

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département d'Automatique

N° :...../2023

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE: Sciences et Technologies

FILIERE: Automatique

SPECIALITE: Automatique et Informatique Industrielle

Thème

**Commande en temps fixe des systèmes non linéaires avec
saturation à l'entrée**

Présenté Par : Aimad eddine BOUHLITE

Encadré Par : Hicham KHEBBACHE

Asma BOUZEKRIA

Date de soutenance: 02/07/2023

Jury de Soutenance

Président : Ahsene BOUBAKIR

Grade : professeur

Univ MSB jijel

Encadreur : Hicham KHEBBACHE

Grade : MCA

Univ MSB jijel

Examineur 1: Dounia SAIFIA

Grade : professeur

Univ MSB jijel

Promotion : 2022 /2023

Remerciements

Nous exprimons avant tout notre gratitude envers DIEU Allah tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a accordées afin de réaliser ce modeste travail.

Nous souhaitons également exprimer notre plus grande reconnaissance et notre respect envers notre encadreur, M. KHEBBACHE. H, pour avoir accepté de diriger ce travail, pour nous avoir guidé et soutenu avec patience et indulgence, ainsi que pour ses lectures enrichissantes de notre mémoire et ses précieux conseils continus.

En outre, nous tenons à remercier tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie de ce jury de mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à notre travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, qui ont façonné la personne que je suis aujourd'hui et qui ont constamment veillé à guider mes pas tout au long de ma vie. Leurs aides, leurs émotions intenses, leurs sacrifices, leur soutien et leurs encouragements ont été présents tout au long de mes années d'apprentissage.

Ma famille, qui a toujours été un pilier solide dans ma vie. Votre amour inconditionnel et votre soutien constant m'ont donné la force nécessaire pour atteindre mes objectifs.

Mes amis, pour leur présence précieuse et leurs encouragements sans faille. Votre amitié sincère et vos moments partagés ont rendu ce parcours d'études encore plus mémorable.

Mes collègues de la promotion, qui ont été des compagnons de route tout au long de cette aventure. Vos échanges, vos idées et votre collaboration ont enrichi mon expérience et contribué à ma croissance personnelle et professionnelle.

À toute la promotion Automatique 2023, pour cette camaraderie et cette solidarité qui nous ont unis pendant ces années d'études. Nous avons partagé des moments uniques et je suis reconnaissant d'avoir fait partie de cette communauté.

Cette dédicace est un témoignage de ma gratitude envers vous tous. Votre présence, votre soutien et votre amitié ont été des éléments essentiels dans la réalisation de ce travail. Merci du fond du cœur pour avoir fait partie de mon parcours et pour avoir contribué à ma réussite.

AIMAD EDDINE

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents ,

Mes collègues de la promotion,

À toute la promotion Automatique 2023,

ASMA

Sommaire

Sommaire :

Sommaire	
Liste des figures	
Référence bibliographie	
Introduction général.....	1

Chapitre 1 : Notions sur la commande des systèmes non linéaires

1.1. Introduction	3
1.2. Systèmes linéaires	3
1.3. Systèmes non linéaires	4
1.4. La commande de système non linéaire	4
1.5. La stabilité des systèmes non linéaire	5
1.5.1 Définitions	5
1.6. Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)	6
1.7. Deuxième méthode de Lyapunov (méthode direct)	7
1.8. L'inégalité de Young	7
1.9. La saturation	7
1.10. Notion de stabilité en temps fixe.....	8
1.11. Conclusion	9

Chapitre 2 : commande par Backstepping en temps fixe avec saturation à l'entrée

2.1. Introduction	10
2.2. Algorithme de commande en temps fixe	10
2.3. Résultats de simulation	14
2.3.1. Exemple 01 : (système non linéaire de deuxième ordre)	15
2.3.2. Exemple 02 : (système non linéaire de troisième ordre)	16
2.4. Interprétation des résultats	18
2.5. Conclusion	18

Chapitre 3 : commande par surface Dynamique (DSC) en temps fixe avec saturation à l'entrée

3.1. Introduction	19
3.2. La commande par surface dynamique en temps fixe avec saturation	19
3.3. Résultat de simulation	23
3.4. Exemple 01 (système non linéaire de deuxième ordre)	23

3.5. Exemple 02 (système non linéaire de troisième ordre)	25
3.6. Interprétation des résultats	27
3.7. Conclusion	27
Chapitre 4 : la commande par Backstepping filtré (CFB) en temps fixe avec saturation à l'entrée	
4.1. Introduction	29
4.2. Algorithme de commande par backstepping filtré (CFB)	29
4.3. Exemples d'application	33
4.4. Exemple 01 : (système non linéaire de deuxième ordre)	33
4.5. Exemple 02 : (système non linéaire de troisième ordre).....	34
4.6. Interprétation	36
4.7. Conclusion	36
Conclusion générale	38

Liste des figures :

Chapitre 1 :

Figure (1.1) : point d'équilibre stable	5
Figure (1.2) : point d'équilibre asymptotiquement stable	6
Figure (1.3) : fonction de saturation	8

Chapitre 2 :

Figure (2.1) : Sortie du système non linéaire.....	15
Figure (2.2) : Evolution de la 2ième variable d'état	15
Figure (2.3) : Poursuite de la première erreur	16
Figure (2.4) : Poursuite de la deuxième erreur	16
Figure (2.5) : Signal de commande U.....	16
Figure (2.6) : Sortie du système non linéaire.....	17
Figure (2.7) : Evolution de la 2ième variable d'état	17
Figure (2.8) : Evolution de la 3ème variable d'état	17
Figure (2.9) : Poursuite de la première erreur	17
Figure (2.10) : Poursuite de la deuxième erreur	17
Figure (2.11) : Poursuite de la troisième erreur	17
Figure (2.12) : Signal de commande U	18

Chapitre 3 :

Figure (3.1) : Sortie du système non linéaire.....	24
Figure (3.2) : Evolution de la 2ème variable d'état	24
Figure (3.3) : Poursuite de la première erreur	24
Figure (3.4) : Poursuite de la deuxième erreur	24
Figure (3.5) : Signal de commande U.....	25
Figure (3.6) : Sortie du système non linéaire.....	26
Figure (3.7) : Evolution de la 2ième variable d'état	26
Figure (3.8) : Evolution de la 3ième variable d'état	26
Figure (3.9) : poursuit de la première erreur	26
Figure (3.10) : Poursuite de la deuxième erreur	26
Figure (3.11) : Poursuite de la troisième erreur	26
Figure (3.12) : Signal de commande U.....	27

Chapitre 4 :

Figure (4.1) : sortie du système non linéaire	33
Figure (4.2) : Evolution de la 2ième variable d'état	33
Figure (4.3) : Poursuite de la première erreur	34
Figure (4.5) : Signal de commande U	34
Figure (4.6) : sortie de système non linéaire	35
Figure (4.7) : Evolution de la 2ième variable d'état	35
Figure (4.8) : Evolution de la 3ième variable d'état	35
Figure (4.9) : Poursuite de la première erreur	35
Figure (4.10) : Poursuite de la deuxième erreur	35
Figure (4.11) : Poursuite de la troisième erreur	35
Figure (4.12) : Signal de commande U.....	36

Introduction générale

Introduction générale :

La stabilité des systèmes est un domaine complexe qui nécessite souvent des outils mathématiques avancés pour être analysée. Elle concerne la réponse d'un système dynamique à des perturbations ou à des conditions initiales différentes. La stabilité est essentielle pour garantir que le système reste sous contrôle et ne présente pas de comportements indésirables tels que l'oscillation, la divergence ou le chaos. Elle est essentielle dans de nombreuses applications, notamment dans le contrôle de robots, la conception de circuits électroniques, la modélisation de systèmes biologiques, et bien d'autres domaines où des systèmes non linéaires interviennent. La compréhension et l'analyse de la stabilité permettent de concevoir des systèmes robustes et prédictibles.

La stabilité en temps fini se réfère à la capacité d'un système dynamique à atteindre un état d'équilibre ou une condition désirée dans un laps de temps limité, quelle que soit sa configuration initiale. En d'autres termes, un système est considéré comme stable en temps fini s'il peut ramener ses états à des valeurs spécifiées en un temps fini, sans dépasser ce temps, quelle que soit la perturbation initiale. La stabilité en temps fini est particulièrement pertinente pour les applications où il est crucial d'atteindre un état stable dans un délai précis.

En 2012, une méthode de stabilité en temps fixe a été développée [1]. Dans cette approche, la stabilité peut être atteinte dans un laps de temps fixe, connu sous le nom de temps de stabilisation. De plus, le temps de stabilisation présente une limite supérieure constante pour toutes les valeurs initiales du système étudié. Bien qu'il soit reconnu que le temps nécessaire pour atteindre la stabilité en temps fixe est soumis à une limite supérieure, il est difficile de dériver une formule précise pour estimer cette limite de manière stricte en raison des complexités de l'analyse théorique. Cependant, en se référant à certains théorèmes de stabilité en temps fixe, il est possible d'utiliser des formules d'estimation pour obtenir une limite supérieure approximative.

Les non-linéarités d'actionneur se réfèrent à des comportements non proportionnels ou non linéaires observés dans la réponse d'un actionneur à un signal de commande. Ces non-linéarités peuvent être dues à divers facteurs, tels que la friction, l'hystérésis, la déformation mécanique, ou des limitations électriques. La présence de non-linéarités d'actionneur peut rendre la modélisation et la commande des systèmes plus complexes. Pour atténuer ces non-linéarités, il est souvent nécessaire de développer des modèles plus précis des actionneurs et d'utiliser des techniques de commande avancées.

La saturation est une non-linéarité couramment rencontrée dans de nombreux systèmes physiques. Elle se produit lorsque l'actionneur atteint ses limites physiques ou électriques et ne peut pas fournir des niveaux de sortie supérieurs ou inférieurs à certains seuils. La saturation peut notamment entraîner des problèmes de stabilité et de performance dans les systèmes de contrôle. Si la commande continue d'augmenter la demande de l'actionneur malgré la saturation, cela peut conduire à des réponses imprévisibles, à des oscillations ou même à une instabilité du système. Par conséquent, il est essentiel de prendre en compte de la saturation lors de la conception des lois de commande [2].

Ce mémoire présente quelques stratégies de la commande en temps fixe des systèmes non linéaires avec saturation à l'entrée.

Le mémoire est décomposé en quatre chapitres :

Le premier chapitre offre une brève introduction aux systèmes non linéaires, en abordant quelques concepts clés de leur commande, ainsi qu'un aperçu des travaux de recherche réalisés dans cette étude. Ensuite, nous rappelons les définitions liées à la stabilité des systèmes non linéaires, ainsi que les diverses méthodes de commande utilisées pour ces systèmes. De plus, nous présentons certains outils mathématiques qui seront utilisés tout au long de cette étude.

Le deuxième chapitre se concentre sur la commande en temps fixe par backstepping pour une classe des systèmes non linéaires avec saturation à l'entrée. Nous présenterons le concept du backstepping, une méthode de commande récursive basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov. Cette approche permet de concevoir une loi de commande stabilisante en garantissant la stabilité globale du système en boucle fermée. En introduisant des filtres en temps fixe, nous aborderons la problématique de la saturation à l'entrée et proposerons des solutions pour y remédier. Des simulations seront réalisées pour évaluer les performances de cette approche.

Le troisième chapitre traitera la commande par surface dynamique (DSC), une technique de commande pour les systèmes non linéaires triangulaires dérivée du backstepping. Nous explorerons les principes fondamentaux de la DSC, qui utilise des filtres en temps fixe pour éviter l'explosion de complexité associée au backstepping traditionnel. Nous examinerons les avantages de cette approche en termes de précision, de réactivité et de robustesse face aux perturbations. Des études de simulation illustreront l'efficacité de la commande DSC dans la poursuite de références désirées.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous aborderons la commande par backstepping filtré (CFB), une autre méthode de commande pour la même classe des systèmes non linéaires.

Nous présenterons les principes de la CFB et discuterons de son application dans la compensation de la saturation à l'entrée. Des comparaisons avec d'autres approches de commande seront réalisées pour évaluer les performances de la CFB, notamment en termes de poursuite et de rapidité.

En résumé, ce mémoire se concentre sur l'étude et le développement de différentes techniques de commande pour les systèmes non linéaires triangulaires. Les chapitres suivants approfondiront ces techniques, en explorant la commande en temps fixe par backstepping, par surface dynamique et par backstepping filtré. Des simulations et des analyses approfondies seront menées pour évaluer l'efficacité de ces approches et démontrer leur pertinence dans la commande des systèmes non linéaires.

