République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.

Option : EDP et Applications.

Thème

Quelques applications de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Présenté par :

– **Boumaza Samiha**

– **Guettiche Amira**

Devant le jury :

Président	: **S. Ariche**	M.C.B	Université de Jijel
Encadreur	:**W. Chikouche**	M.C.A	Université de Jijel
Examinateur	:**S. Lounis**	M.C.B	Université de Jijel

Promotion **2017/2018**

Table des matières

Introduction

Le nom de **la théorie spectrale** fut introduit par **David Hilbert** dans sa formulation initiale de la théorie des espaces de Hilbert. La théorie spectrale est une théorie étendant à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux, la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrice. Bien que ces idées viennent aux départ du développement de l'algèbre linéaire, elles sont également liées à l'étude des fonctions analytiques, parce que les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles des fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre.

La théorie spectrale est très utile en physique, en particulier pour les phénomènes de vibrations (à l'application des spectres d'émission des atomes) et aussi en génie civil. Pourtant de nombreux problèmes physiques ou mécaniques se ramènent à la résolution d'un problème aux valeurs propres dont l'inconnue est une fonction, ou à une équation aux dérivées partielles linéaire qui peut être étudiée par des méthodes spectrales.

Notre mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on rappelle les fondements de la théorie spectrale concernant un certain type d'opérateurs autoadjoints dits à résolvante compacte. Dans le deuxième chapitre, cette théorie sera appliquée à l'étude des valeurs propres et des fonctions propres des équations aux dérivées partielles. On s'intéressera particulièrement au problème de Sturm-Liouville et au problème du laplacien avec condition de Dirichlet. Les résultats de ce chapitre seront utilisés au chapitre trois pour résoudre des problèmes d'évolution en temps. On analysera des équations instationnaires de type parabolique avec comme exemple l'équation de la chaleur, et de type hyperbolique avec comme exemple l'équation des ondes. Enfin, une Annexe vient compléter ce manuscrit, comprenant des rappels sur les notions de base utilisées le long du mémoire telles que les opérateurs bornés, les espaces de Sobolev et les espaces de fonctions à valeurs vectorielles.

Chapitre 1

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Nous présentons dans ce chapitre les fondements de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints a résolvante compacte. Cette théorie est particulièrement utile et importante pour l'étude des équations aux dérivées partielles. En effet, un des buts premiers de l'étude d'un opérateur est la détermination de son spectre, qui est la généralisation en dimension infinie de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice. Dans les cas les plus simples, notamment pour les opérateurs dits a résolvante compacte, on peut déterminer complètement de manière qualitative le spectre d'un opérateur. Ceci permet de résoudre des problèmes aux valeurs propres définis par une équation aux dérivées partielles, ainsi que des problèmes d'évolution en mécanique, physique, etc, comme l'équation de la chaleur, l'équation des ondes.

1.1 Introduction aux opérateurs non bornés

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 *Un opérateur A non borné de E dans F est une application linéaire $A : D(A) \subset E \to F$. L'ensemble $D(A)$ est appelé **domaine** de A.*

On définit les ensembles suivants :

- **Graphe** de A : $G(A)=\{(u, Au),\, u \in D(A)\} \subset E \times F$.
- **Image** de A : $\mathrm{Im}(A)=\{Au, u \in D(A)\} \subset F$.
- **Noyau** de A : $\ker(A)=\{u \in D(A),\, Au = 0\} \subset E$.

Définition 1.1.2 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \to F$ est dit fermé, si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

Remarque 1.1.3 *A est fermé si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to v$ dans F, on a : $u \in D(A)$ et $Au = v$.*

Proposition 1.1.4 *Si $A : D(A) \subset E \to F$ est fermé alors, $\ker(A)$ est fermé dans E.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\ker(A)$ (i.e. $u_n \in D(A)$ et $Au_n = 0$) telle que (u_n) converge dans E. Soit $u := \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans E. Comme la suite (Au_n) converge vers 0 dans F et A est fermé, on en déduit que $u \in D(A)$ et $Au = 0$, i.e. $u \in \ker(A)$. ■

Proposition 1.1.5 *Si $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F alors, A^{-1} est également fermé.*

Preuve : Par hypothèse, on a : $D(A^{-1}) = F$. Soit (v_n) une suite de F telle que $v_n \to v$ dans F et $u_n := A^{-1}v_n \to w$ dans E. alors, $u_n \in D(A)$ et $v_n = Au_n$. Comme A est fermé, on déduit que $w \in D(A)$ et $v = Aw$ i.e. $w = A^{-1}v$. Par conséquent A^{-1} est fermé. ∎

Corollaire 1.1.6 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F. Alors, A^{-1} est borné de F dans E.*

Preuve : Conséquence directe de la proposition précédente et du théorème du graphe fermé (Théorème 4.2.3).

Proposition 1.1.7 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire. Alors, A est fermé ssi $D(A)$ muni de la norme dite du graphe :*

$$\|u\|_{D(A)} = (\|u\|_E^2 + \|Au\|_F^2)^{1/2},$$

est un espace de Banach.

1.2 Spectre d'un opérateur

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé à domaine dense.

Définition 1.2.1 *On pose*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{K}\,; A - \lambda I \textit{ est inversible}\},\ \sigma(A) := \mathbb{K} \setminus \rho(A).$$

*On dit que $\rho(A)$ est l'ensemble **résolvant** et $\sigma(A)$ **le spectre** de A.*
Pour $\lambda \in \rho(A)$, on pose

$$R(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1},$$

*l'opérateur $R(\lambda)$ est appelé **résolvante** de A.*

Remarque 1.2.2 *Grâce au théorème de l'isomorphisme de Banach, on a*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}\,;\ A - \lambda I \textit{ est bijectif }\}.$$

Remarque 1.2.3 *Si $\lambda \in \sigma(A)$, alors*

1. *soit $(A - \lambda I)$ n'est pas injectif i.e. $\exists\, u \in D(A);\ u \neq 0$ et $Au = \lambda u$. On dit que λ est **une valeur propre** de A. On appelle sous-espace propre associé à λ l'espace $\ker(A - \lambda I)$. La dimension de $\ker(A - \lambda I)$ est appelée **la multiplicité** de λ.*
2. *soit $A - \lambda I$ est injectif mais non surjectif i.e. $Im(A - \lambda I) \neq E$.*

Lemme 1.2.4 *$\rho(A)$ est un ouvert et $\sigma(A)$ est un fermé dans $\mathbb{K}$. De plus, on a pour $\lambda,\ \lambda_0 \in \rho(A)$*

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0)R(\lambda).$$

*Cette identité est appelée : **Identité de la résolvante**.*

Preuve : Soient $\lambda,\ \lambda_0 \in \rho(A)$, on a

$$(A-\lambda I) = (A-\lambda_0 I) - (\lambda-\lambda_0)I = (A-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}].$$

On sait d'après la Proposition 4.2.5, que l'opérateur $(I-(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1})$ est inversible si

$$\|(\lambda-\lambda_0)(A-\lambda_0 I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = |\lambda-\lambda_0|\|(A-\lambda_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} = |(\lambda-\lambda_0)|\|R(\lambda_0)\|_{\mathcal{L}(E)} < 1,$$

i.e. si $|\lambda-\lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|_E}$. Donc

$$\forall\, \lambda_0 \in \rho(A), \exists\, r = \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|_E};\ B_{\mathbb{K}}(\lambda_0, r)\ \subset\ \rho(A).$$

Par conséquent, $\rho(A)$ est ouvert dans $\mathbb{K}$.
Soit $\lambda, \lambda_0 \in \rho(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda)-R(\lambda_0) &= (A-\lambda I)^{-1} - (A-\lambda_0 I)^{-1} \\ &= R(\lambda)[I-(A-\lambda I)R(\lambda_0)] \\ &= R(\lambda)[(A-\lambda_0 I)-(A-\lambda I)]R(\lambda_0) \\ &= R(\lambda)((\lambda-\lambda_0)I)R(\lambda_0) \\ &= (\lambda-\lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

de cette identité, on déduit que

$$R(\lambda_0)-R(\lambda) = (\lambda_0-\lambda)R(\lambda_0)R(\lambda). \tag{1.2}$$

En sommant (1.1) et (1.2), on obtient

$$(\lambda-\lambda_0)\big(R(\lambda)R(\lambda_0)-R(\lambda_0)R(\lambda)\big) = 0,$$

d'où $R(\lambda)R(\lambda_0) = R(\lambda_0)R(\lambda)$ si $\lambda \neq \lambda_0$. Ceci avec (1.1) donne l'identité de la résolvante. ■

Lemme 1.2.5 *Soit A un opérateur borné de E. Alors,*

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E)}\} = B'_{\mathbb{K}}(0, \|A\|_{\mathcal{L}(E)}).$$

