'injection continue suivante : Pour $\vec{F} = (f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$, on pose :

$$\langle \vec{F}, \vec{v} \rangle = -\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx + \int_{\Gamma} \{h_1 \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - h_2 \gamma_1 v_1\} d\sigma, \quad \forall \vec{v} = (v_1, v_2) \in V,$$

cette application est linéaire continue sur V d'après le Lemme 2.2.2.

- La restriction de Λ sur $A^{(s_1,s_2)}$ est clairement $L^{(s_1,s_2)}$ qui est un opérateur de Fredholm par le Théorème 3.2.2, c-à-d :

$$\Lambda\vec{u} = L^{(s_1,s_2)}\vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in A^{(s_1,s_2)}.$$

En effet : soit $(u_1, u_2) \in A^{(s_1,s_2)}$, par la formule de Green (2.17), on a :

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle &= a(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= l(w_1, w_2) - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_2 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx,\end{aligned}$$

où (w_1, w_2) vérifie (2.11) par définition de $L(\cdot,\cdot)$ et comme (w_1, w_2) vérifie (2.11) on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\vec{u}, \vec{v}\rangle &= \int_{\Gamma} \{M u_2 w_1 - (N u_2 - \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}) w_2\} d\sigma - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx \\ &= \int_{\Gamma} \{M u_2 \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - (N u_2 - \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}) \gamma_1 v_1\} d\sigma - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 v_2 dx \\ &= \langle L\vec{u}, \vec{v}\rangle.\end{aligned}$$

- Montrons que l'espace $A^{(s_1,s_2)}$ est dense dans V :

on pose :

$G = \big\{(u_1, u_2) \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ tel que la fonction v définie sur $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ tel que :

$$v = \begin{cases} u_1 & \text{sur } \Omega_1 \cup \Gamma, \\ u_2 & \text{sur } \Omega_2. \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)\big\}$. Montrons tout d'abord que G est dense dans V :

Soit $(u_{n_1}, u_{n_2})_n$ une suite convergente dans G et montrons qu'elle converge dans V. Par définissions de G on a $(u_{n_1}, u_{n_2})_n \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \times \mathcal{D}(\bar{\Omega}_2)$ et la fonction v_n défini sur $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$:

$$v_n = \begin{cases} u_{n_1} & \text{sur } \Omega_1 \cup \Gamma, \\ u_{n_2} & \text{sur } \Omega_2, \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$. D'une part, sur $\Omega_1 \cup \Gamma$: $v_n = u_{n_1}$, donc grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$ dans $H_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$, on déduit que u_{n_1} converge vers v_1 dans $H_0^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$, d'où par le Corollaire 1.3.2 $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ et $\gamma_1 v_1 = 0$ sur $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$, ce qui implique que $\gamma_1 v_1 = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Donc, u_{n_1} converge vers v_1 dans $H^1(\Omega_1)$ et $\gamma_1 v_1 = 0$ sur Γ_1.

D'autre part sur Ω_2 : $v_n = u_{n_2}$ donc grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$ dans $H_0^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$, on déduit que u_{n_2} converge vers v_2 dans $H_0^2(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)$. La Proposition 1.3.3 permet de déduire que $v_2 \in H^2(\Omega_2)$, $\gamma_2 v_2 = 0$ sur Γ_2 et $\gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_2.

Donc u_{n_2} converge vers v_2 dans $H^2(\Omega_2)$ et $\gamma_2 v_2 = \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_2.

Par conséquent, $(u_{n_1}, u_{n_2})_n$ converge vers (v_1, v_2) dans V, d'où la densité de G dans V.

Il reste à vérifier que $G \subset A^{(s_1,s_2)}$. Ceci est valable comme $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_1) \subset H^{s+1}(\Omega_1)$ et $\mathcal{D}(\bar{\Omega}_2) \subset H^{s_2+2}(\Omega_2)$.

On a montrer ainsi que G est dense dans V et que $G \subset A^{(s_1,s_2)}$ on en conclut que $A^{(s_1,s_2)}$ est dense dans V.

- Montrons que $B^{(s_1,s_2)}$ est dense dans V' :

  On procède comme précédemment, et on montre que $\Lambda A^{(s_1,s_2)} \subset B^{(s_1,s_2)}$ est dense dans V' pour conclue la densité de $B^{(s_1,s_2)}$ dans V'.