Chapitre 01

Notions sur la commande des systèmes non linéaires

1.1. Introduction

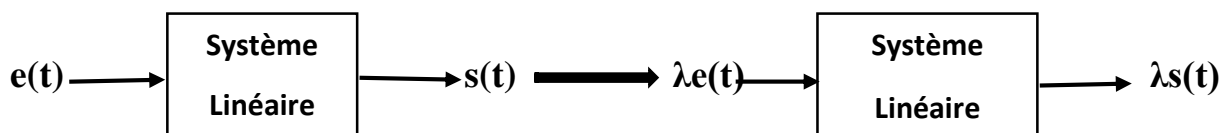
Les systèmes non linéaires sont fréquemment rencontrés dans le domaine de l'automatique, où la régulation et la commande de systèmes dynamiques sont des préoccupations majeures. Ainsi, la gestion des systèmes non linéaires pose des défis importants en matière de modélisation, de conception de lois de commande et de stabilité. Les outils mathématiques avancés, tels que la théorie de la stabilité de Lyapunov et la commande non linéaire, sont souvent utilisés pour concevoir des contrôleurs efficaces et robustes pour ces systèmes. La compréhension des systèmes non linéaires est cruciale pour relever ces défis et assurer le bon fonctionnement des systèmes de contrôle dans des environnements complexes et dynamiques [4].

Dans ce chapitre nous allons présenter des rappels et des définitions nécessaires sur la commande des systèmes non linéaires.

1.2. Système linéaire [5]

Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors les principes de proportionnalité et de superposition :

Principe de proportionnalité : si $s(t)$ est la réponse à l'entrée $e(t)$ alors $\lambda \times s(t)$ est la réponse à l'entrée $\lambda \times e(t)$.



Principe de superposition : si $s_1(t)$ est la réponse à l'entrée $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse à l'entrée $e_2(t)$ alors $[s_1(t) + s_2(t)]$ est la réponse à l'entrée $[e_1(t) + e_2(t)]$.



1.3. Système non linéaire [6]

On appelle système non linéaire tout système dont le comportement n'est pas linéaire, i.e. soit la sortie n'est pas proportionnelle à l'entrée, soit plus généralement elle n'obéit pas au principe de superposition. La non-linéarité d'un système peut donc être mise en évidence soit par modélisation mathématique, soit par des expériences montrant que le principe de superposition n'est pas respecté

De nombreux exemples des systèmes non linéaires sont dans les systèmes mécaniques ou les produits chimiques : satellites, avions, automobiles, machines-outils, régulateurs de chaleur, Réacteurs chimiques, biotechnologie ou transformation de produits agricoles,... etc.

Il est caractérisé par les propriétés suivantes [7] :

- Principe de superposition n'est pas applicable.
- Points d'équilibre multiples : un système non linéaire présente plusieurs points d'équilibre isolés (pour le système linéaire, le point d'équilibre est unique).
- Limite de cycle : les systèmes non linéaires peuvent exhiber des oscillations à amplitudes et fréquences fixes en l'absence d'une entrée exogène.

1.4. Commande des systèmes non linéaires

En règle générale, lorsqu'on souhaite commander un système, on se base sur un modèle préalablement établi en utilisant des méthodes d'identification telles que les lois physiques ou les observations expérimentales. Dans notre situation, les techniques de commande Backstepping, DSC et CFB sont employées pour gérer la nature non linéaire du système. Il convient de souligner que la stabilité de ces techniques repose sur l'utilisation d'une fonction candidate de Lyapunov.

1.5. Stabilité des systèmes non linéaire [8]

La prédiction du comportement d'un système linéaire peut se faire en analysant sa position d'équilibre. Lorsqu'un système possède un point d'équilibre stable (instable), il sera lui-même stable (instable). Cependant, cette règle ne s'applique pas aux systèmes non linéaires. Étant donné que ces systèmes peuvent avoir plusieurs positions d'équilibre, la stabilité d'une seule de ces positions n'est pas suffisante pour prédire la stabilité globale du système. Afin d'évaluer l'impact de la stabilité d'un point d'équilibre sur l'ensemble du système, de nouvelles définitions de la stabilité ont été introduites, telles que la stabilité locale, la stabilité globale et la région d'attraction.

1.5.1. Définitions :

Point d'équilibre [8] : L'état $x_e \in D$ est un point d'équilibre pour le système), si $f(t, x_e) = 0, \forall t \geq t_0$.

L'équilibre stable [9] : L'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système si $\forall \epsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\epsilon, t_0)$ tel que $\|x_0\| \leq \delta(\epsilon, t_0) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0$.

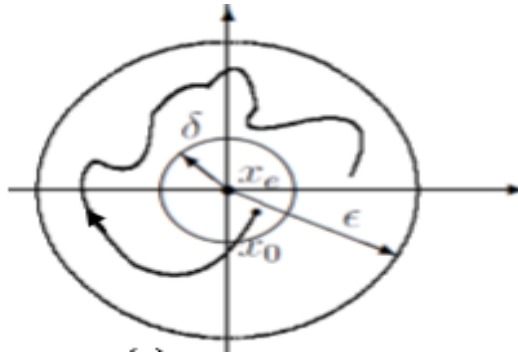


Figure (1.1) : Point d'équilibre

Equilibre uniformément stable [8] : L'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour le système si $\forall \epsilon \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\epsilon)$ tel que $\|x_0\| \leq \delta(\epsilon) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon, \forall t \geq t_0$.

Equilibre asymptotiquement stable : L'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour le système s'il existe deux constantes strictement positive α et β telles que $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}, \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in Dr$. Lorsque $Dr = R^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

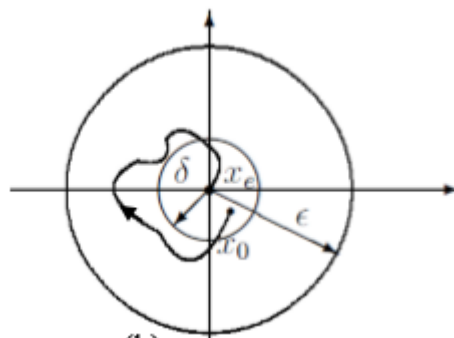


Figure (1.2) : Point d'équilibre asymptotiquement stable

Stabilité locale [8] :

La stabilité locale se réfère exclusivement à la position d'équilibre spécifique sans fournir d'informations sur la portée de cette stabilité. Elle constitue une condition nécessaire mais pas suffisante pour garantir la stabilité du système dans un domaine donné, englobant ladite position d'équilibre.

Stabilité globale [8] :

La stabilité globale est définie comme la capacité d'un système à rester stable pour toutes les valeurs possibles de ses variables. Contrairement à la stabilité locale, la stabilité globale revêt une importance pratique beaucoup plus significative. Elle dépend non seulement du système lui-même, mais également des différentes valeurs que les variables peuvent prendre dans le contexte du problème étudié. Par conséquent, un même système peut être considéré comme stable ou instable globalement, en fonction du domaine de variables qui suscite notre intérêt.

1.6. Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) [6] :

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation du système $\dot{x} = f(x)$ autour du point d'équilibre x_e . Plus précisément, on examine les valeurs propres $\lambda(A)$ de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre x_e . Selon cette méthode, les propriétés de stabilité du point d'équilibre s'expriment comme suit.

Théorème

Soit x_e le point d'équilibre du système : $\dot{x} = f(x)$ avec $f \in C^1$. Posons $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e)$ et $\alpha(A) = \max \text{Re}(\lambda(A))$. Alors :

- Si $\alpha(A) < 0$, le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable.
- Si $\alpha(A) > 0$, le point d'équilibre x_e est instable.
- Si $\alpha(A) = 0$, on ne peut pas conclure sur la stabilité du point d'équilibre x_e .

1.7. Deuxième méthode de Lyapunov (méthode direct) [6]

La notion de stabilité selon Lyapunov peut être formulée autrement : lorsqu'un système, qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non, voit son énergie totale diminuer avec le temps, il tend à se rapprocher d'un état d'équilibre, signifiant ainsi sa stabilité. La méthode de Lyapunov cherche spécifiquement à créer une fonction scalaire de type énergétique qui présente une dérivée temporelle négative.

1.8. L'inégalité de Young [10]

Soit $1 < p < \infty$, alors pour tous $a, b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

où $q \in]1, \infty[$ est l'exposant conjugué à p définie par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

De plus l'égalité a lieu si et seulement si $a^p = a^q$.

1.9. La Saturation

La saturation d'un système non linéaire fait référence à un phénomène où la réponse du système atteint une limite ou un plafond malgré une augmentation continue de l'entrée. Cela signifie que le système ne peut pas produire une sortie supérieure à une certaine valeur, même si l'entrée continue d'augmenter.

La saturation se produit lorsque de nombreux actionneurs atteignent leurs limites. Lorsque l'actionneur fonctionne dans sa plage de fonctionnement, sa sortie $y(t)$ est directement proportionnelle à la valeur désirée de sa sortie $u(t)$, ce qui peut être exprimé par l'équation $y(t) = Ku(t)$. Cependant, si la valeur désirée est irréalisable (par exemple, $u(t) > a$), l'actionneur ne peut produire que la valeur maximale possible ($y(t) = ka$), et il n'y a plus de relation proportionnelle entre la grandeur désirée et la sortie effective [11].

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } u \geq u_{\max} \\ u & \text{si } u_{\min} < u < u_{\max} \\ u_{\min} & \text{si } u \leq -u_{\min} \end{cases} \quad (1.1)$$

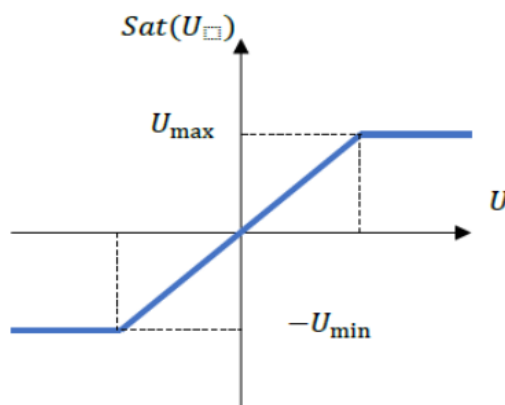


Figure (1.3) : Fonction de saturation

1.10. Notion de stabilité en temps fixe :

Dans cette partie, on définit les notions de la stabilité en temps fixe (STFx), et les résultats associés :

Considérons le système dynamique autonome [12] :

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, est continue sur un voisinage ouvert $D \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine et $f(0) = 0$.

L'argument t est supprimé chaque fois qu'il est clair du contexte. Ici, les résultats sont présentés sous l'hypothèse que la solution de stabilité existe et unique pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

L'origine est :

- **Asymptotique stable (AS)** (respectivement, globalement AS) : s'il est stable, et qu'il existe : $c > 0$, tel que pour tout $\|x(0)\| < c$ (respectivement, pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$) la solution de stabilité satisfaite : $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.
- **Exponentiellement stable (ES)** (respectivement, globalement ES) : s'il existe $c, \alpha, \gamma > 0$, tel que pour tout $\|x(0)\| < c$ (respectivement, pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$), $\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\gamma t}$ et $t \geq 0$.
- **Stable en temps fini (STF)** : s'il est stable et qu'il existe un voisinage ouvert N de l'origine tel que pour tout $x(0) \in N \setminus \{0\}$, $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$, ou $T = T(x(0)) < \infty$.
- **Globalement stable en temps fini (GSTF)**, si : $N = \mathbb{R}^n$.
- **Stable en temps fixe (STFx)** : L'origine est dite stable en temps fixe, s'il est globalement stable en temps fini et la fonction de temps de stabilisation est uniformément bornée pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\sup(T(x)) < \infty, \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Lemme 1 [13] : Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov dérivable, définie positive et radialement non bornée $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$\dot{v}(x) \leq -\alpha_1 v(x)^{\gamma_1} - \alpha_2 v(x)^{\gamma_2}$$

est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, avec $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 0 < \gamma_1 < 1$ et $\gamma_2 > 1$. Alors l'origine est dite stable en temps fixe avec une fonction de temps de stabilisation continue T_{max} qui satisfaite :

$$T_{\max} \leq \frac{1}{\alpha_1(1-\gamma_1)} + \frac{1}{\alpha_2(\gamma_2-1)}$$

Lemme 2 [14] : Pour tous nombres réels $\alpha_1, \alpha_2 > 0, 0 < \gamma_1 < 1$ et $\gamma_2 > 1$, une condition de Lyapunov étendue de stabilité en temps fixe est écrite comme suit :

$$\dot{v}(x) + \alpha_1 v^{\gamma_1}(x) + \alpha_2 v^{\gamma_2}(x) + \alpha_3 v(x) \leq 0$$

Où le temps de stabilisation T_{\max} est donné par :

$$T_{\max} \leq \frac{1}{\alpha_3(1-\gamma_1)} \ln\left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) + \frac{1}{\alpha_3(\gamma_2-1)} \ln\left(1 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)$$

1.11. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques outils mathématiques relatifs à la stabilité des systèmes non linéaires. Nous avons abordé brièvement la théorie de Lyapunov, ainsi que les principaux résultats concernant la stabilité à l'aide des fonctions de Lyapunov. Nous avons également présenté deux Lemmes de stabilité en temps fixe. Ces rappels sont très utiles et seront exploités par la suite dans la conception des commandes et l'analyse de la stabilité correspondante. Dans le chapitre suivant, nous procéderons à la synthèse d'une méthode de contrôle, à savoir le Backstepping en temps fixe, qui s'appliquent à une classe spécifique de systèmes non linéaires. Nous examinerons les performances de ces méthodes à travers deux exemples d'application.