Preuve : Il suffit de montrer que

$$\lambda \notin B_{\mathbb{K}}(0, \|A\|_{\mathcal{L}(E)}) \Rightarrow \lambda \in \rho(A).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \notin B_{\mathbb{K}}(0, \|A\|_{\mathcal{L}(E)})$ i.e. $|\lambda| > \|A\|_{\mathcal{L}(E)}$. On a

$$A-\lambda I = -\lambda(I-\frac{1}{\lambda}A).$$

D'après la Proposition 4.2.5, cet opérateur est inversible si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < |\lambda|$, ce qui est vérifié. Donc, $(A-\lambda I)$ est inversible et par conséquent $\lambda \in \rho(A)$. ■

1.3 Adjoint d'un opérateur non borné

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné à domaine dense (i.e. $\overline{D(A)} = E$). Nous allons définir un opérateur non borné A^*, on commence par définir son domaine $A^* : D(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$,

$$D(A^*) = \{v \in F'; \exists\, C \geq 0, | < v, Au >_{F',F} | \leq C\|u\|_E, \forall\, u \in D(A)\},$$

où $< .,. >_{F',F}$ désigne **le produit de dualité** entre F' et F. Soit $v \in D(A^*)$, soit g la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned} g : D(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto g(u) =< v, Au >_{F',F} . \end{aligned}$$

Puisque $v \in D(A^*)$, il existe une constante C positive telle que

$$|g(u)| = | < v, Au >_{F',F} | \leq C \, \|u\|_E, \, \forall u \in D(A).$$

Alors, g est une forme linéaire continue sur le sous-espace $D(A)$ de E. Grâce au Théorème de Hhan-Banach (Théorème 4.1.5), on peut prolonger g en une forme linéaire continue f sur E. On définit alors, $A^*v := f \in E'$. On a $f \equiv g$ sur $D(A)$, ce qui donne

$$< A^*v, u >_{E',E} =< v, Au >_{F',F}, \forall u \in D(A).$$

Proposition 1.3.1 *Soit $A : E \to F$ un opérateur borné. Alors, A^* est un opérateur borné de F' dans E'. De plus, $\|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} = \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Preuve : Vérifions d'abord que $D(A) = F'$. Soit $v \in F'$ et soit $u \in D(A)$, on a

$$| < v, Au >_{F',F} | \leq \|v\|_{F'} \|Au\|_F \leq \|v\|_{F'} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\|_E,$$

donc il existe une constante $c = \|v\|_{F'} \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ telle que

$$| < v, Au >_{F',F} | \leq c \, \|u\|_E, \forall u \in E.$$

Alors $v \in D(A^*)$ d'où l'égalité. De plus, on a pour tout $v \in F'$

$$\begin{aligned} \|A^*v\|_{E'} &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} | < A^*v, u >_{E',E} | \\ &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} | < v, Au >_{F',F} | \\ &\leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|v\|_{F'}, \end{aligned}$$

on en déduit alors que A^* est borné avec $\|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.
D'autre part, on sait que pour tout $u \in E$ (voir [2, Corollaire 1.4])

$$\begin{aligned} \|Au\|_F = \sup_{v \in F', \|v\|_{F'}=1} | < v, Au >_{F',F} | &= \sup_{v \in F', \|v\|_{F'}=1} | < A^*v, u >_{E',E} | \\ &\leq \sup_{v \in F', \|v\|_{F'}=1} \|A^*v\|_{E'} \|u\|_E \\ &\leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} \sup_{v \in F', \|v\|=1} \|v\|_{F'} \|u\|_E \\ &= \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')} \|u\|_E, \end{aligned}$$

ainsi $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|A^*\|_{\mathcal{L}(F',E')}$, ce qui termine la preuve. ∎

Proposition 1.3.2 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors, A^* est fermé dans $F' \times E'$.*

Preuve : Soit (v_n) une suite de $D(A^*)$ telle que $v_n \to v$ *dans* F' et $A^* v_n \to w$ *dans* E'. Montrons que $v \in D(A^*)$ et $w = A^* v$. On a

$$< A^* v_n, u >_{E',E} = < v_n, Au >_{F',F}, \forall u \in D(A).$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$< w, u >_{E',E} = < v, Au >_{F',F}, \forall u \in D(A),$$

donc

$$| < v, Au >_{F',F} | = | < w, u >_{E',E} | \leq \|w\|_{E'} \|u\|_E. \tag{1.3}$$

On déduit que $v \in D(A^*)$ et on a

$$< A^* v, u >_{E',E} = < v, Au >_{F',F}, \forall u \in D(A). \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on obtient

$$< A^* v, u >_{E',E} = < w, u >_{E',E}, \ \forall u \in D(A),$$

ce qui équivaut à

$$< A^* v - w, u >_{E',E} = 0, \ \forall u \in D(A).$$

Donc $A^* v - w$ est une forme linéaire continue sur E qui s'annule sur le sous-espace dense $D(A)$, et donc s'annule nécessairement sur E tout entier i.e.

$$< A^* v - w, u >_{E',E} = 0, \ \ \forall u \in E,$$

d'où $w = A^* v$ et par conséquent A^* est fermé. ■

1.4 Opérateurs autoadjoints

Dans cette section, on suppose que E et F sont des espaces de Hilbert munis respectivement des produits scalaires $(\cdot, \cdot)_E$ et $(\cdot, \cdot)_F$. Grâce au théorème de représentation de Riesz (voir Annexe), E' et F' sont identifiés à E et F respectivement.
Si $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur non borné à domaine dense, l'opérateur A^* est ainsi simplement défini par

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{v \in F; \exists\, C > 0 : |(v, Au)_F| \leqslant C \ \|u\|_E, \forall u \in D(A)\} \\ &= \{v \in F; \exists\, w \in E : (v, Au)_F = (w, u)_E, \forall u \in D(A)\}, \end{aligned}$$

et

$$(A^* v, u)_E = (v, Au)_F, \ \forall u \in D(A), \ \forall v \in D(A^*).$$

Lemme 1.4.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. Alors,*

- $\ker(A^*) = (\mathrm{Im}(A))^\perp$ *et* $(\ker(A^*))^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$.
- *Si de plus, A est fermé*

$$\ker(A) = (\mathrm{Im}(A^*))^\perp \ \textit{et}\ (\ker A)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}.$$

Dans ce qui suit, on suppose que $F = E$.

Définition 1.4.2 *On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ est **symétrique**, si*

$$(v, Au)_E = (Au, v)_E, \quad \forall\, u, v \in D(A).$$

Proposition 1.4.3 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur non borné de domaine dense. Alors,*

- *Si A est symétrique, $A \subset A^*$ i.e. $D(A) \subset D(A^*)$ et $Au = A^*u, \forall u \in D(A)$.*
- *Si A est symétrique et borné, $A = A^*$.*

Définition 1.4.4 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ de domaine dense est dit **autoadjoint** si $A^* = A$.*

Remarque 1.4.5 *$A = A^*$ signifie que l'on a à la fois $D(A) = D(A^*) = E$ et $Au = A^*u$ pour tout $u \in E$. Dans le cas particulier des opérateurs bornés "symétrique" équivaut à "autoadjoint".*

Théorème 1.4.6 *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint alors,*

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{|(Au, u)_E|}{\|u\|_E^2} = \sup_{u \in E, \|u\|_E = 1} |(Au, u)_E|.$$

Lemme 1.4.7 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors, A est fermé et l'on a*

$$\ker A = (\mathrm{Im}(A))^\perp \ \textit{et}\ \overline{\mathrm{Im}(A)} = (\ker(A))^\perp.$$

De plus, on a la décomposition orthogonale suivante

$$E = \ker(A) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A)}. \tag{1.5}$$

Preuve : D'après la Proposition 1.3.2, on a A^* est fermé, donc A aussi car $A = A^*$. D'autre part, d'après le Lemme 1.4.1, on déduit directement que

$$\ker A = (\mathrm{Im}(A))^\perp \text{ et } \overline{\mathrm{Im}(A)} = (\ker(A))^\perp.$$

La décomposition (1.5) est une conséquence directe du théorème de projection orthogonale (voir Annexe) appliquée avec $H = E$ et $F = \ker A$ qui est un sous espace vectoriel fermé de E grâce à la Proposition 1.1.4.

1.5 Opérateurs compacts

On désigne par $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et par $B_E^{'}$ la boule unité fermée de E.

1.5.1 Définition et propriétés

Définition 1.5.1 *On dit qu'un opérateur $A \in L(E,F)$ est* ***compact****, si $A(B'_E)$ est* ***relativement compact*** *dans F, i.e. $\overline{A(B'_E)}$ est compact. On désigne par $\mathcal{K}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F. Lorsque $E=F$, on note simplement $\mathcal{K}(E,E)=\mathcal{K}(E)$.*

Proposition 1.5.2 *Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$A \in \mathcal{K}(E,F)$.*
- *Pour toute partie bornée B de E, $A(B)$ est relativement compact dans F.*
- *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge dans F.*

Remarque 1.5.3 *Rappelons que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie (c'est le* ***théorème de Riesz****). Ceci entraîne que*

1. *L'application identité sur E est compacte ssi E est de dimension finie.*
2. *Si E ou F est de dimension infinie, alors si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible, A n'est pas compact.*

Théorème 1.5.4 *$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$, en particulier $\mathcal{K}(E,F)$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.*

Preuve : Vérifions d'abord que $\mathcal{K}(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$. En effet, pour un opérateur $A \in \mathcal{K}(E,F)$ et un ensemble borné B de E, $\overline{A(B)}$ est précompact dans F d'où $A(B)$ aussi. Par conséquent $A(B)$ est borné et donc $A \in \mathcal{L}(E,F)$, d'où l'inclusion. De plus, l'application nulle $0 \in \mathcal{K}(E,F)$.