  - L'application $\Lambda : V \longmapsto V'$ étant un isomorphisme et sa restriction sur $A^{(s_1,s_2)}$: $\Lambda_{|A^{(s_1,s_2)}} = L^{(s_1,s_2)}$, on déduit que :

$$\Lambda A^{(s_1,s_2)} = L^{(s_1,s_2)} A^{(s_1,s_2)} \subset B^{(s_1,s_2)}.$$

  - Vérifiant que $\Lambda A^{(s_1,s_2)}$ est dense dans V'. Soit $(y_n)_n$ une suite convergente de $\Lambda A^{(s_1,s_2)}$ et soit y sa limite. L'application Λ est un isomorphisme, donc elle est bijective de V dans V' et on peut écrire :

$$\exists! x_n \in A^{(s_1,s_2)} : \; y_n = \Lambda x_n.$$

  Par passage à la limite : $\exists x_n \in A^{(s_1,s_2)}$ tel que : $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \Lambda x_n$. or Λ est un isomorphisme (continu à inverse continu) alors :

$$y = \lim_{n \to +\infty} y_n = \Lambda(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \Lambda x \in V',$$

où $x = \lim_{n \to +\infty} x_n \in \bar{A}^{(s_1,s_2)} = V$, d'où $y \in V'$.

- Finalement, on prend E l'espace vectoriel engendré par les singularités $\vec{\tau}^{jk\lambda}$, pour $j \in \{1, 2\},\ k \in \{1 \cdots N_j\}$ et $\lambda \in \Lambda_{jk}(S_j)$. Cet espace E satisfait les hypothèses (3.36)-(3.38) comme on l'a déjà vu.

■

Théorème 3.2.5. *Soit* $s_1 = s_2 - 1$, *supposons que les conditions* (3.6) *et* (3.8) *sont satisfaites et la condition de Fredholm* (3.8) *est satisfaite pour* $s_2 - 1$ *aussi. Alors la conclusion du Théorème 3.2.4 reste vraie.*

Démonstration: Appliquons en première étape le théorème 3.2.4 avec le même s_1 mais avec s_2 remplacé par $s_2 - 1$, on trouve que la solution variationnelle $\vec{u}$ du problème (2.1)-(2.7) admet toujours la décomposition suivante mais avec $s_2 - 1$ à la place de s_2 :

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{N_j} \sum_{\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j)} c_{jk\lambda} \vec{\sigma}^{jk\lambda},$$

où $\vec{u}_0 = (u_{10}, u_{20}) \in A^{(s_1, s_2 - 1)}$, $c_{jk\lambda} \in \mathbb{C}$ et $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$ sont les singularités définies dans (3.27).
Remarquons que la partie régulière $\vec{u}_0$ a la régularité optimale seulement dans Ω_1 mais pas dans Ω_2, on peut considérer alors la deuxième composante u_{20} de $\vec{u}_0$ comme solution de :

$$\begin{cases} \Delta^2 u_{20} = f_2, & \text{dans } \Omega_2, \\ \gamma_2 u_{20} = \gamma_2 \frac{\partial u_{20}}{\partial \nu_2} = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ M u_{20} = h_1, & \text{sur } \Gamma, \\ N u_{20} = h_2, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.40}$$

où la donnée $f_2 \in H^{s_2-3}(\Omega_2)$ et s'écrit sous la forme : $f_2 = f_{20} + \sigma$ avec $f_{20} \in H^{s_2-2}(\Omega_2)$ et σ une fonction singulière.
Comme dans le Théorème 3.1.4, on pose :

$$u_{20} = w + \tau.$$

Donc le problème (3.40) est équivalent aux deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \Delta^2 w = f_{20}, & \text{dans } \Omega_2, \\ \gamma_2 w = \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial \nu_2} = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ Mw = h_1, & \text{sur } \Gamma, \\ Nw = h_2, & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{3.41}$$

et :

$$\begin{cases} \Delta^2 \tau = \sigma, & \text{dans } \Omega_2, \\ \gamma_2 \tau = \gamma_2 \frac{\partial \tau}{\partial \nu_2} = 0, & \text{sur } \Gamma_2, \\ M\tau = h_1, & \text{sur } \Gamma, \\ N\tau = h_2, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.42}$$

Les hypothèses du Théorème 3.1.2 étant satisfaites pour le problème (3.41), on l'applique on obtient la décomposition de l'unique solution $w \in H^2(\Omega_2)$ du problème (3.41) sous la forme :

$$w = w_R + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\pi},$$

avec $w_R \in H^{s_2+2}(\Omega_2)$. D'autre part, le Théorème 4.14 de [14] appliqué au problème (3.42) permet de déduire l'existence et l'unicité d'une solution singulière τ.