Chapitre 02

Commande par backstepping en temps fixe avec saturation à l'entrée

2.1.Introduction

La technique de commande par backstepping est une méthode de commande pour les systèmes dynamiques non linéaires qui utilise une approche en cascade pour stabiliser le système. Cette méthode est basée sur le principe de récurrence, où chaque étape du processus de conception de commande se concentre sur la stabilisation d'une partie spécifique du système dynamique. En fait, elle utilise des transformations de coordonnées pour transformer le système original en un système équivalent qui peut être plus facilement contrôlé. Ensuite, elle utilise une approche descendante en cascade pour concevoir une série de lois de commande pour chaque niveau de la hiérarchie du système.

Dans ce chapitre nous allons présenter une stratégie de commande par backstepping en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec saturation d'entrée. Pour éliminer l'effet de saturation, un système auxiliaire est introduit dans chaque étape de conception. L'approche de Lyapunov est utilisée pour démontrer la stabilité du système en boucle fermée. Les performances de cette technique de commande sont illustrées à travers deux exemples d'application.

2.2. Algorithme de commande en temps fixe

Considérant la classe des systèmes non linéaires d'ordre n suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1}, & i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u \end{cases} \quad (2.1)$$

- $f_i, g_i, i=1, \dots, n$ sont des fonctions non linéaires connues tel que $f_i(0) = 0$ et $g_i(x) \neq 0, \forall x \in R$.
- $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$: est le vecteur d'état partiel qui correspond aux premières i équations dynamiques.
- $\bar{x}_n = [x_1, \dots, x_n]^T$: est le vecteur d'état global.
- u : est l'entrée de commande.
- y : est la sortie de système.

Dans ce chapitre, la compensation de l'effet de saturation se fait en utilisant le système auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -k_1\lambda_1 - c_1\lambda_1^{2p-1} - l_1\lambda_1^{2q-1} + g_1\lambda_2 \\ \dot{\lambda}_i = -g_{i-1}\lambda_{i-1} - k_i\lambda_i - c_i\lambda_i^{2p-1} - l_i\lambda_i^{2q-1} + g_i\lambda_{i+1}, & i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\lambda}_n = -g_{n-1}\lambda_{n-1} - k_n\lambda_n - c_n\lambda_n^{2p-1} - l_n\lambda_n^{2q-1} + g_n\Delta u - \beta \text{sign}(\lambda_n) \end{cases} \quad (2.2)$$

L'algorithme de commande suit les étapes suivantes :

Etape 1 :

Le premier sous-système est pris en considération initialement : $\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2$ et la première variable d'erreur est définie par : $e_1 = x_1 - x_{1d} - \lambda_1$. La dynamique de cette erreur est exprimée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1 + g_1x_2 - \dot{x}_{1d} - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1 + g_1e_2 + g_1x_{2d} - \dot{x}_{1d} + k_1\lambda_1 + c_1\lambda_1^{2p-1} + l_1\lambda_1^{2q-1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Afin d'assurer la stabilité du premier sous-système, la variable d'état x_2 est traitée comme une commande virtuelle. Sa valeur désirée x_{2d} est donnée par :

$$x_{2d} = -\frac{1}{g_1} \left(f_1 + k_1(e_1 + \lambda_1) + c_1(e_1^{2p-1} + \lambda_1^{2p-1}) + l_1(e_1^{2q-1} + \lambda_1^{2q-1}) - \dot{x}_{1d} \right) \quad (2.4)$$

Où $k_1 > 0$, $c_1 > 0$, $l_1 > 0$, $0 < p < 1$, $1 < q < 3$ sont des constantes de conception.

On remplace (2.4) dans (2.3), on obtient :

$$\dot{e}_1 = -k_1e_1 - c_1e_1^{2p-1} - l_1e_1^{2q-1} + g_1e_2 \quad (2.5)$$

Ou $e_2 = x_2 - x_{2d} - \lambda_2$ représente la deuxième erreur de poursuite.

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_1 = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \quad (2.6)$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= e_1\dot{e}_1 + \lambda_1\dot{\lambda}_1 \\ &= e_1 \left(-k_1e_1 - c_1e_1^{2p-1} - l_1e_1^{2q-1} + g_1e_2 \right) + \lambda_1 \left(-k_1\lambda_1 - c_1\lambda_1^{2p-1} - l_1\lambda_1^{2q-1} + g_1\lambda_2 \right) \\ &= -k_1e_1^2 - c_1e_1^{2p} - l_1e_1^{2q} - k_1\lambda_1^2 - c_1\lambda_1^{2p} - l_1\lambda_1^{2q} + g_1e_1e_2 + g_1\lambda_1\lambda_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Remarque 1 : Comme dans le backstepping standard, les termes $g_1 e_1 e_2$ et $g_1 \lambda_1 \lambda_2$ seront annulés dans l'étape suivante, tandis que d'autres termes de couplage $g_i e_i e_{i+1}$ et $g_i \lambda_i \lambda_{i+1}$ sont apparus plus tard dans l'étape i et sont traités par la suite, jusqu'à la dernière étape.

Etape i : ($i = 2, \dots, i = n-1$)

On considère maintenant la i^{eme} variable d'erreur :

$$e_i = x_i - x_{id} - \lambda_i \quad (2.8)$$

La dérivée temporelle correspondante est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} + g_{i-1} \lambda_{i-1} + k_i \lambda_i + c_i \lambda_i^{2p-1} + l_i \lambda_i^{2q-1} - g_i \lambda_{i+1} \\ &= f_i + g_i x_{(i+1)d} + g_i e_{i+1} - \dot{x}_{id} + g_{i-1} \lambda_{i-1} + k_i \lambda_i + c_i \lambda_i^{2p-1} + l_i \lambda_i^{2q-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Avec : $e_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d} - \lambda_{(i+1)}$ est la $(i+1)$ erreur de poursuite

Si on choisit la commande virtuelle $x_{(i+1)d}$ sous la forme suivante :

$$x_{(i+1)d} = -\frac{1}{g_i} \left(f_i + g_{i-1} (e_{i-1} + \lambda_{i-1}) + k_i (e_i + \lambda_i) + c_i (e_i^{2p-1} + \lambda_i^{2p-1}) + l_i (e_i^{2q-1} + \lambda_i^{2q-1}) - \dot{x}_{id} \right) \quad (2.10)$$

Où $k_i > 0$, $c_i > 0$, $l_i > 0$ sont des paramètres de conception.

La dynamique de l'erreur e_i devient :

$$\dot{e}_i = -g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} + g_i e_{i+1} \quad (2.11)$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_i = v_{i-1} + \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} \lambda_i^2 \quad (2.12)$$

$$\text{avec : } v_{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{i-1} e_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{i-1} \lambda_j^2$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_i &= \dot{v}_{i-1} + e_i \dot{e}_i + \lambda_i \dot{\lambda}_i \\
 &= -\sum_{j=1}^{i-1} k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^{i-1} l_j e_j^{2q} + g_{i-1} e_{i-1} e_i \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} k_j \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \lambda_j^{2p} - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \lambda_j^{2q} + g_{i-1} \lambda_{i-1} \lambda_i \\
 &\quad + e_i \left(-g_{i-1} e_{i-1} - k_i e_i - c_i e_i^{2p-1} - l_i e_i^{2q-1} + g_i e_{i+1} \right) \\
 &\quad + \lambda_i \left(-g_{i-1} \lambda_{i-1} - k_i \lambda_i - c_i \lambda_i^{2p-1} - l_i \lambda_i^{2q-1} + g_i \lambda_{i+1} \right) \\
 &= -\sum_{j=1}^i k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^i c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^i l_j e_j^{2q} + g_i e_i e_{i+1} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^i k_j \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^i c_j \lambda_j^{2p} - \sum_{j=1}^i l_j \lambda_j^{2q} + g_i \lambda_i \lambda_{i+1}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Etape n :

La dérivée temporelle de $e_n = x_n - x_{nd} - \lambda_n$ se donne comme suit :

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_n &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} + g_{n-1} \lambda_{n-1} + k_n \lambda_n + c_n \lambda_n^{2p-1} + l_n \lambda_n^{2q-1} - g_n \Delta u + \beta \text{sign}(\lambda_n) \\
 &= f_n + g_n v - \dot{x}_{nd} + g_{n-1} \lambda_{n-1} + k_n \lambda_n + c_n \lambda_n^{2p-1} + l_n \lambda_n^{2q-1} + \beta \text{sign}(\lambda_n)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Où $\Delta u = u - v$.

Un choix approprié de la loi de commande v se donne par :

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(f_n + g_{n-1} (e_{n-1} + \lambda_{n-1}) + k_n (e_n + \lambda_n) + c_n (e_n^{2p-1} + \lambda_n^{2p-1}) \right. \\
 \left. + l_n (e_n^{2q-1} + \lambda_n^{2q-1}) + \beta \text{sign}(\lambda_n) - \dot{x}_{nd} \right) \tag{2.15}$$

Où $k_n > 0$, $c_n > 0$, $l_n > 0$ sont des constantes de conception.

Par conséquent, \dot{e}_n devient :

$$\dot{e}_n = -g_{n-1} e_{n-1} - k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} \tag{2.16}$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{2} e_n^2 + \frac{1}{2} \lambda_n^2 \tag{2.17}$$

Sa dérivée temporelle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_n &= \dot{v}_{n-1} + e_n \dot{e}_n + \lambda_n \dot{\lambda}_n \\
 &= -\sum_{j=1}^{n-1} k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^{n-1} l_j e_j^{2q} + g_{n-1} e_{n-1} e_n \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{n-1} k_j \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} c_j \lambda_j^{2p} - \sum_{j=1}^{n-1} l_j \lambda_j^{2q} + g_{n-1} \lambda_{n-1} \lambda_n \\
 &\quad + e_n \left(-g_{n-1} e_{n-1} - k_n e_n - c_n e_n^{2p-1} - l_n e_n^{2q-1} \right) \\
 &\quad + \lambda_n \left(-g_{n-1} \lambda_{n-1} - k_n \lambda_n - c_n \lambda_n^{2p-1} - l_n \lambda_n^{2q-1} + g_n \Delta u - \beta \text{sign}(\lambda_n) \right) \\
 \dot{v}_n &\leq -\sum_{j=1}^n k_j e_j^2 - \sum_{j=1}^n c_j e_j^{2p} - \sum_{j=1}^n l_j e_j^{2q} - \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j^2 - \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^{2p} - \sum_{j=1}^n l_j \lambda_j^{2q} + |\lambda_n| (|g_n \Delta u| - \beta)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

En utilisant le fait que : $|\lambda_n g_n \Delta u| \leq |\lambda_n| |g_n \Delta u| \leq |\lambda_n| \beta$, l'équation (2.18) devienne :

$$\dot{v}_n \leq -\sum_{j=1}^n 2k_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right) - \sum_{j=1}^n 2^p c_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^p - \sum_{j=1}^n 2^q l_j \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^q - \sum_{j=1}^n 2k_j \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right) - \sum_{j=1}^n 2^p c_j \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right)^p - \sum_{j=1}^n 2^q l_j \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right)^q \tag{2.19}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_n &\leq -\alpha_1 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right) \right) - \alpha_2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^p + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right)^p \right) - \alpha_3 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right)^q + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right)^q \right) \\
 &\leq -\alpha_1 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right) \right) - \alpha_2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right) \right)^p - \alpha_3 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^2}{2} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j^2}{2} \right) \right)^q \\
 &\leq -\alpha_1 v_n - \alpha_2 v_n^p - \alpha_3 v_n^q
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Avec : $\alpha_1 = \min(2k_1, 2k_2, \dots, 2k_n)$, $\alpha_2 = \min(2^p c_1, 2^p c_2, \dots, 2^p c_n)$ et $\alpha_3 = \min(2^q l_1, 2^q l_2, \dots, 2^q l_n)$.

D'après le Lemme 2 du chapitre 1, il est clair que le système bouclé est stable en temps fixe et les erreurs de poursuite convergent vers zéro après un temps de stabilisation T_{max} indépendant du vecteur d'état initial $x(0)$.

2.3. Résultats de simulation

Afin de montrer les performances de l'algorithme de commande proposé dans ce chapitre, nous effectuons une simulation de deux systèmes non linéaires, le premier de deuxième ordre et l'autre de troisième ordre.

Exemple 1 : (Système non linéaire de deuxième ordre) :

On considère le système non linéaire triangulaire de deuxième ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec : $f_1(x_1) = 0.1x_1^2 + x_1e^{(-0.5x_1)}$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2^2$.

Où, x_1 , x_2 et u sont, respectivement, les états et l'entrée de commande du système. Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0) = [0.8, 0]^T$. Les paramètres de conception

sont : $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $c_1 = 5$, $c_2 = 5$, $l_1 = 2$, $l_2 = 2$, $p = \frac{97}{100}$ et $q = \frac{197}{100}$, $v_h = 5$, $v_l = -2$.