Soient $A, S \in \mathcal{K}(E,F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et soit (x_n) une suite bornée de E. Comme A est compact, on peut extraire de (Ax_n) une sous-suite $(Ax_{\varphi_{(n)}})$ qui converge dans F. $(x_{\varphi_{(n)}})$ étant une sous-suite de (x_n), elle est bornée dans E. En utilisant la compacité de S, on peut extraire de $Sx_{\varphi_{(n)}}$ une sous-suite $Sx_{\psi(\varphi(n))}$ qui converge dans F. La suite

$$(A+\alpha S)x_{\psi(\varphi(n))} = Ax_{\psi(\varphi(n))} + \alpha Sx_{\psi(\varphi(n))},$$

extraite de $(A+\alpha S)x_n$ converge alors dans F, ce qui donne la compacité de $A+\alpha S$. Donc $\mathcal{K}(E,F)$ est stable par combinaisons linéaires.
Par conséquent, $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(E,F)$.

Il Reste à montrer que $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E,F)$. Ceci revient à montrer qu'il contient les limites de toute ses suites convergentes. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts qui converge dans $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $A := \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0.$$

Pour montrer que $A \in \mathcal{K}(E,F)$, il suffit de montrer que $A(B'_E)$ est précompact dans F, ce qui équivaut à (voir [5, Proposition 2.1])

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, y_1, ..., y_m \in F \;\text{ tel que }\; A(B'_E) \subset \cup_{i=1}^m B(y_i, \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$, de l'hypothèse $A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \epsilon/2.$$

En particulier, on a $\|A_{n_0} - A\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \epsilon$. Or $A_{n_0} \in \mathcal{K}(E,F)$, donc $A_{n_0}(B_E^{'})$ est précompact, d'où l'existence de $y_1, ..., y_m \in F$ tels que

$$A_{n_0}(B_E^{'}) \subset \cup_{i=1}^{m}(B(y_i, \epsilon/2)).$$

Soit $y \in A(B_E^{'})$, alors il existe $x \in B_E^{'}$ avec $y = Ax$. On a alors $A_{n_0}x \in A_{n_0}(B_E^{'})$, donc il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$\|A_{n_0}x - y_j\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \epsilon/2.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \|y - y_j\|_F &\leq \|Ax - A_{n_0}x\|_F + \|A_{n_0}x - y_j\|_F \\ &\leq \|A - A_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|A_{n_0}x - y_j\|_F \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in A(B_E^{'})$, il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $y \in B(y_j, \epsilon)$. Par conséquent

$$A(B_E^{'}) \subset \cup_{j=1}^{m} B(y_j, \epsilon),$$

ce qui implique que $A \in \mathcal{K}(E,F)$. ∎

Proposition 1.5.5 *Soient $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $S \in \mathcal{L}(F,G)$. Si A ou S est compact, alors SA est compact.*

Preuve : Supposons que A est compact. On a $A(B'_E)$ est borné puisque l'opérateur A est borné, et par suite $S(A(B'_E))$ est relativement compact dans G, donc SA est compact.

Supposons que A est compact. Alors $\overline{A(B'_E)}$ est compact dans F, et donc $A(B'_E)$ est précompact. Comme S est borné, l'ensemble $S(A(B'_E))$ est précompact dans G et donc son adhérence $\overline{S(A(B'_E))}$ aussi. On en déduit que $\overline{S(A(B'_E))}$ est compact puisqu'il est fermé dans l'espace complet G. Donc SA est compact. ∎

1.5.2 Propriétés spectrales des opérateurs compacts

Lemme 1.5.6 *Si $A \in \mathcal{K}(E)$, alors $F = \ker(A - I)$ est de dimension finie.*

Preuve : On commence par vérifier que $A(B'_F) = B'_F$, où B'_F est la boule unité fermée de F i.e.

$$B'_F = B'_F(0,1) = \{u \in F; \|u\|_E \leq 1\}.$$

Soit $u \in B'_F$ i.e. $u \in F$ et $\|u\|_F \leq 1$. Donc $Au = u \in F$ et $\|Au\|_F = \|u\|_F \leq 1$, d'où $Au \in B'_F$. Par conséquent, $A(B'_F) \subset B'_F$. D'autre part, si $u \in B'_F$ alors, $u = Au \in A(B'_F)$, d'où $B'_F \subset A(B'_F)$ et donc l'égalité $A(B'_F) = B'_F$. Or, on a $B'_F \subset B'_E(0,1)$ ce qui implique que, $B'_F = A(B'_F) \subset A(B'_E)$. Par conséquent, $B'_F \subset \overline{A(B'_E)}$ qui est compact dans E puisque $A \in \mathcal{K}(E)$. Donc B'_F est compact dans E et donc dans F ce qui entraîne par le théorème de Riesz que F est de dimension finie. ∎

Lemme 1.5.7 *Si $A \in \mathcal{K}(E)$, alors $A - I$ est injectif ssi $A - I$ est inversible.*

Théorème 1.5.8 (Théorème spectral des opérateurs compacts) *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors, on a*

1. *$0 \in \sigma(A)$, si dim $E = \infty$.*
2. *$\sigma(A)\backslash\{0\} = Vp(A)\backslash\{0\}$.*
3. *$\forall \lambda \in Vp(A)\backslash\{0\}$, $\ker(A - \lambda I)$ est de dimension finie.*
4. *$\sigma(A)$ est dénombrable.*
5. *Les valeurs propres nom nulles de A forment une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ décroissante en valeur absolue et qui tend vers 0.*

Preuve :

1. Supposons que $0 \notin \sigma(A)$ donc $0 \in \rho(A)$ i.e. A est inversible. Alors $AA^{-1} = I$ est compact ce qui implique que B'_E est compacte. D'après le théorème de Riesz, la dimension de E est nécessairement finie.
2. Il est clair que $Vp(A) \setminus \{0\} \subset \sigma(A) \setminus \{0\}$. Montrons par l'absurde l'inclusion inverse. Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0$ mais $\lambda \notin Vp(A)$. Or $A - \lambda I = \lambda(\frac{1}{\lambda}A - I)$ et l'opérateur $\frac{1}{\lambda}A$ est compact car $\mathcal{K}(E)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$. Appliquons le Lemme 1.5.7, on trouve $\frac{1}{\lambda}A - I$ est inversible d'où $A - \lambda I$ aussi. Ceci contredit le fait que $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$.
3. Soit $\lambda \in Vp(A)\backslash\{0\}$, on a
$$\ker(A - \lambda I) = \ker \lambda\Big(\frac{1}{\lambda}A - I\Big) = \ker\Big(\frac{1}{\lambda}A - I\Big).$$
Or, $\ker\Big(\dfrac{1}{\lambda}A - I\Big)$ est de dimension finie d'après le Lemme 1.5.6 et donc $\ker(A - \lambda I)$ aussi.
4. Il suffit de démontrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un nombre fini de valeurs propres en dehors de $B_{\mathbb{K}}(0, \delta)$. On suppose le contraire i.e. qu'il existe une constante $\delta > 0$, une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valeurs propres telle que $|\lambda_n| \geq \delta$. Soit $(e_n) \geq 1$ une suite de vecteurs propres associés linéairement indépendants. Soit $E_n := [\{e_n, ..., e_n\}]$, $n \geq 1$. Par définition, E_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie et donc fermé. De plus, il est clair que $E_{n-1} \subsetneq E_n$. Pour chaque $n \geq 1$, on applique le théorème de Riesz (?????) avec $E = E_n,\ F = E_{n-1}$ et $\Sigma = \frac{1}{2}$. Alors
$$\forall n \geq 1,\ \exists\, u_n,\ \|u_n\|_E = 1 \text{ et } d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}.$$
Soit $v_n := \dfrac{u_n}{\lambda_n}$, alors
$$\|v_n\|_E = \frac{\|u_n\|_E}{|\lambda|_n} = \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\delta},$$
onc (v_n) est bornée dans E. Comme A est compact, on peut extraire de (Av_n) une sous suite (Av_{n_k}) qui converge dans E. Soient $m, n \geq 1$ tels que $n > m$, on a
$$\begin{aligned} Av_n - Av_m &= A(\frac{u_n}{\lambda_n}) - A(\frac{u_m}{\lambda_m}) \\ &= \frac{(A - \lambda_n I)}{\lambda_n}u_n - \frac{(A - \lambda_m I)}{\lambda_m}u_m + u_n - u_m \\ &= \Big\| u_n - \Big(u_m - \frac{(A - \lambda_n I)}{\lambda_n}u_n + \frac{(A - \lambda_m I)}{\lambda_m}u_m \Big) \Big\| \geq d(u_n, E_{n-1}). \end{aligned}$$