En résumé, u_{20} s'écrit sous la forme :

$$u_{20} = w_R + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\pi} + \tau,$$

ce qui permet de déduire finalement que $\vec{u}$ admet une décomposition de la même forme que celle du Théorème 3.2.4 (l'expression (3.39)) avec une partie régulière $\vec{u}_0 = (u_{10}, w_R) \in A^{(s_1,s_2)}$.

■

ANNEXE

Lemme 4.1. Il existe une constante positive α telle que :

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_{2,2,\Omega}, \ \forall v \in V.$$

Théorème 4.2. L'inclusion suivante est satisfaite :

$$W_p^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_q^t(\mathbb{R}^n,$$

$$\text{pour } t \leq s, \ q \geq p \text{ tels que } : s - n/p = t - n/q.$$

Théorème 4.3. L'application :

$$u \to \{\gamma_j \frac{\partial^l u}{\partial^l \nu_j}\} \text{ pour } 0 \leq l \leq k-1 \text{ et } 1 \leq j \leq N,$$

est linéaire continue de $W_p^s(P)$ vers le sous espace de $\prod_{j=1}^N \prod_{l=0}^{k-1} W_p^{k-l-1/p}(\Gamma_j)$.

Théorème 4.4. L'application :

$$u \to \{\gamma_j \frac{\partial^l u}{\partial^l \nu_j}\} \text{ pour } 0 \leq l \leq k-1 \text{ et } 1 \leq j \leq N,$$

est linéaire continue de $V_\gamma^{k,p}(P)$ vers le sous espace de $\prod_{j=1}^N \prod_{l=0}^{k-1} V_\gamma^{k-l-1/p,p}(\Gamma_j)$.

Théorème 4.5. Soit I un intervalle réel borné $]a,b[$, s un nombre réel positif et p un réel > 1. Alors,

$$V_0^{s,p}(I) = \tilde{W}_p^s(I).$$

Corollaire 4.6. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière lipschitzienne. Si $s - 1/p$ est non entier, alors

$$\tilde{W}_p^s(\Omega) = W_p^s(\Omega).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] **G. ALLAIRE, F. ALOUGES**, Polycopié du cours MAP 431, Analyse Variationnelle des Équations aux Dérivées Partielles, École polytechnique, 16 janvier 2015.

[2] **A.Arnold, C.Lassueur**, Opérateurs de Fredholm, Projet de Semestre été 2005.

[3] **H. Blum, R. Rannacher**, On The Boundary Value Problem of The Biharmonic Operator on Domains With Angular Corners, Math. Meth. in the appl. Sc.,2 , 1980, 556-581.

[4] **H. Breszis**, Analyse fonctionnelle, MASSON, Paris, 1983.

[5] **M. Dauge**, Elliptic Boundary Value Problems in Corner Domains. Smoothness and Asymptotics of Solutions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1341 (Springer-Verlag, 1988).

[6] **P. Grisvard**, Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, Boston, 1985.

[7] **P. Grisvard**, Singularities in Boundary Value Problems ; volume 22 of recherches en mathématiques appliquées [Research in Applied Mathematics]. Masson, Paris ; Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] **V. A. Kondrat'ev**, Boundary Value Problems for Elliptic Équations in Domains with Conical or Angular Points, Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967) 227-313.

[9] **A. Maghnoudji, S. Nicaise**, On a Coupled Problem between the Plate Equation and the Membrane Equation on Polygons, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, Serie 6, 1, 1992, 187-209.

[10] **V. G. Maz'ya, J. Robmann**, Elliptic Equations in Polyhedral Domains. Mathematical surveys and Monographs, Vol. 162. American Mathematecal Society, Providence, RI, 2010.

[11] **S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky**, Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundary. de Gruyter Expositions in Mathematics, Vol. 13. Walter de Gruyter et Co., Berlin, 1994.

[12] **S. Nicaise**, Le Laplacien sur les Réseaux Deux-dimensionnels Polygonaux Topologiques. J. Math. Pures Appl. (9), 67(2) :93113, 1988.

[13] **S. Nicaise**, Polygonal Interface Problems for the Biharmonic Operator Pub. IRMA,Lille, 23, n XI (1991).

[14] **S. Nicaise**, Polygonal Interface Problems. Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik [Methods and Procedures in Mathematical Phisics], Vol. 39. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 1993.

[15] **P. A. Raviart, J. M. Thomas**, Introduction à L'analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles, Masson, Paris, 1992.