L'objectif de la commande est de forcer la sortie de système à suivre la trajectoire de référence : $y_r = 0.5(\sin(t) + \sin(0.5t))$.

Les résultats de simulation correspondants sont donnés respectivement par les figures (2.1) à (2.5).

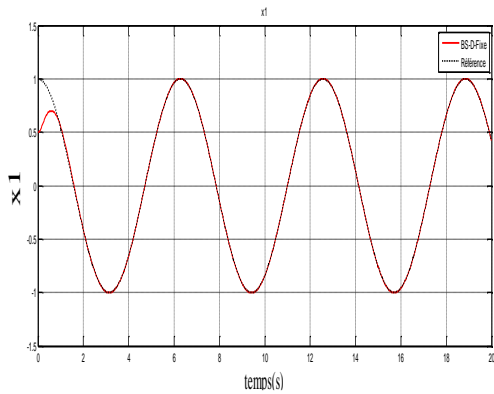


Figure (2.1) : Sortie du système non linéaire

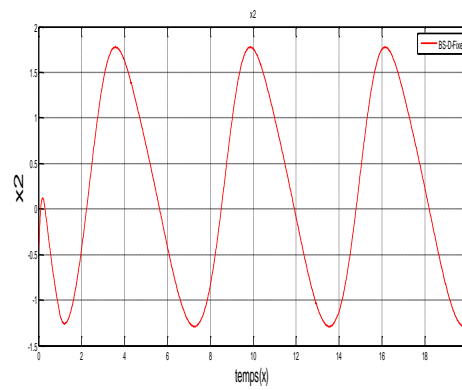


Figure (2.2) : Evolution de la 2^{ième} variable d'état

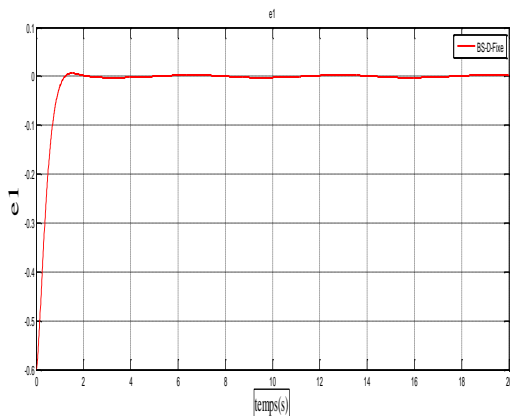


Figure (2.3) : Poursuite de la première erreur

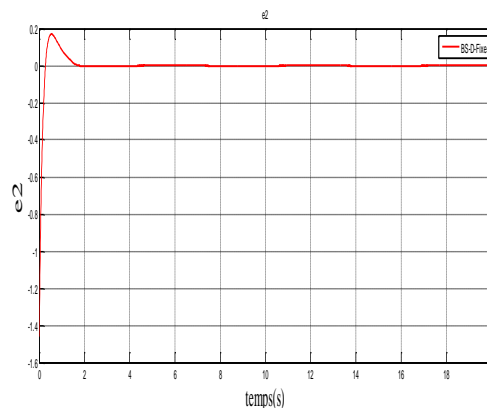


Figure (2.4) : Poursuite de la deuxième erreur

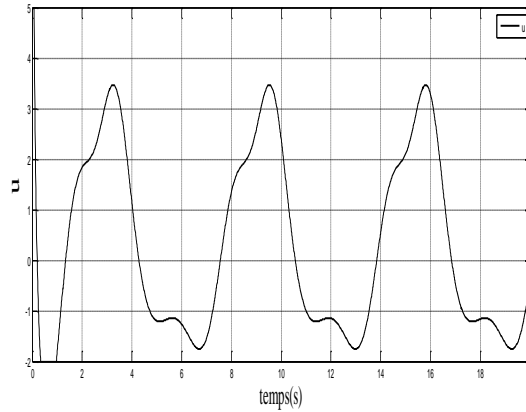


Figure (2.5) : Signal de commande U

Exemple 2 : (Système non linéaire de troisième ordre) :

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec :

$$f_2(x_1, x_2) = 2.2 \sin(x_1) - x_2, \quad f_3(x_1, x_2, x_3) = -5x_2 - 0.5x_3, \quad g_2(x_1, x_2) = 1, \quad g_3(x_1, x_2, x_3) = 1$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit : $x(0) = [0.5, -0.5, 0]^T$.

Les paramètres du contrôleur sont :

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 1, \tau_2 = 0.01 \text{ et } \tau_3 = 0.01, v_h = 10, v_l = -10.$$

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire de référence :

$$y_d = \left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(t) (1 - e^{-0.1t^2}).$$

Les résultats obtenus sont illustrés dans les figures (2.6) à (2.12).

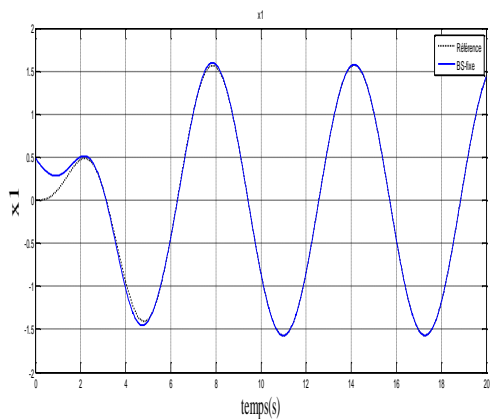


Figure (2.6) : Sortie du système non linéaire

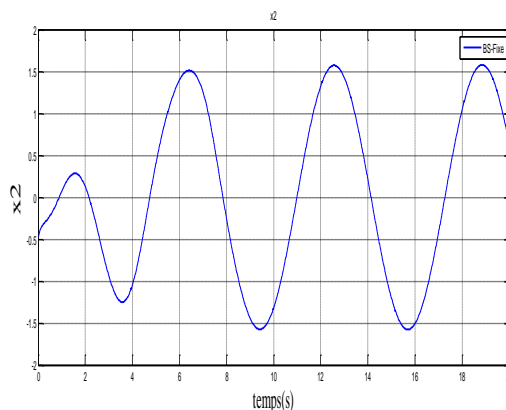


Figure (2.7) : Evolution de la 2^{ème} variable d'état

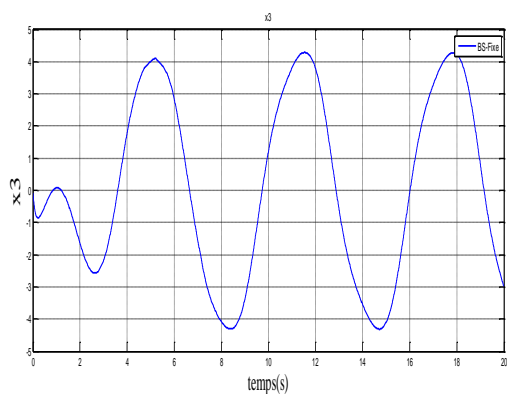


Figure (2.8) : Evolution de la 3^{ème} variable d'état

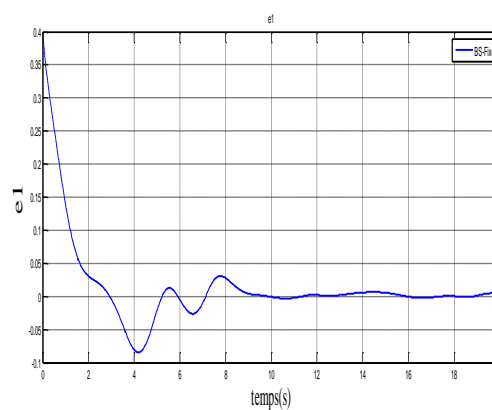


Figure (2.9) : Poursuite de la première erreur

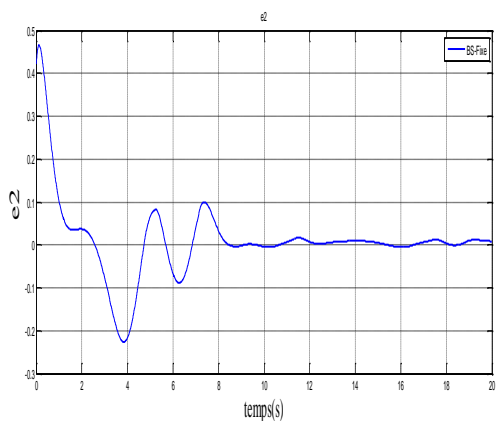


Figure (2.10) : Poursuite de la deuxième erreur

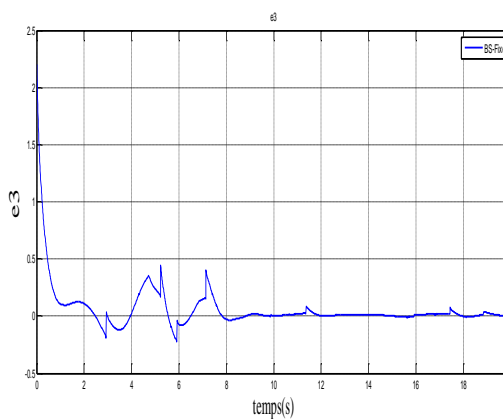


Figure (2.11) : Poursuite de la troisième erreur

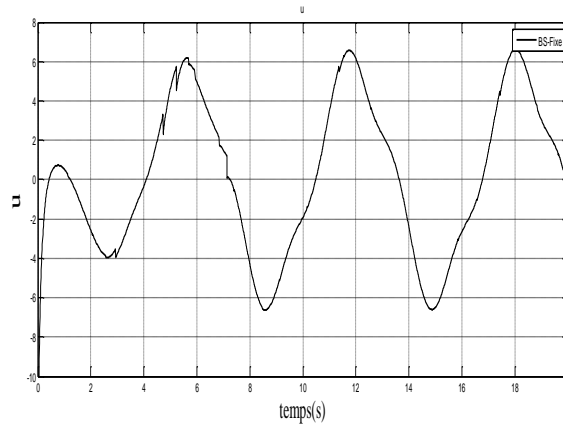


Figure (2.12) : Signal de commande U

Interprétation des résultats

D'après les figures (2.1)-(2.5) et (2.6)-(2.12), respectivement, on remarque que la sortie converge vers sa trajectoire désirée après un temps de stabilisation de 2s pour le premier exemple (du 2^{ième} ordre) et de 6s pour le deuxième exemple (du 3^{ième} ordre). En fait, l'algorithme de commande proposé a montré son efficacité en régime transitoire. Une fois que la convergence est achevée, la commande maintient avec précision les valeurs souhaitées, offrant ainsi une performance de suivi de référence satisfaisante. Il est important de noter que la gestion adéquate de la saturation à l'entrée a permis de limiter les dépassements, contribuant ainsi à la stabilité globale du système.

2.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique de commande par backstepping en temps fixe adaptée à une classe systèmes non linéaires triangulaires avec saturation à l'entrée. Afin d'atténuer l'effet de saturation, nous avons utilisé un système auxiliaire en temps fixe. Les résultats de simulation obtenus à partir des deux exemples d'application démontrent l'efficacité de cette approche, avec des erreurs de poursuite quasiment nulles en régime permanent. Cependant, il convient de noter que cette stratégie de commande présente un inconvénient majeur, à savoir l'augmentation de la complexité due aux dérivées successives des commandes virtuelles. Afin de contourner ce problème, une autre technique de commande, appelée "commande par surface dynamique (DSC)", sera présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 03

Commande par surface dynamique (DSC) en temps fixe avec saturation à l'entrée

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche de commande pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires, appelée commande par surface dynamique (DSC). L'utilisation de cette approche, qui incorpore un filtrage des commandes virtuelles, permet de résoudre le problème de complexité rencontré dans l'approche backstepping. Des filtres non linéaires en temps fixe ont été également utilisés dans chaque étape de conception. La saturation est traitée en utilisant le même système auxiliaire du chapitre précédent. L'approche de Lyapunov est utilisée pour l'analyse de stabilité de la structure de commande proposée. Les résultats de simulations ont été également présentés afin d'évaluer les performances de cette approche de commande.

3.2. La Commande par surface dynamique en temps fixe avec saturation

On considère la même classe des systèmes non linéaires incertains (2.1) décrite dans le chapitre 2. Dans cette section, on va synthétiser une loi de commande par surface dynamique en utilisant des filtres en temps fixe. Le système auxiliaire (2.2) est également utilisé afin de compenser l'effet de saturation. La conception de la loi de commande se fait en n étapes comme suit.