Vérifions que

$$(1.6) \qquad (A - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1}.$$

En effet, soit $v \in (A - \lambda_n I)(E_n)$ alors il existe $u \in E_n$ tel que $v = (A - \lambda_n I)(u)$, alors u s'écrit $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ avec $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{K}$ et

$$\begin{aligned} v &= (A - \lambda_n I) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i - \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_n e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) e_i \in E_{n-1}. \end{aligned}$$

Revenons à $Av_n - Av_m$, on a $m - 1 < m \leq n - 1 < n$, donc

$$u_m \in E_m \subset E_{n-1} \text{ d'où } u_m \in E_{n-1}.$$

On a

$$(A - \lambda_n I)u_n \in (A - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1},$$

d'où $(A - \lambda_n I)u_n \in E_{n-1}$, alors d'après (1.6) on a

$$(A - \lambda_m I)u_m \in (A - \lambda_m I)(E_m) \subset E_{m-1} \subset E_{n-1},$$

d'où $(A - \lambda_m I)u_m \in E_{n-1}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Av_n - Av_m\| &= \left\| u_n - \left(u_m - \frac{(A - \lambda_n I)}{\lambda_n} u_n + \frac{(A - \lambda_m I)}{\lambda_m} u_m \right) \right\| \\ &\geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc la suite (Av_n) n'est pas de Cauchy. Contradiction avec le fait que (Av_{n_k}) converge, alors $\sigma(A)$ est dénombrable.

■

Lemme 1.5.9 *Soit E un espace de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur autoadjoint tel que $\sigma(A) = 0$. Alors $A = 0$.*

Preuve : voir [2] page 97.

Théorème 1.5.10 (Théorème spectral des opérateurs autoadjoints compacts) *Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $A : H \to H$ un opérateur autoadjoint compact. Alors, A admet une suite de valeurs propres décroissant vers 0 en valeur absolue. De plus les vecteurs propres associés forment une base Hilbertienne de H.*

Preuve : Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres non nulles de A. Posons $\lambda_0 = 0$ et V_n=ker$(A-\lambda_n I), n \in \mathbb{N}$. Soit F le sous-espace engendré par les $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous allons montrer que F est dense dans H. Commençons par vérifier que $A(F) \subset F$. En effet, tout $u \in F$ s'écrit sous la forme $u = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i v_i$, où $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $v_i \in V_i$ et I est un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$. Pour tout $i \geq 1$, on a par linéarité de A et le fait que λ_i est une valeur propre de A

$$\begin{aligned} Au = A\Bigg(\sum_{i\in I} \alpha_i v_i\Bigg) &= \sum_{i\in I} \alpha_i T v_i \\ &= \sum_{i\in I} \alpha_i(\lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i\in I} (\alpha_i\lambda_i) v_i \in F, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion. On déduit alors que $A(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet, soit $u \in F^\perp$ i.e.

$$\langle u, v\rangle = 0, \ \forall v \in F.$$

Alors

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = 0, \ \forall v \in F.$$

On peut alors définir $A_0 = A|_{F^\perp} \in \mathcal{K}(F^\perp)$ et A_0 est autoadjoint. Montrons que $\sigma(A_0) = \{0\}$. Raisonnons par l'absurde, soit $\lambda \in \sigma(A_0)$ telle que $\lambda \neq 0$, alors d'après le Théorème 1.5.8, $\lambda \in Vp(T_0)$ i.e. $\exists u \in F^\perp \subset E, u \neq 0$ et $A_0 u = Au = \lambda u$. Il est clair que $\lambda \in Vp(A)\backslash\{0\}$ et donc coincide avec l'une des valeurs propres λ_n de A, $n \geq 1$. Donc, il existe $i \geq 1$ tel que $u \in V_i$, d'où

$$u \in F^\perp \cap V_i \subset F^\perp \cap F = \{0\}.$$

Alors $u = 0$ ce qui est absurde car u est vecteur propre, donc on a nécessairement $\sigma(A_0) = \{0\}$, ce qui implique que $A_0 = 0$ d'après le Lemme 1.5.9, i.e. $A|_{F^\perp} = 0$ et par conséquent

$$F^\perp \subset \ker(A) = V_0 \subset F.$$

On en déduit que $F^\perp = \{0\}$, d'où $\overline{F} = H$. L'espace H est alors engendré par les $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or chacun des espaces V_n, $n \geq 1$ est de dimension finie par le Théorème 1.5.8, donc admet une base finie. Pour l'espace V_0, on distingue deux cas :

- Soit $V_0 = \ker(A) = \{0\}$ i.e. $\lambda \notin Vp(A)$ et dans ce cas l'ensemble des bases des V_n, $\forall n \geq 1$ forme une base de H.
- Soit $\ker(A) \neq \{0\}$ i.e. $\lambda \in Vp(A)$, comme $\ker(A)$ est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert séparable, $\ker(A)$ l'est aussi et donc admet une base hilbertienne dénombrable. Ajoutant cette base à l'ensemble des bases de $(V_n)_{n\geq 1}$, on trouve une base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres de A.

∎

Définition 1.5.11 *Soit A une application linéaire continue de E dans E. On dit que A est définie positive si $< Av, v >> 0$, pour tout $v \in V$ non nul.*

Remarque 1.5.12 *Si on suppose dans le Théorème 1.5.10, que l'opérateur A est défini positif, alors la suite des valeurs propres sera strictement positive.*

1.6 Opérateurs à résolvante compacte

Définition 1.6.1 *Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé. A est dit anti-compact ou à résolvante compacte si*

1. *Son ensemble résolvant est non vide ($\rho(A) \neq \emptyset$).*
2. *Sa résolvante $R(\lambda)$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(A)$.*

Proposition 1.6.2 *Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé. Alors, A est à résolvante compacte si et seulement s'il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $R(\lambda_0)$ est compact.*

Preuve : Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in \rho(A)$ tel que $R(\lambda_0)$ est compact. Alors, $\rho(A) \neq \emptyset$ et d'après l'identité de la résolvante, on a pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$R(\lambda) = R(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0).$$

Or $R(\lambda)$ est borné, donc $R(\lambda)R(\lambda_0)$ est compact grâce à la Proposition 1.4.5. Ainsi, $R(\lambda)$ est compact. ■

Proposition 1.6.3 *Soient E un espace de Banach et $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Alors, A est a résolvante compacte ssi l'injection de $D(A)$ dans E est compacte ($D(A)$ est muni de la norme du graphe).*

Preuve : Supposons que A est anti-compact i.e. $\exists\ \lambda \in \rho(A)$ tel que $R(\lambda)$ est compact. L'injection de $D(A)$ (muni de la norme du graphe) dans E peut être décomposée comme suit

$$\begin{array}{ccccc} (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & (A - \lambda I)u & \longmapsto & R(\lambda)(A - \lambda I)u = u. \end{array}$$

Il suffit alors de vérifier que l'opérateur $A - \lambda I$ est borné de $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$ à valeurs dans E et appliquer la Proposition 1.4.5. En effet, on a pour tout $u \in D(A)$

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)u\|_E &\leq \|Au\|_E + |\lambda|\|u\|_E \\ &\leq (1 + |\lambda|)\|u\|_{D(A)}. \end{aligned}$$

Pour l'implication inverse, supposons que l'injection de $D(A)$ dans E est compacte. Soit $\lambda \in \rho(A)$. On peut décomposer l'opérateur $R(\lambda)$ comme suit

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & (D(A), \|\cdot\|_{D(A)}) & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & R(\lambda)u & \longmapsto & R(\lambda)u. \end{array}$$

Comme pour l'implication précédente, et afin d'appliquer la Proposition 1.4.5, on vérifie que $R(\lambda)u$ est borné de E à valeurs dans $(D(A), \|\cdot\|_{D(A)})$. En effet, on a pour $u \in E$

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)u\|_{D(A)} &= \|R(\lambda)u\|_E + \|A(R(\lambda)u)\|_E \\ &= \|R(\lambda)u\|_E + \|(A - \lambda I + \lambda I)(R(\lambda)u)\|_E \\ &\leq \|R(\lambda)u\|_E + \|u\|_E + |\lambda|\|R(\lambda)u\|_E \\ &\leq ((1 + |\lambda|)\|R(\lambda)\|_{\mathcal{L}(E)} + 1)\|u\|_E, \end{aligned}$$

puisque l'opérateur $R(\lambda)$ est borné dans E. Ceci termine la preuve. ■

Lemme 1.6.4 *Soit E un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur fermé. Soit $\lambda \in \rho(A)$ et soit $\beta \in \mathbb{K}$. Si β est valeur propre de $R(\lambda)$, alors $(\lambda + \frac{1}{\beta})$ est valeur propre de A.*