Etape 1 : (i=1)

La première surface est définie comme suit :

$$s_1 = x_1 - x_{1d} - \lambda_1 \quad (3.1)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{x}_{1d} + k_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_1^{2p-1} + l_1 \lambda_1^{2q-1} - g_1 \lambda_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La première commande virtuelle se donne comme suit :

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} \left(f_1 + k_1 (\lambda_1 + s_1) + c_1 (\lambda_1^{2p-1} + s_1^{2p-1}) + l_1 (\lambda_1^{2q-1} + s_1^{2q-1}) - \dot{x}_{1d} \right) \quad (3.3)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle, on utilise une nouvelle variable x_{2d} obtenue par le filtrage de la commande virtuelle x_{2c} en utilisant le filtre en temps fixe suivant :

$$\dot{x}_{2d} = -\alpha_2 (x_{2d} - x_{2c}) - \beta_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2p-1} - \gamma_2 (x_{2d} - x_{2c})^{2q-1} - \mu_2 \text{sign}(x_{2d} - x_{2c}) \quad (3.4)$$

$$x_{2d} = (0), x_{2c} = (0) \quad (3.5)$$

L'erreur du filtre est donnée par :

$$E_2 = x_{2d} - x_{2c} \quad (3.6)$$

La deuxième surface se donne comme suit :

$$s_2 = x_2 - x_{2d} - \lambda_2 \quad (3.7)$$

Ce qui implique que :

$$x_2 = s_2 + x_{2d} + \lambda_2 = s_2 + E_2 + x_{2c} + \lambda_2 \quad (3.8)$$

En remplace (3.3) et (3.8) dans (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= f_1 + g_1 s_2 + g_1 E_2 + g_1 x_{2c} - \dot{x}_{1d} + k_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_1^{2p-1} + l_1 \lambda_1^{2q-1} \\ &= -k_1 s_1 - c_1 s_1^{2p-1} - l_1 s_1^{2q-1} + g_1 s_2 + g_1 E_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Etape i : (i=2, ..., n-1)

La $i^{ème}$ surface est définie comme suit :

$$s_i = x_i - x_{id} - \lambda_i \quad (3.10)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} + g_{i-1} \lambda_{i-1} + k_i \lambda_i + c_i \lambda_i^{2p-1} + l_i \lambda_i^{2q-1} - g_i \lambda_{i+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La $i^{ème}$ commande virtuelle est décrite comme suit :

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(f_i + (s_{i-1} + \lambda_{i-1}) + k_i (s_i + \lambda_i) + c_i (s_i^{2p-1} + \lambda_i^{2p-1}) + l_i (s_i^{2q-1} + \lambda_i^{2q-1}) - \dot{x}_{2d} \right) \quad (3.12)$$

Pour éviter la dérivation de la commande virtuelle, on utilise le filtre en temps fixe suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(i+1)d} &= -\alpha_{i+1} (x_{(i+1)d} - x_{2c}) - \beta_{(i+1)} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})^{2p-1} \\ &\quad - \gamma_{i+1} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})^{2q-1} - \mu_{i+1} \text{sign}(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad x_{(i+1)d} = (0), x_{(i+1)c} = (0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'erreur du filtre est :

$$E_{i+1} = x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c} \quad (3.14)$$

La $i^{ème} + 1$ surface se donne par :

$$s_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)d} - \lambda_{i+1} \quad (3.15)$$

Ce qui implique que :

$$x_{(i+1)} = s_{i+1} + E_{i+1} + x_{(i+1)c} + \lambda_{i+1} \quad (3.16)$$

En remplace (3.12) et (3.16) dans (3.11), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{s}_i &= f_i + g_i x_{(i+1)d} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} - \dot{x}_{id} + g_{i-1} \lambda_{i-1} + k_i \lambda_i + c_i \lambda_i^{2p-1} + l_i \lambda_i^{2q-1} \\ &= -g_{i-1} s_{i-1} - k_i s_i - c_i s_i^{2p-1} - l_i s_i^{2q-1} - g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Etape n :

La $n^{i\text{ème}}$ surface est :

$$s_n = x_n - x_{nd} - \lambda_n \quad (3.18)$$

Sa dérivée temporelle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda}_n \\ &= f_n + g_n v - \dot{x}_{nd} + g_{n-1} \lambda_{n-1} + k_n \lambda_n + c_n \lambda_n^{2p-1} + l_n \lambda_n^{2q-1} + \beta \text{sign}(\lambda_n)\end{aligned}\quad (3.19)$$

La loi de commande réelle v se donne par :

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(f_n + g_{n-1} (e_{n-1} + \lambda_{n-1}) + k_n (e_n + \lambda_n) + c_n (e_n^{2p-1} + \lambda_n^{2p-1}) + l_n (e_n^{2q-1} + \lambda_n^{2q-1}) + \beta \text{sign}(\lambda_n) - \dot{x}_{nd} \right) \quad (3.20)$$

On remplace (3.20) dans (3.19), on obtient :

$$\dot{s}_n = -g_{n-1} s_{n-1} - k_n s_n - c_n s_n^{2p-1} - l_n s_n^{2q-1} \quad (3.21)$$

Analyse de la stabilité

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n E_i^2 \quad (3.22)$$

Donc, sa dérivée est :

$$\dot{v} = s_1 \dot{s}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_i \dot{s}_i + s_n \dot{s}_n + \sum_{i=2}^n E_i \dot{E}_i \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{v} = & s_1 \left(-k_1 s_1 - c_1 s_1^{2p-1} - l_1 s_1^{2q-1} + g_1 E_2 + g_1 s_2 \right) \\
 & + \sum_{i=2}^{n-1} s_i \left(-g_{i-1} s_{i-1} - k_i s_i - c_i s_i^{2p-1} - l_i s_i^{2q-1} + g_i s_{i+1} + g_i E_{i+1} \right) \\
 & + s_n \left(-g_{n-1} s_{n-1} - k_n s_n - c_n s_n^{2p-1} - l_n s_n^{2q-1} \right) \\
 & + \lambda_1 \left(-k_1 \lambda_1 - c_1 \lambda_1^{2p-1} - l_1 \lambda_1^{2q-1} + g_1 \lambda_2 \right) \\
 & + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \left(-g_{i-1} \lambda_{i-1} - k_i \lambda_i - c_i \lambda_i^{2p-1} - l_i \lambda_i^{2q-1} + g_i \lambda_{i+1} \right) \\
 & + \lambda_n \left(-g_{n-1} \lambda_{n-1} - k_n \lambda_n - c_n \lambda_n^{2p-1} - l_n \lambda_n^{2q-1} + g_n \Delta u - \beta \text{sign}(\lambda_n) \right) \\
 & + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1} \left(-\alpha_{i+1} E_{i+1} - \beta_{i+1} E_{i+1}^{2p-1} - \gamma_{i+1} E_{i+1}^{2q-1} - \mu_{i+1} \text{sign}(E_{i+1}) - \dot{x}_{(i+1)c} \right)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \leq & - \sum_{i=1}^n k_i s_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i s_i^{2p} - \sum_{i=1}^n l_i s_i^{2q} + \sum_{i=1}^{n-1} g_i s_i E_{i+1} \\
 & - \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^{2p} - \sum_{i=1}^n l_i \lambda_i^{2q} - |\lambda_n| \left(\beta - |g_n \Delta u| \right) \\
 & - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} E_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{i+1} E_{i+1}^{2p} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{i+1} E_{i+1}^{2q} - \sum_{i=1}^{n-1} |E_{i+1}| \left(\mu_{i+1} - |\dot{x}_{(i+1)c}| \right)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Avant de continuer l'analyse de stabilité, on présente l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.1 [11] :

Les dérivées des commandes virtuelles $\dot{x}_{(i+1)c}$, $i = 1, \dots, n-1$ sont supposées bornées par des constantes positives μ_{i+1} , $0 \leq |\dot{x}_{(i+1)c}| \leq \mu_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$.

En utilisant l'inégalité de Young $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ et le fait que : $|g_i| \leq \eta_i$, on obtient :

$$g_i s_i E_{i+1} \leq \frac{\eta_i}{2} (s_i^2 + E_{i+1}^2) \tag{3.26}$$

D'après l'hypothèse 3.1, l'inégalité (3.26) et le fait que : $|g_n \Delta u| \leq \beta$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} \leq & - \sum_{i=1}^n (k_i - \eta_i/2) s_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i s_i^{2p} - \sum_{i=1}^n l_i s_i^{2q} - \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^{2p} - \sum_{i=1}^n l_i \lambda_i^{2q} \\
 & - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i+1} - \eta_{i+1}/2) E_{i+1}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{i+1} E_{i+1}^{2p} - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{i+1} E_{i+1}^{2q}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Si on choisit : $\sigma_1 = \min(2k_1 - \eta_1, 2k_2 - \eta_2, \dots, 2k_n - \eta_n, 2\alpha_2 - \eta_2, \dots, 2\alpha_n - \eta_n)$,
 $\sigma_2 = \min(2^p c_1, 2^p c_2, \dots, 2^p c_n, 2^p \beta_2, \dots, 2^p \beta_n)$ et
 $\sigma_3 = \min(2^q l_1, 2^q l_2, \dots, 2^q l_n, 2^q \gamma_2, \dots, 2^q \gamma_n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &\leq -\sigma_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^2 \right) - \sigma_2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^{2p} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2p} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^{2p} \right) \\
 &\quad - \sigma_3 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^{2q} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2q} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^{2q} \right) \\
 &\leq -\sigma_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^2 \right) - \sigma_2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^2 \right)^p \\
 &\quad - \sigma_3 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{E_{i+1}}{2} \right)^2 \right)^q \\
 &\leq -\sigma_1 v - \sigma_2 v^p - \sigma_3 v^q
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

En utilisant le Lemme 2 du chapitre 1, on peut facilement conclure que le système en boucle fermée est stable en temps fixe et les erreurs de poursuites convergent vers zéro après un temps de stabilisation T_{max} indépendant des conditions initiales.

3.3. Résultat de simulation :

Afin de montrer la validité de la commande par surface dynamique (DSC) développée dans ce chapitre, nous effectuons une application de cet algorithme de commande sur deux exemples de simulation.

Exemple 1 (système non linéaire de deuxième ordre) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Avec : $f_1(x_1) = 0.1x_1^2 + x_1 e^{-0.5x_1}$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, $g_1(x_1) = 1$ et $g_2(x_1, x_2) = 1$.

Où, x_1, x_2 et u sont, respectivement, les états et l'entrée de commande du système. Les conditions initiales sont choisies comme suit : $x(0) = [0.5, -0.5]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = 1, k_2 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, l_1 = 2, l_2 = 5$, et $\tau_2 = 0.01, v_h =$

10, $v_l = -10$ L'objectif de la commande est de forcer la sortie de système à suivre la trajectoire de référence.

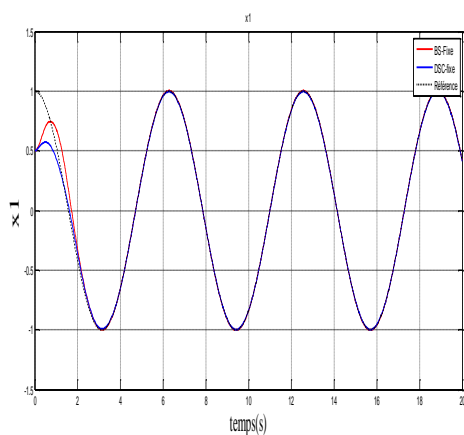


Figure (3.1) : Sortie du système non linéaire

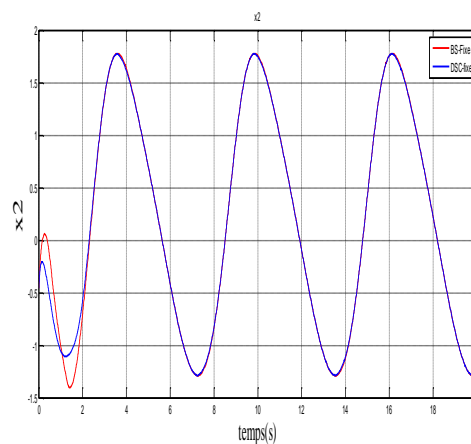


Figure (3.2) : Evolution de la 2^{ème} variable d'état

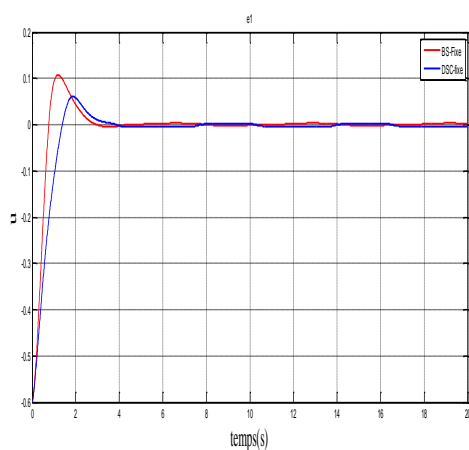


Figure (3.3) : Poursuite de la première erreur

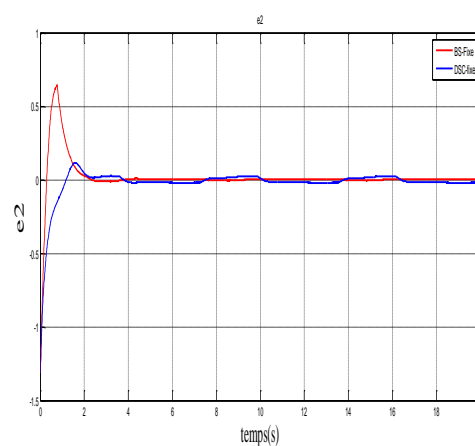


Figure (3.4) : Poursuite de la deuxième erreur

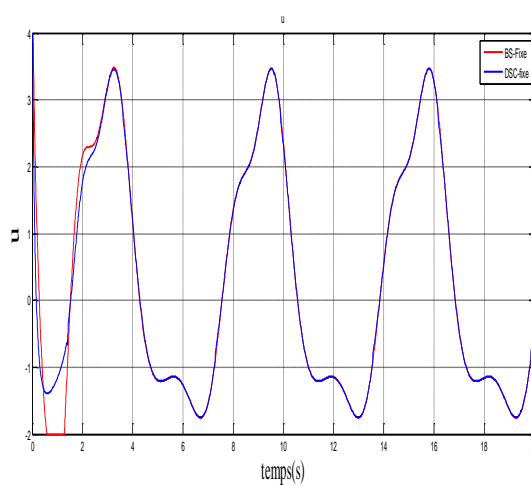


Figure (3.5) : Signal de commande U

Exemple 2 (système non linéaire de troisième ordre) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Avec : $f_2(x_1, x_2) = 2.2 \sin(x_1) - x_2$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = -5x_2 - 0.5x_3$, $g_2(x_1, x_2) = 1$ et $g_3(x_1, x_2, x_3) = 1$.

Les conditions initiales sont choisies comme suit : $x(0) = [0.5, -0.5, 0]^T$.

Les paramètres du contrôleur sont :

$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 1, \tau_2 = 0.01, \tau_3 = 0.01, v_h = 10$ et $v_l = -10$

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire de référence :

$$y_d = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(t)(1 - e^{-0.1t^2}).$$

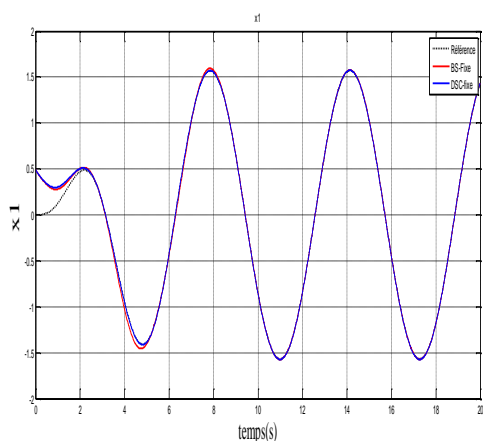


Figure (3.6) : Sortie du système non linéaire

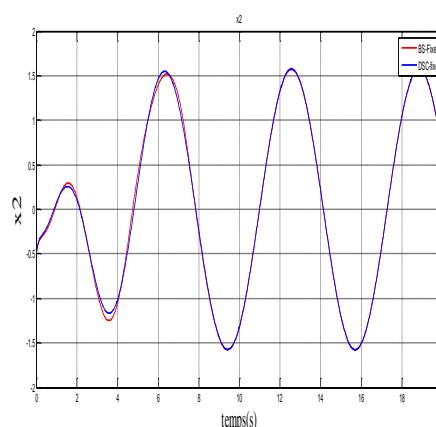


Figure (3.7) : Evolution de la 2^{ème} variable d'état

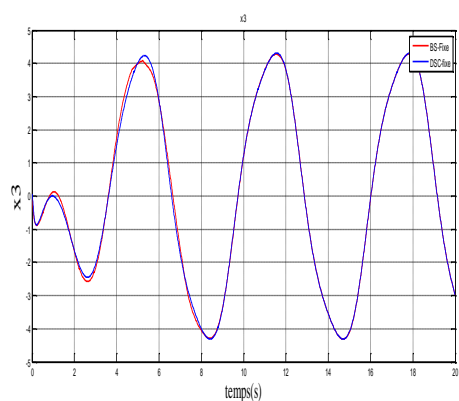


Figure (3.7) : Evolution de la 3^{ème} variable d'état

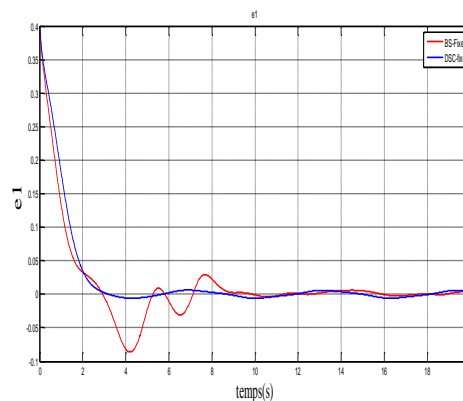


Figure (3.8) : Evolution de la première erreur

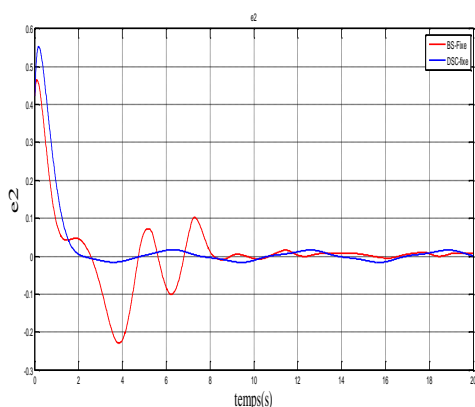


Figure (3.10) : Pursuite de la deuxième erreur

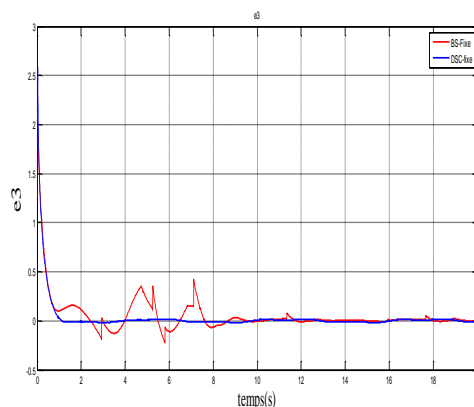


Figure (3.11) : Pursuite de la troisième erreur

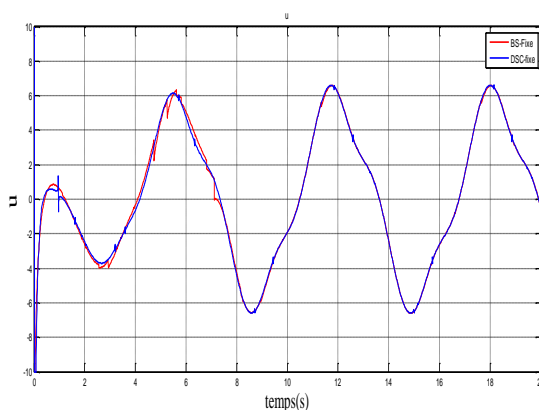


Figure (3.12) : Signal de commande U

Interprétation des résultats

Les résultats de simulation pour les deux exemples d'application ont clairement confirmé la supériorité de la commande par surface dynamique (DSC) par rapport à la commande par backstepping. Selon ces simulations, la DSC s'est avérée plus précise et réactive, atteignant rapidement la référence désirée. De plus, elle donne une meilleure réponse face à la saturation d'entrée par rapport à la commande par backstepping. Ces observations renforcent l'idée que la DSC est une approche plus performante et plus fiable pour la commande des systèmes non linéaires triangulaires soumis à une saturation.

3.4. Conclusion

Ce chapitre a présenté l'approche de commande par surface dynamique (DSC) pour une classe des systèmes non linéaires triangulaires soumis à une saturation à l'entrée. L'objectif était de réduire l'impact de la saturation sur l'actionneur en utilisant le même système auxiliaire mentionné précédemment. La stratégie de commande repose sur

l'utilisation de filtres en temps fixe pour prévenir les problèmes de complexité excessive. Les simulations effectuées sur deux exemples d'application ont montrées que cette approche permet d'assurer la poursuite de trajectoire et de compenser efficacement les effets de la saturation. Ces résultats confirment l'efficacité de l'approche présentée dans ce chapitre face aux contraintes de saturation pour les systèmes non linéaires triangulaires.

Chapitre 4

Commande par backstepping filtré (CFB) en temps fixe avec saturation à l'entrée

4.1. Introduction

Dans ce chapitre nous avons développé une autre approche de commande pour une classe des systèmes non linéaires avec saturation d'entrée. Cette approche de commande est synthétisée via la technique backstepping filtré (CFB). Pour éliminer l'effet de saturation, le même système auxiliaire utilisé précédemment est introduit à chaque étape de conception. Afin de confirmer l'amélioration des performances de commande, une comparaison entre cette stratégie de commande et celle proposée dans le chapitre 3 sera réalisée en simulation à travers les deux exemples d'application.

4.2. Algorithme de commande par backstepping filtré (CFB)

La procédure de conception s'effectue en n étapes comme suit :

Etape 1 :

On considère la première surface comme suit :

$$s_1 = x_1 - y_r - \lambda_1 \quad (4.1)$$

Sa dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{y}_r - \dot{\lambda}_1 \\ &= f_1 + g_1 x_2 - \dot{y}_r + k_1 \lambda_1 + c_1 \lambda_1^{2p-1} + l_1 \lambda_1^{2q-1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La première commande virtuelle x_{2c} est définie par :

$$x_{2c} = -\frac{1}{g_1} (f_1 + k_1 (s_1 + \lambda_1) + c_1 (s_1^{2p-1} + \lambda_1^{2p-1}) + l_1 (s_1^{2q-1} + \lambda_1^{2q-1}) - \dot{y}_r) \quad (4.3)$$

Maintenant, la commande virtuelle x_{2c} est passée à travers un filtre passe-bas avec une constante de temps $\tau_2 \gg 0$ pour obtenir x_{2d} , i.e.

$$\dot{x}_{2d} = -\frac{1}{\tau_2} (x_{2d} - x_{2c}), \quad x_{2d}(0) = x_{2c}(0) \quad (4.4)$$

Définissons la deuxième surface $s_2 = x_2 - x_{2d} - \lambda_2$, donc, on trouve

$$\begin{aligned} x_2 &= s_2 + x_{2d} + \lambda_2 \\ &= s_2 + (x_{2d} - x_{2c}) + x_{2c} + \lambda_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

En remplaçant (4.3) et (4.5) dans (4.2), on obtient

$$\dot{s}_1 = -k_1 s_1 - c_1 s_1^{2p-1} - l_1 s_1^{2q-1} + g_1 s_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}) \quad (4.6)$$

On définit la première surface compensée de la manière suivante :

$$v_1 = s_1 - z_1 \quad (4.7)$$

Où z_1 est un signal de compensation utilisé pour annuler l'effet de l'erreur ($x_{2d} - x_{2c}$).

La dynamique de z_1 est exprimée par :

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1 - c_1 z_1^{2p-1} - l_1 z_1^{2q-1} + g_1 z_2 + g_1 (x_{2d} - x_{2c}), \quad z_1(0) = 0 \quad (4.8)$$

Où z_2 sera défini dans l'étape suivante.

A partir de (4.6) et (4.8), la dérivée de v_1 est obtenue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \dot{s}_1 - \dot{z}_1 \\ &= -k_1 s_1 - c_1 s_1^{2p-1} - l_1 s_1^{2q-1} + g_1 s_2 + \cancel{g_1 (x_{2d} - x_{2c})} - (-k_1 z_1 - c_1 z_1^{2p-1} - l_1 z_1^{2q-1} + g_1 z_2 + \cancel{g_1 (x_{2d} - x_{2c})}) \\ &= -k_1 (s_1 - z_1) - c_1 (s_1^{2p-1} - z_1^{2p-1}) - l_1 (s_1^{2q-1} - z_1^{2q-1}) + g_1 (s_2 - z_2) \\ &\leq -k_1 (s_1 - z_1) - c_1 (s_1 - z_1)^{2p-1} - l_1 (s_1 - z_1)^{2q-1} + g_1 (s_2 - z_2) \\ &\leq -k_1 v_1 - c_1 v_1^{2p-1} - l_1 v_1^{2q-1} + g_1 v_2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Etape i : (i=2, ..., i=n-1)

Définissons la $i^{\text{ème}}$ surface comme suit :

$$s_i = x_i - y_{id} - \lambda_i \quad (4.10)$$

La dérivée temporelle de s_i peut s'écrire par :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= \dot{x}_i - \dot{x}_{id} - \dot{\lambda}_i \\ &= f_i + g_i x_{i+1} - \dot{x}_{id} + g_{i-1} \lambda_{i-1} + k_i \lambda_i + c_i \lambda_i^{2p-1} + l_i \lambda_i^{2q-1} - g_i \lambda_{i+1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Choisissons maintenant la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ sous la forme :

$$x_{(i+1)c} = -\frac{1}{g_i} \left(f_i + g_{i-1} (s_{i-1} + \lambda_{i-1}) + k_i (s_i + \lambda_i) + c_i (s_i^{2p-1} + \lambda_i^{2p-1}) + l_i (s_i^{2q-1} + \lambda_i^{2q-1}) - \dot{x}_{2d} \right) \quad (4.12)$$

Maintenant, la commande virtuelle $x_{(i+1)c}$ est passée à travers un filtre linéaire passe-bas avec une constante de temps $\tau_{(i+1)} > 0$ pour obtenir $x_{(i+1)d}$, i.e.

$$\dot{x}_{(i+1)d} = -\frac{1}{\tau_{i+1}} (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad x_{(i+1)d}(0) = (0), x_{(i+1)c}(0) = (0) \quad (4.13)$$

Considérons la surface $s_{(i+1)} = x_{(i+1)} - x_{(i+1)d} - \lambda_{(i+1)}$, il en résulte que

$$x_{i+1} = s_{i+1} + (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) + x_{(i+1)c} + \lambda_{i+1} \quad (4.14)$$

En remplaçant (4.12) et (4.14) dans (4.11), on obtient :

$$\dot{s}_i = -g_{i-1}s_{i-1} - k_i s_i - k_i s_i^{2p-1} - k_i s_i^{2q-1} + g_i s_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}) \quad (4.15)$$

Maintenant, la $i^{\text{ème}}$ surface compensée est définie par :

$$v_i = s_i - z_i \quad (4.16)$$

Où z_i est le $i^{\text{ème}}$ signal de compensation qui est utilisé pour d'éliminer l'effet de l'erreur $(x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})$.