Preuve : Soit $\lambda \in \rho(A)$ et soit $\beta \in \mathbb{K}$. Alors β est valeur propre de $R(\lambda)$ ssi

$$\exists\, u \in E\, ; u \neq 0 \text{ et } R(\lambda)u = \beta u.$$

Or $R(\lambda)(E) = D(A)$, ce qui implique que $u \in D(A)$. On peut alors composer $A - \lambda I$ avec les deux membres de l'identité précédente, on trouve

$$u = (A - \lambda I)\beta u,$$

d'où

$$Au = \big(\lambda + \frac{1}{\beta}\big)u.$$

On en déduit alors que $\lambda + \frac{1}{\beta}$ est valeur propre de A. ∎

Remarque 1.6.5 *Notons qu'une valeur propre de $R(\lambda)$ ($\lambda \in \rho(A)$), est nécessairement non nulle puisque $R(\lambda)$ est bijectif.*

Théorème 1.6.6 *Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur fermé à domaine dense dans H. Supposons qu'il existe un nombre réel $c \in \rho(A)$ tel que $R(c)$ soit autoadjoint compact. Alors, A est un opérateur autoadjoint admettant une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_n$ croissante en valeur absolue telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda_n| = \infty$. De plus, les vecteurs propres associés forment une base Hilbertienne de H.*

Preuve : Appliquons le théorème spectral des opérateurs autoadjoints compacts (Théorème 1.5.10) à l'opérateur $R(c)$. On en déduit que H admet un base Hilbertienne formée de vecteurs propres de $R(c)$, ces vecteurs propres sont associés à une suite de valeurs propres (μ_n) décroissante en valeur absolue avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$. Du lemme précédent les opérateurs A et $R(c)$ ont les mêmes vecteurs propres et les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_n = c + \frac{1}{\mu_n},$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| = +\infty.$$

∎

Chapitre 2

Applications dans les problèmes elliptiques

Dans ce chapitre, on ce donne une application du théorème spectral concernant un certain type d'opérateurs autoadjoints dits a résolvante compacte. On commence par le cas d'une formulation abstraite (voir [3] page 57).

2.1 Problème variationnel abstrait

Soient $(V, (\cdot,\cdot)_V)$ et $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ deux espaces de Hilbert réels tels que, $V \subset H$ avec injection compacte et dense. Les normes de V et H seront notées respectivement $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_H$. Soit une forme bilinéaire, symétrique $a : V \times V \to \mathbb{R}$, continue et coercive i.e.

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists\, M > 0;\ |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V,\ \forall\, u,v \in V, \\ \exists\, \alpha > 0;\ a(v,v) \geq \alpha\, \|v\|_V^2,\ \forall\, v \in V. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

On considère le problème spectral suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in V\backslash\{0\} \text{ tel que} \\ a(u,v) = \lambda\, (u,v)_H,\ \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Définition 2.1.1 *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in V \setminus \{0\}$ vérifient* (2.2), *on dit que λ est une valeur propre de la formulation variationnelle* (2.2) *et que u est un vecteur propre associé.*

Théorème 2.1.2 *Il existe une base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de H et une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs avec $\lambda_k \to \infty$ tels que*

$$u_k \in V\backslash\{0\} \ \text{ et } \ a(u_k, v) = \lambda_k\, (u_k, v)_H,\ \forall\, v \in V.$$

De plus, $(\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}})_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $(V, a(\cdot,\cdot))$.

Preuve : Pour $f \in H$, considérons le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u,v) = (f,v)_H,\ \forall v \in V. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

D'après le Théorème de Lax-Milgram (voir Annexe), le problème (2.3) admet une solution unique $u \in V$. On peut alors définir un opérateur T comme suit

$$\begin{aligned} T : H &\to H \\ f &\longmapsto Tf = u, \end{aligned}$$

où u est la solution unique du problème (2.3). Nous allons montrer que l'opérateur T ainsi construit est compact, autoadjoint et défini positif. On peut écrire $T := IA$, où A est l'opérateur définir par

$$\begin{aligned} A : H &\to V \\ f &\longmapsto Af = u, \end{aligned}$$

et I est l'opérateur identité défini de V dans H. Comme l'injection I de V dans H est continue, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, $\|v\|_H \leq c\|v\|_V$, en prenant $v = Af$ comme fonction test dans (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\|Af\|_V^2 \leq a(Af, Af) &= (f, Af)_H \\ &\leq \|f\|_H\|Af\|_H \\ &\leq c\,\|f\|_H\|Af\|_V, \end{aligned}$$

puisque $a(\cdot,\cdot)$ est coercive. Donc

$$\|Af\|_V = \|u\|_V \leq \frac{c}{\alpha}\|f\|_H.$$

Alors, on déduit que $A \in \mathcal{L}(H, V)$. Or

1. l'opérateur I est compact par hypothèse, ce qui implique que $T \in \mathcal{K}(H)$ d'après la Proposition 1.5.5.
2. Soient $f, g \in H$, on prenant $v = Ag$ comme fonction test dans (2.3) on obtient par symétrie de $a(\cdot,\cdot)$

   $$(f, Tg)_H = (f, Ag)_H = a(Af, Ag) = a(Ag, Af) = (g, Af)_H = (g, Tf)_H,$$

   donc T est auto-adjoint dans H d'après la Remarque 1.4.5.
3. En prenant $g = f$ dans l'égalité précédente, on voit que, pour tout $f \in H$,

   $$(f, Tf)_H = (f, Af)_H = a(Af, Af) \geq \alpha\|Af\|_V^2 \geq 0.$$

   Supposons que $(f, Tf)_H = 0$. Alors l'inégalité ci-dessus donne que $Af = 0$. par définition on a

   $$\forall\, v \in V,\ a(Af, v) = (f, v)_H.$$

   On déduit alors que $(f, v)_H = 0$, pour tout $v \in V$. Or V est dense dans H, donc ceci implique que $(f, v)_H = 0$ pour tout $v \in H$, et par conséquent $f = 0$. Finalement, pour tout $f \in H$, $f \neq 0$, on a $(f, Tf)_H > 0$ et donc T est défini positif sur H.

Alors, d'après le Théorème 1.5.10 et la Remarque 1.5.12 on sait que T admet une suite de valeurs propres positive $(\mu_k)_{k\geq 1}$ telle que

- Si $\dim V = \infty$ alors, $\mu_k \to 0$.
- $(u_k)_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne de H.

Ainsi, tout élément u de H s'écrit sous la forme

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, u_k)_H u_k,$$

où la série converge dans H, avec de plus l'identité de Parseval $\|u\|_H^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(u, u_k)_H|^2$ (voir par exemple [2]). De plus, $u_k \in V$ puisque $u_k = \mu_k^{-1} T u_k = \mu_k^{-1} A u_k \in V$, le problème (2.2) s'écrit encore

$$a(u, v) = \lambda\ (u, v)_H = \lambda\ a(Au, v), \forall v \in V,$$

ce qui équivaut à $a(u - \lambda Au, v) = 0$, pour tout $v \in V$, donc $u = \lambda Au = \lambda Tu$. Ainsi les valeurs propres de (2.2) sont les inverses des valeurs propres de T et les vecteurs propres sont les mêmes. Pour $k \geq 1$, on pose

$$\lambda_k := \frac{1}{\mu_k} \text{ et } v_k := \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Reste à montrer que $(\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}})_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne de $(V, a(\cdot, \cdot))$. Puisque $(u_k)_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne de H et d'après le problème spectral (2.2), on a pour $k, j \geq 1$

$$\begin{aligned} a(v_k, v_j) &= a\left(\frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_j}} a(u_k, u_j) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt{\lambda_j}} (u_k, u_j)_H \\ &= \delta_{kj}. \end{aligned}$$

De plus, si $f \in V$ est telle que $a(f, u_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, alors $(f, u_k)_{L^2(I)} = 0$ pour tout k et d'où $f = 0$ puisque $(u_k)_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne de H. On déduit que la famille $(u_k/\sqrt{\lambda_k})_{k\geq 1}$ est complète et donc c'est une base Hilbertienne de $(V, a(\cdot, \cdot))$. Ceci termine la preuve du théorème. ■

2.2 Application pour le problème de Sturm-Liouville en dimension 1

Soit $I =]0, 1[$. L'objectif de cette section est de trouver les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville avec condition de Dirichlet, i.e. trouver des fonctions $u \in H_0^1(I)$ et des valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda u \text{ dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où $p \in \mathcal{C}^1(\overline{I}), q \in \mathcal{C}(\overline{I})$ satisfont

$$p(x) \geq \alpha > 0 \text{ et } q(x) \geq 0, \ \forall x \in]0,1[. \tag{2.4}$$

La formulation variationnelle de ce problème est la suivante

$$\int_I pu'v'dx + \int_I quvdx = \lambda \int_I uvdx, \ \forall v \in H_0^1(I).$$

Nous allons appliquer la Théorème 2.1.2 à cette formulation variationnelle. Posons

$$a(u,v) = \int_I pu'v'dx + \int_I quvdx, \ \forall\ u,v \in H_0^1(I),$$

$H = L^2(I)$ et $V = H_0^1(I)$. L'espace H est muni de son produit scalaire usuel

$$(u,v)_{L^2(I)} = \int_I u(x)v(x)dx,$$

et $H_0^1(I)$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{1.I}$ induite du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$ de $H^1(I)$.
On sait que $H_0^1(I)$ est dense dans $L^2(I)$. De plus, l'injection de $H_0^1(I)$ dans $L^2(I)$ est compacte grâce au Théorème de Rellich (voir Annexe).
Maintenant nous allons vérifier les hypothèses du Théorème 2.1.2 pour la forme bilinéaire et symétrique $a(\cdot,\cdot)$.

1. Soient $u, v \in H_0^1(I)$. En utilisant la continuité des fonctions p et q ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_I pu'v'dx + \int_I quvdx \right| \\
&\leq \|p\|_{\mathcal{C}(I)} \|u'\|_{L^2(I)} \|v'\|_{L^2(I)} + \|q\|_{\mathcal{C}(\overline{I})} \ \|u\|_{L^2(I)} \ \|v\|_{L^2(I)} \\
&\leq c\ (\|p\|_{\mathcal{C}(\overline{I})} + \|q\|_{\mathcal{C}(\overline{I})}) \|u\|_{1,I} \|v\|_{1,I},
\end{aligned}$$

   d'où la continuité de $a(\cdot,\cdot)$.

2. Soient $v \in H_0^1(I)$. Grâce à (2.4) et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_I pv'^2\ dx + \int_I qv^2\ dx \\
&\geq \alpha \int_I |v'|^2 dx \\
&\geq\ \alpha\ c\ \|v\|_{1,I}^2,
\end{aligned}$$

   ce qui donne la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

Ainsi, on vient de démontrer le théorème suivant

Théorème 2.2.1 *Il existe une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs et une base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(I)$ telles que $u_k \in H_0^1(I)$ et*

$$a(u_k, v) = \lambda_k (u_k, v)_{L^2(I)}, \ \forall v \in H_0^1(I).$$

De plus, $\lambda_k \to +\infty$ quand $k \to \infty$.

Lemme 2.2.2 *Soit $u \in H_0^1(I)$ une solution du problème variationnel*

$$a(u,v) = \lambda(u,v)_{L^2(I)}, \forall v \in H_0^1(I). \tag{2.5}$$

Alors u est solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda u \ \ \textit{sur } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve : Comme $D(I) \subset H_0^1(I)$, on peut prendre $v \in D(I)$ dans (2.5). On trouve

$$\int_I pu'v'dx + \int_I quvdx = \lambda \int_I uvdx.$$

Comme $u \in H_0^1(I)$ et $p, q \in \mathcal{C}(\overline{I})$, les fonctions pu' et qu sont dans $L^2(I)$, et donc l'intégrale sur I peut être remplacée par le crochet de dualité entre $D'(I)$ et $D(I)$, on obtient

$$< pu', v' >_{D'(I)\times D(I)} + < qu, v >_{D'(I)\times D(I)} = \lambda < u, v >_{D'(I)\times D(I)}, \forall v \in D(I).$$

En dérivant au sens de distributions, on trouve

$$< -(pu')', v >_{D'(I)\times D(I)} + < qu, v >_{D'(I)\times D(I)} = \lambda < u, v >_{D'(I)\times D(I)},$$

d'où

$$-(pu')' + qu = \lambda u \text{ dans } D'(I),$$

et par conséquent

$$-(pu')' + qu = \lambda u \ \ \textit{p.p.} \text{ dans } \Omega.$$

La condition aux limites est vérifiée puisque $u \in H_0^1(I)$. ■

Corollaire 2.2.3 *Il existe une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs et une base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(I)$ telle que $u_k \in H_0^1(I)$ et*

$$\begin{cases} -(pu_k')' + qu_k = \lambda_k u_k \ \ \textit{dans } I, \\ u_k(0) = u_k(1) = 0. \end{cases}$$

De plus, $\lambda_k \to \infty$ quand $k \to \infty$. On dit que les $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ sont les valeurs propres de l'opérateur différentiel $Au = -(pu')' + qu$ (avec condition de Dirichlet) et que les $(u_k)_{k\geq 1}$ sont les vecteurs propres associés.

2.3 Application au laplacien avec condition de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. L'objectif de cette section est de trouver les valeurs propres du laplacien avec condition de Dirichlet, i.e. trouver des fonctions $u \in H_0^1(\Omega)$ et des valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \ \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La formulation variationnelle de ce problème est la suivante

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous allons appliquer le Théorème 2.1.2 avec $H := L^2(\Omega)$ et $V := H_0^1(\Omega)$ munis respectivement des produits scalaires $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ et $(\cdot,\cdot)_{1,\Omega}$.
On sait que $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, et grâce au Théorème de Rellich (voir Annexe), l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte puisque Ω est supposé borné. Soit $a(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Cette forme vérifie les hypothèses du Théorème 2.1.2. En effet, on a pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq |u|_{1.\Omega} |v|_{1.\Omega} \\ &\leq \|u\|_{1.\Omega} \|v\|_{1.\Omega}, \end{aligned}$$

d'où la continuité de $a(\cdot,\cdot)$, et

$$a(v,v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = |v|_{1.\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1.\Omega}^2,$$

grâce à l'inégalité de Poincaré (voir Annexe), ce qui donne la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. On vient de montrer le théorème suivant

Théorème 2.3.1 *Il existe une base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels telle que*

$$a(u_k, v) = \lambda_k (u_k, v)_{L^2(\Omega)}, \ \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

de plus, $\lambda_k > 0$ et $\lambda_k \to \infty$ quand $k \to \infty$.

Lemme 2.3.2 *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de la formulation variationnelle*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{trouver } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ telle que} \\ \int_{\Omega} \nabla u_k \nabla v dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k v dx, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.6}$$

Alors u est solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta u_k = \lambda_k u_k \ \ \textit{sur} \ \ \Omega, \\ u_k = 0 \ \ \textit{sur} \, \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Preuve : L'existence et l'unicité de la solution du problème (2.6) est assurée par le Théorème de Lax-Milgram. Comme $D(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ on peut prendre $v \in D(\Omega)$ dans (2.6), on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla u_k \nabla v dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k v dx, \ \forall v \in D(\Omega).$$

De plus, on a $u_k \in H_0^1(\Omega)$ ce qui implique que $\nabla u_k \in L^2(\Omega)^N$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^{N} < \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} >_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = \lambda_k < u_k, v >_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}, \forall v \in D(\Omega),$$

Par dérivation au sens des distributions, on obtient

$$< -\Delta u_k, v >_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = < \lambda_k u_k, v >_{D'(\Omega)\times D(\Omega)}, \forall v \in D(\Omega),$$

d'où

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k \text{ dans } D'(\Omega),$$

ce qui implique que

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

puisque $u_k \in L^2(\Omega)$. Enfin, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, et que Ω est un ouvert régulier, la trace de u est bien définie et $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$. ■

Corollaire 2.3.3 *il existe une base hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ de réels strictements positifs avec $\lambda_k \to \infty$ telle que $u_k \in H_0^1(\Omega)$ $\forall k \geq 1$ et*

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & dans\, \Omega, \\ u_k = 0 & sur\, \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

On dit que les λ_k sont les valeurs propres de $-\Delta$ (avec condition de Dirichlet) et que les u_k sont les vecteurs propres associés.

Remarque 2.3.4 *Si Ω est un ouvert de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors les u_k solutions de (2.8) sont bien plus régulières que $H_0^1(\Omega)$. On voit en effet que $-\Delta u_k = \lambda_k u_k$ et donc Δu_k est de régularité $H^1(\Omega)$ comme u_k. Comme Ω est très régulier, ceci implique que $u_k \in H^3(\Omega)$ et donc Δu_k aussi, ce qui donne $u_k \in H^5(\Omega)$, on obtient finalement que $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Remarque 2.3.5 *Le Théorème 2.1.2 peut être aussi appliquée au problème de valeur propres du laplacien avec conditions mixtes ou avec condition de Neumann.*

Chapitre 3

Applications aux problèmes d'évolution

Ce chapitre est une brève introduction à l'étude mathématique d'équations aux dérivées partielles dépendant du temps. En fait, nous étudierons deux prototypes : l'équation de **la chaleur** et l'équation des **ondes** qui sont de bons exemples d'une famille **parabolique** et **hyperbolique** respectivement. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur et des ondes en utilisant à nouveau le concept de formulation variationnelle et les bases Hilbertiennes de fonctions propres construites au chapitre précédant.

3.1 Exemple d'équation parabolique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet, l'équation de la chaleur pour le Laplacien s'écrit

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \ \text{ dans } \ \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{ pour } x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

3.1.1 Formulation variationnelle

Multiplions la première équation du problème (3.1) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ qui ne dépend pas du temps t et intégrons sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx.$$

En appliquant formellement la formule de Green (voir Annexe, Corollaire) à la deuxième intégrale du membre de gauche, on trouve

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)v(x)d\sigma = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx.$$

D'où

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx, \tag{3.2}$$

puisque v s'annule sur le bord de Ω. Comme ni Ω ni $v(x)$ ne varient avec le temps t, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx.$$

L'idée générale est de séparer la variable temporelle en considérant $u(x,t)$ non pas comme une fonction des deux variables t et x, mais plutôt comme une fonction de t à valeurs dans un espace de fonctions de la variable x

$$u:\ t \longmapsto \{x \longmapsto u(x,t)\},$$

et nous continuerons à noter $u(x,t)$ la valeur $u(t)(x)$. De même, f est définie comme suit

$$f: t \longmapsto \{x \longmapsto f(t,x)\},$$

et on notera $f(t)(x)$ simplement par $f(x,t)$. Soit $a(w,v)$ la forme bilinéaire définie par

$$a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x)\nabla v(x)dx,$$

et

$$(w,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega w(x)v(x)dx,$$

le produit scalaire de $L^2(\Omega)$. Avec ces notations, on obtient ainsi la formulation variationnelle suivante : trouver $u(t)$ fonction de $]0,T[$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)},\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ 0<t<T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

ce qui ressemble à une équation différentielle ordinaire en t. Dans la suite on prendra le terme source f dans l'espace $L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$ et on cherchera la solution u dans **l'espace d'énergie** $L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$.