La dynamique de z_i s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{z}_i = -g_{i-1}z_{i-1} - k_i z_i - k_i z_i^{2p-1} - k_i z_i^{2q-1} + g_i z_{i+1} + g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c}), \quad z_i(0) = 0 \quad (4.17)$$

A partir de s_i et z_i , la dérivée de v_i peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \dot{s}_i - \dot{z}_i \\ &= g_{i-1}s_{i-1} - k_i s_i - k_i s_i^{2p-1} - k_i s_i^{2q-1} + g_i s_{i+1} + \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})} \\ &\quad - (-g_{i-1}z_{i-1} - k_i z_i - k_i z_i^{2p-1} - k_i z_i^{2q-1} + g_i z_{i+1} + \cancel{g_i (x_{(i+1)d} - x_{(i+1)c})}) \\ &= -g_{i-1}(s_{i-1} - z_{i-1}) - k_i (s_i - z_i) - k_i (s_i^{2p-1} - z_i^{2p-1}) - k_i (s_i^{2q-1} - z_i^{2q-1}) + g_i (s_{i+1} - z_{i+1}) \\ &\leq -g_{i-1}(s_{i-1} - z_{i-1}) - k_i (s_i - z_i) - k_i (s_i - z_i)^{2p-1} - k_i (s_i - z_i)^{2q-1} + g_i (s_{i+1} - z_{i+1}) \\ &\leq -g_{i-1}v_{i-1} - k_i v_i - k_i v_i^{2p-1} - k_i v_i^{2q-1} + g_i v_{i+1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Etape n :

La $n^{\text{ème}}$ surface est définie par :

$$s_n = x_n - y_{nd} - \lambda_n \quad (4.19)$$

La dérivée temporelle de s_n peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= \dot{x}_n - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda}_n \\ &= f_n + g_n u - \dot{x}_{nd} - \dot{\lambda}_n \\ &= f_n + \cancel{g_n u} - \dot{x}_{nd} + g_{n-1} \lambda_{n-1} + k_n \lambda_n + c_n \lambda_n^{2p-1} + l_n \lambda_n^{2q-1} - \cancel{g_n u} + g_n v + \beta \text{sign}(\lambda_n) \end{aligned} \quad (4.20)$$

On choisit la loi de commande actuelle v comme suit :

$$v = -\frac{1}{g_n} \left(f_n + g_{n-1} (e_{n-1} + \lambda_{n-1}) + k_n (e_n + \lambda_n) + c_n (e_n^{2p-1} + \lambda_n^{2p-1}) + l_n (e_n^{2q-1} + \lambda_n^{2q-1}) + \beta \text{sign}(\lambda_n) - \dot{x}_{nd} \right) \quad (4.21)$$

En remplaçant (4.21) dans (4.20), on obtient :

$$\dot{s}_n = -g_{n-1}s_{n-1} - k_n s_n - c_n s_n^{2p-1} - l_n s_n^{2q-1} \quad (4.22)$$

La dynamique du signal de compensation correspondant est décrite par :

$$\dot{z}_n = -k_n z_n - c_n z_n^{2p-1} - l_n z_n^{2q-1} - g_{n-1} z_{n-1}, z_n(0) = 0 \quad (4.23)$$

Définissons la $n^{ème}$ surface compensée v_n , telle que :

$$v_n = s_n - z_n \quad (4.24)$$

A partir de s_n et (4.22), la dérivée de (4.23) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{v}_n &= \dot{s}_n - \dot{z}_n \\ &= -g_{n-1} s_{n-1} - k_n s_n - c_n s_n^{2p-1} - l_n s_n^{2q-1} + g_{n-1} z_{n-1} + k_n z_n + c_n z_n^{2p-1} + l_n z_n^{2q-1} \\ &\leq -g_{n-1} v_{n-1} - k_n v_n - c_n v_n^{2p-1} - l_n v_n^{2q-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Analyse de la stabilité

On considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \quad (4.26)$$

La dérivée de v peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= v_1 \dot{v}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} v_i \dot{v}_i + v_n \dot{v}_n + \lambda_1 \dot{\lambda}_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \dot{\lambda}_i + \lambda_n \dot{\lambda}_n \\ &\leq v_1 (-k_1 v_1 - c_1 v_1^{2p-1} - l_1 v_1^{2q-1} + g_1 v_2) + \sum_{i=2}^{n-1} v_i (-g_{i-1} v_{i-1} - k_i v_i - c_i v_i^{2p-1} - l_i v_i^{2q-1} + g_i v_{i+1}) \\ &\quad + v_n (-g_{n-1} v_{n-1} - k_n v_n - c_n v_n^{2p-1} - l_n v_n^{2q-1}) + \lambda_1 (-k_1 \lambda_1 - c_1 \lambda_1^{2p-1} - l_1 \lambda_1^{2q-1} + \lambda_2) \\ &\quad + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i (-g_{i-1} \lambda_{i-1} - k_i \lambda_i - c_i \lambda_i^{2p-1} - l_i \lambda_i^{2q-1} + g_{i+1} \lambda_{i+1}) \\ &\quad + \lambda_n (-g_{n-1} \lambda_{n-1} - k_n \lambda_n - c_n \lambda_n^{2p-1} - l_n \lambda_n^{2q-1} + g_n \Delta u - \beta \text{sign}(\lambda_n)) \\ &\leq -\sum_{i=1}^n k_i (v_i^2 + \lambda_i^2) - \sum_{i=1}^n c_i (v_i^{2p} + \lambda_i^{2p}) - \sum_{i=1}^n l_i (v_i^{2q} + \lambda_i^{2q}) - |\lambda_n| (\beta - |g_n \Delta u|) \end{aligned} \quad (4.27)$$

En utilisant le fait que : $|\lambda_n g_n \Delta u| \leq |\lambda_n| \beta$, l'équation (4.27) devienne :

$$\begin{aligned} \dot{v} &\leq -\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 \right) - \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^{2p} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2p} \right) - \alpha_3 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^{2q} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^{2q} \right) \\ &\leq -\alpha_1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 \right) - \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 \right)^p - \alpha_3 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{2} \right)^2 \right)^q \\ &\leq -\alpha_1 v - \alpha_2 v^p - \alpha_3 v^q \end{aligned} \quad (4.28)$$

Avec $\alpha_1 = \min(2k_1, 2k_2, \dots, 2k_n)$, $\alpha_2 = \min(2^p c_1, 2^p c_2, \dots, 2^p c_n)$ et $\alpha_3 = \min(2^q l_1, 2^q l_2, \dots, 2^q l_n)$.

En utilisant le Lemme 2 du chapitre 1, on peut facilement conclure que le système en boucle fermée est stable en temps fixe et les erreurs de poursuite convergent vers zéro après un temps de stabilisation T_{max} indépendant du vecteur d'état initial $x(0)$.

4.3. Exemples d'application

Pour montrer l'efficacité de la commande par CFB développée dans ce chapitre, nous effectuons une simulation sur les deux systèmes non linéaires déjà étudiés précédemment.

Exemple 1 (Système non linéaire de deuxième ordre) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Avec : $f_1(x_1) = 0.1x_1^2 + x_1e^{(-0.5x_1)}$ et $f_2(x_1, x_2) = x_1x_2^2$.

Les conditions initiales sont choisies comme suite : $x(0) = [0.5, -0.5]^T$. Les paramètres de conception sont : $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, $\tau = 0.01$, $v_h = 5$ et $v_l = -2$.

Les résultats de simulation sont donnés par les figures ci-dessous :

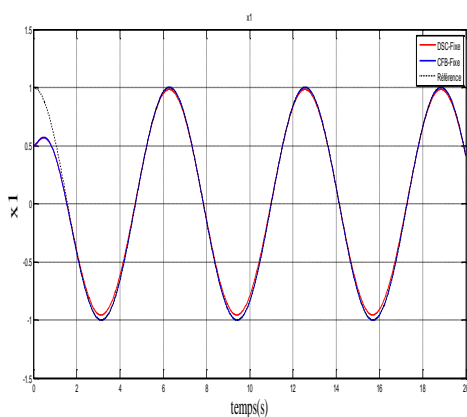


Figure (4.1) : Sortie du système non linéaire.

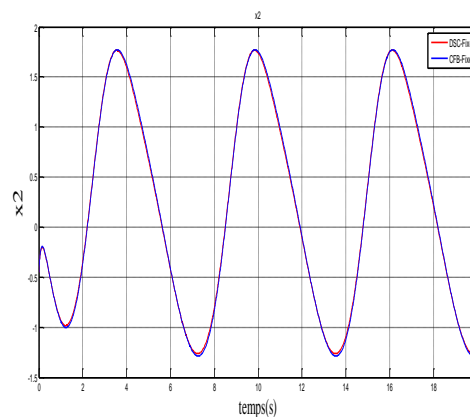


Figure (4.2) : Evolution de la 2^{ème} variable d'état

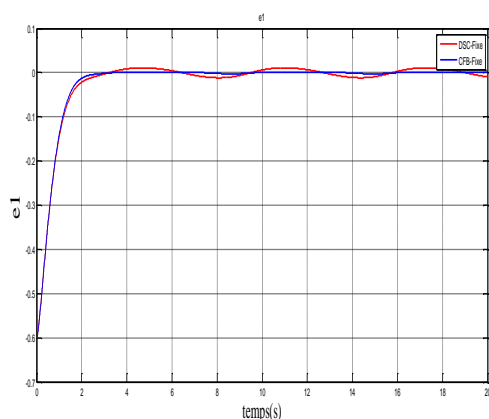


Figure (4.3) : Poursuite de la première erreur

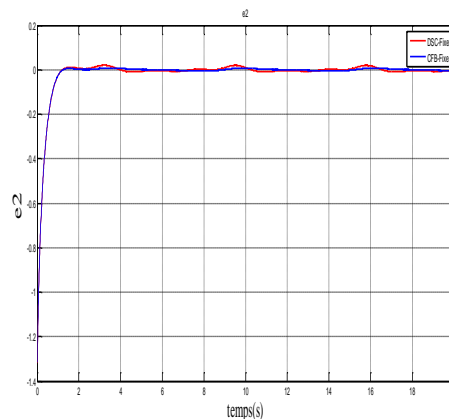


Figure (4.4) : Poursuite de la deuxième erreur

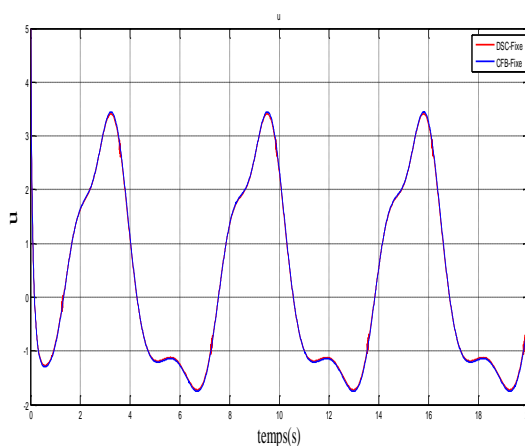


Figure (4.5) : Signal de commande U

Exemple 2 (système non linéaire de troisième ordre) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3(x_1, x_2, x_3)u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Avec : $f_2(x_1, x_2) = 2.2 \sin(x_1) - x_2$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = -5x_2 - 0.5x_3$, $g_2(x_1, x_2) = 1$ et $g_3(x_1, x_2, x_3) = 1$.

Les conditions initiales sont choisies comme suit : $x(0) = [0.5, -0.5, 0]^T$.

Les paramètres du contrôleur sont :

$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1, l_1 = 1, l_2 = 1, l_3 = 1, \tau_2 = 0.01, \tau_3 = 0.01, v_h = 5$ et $v_l = -2$.

L'objectif de commande est de forcer la sortie du système à suivre la trajectoire de référence :

$$y_d = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(t)(1 - e^{-0.1t^2}).$$

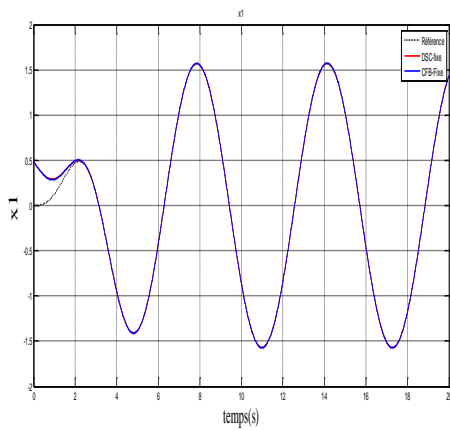


Figure (4.6) : Sortie de système non linéaire

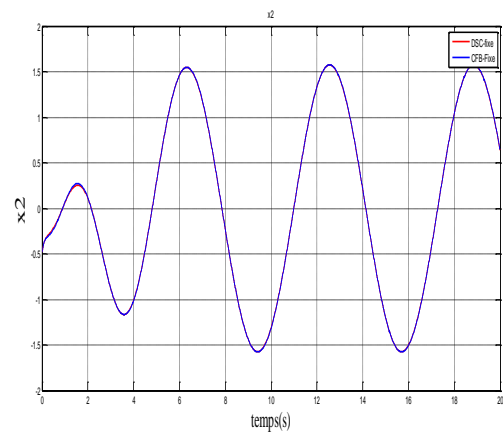


Figure (4.7) : Evolution de la 2^{ème} variable d'état

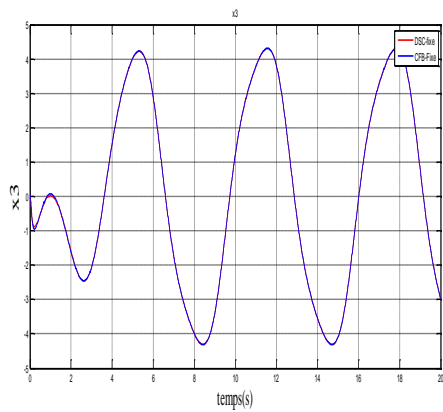


Figure (4.8) : Evolution de la 3^{ème} variable d'état

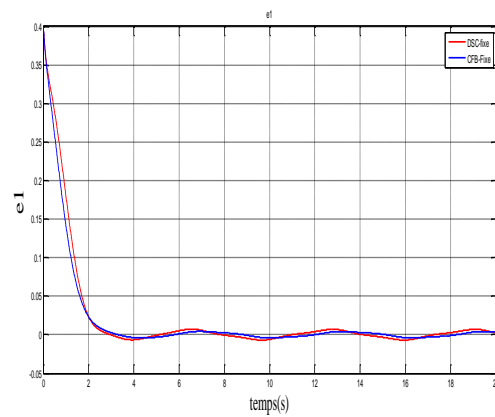


Figure (4.9) : Poursuite de la première erreur

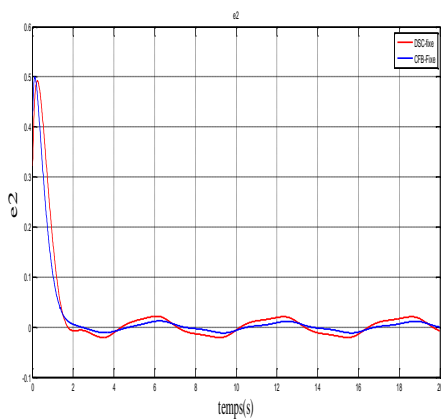


Figure (4.10) : Poursuite de la deuxième erreur

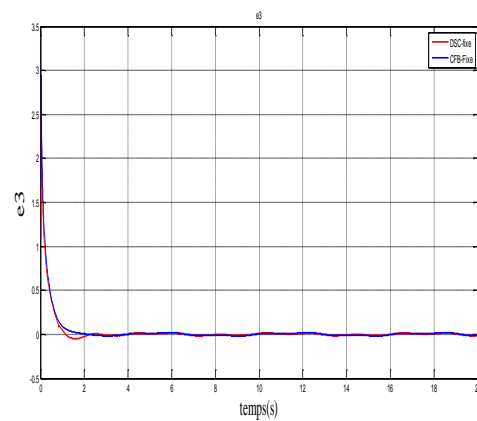


Figure (4.11) : Poursuite de la troisième erreur

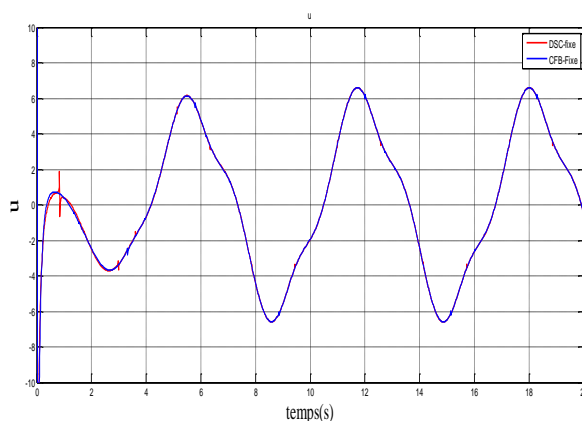


Figure (4.12) : Signal de commande U

Interprétations

Les résultats de simulation ont révélés que la commande par surface dynamique (DSC) et la commande par backstepping filtré (CFB) ont montrées des performances similaires avec une légère supériorité en termes de poursuite pour la CFB. En fait, les deux approches ont réussis à garantir la poursuite de trajectoire avec une précision et une réactivité élevées. Elles ont également montrés une capacité à compenser efficacement la saturation à l'entrée, limitant les dépassements et maintenant les signaux de commande dans les limites spécifiées. Ces observations indiquent que la DSC et la CFB peuvent être considérées comme des solutions efficaces pour les systèmes non linéaires triangulaires soumis à une saturation. Les performances similaires entre les deux approches soulignent l'importance de choisir la méthode la plus adaptée en fonction des contraintes spécifiques du système et des objectifs de commande visés.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche de commande par backstepping filtré (CFB) pour une classe des systèmes non linéaires avec saturation à l'actionneur. Afin d'éviter les problèmes de complexité, cette méthode utilise des filtres linéaires passe-bas, ainsi que des filtres de compensation en temps fixe. L'objectif était de remédier à l'effet de saturation en utilisant un système auxiliaire en temps fixe. Pour évaluer l'efficacité de cette approche, nous l'avons appliquée sur deux systèmes non linéaires. Les résultats de simulation ont montrés que l'approche CFB offre d'excellents résultats en termes de rapidité et de poursuite. Ces observations confirment l'efficacité de la méthode CFB dans la compensation de la saturation et sa pertinence pour les systèmes non linéaires triangulaires.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire s'est concentré sur l'étude et le développement des quelques techniques de commande en temps fixe pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires en présence d'une saturation d'actionneur. Les techniques de base envisagées sont : le backstepping, la DSC et la CFB. En utilisant le théorème de Lyapunov, des algorithmes de commande basés sur chaque technique ont été conçus. Les simulations ont démontrées que tous les algorithmes de commande par backstepping, DSC et CFB offrent de bonnes performances en termes de rapidité et de poursuite.

Dans ce domaine de recherche, les concepts formels peuvent souvent être complexes, c'est pourquoi le premier chapitre a été consacré à l'explication des notions essentielles de stabilité et de quelques lemmes utilisés dans la commande des systèmes non linéaires en temps fixe.

Le deuxième chapitre a présenté le développement d'un algorithme de commande par backstepping en temps fixe pour une classe de systèmes non linéaires triangulaires avec saturation à l'entrée. Une approche de conception a été proposée pour assurer l'extension de la stabilité en temps fixe, et les résultats des simulations ont démontrés de bonnes performances du système en boucle fermée.

Le troisième chapitre a introduit l'utilisation de la technique de commande par surface dynamique (DSC) en temps fixe afin de surmonter le problème d'explosion de complexité associé au backstepping. L'approche de commande proposée a été conçue en utilisant des filtres non linéaires en temps fixe.

Enfin, le quatrième chapitre a présenté une stratégie de commande par backstepping filtré (CFB) en temps fixe traitant la même problématique considérée précédemment. Cette approche utilise des filtres linéaires passe-bas du premier ordre pour éviter l'explosion de complexité. L'utilisation de la fonction "signe" dans le système auxiliaire, les filtres et la loi de commande assure une stabilité en temps fixe du système en boucle fermée. Des résultats de simulations ont été présentés pour valider cette approche.

Les performances de toutes les stratégies de commande proposées ont été évaluées à travers deux exemples non linéaires avec des différentes conditions de simulation. Les résultats correspondants ont montrés la supériorité des performances de l'approche CFB par rapport aux deux autres techniques.

Comme perspectives pour ce travail, nous proposons :

- L'application des techniques de commande proposées sur un prototype réel.
- La conception des algorithmes de commande en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires avec saturation à l'entrée et contraintes sur l'état/sortie.
- La conception des stratégies de commande en temps fixe pour d'autres non-linéarités d'actionneur, telles que : l'hystérésis et la zone morte.

- [1] F. Alouani. « commande par logique floue appliquée aux pendules inversés et au simulateur de vol d'hélicoptère : Simulation et expérimentation » . Magister en électronique. Université de Mohamed Boudiaf de M'sila. 2006
- [2] A. Polyakov, Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012.
- [3] Mohammed BOULASSEL. « Commande par Backstepping Filtré Adaptative D'une Classe des Systèmes Non Linéaires Incertains avec Saturation d'Entrée ». PFE. Université de Mohamed Seddik Benyahia ,Jijel .2018.
- [4] Hadjer ABDERREZEK. « Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires ». Magister en Automatique. Université de Ferhat Abbas ,Setif, 2014.
- [5] Mohammed HADDAD, « Contribution à la commande des systèmes non linéaires incertains avec contraintes » ,Thèse de doctorat , Université de Mohamed Seddik Benyahia, Jijel,2021.
- [6] <https://elearning.univ-msila.dz/moodle/mod/resource/view.php?id=31670>
- [7] Nesrine KIAS, Nezha BOUHADICHE . «Commande adaptative par DSC pour une classe des système non linéaire incertains. mémoire de PFE. Université de Mohamed Seddik Benyahia, Jijel. 2016.
- [8] Abde Rrezak BENASKER. « Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires », Université de LAVAL QEBEC. Février 2000.
- [9] Ahsene BOUBAKIR, « Contribution à la commande sans modèle des système non linéaires avec application », Thèse de doctorat, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2014.
- [10]Karim BEKKA,« Applications de l'intégrale de Riemann ».Université de Rennes1.france.2017.
- [11]https://www.gipsalab.grenobleinp.fr/~christian.jutten/mescours/Asservissement_non_lineaire.pdf
- [12] J. Alonso-Mora, T. Naegeli, R. Siegwart, and P. Beardsley, «Collision avoidance for aerial vehicles in multi-agent scenarios », Autonomous Robots, vol. 39, no. 1, pp. 101–121, 2015.

- [13] C. Chen, L. Li, H. Peng et al., «A new fixed-time stability theorem and its application to the fixed-time synchronization of neural networks». Neural Networks, 2020.
- [14] Kunal Garg, «Advances in the Theory of Fixed-time Stability with Applications in Constrained Control and Optimization ».

Résumé : L'objectif de ce travail est de développer quelques techniques de commande en temps fixe pour une classe des systèmes non linéaires triangulaires avec saturation à l'entrée. Les techniques envisagées sont : le backstepping, la DSC et la CFB. Ces algorithmes de commande ont été conçus en utilisant le théorème de Lyapunov. Les simulations ont montrés que les méthodes développées offrent de bonnes performances en termes de stabilité et de poursuite.

Mots clé : Commande par backstepping, Commande par surface dynamique (DSC), commande par backstepping filtré (CFB), Système non linéaire, Saturation, théorème de Lyapunov.

Abstract: The aim of this work is to develop some fixed-time control techniques for a class of nonlinear strict feedback systems with input saturation. The considered techniques so called: backstepping, DSC and CFB. These control algorithms have been designed using Lyapunov's theorem. Simulations have shown that the developed control methods offer good performance in terms of stability and trajectory tracking.

Key words: Backstepping control, Dynamic surface control (DSC), Command filtered backstepping (CFB), Nonlinear system, Saturation, Lyapunov theorem.

ملخص: يهدف هذا العمل إلى تطوير بعض تقنيات التحكم في وقت ثابت لفئة من الأنظمة غير الخطية المثلثية مع تشبع المدخل. تتضمن التقنيات المدروسة: التراجع المرحلي، والتراجع المرحلي المرشح، والسطح الديناميكي تم تصميم هذه خوارزميات التحكم باستخدام نظرية ليابونوف. أظهرت المحاكاة أن الطرق المطورة توفر أداءً جيدًا من حيث الاستقرار والتتبع

الكلمات الرئيسية: التحكم بواسطة التراجع المرحلي، التحكم بواسطة السطح الديناميكي، التحكم بواسطة التراجع المرحلي المرشح، النظام غير الخطي، التشبع، نظرية ليابونوف.