3.1.2 Existence et unicité

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (3.3), nous ferons entrer notre problème dans le cadre général introduit au chapitre précédent. On commence par introduire deux espaces de Hilbert V et H tels que $V \subset H$ avec injection dense et compacte, typiquement on aura $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$. Ensuite, la diagonalisation de l'opérateur Laplacien nous permettra de se ramener à la résolution d'une famille de simples équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Théorème 3.1.1 *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et dense. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. Soit un temps final $T>0$, une donnée initiale $u_0 \in H$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[;H)$. Alors le problème*

$$(3.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f(t),v)_H,\ \ \forall v \in\ V,\ 0<t<T, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

a une unique solution $u \in L^2(]0,T[;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que

$$\|u\|_{L^2(]0,T[;V)} + \|u\|_{\mathcal{C}([0,T];H)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}). \tag{3.5}$$

Preuve : La démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape, en supposant l'existence d'une solution u, nous montrons par décomposition spectrale des espaces H et V, que u s'écrit explicitement sous la forme d'une série. Ceci permet d'en déduire en particulier l'unicité de la solution. Dans la deuxième étape, nous démontrons que cette série converge dans les espaces $L^2(]0,T[;V)$ et $\mathcal{C}([0,T];H)$, et que la somme est bien une solution de (3.4).
Étape 1. Supposons qu'il existe une fonction $u \in L^2(]0,T[;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H)$ solution de (3.4). Les hypothèses permettent d'appliquer le Théorème 2.1.2 sur la résolution du problème aux valeurs propres associé à la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$. Ainsi, H admet une base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$ vérifiant

$$u_k \in V, \text{ et } a(u_k,v) = \lambda_k(u_k,v)_H, \ \forall\, v \in V.$$

On définit

$$\alpha_k(t) = (u(t),u_k)_H, \quad \alpha_k^0 = (u_0,u_k)_H, \quad \beta_k(t) = (f(t),u_k)_H.$$

On a $\alpha_k \in \mathcal{C}([0,T])$ et $\beta_k \in L^2(]0,T[)$. En effet, pour $t, t_0 \in [0,T]$, on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\alpha_k(t) - \alpha_k(t_0) &= (u(t) - u(t_0), u_k)_H \\ &\leq \|u(t) - u(t_0)\|_H \|u_k\|_H.\end{aligned}$$

Comme $u \in \mathcal{C}([0,T];H)$, on en déduit que $\alpha_k(t) - \alpha_k(t_0) \to 0$ lorsque $t \to t_0$, i.e. α_k est continue sur $[0,T]$. On a aussi par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^T |\beta_k(t)|^2 dt &= \int_0^T |(f(t),u_k)|_H^2 dt \\ &\leq \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \|u_k\|_H^2 dt \\ &= \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt < +\infty,\end{aligned}$$

puisque $f \in L^2(]0,T[;H)$. Donc $\beta_k \in L^2(]0,T[)$.
Comme $u(t) \in H$ pour tout $t \in [0,T]$, il s'écrit dans la base Hilbertienne $(u_k)_{k\geq 1}$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) u_k.$$

En choisissant $v = u_k$ dans (3.4), on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_k}{dt} + \lambda_k \alpha_k = \beta_k & \text{dans }]0,T[, \\ \alpha_k(0) = \alpha_k^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le problème homogène correspondant à cette équation différentielle

$$\frac{d\alpha_k}{dt} + \lambda_k \alpha_k = 0,$$

admet une infinité de solutions

$$\alpha_k(t) = K e^{-\lambda_k t}, \ K \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante. On suppose qu'une solution particulière s'écrit sous la forme

$$\alpha_k(t) = K(t) e^{-\lambda_k t},$$

et donc

$$\frac{d\alpha_k}{dt}(t) = \frac{dK}{dt}(t) e^{-\lambda_k t} - \lambda_k K(t) e^{-\lambda_k t}.$$

En remplaçant dans la première équation de (3.6), on trouve

$$\frac{dK}{dt}(t) = \beta_k(t) e^{\lambda_k t},$$

ce qui donne

$$K(t) = \int_0^t \beta_k(s) e^{\lambda_k s} ds.$$

Les solutions de la première équation de (3.6) sont alors

$$\alpha_k(t) = K e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k (t-s)} ds.$$

De la condition en $t = 0$ de (3.6), on trouve $K = \alpha_k^0$. Ainsi, la solution générale de l'équation (3.6) est

$$\alpha_k(t) = \alpha_k^0 e^{-\lambda_k t} + \int_0^t \beta_k(s) e^{-\lambda_k (t-s)} ds,$$

ce qui donne une formule explicite pour la solution u, et permet aussi d'en déduire qu'elle est unique.

Étape 2. Nous allons démontrer que la série

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j (t-s)} ds \right) u_j, \tag{3.7}$$

converge dans $L^2(]0,T[;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H)$ et que sa somme, notée $u(t)$ est solution de (3.4). Considérons la somme partielle à l'ordre k de cette série

$$w^k(t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} + \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j (t-s)} ds \right) u_j. \tag{3.8}$$

Il est facile de vérifier que w^k appartient à $\mathcal{C}([0,T];H)$ puisque chaque α_j est continu sur $[0,T]$. Montrons que la suite w^k est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T];H)$ i.e.

$$\lim_{k,l\to+\infty} \|w^l - w^k\|_{\mathcal{C}([0,T];H)} = 0.$$

Pour $l > k$, on a

$$\|w^l(t) - w^k(t)\|_H \leq \left\| \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} u_j \right\|_H + \left\| \sum_{j=k+1}^{l} u_j \int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right\|_H.$$

Par calcul direct, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} u_j \right\|_H^2 &= \left(\sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} u_j, \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i^0 e^{-\lambda_i t} u_i \right)_H \\
&= \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j^0 e^{-\lambda_j t} \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i^0 e^{-\lambda_i t} (u_j, u_i)_H \\
&= \sum_{j=k+1}^{l} \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_j^0 \alpha_i^0 e^{-(\lambda_j+\lambda_i)t} (u_j, u_i)_H \\
&= \sum_{i=k+1}^{l} |\alpha_j^0|^2 e^{-2\lambda_j t} \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{l} |\alpha_j^0|^2,
\end{aligned}$$

puisque la suite $(u_j)_{j\geq 1}$ est orthonormale dans H et la suite des valeurs propres (λ_j) est positive. De manière similaire, on trouve

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{l} \left(\int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right) u_j \right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l} \left(\int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right)^2.$$

Or, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en tenant compte du fait que la suite des valeurs propres (λ_j) est croissante et strictement positive, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j(t-s)} ds \right)^2 &\leq \left(\int_0^t |\beta_j(s)|^2 ds \right) \left(\int_0^t e^{-2\lambda_j(t-s)} ds \right) \\
&= \left(\frac{1}{2\lambda_j} - \frac{1}{2\lambda_j} e^{-2\lambda_j t} \right) \int_0^t |\beta_j(s) ds|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{2\lambda_1} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|w^l(t) - w^k(t)\|_H \leq \left(\sum_{j=k+1}^{l} |\alpha_j^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}} \left(\sum_{j=k+1}^{l} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $u_0 \in H$, on a grâce à l'identité de Parseval

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty} |\alpha_j^0|^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} | < u_0, u_j >_H |^2 \\ &= \|u_0\|_H^2 < +\infty.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds &= \sum_{j=1}^{+\infty} \int_0^T |< f(s), u_j >_H|^2 ds \\ &= \int_0^T \sum_{j=1}^{+\infty} |< f(s), u_j >_H|^2 ds \\ &= \int_0^T \|f(s)\|_H^2 ds < +\infty,\end{aligned}$$

puisque $f \in L^2(]0, T[; H)$.
Les séries $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} |\alpha_j^0|^2$, $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds$ étant convergentes, leurs suites de sommes partielles sont alors de Cauchy ce qui entraîne que la suite $w^k(t)$ est de Cauchy dans H. Plus précisément, on en déduit que la suite w^k vérifie

$$\lim_{k,l \longrightarrow +\infty} (\sup_{0 \leq t \leq T} \|w^l - w^k\|_H) = 0,$$

i.e. qu'elle est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$. Montrons que la suite w^k est aussi de Cauchy dans $L^2(]0, T[; V)$. On a

$$\begin{aligned}\|w^l(t) - w^k(t)\|_V^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(w^l(t) - w^k(t), w^l(t) - w^k(t)) \\ &= \frac{1}{\alpha} a\Big(\sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j(t) u_j, \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i(t) u_i \Big) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j(t) \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i(t) a(u_j, u_i) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j(t) \sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i(t) \lambda_j (u_j, u_i)_H \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j |\alpha_j(t)|^2.\end{aligned}$$

En remplaçant $\alpha_j(t)$ par son expression et en utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, on obtient

$$\|w^l(t) - w^k(t)\|_V^2 \leq 2 \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j |\alpha_j^0|^2 e^{-2\lambda_j t} + 2 \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j \Big(\int_0^t \beta_j(s) e^{-\lambda_j (t-s)} ds \Big)^2.$$

Or, par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^t \beta_j(s)e^{-\lambda_j(t-s)}ds\Big)^2 &=\Big(\int_0^t \beta_j(s)e^{-\frac{\lambda_j(t-s)}{2}}e^{\frac{-\lambda_j(t-s)}{2}}ds\Big)^2\\ &\leq\Big(\int_0^t |\beta_j(s)|^2e^{-\lambda_j(t-s)}ds\Big)\Big(\int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}ds\Big)\\ &\leq \frac{1}{\lambda_j}\Big(\int_0^t|\beta_j(s)|^2e^{-\lambda_j(t-s)}ds\Big).\end{aligned}$$

D'autre part, grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^T\Big[\int_0^t\Big(|\beta_j(s)|^2e^{-\lambda_j(t-s)}\Big)ds\Big]dt &= \int_0^T\Big[\int_s^T\Big(|\beta_j(s)|^2e^{-\lambda_j(t-s)}\Big)dt\Big]ds\\ &= \int_0^T|\beta_j(s)|^2\Big[\frac{-1}{\lambda_j}e^{-\lambda_j(t-s)}\Big]_s^T ds\\ &= \int_0^T|\beta_j(s)|^2\Big(\frac{-1}{\lambda_j}e^{-\lambda_j(T-s)}+\frac{1}{\lambda_j}\Big)ds\\ &= \int_0^T\frac{1}{\lambda_j}|\beta_j(s)|^2(1-e^{-\lambda_j(T-s)})ds\\ &\leq \int_0^T\frac{1}{\lambda_j}|\beta_j(s)|^2ds.\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^T\|w^l(t)-w^k(t)\|_V^2dt &\leq \sum_{j=k+1}^{l}|\alpha_j^0|^2+\sum_{j=k+1}^{l}\frac{2}{\lambda_j}\int_0^T|\beta_j(s)|^2ds\\ &\leq \sum_{j=k+1}^{l}|\alpha_j^0|^2+\frac{2}{\lambda_1}\sum_{j=k+1}^{l}\int_0^T|\beta_j(s)|^2ds,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{k,l\longrightarrow+\infty}\|w^l-w^k\|^2_{L^2(]0,T[;V)}=\lim_{k,l\longrightarrow+\infty}\int_0^T\|w^l(t)-w^k(t)\|_V^2dt=0,$$

i.e. que la suite w^k est de Cauchy dans $L^2(]0,T[;V)$. Comme les deux espaces $\mathcal{C}([0,T];H)$ et $L^2(]0,T[;V)$ sont complets, la suite w^k converge et on peut définir sa limite u

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}w^k=u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T];H)\cap\ L^2(]0,T[;V).$$

En particulier, on a par définition de w^k

$$w^k(0)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j^0=\sum_{j=1}^{k}(u_0,u_j)_H,$$

et donc $w^k(0)$ converge vers $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}(u_0,u_j)_H=u_0$. Alors u vérifie la condition initiale $u(0)=u_0$. D'autre part, $u(t)$ en tant que somme de la série (3.7) vérifie la formulation variationnelle (3.4) pour chaque fonction test $v = u_k$. En effet, on a par continuité du produit scalaire et du fait que $(u_k)_{k\geq 1}$ est une base Hilbertienne donc orthonormale de H

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j(t)u_j, u_k\Big)_H &+ a\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j(t)u_j, u_k\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)u_j, u_k\Big)_H + a\Big(\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)u_j, u_k\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)(u_j, u_k)_H + \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)a(u_j, u_k) \\
&= \frac{d}{dt}\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)(u_j, u_k)_H + \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\lambda_j(u_j, u_k)_H \\
&= \frac{d}{dt}\alpha_k(t) + \lambda_k\alpha_k(t) = \beta_k(t),
\end{aligned}$$

puisque α_k est solution de l'équation différentielle (3.6). Sachant que $(f(t), u_k)_H = \beta_k(t)$, on a pour tout $k \geq 1$

$$\frac{d}{dt}(u(t), u_k)_H + a(u(t), u_k) = (f(t), u_k)_H.$$

Comme $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$ est une base Hilbertienne de V, $u(t)$ vérifie alors la formulation variationnelle (3.4) pour tout $v \in V$, i.e. que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (3.4).
Pour prouver l'estimation d'énergie (3.5), on remarque d'abord que

$$\|w^l(t)\|_H \leq \Big(\sum_{j=1}^{l}|\alpha_j^0|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}}\Big(\sum_{j=1}^{l}\int_0^T|\beta_j(s)|^2ds\Big)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\int_0^T\|w^l(t)\|_V^2dt \leq \sum_{j=1}^{l}|\alpha_j^0|^2 + \frac{2}{\lambda_1}\sum_{j=1}^{l}\int_0^T|\beta_j(s)|^2ds.$$

En faisant tendre l vers l'infini, on trouve

$$\|u(t)\|_H \leq \|u_0\|_H + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}}\|f\|_{L^2(]0,T[;H)},$$

et

$$\|u\|^2_{L^2(]0,T[;V)} \leq \|u_0\|_H^2 + \frac{2}{\lambda_1}\|f\|^2_{L^2(]0,T[;H)}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{C}([0,T];H)} &= \sup_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_H \\
&\leq \|u_0\|_H + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}}\|f\|_{L^2(]0,T[;H)}, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

et

$$\|u\|_{L^2(]0,T[;V)} \leq \|u_0\|_H + \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}\|f\|_{L^2(]0,T[;H)}. \tag{3.10}$$

Par addition de (3.9) et (3.10), on trouve

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T],H)} + \|u\|_{L^2(]0,T[;V)} \leq \max\left(2, \frac{3}{\sqrt{2\lambda_1}}\right)\Big(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}\Big),$$

d'où l'estimation désirée. ■

3.2 Applications

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Soit un temps final $T > 0$, une donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[; L^2(\Omega))$. Alors l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{p.p. sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

admet une solution unique $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω) telle que, pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_\Omega u(x,t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x,s)|^2 dxds \leq C\left(\int_\Omega u_0(x)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega f(x,s)^2 dxds\right). \tag{3.12}$$

Preuve : La formulation variationnelle du problème (3.11) est donnée par (voir (3.3))

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ 0 < t < T,$$

qui est équivalente à

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(t,x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ 0 < t < T.$$

On vérifie facilement que les hypothèses du Théorème 3.1.1 sont satisfaites avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$. Il suffit donc de montrer que l'unique solution $u \in L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega)) \cap ([0,T]; L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution du problème (3.11). En appliquant la formule de Green à la seconde intégrale du membre de gauche, on trouve

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f\right)v\, dx = 0,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

et pour presque tout $t \in]0,T[$. On en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f = 0 \quad \text{p.p. dans }]0,T[\times\Omega.$$

Et comme $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0,T[$, on en déduit la condition de Dirichlet, et la condition initiale est satisfaite grâce à la continuité de $u(t)$ en $t = 0$. ■

3.3 Exemple d'équation hyperbolique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$. Pour des conditions aux limites de Dirichlet, l'équation des ondes pour le Laplacien s'écrit

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\
u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\
u(t=0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \\
\frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega.
\end{array}
\right.
\tag{3.13}
$$

3.3.1 Formulation variationnelle

Multiplions la première équation du problème (3.13) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ qui ne dépend pas du temps t et intégrons sur Ω, on obtient

$$
\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx - \int_\Omega \Delta u(x,t)v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx.
$$

En appliquant la formule de Green formellement à la deuxième intégrale, on trouve

$$
\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u(x,t)v(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x,t).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx,
\tag{3.14}
$$

puisque $v(x)$ s'annule sur le bord de Ω.
Soit un temps final $T > 0$ (peut être égal à $+\infty$), on se donne le terme source $f \in L^2(]0,T[;L^2(\Omega))$ et des conditions initiales $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle déduite de (3.14) est donc : trouver une solution u dans $\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T];L^2(\Omega))$ telle que

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{d^2}{dt^2}\langle u(t), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ 0 < t < T, \\
u(t=0) = u_0, \\
\dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1,
\end{array}
\right.
\tag{3.15}
$$

où

$$
a(w,v) = \int_\Omega \nabla w(x).v(x)\,dx,
$$

et $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

3.3.2 Un résultat général d'existence et d'unicité

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnelle (3.15), nous utilisons la diagonalisation de " l'opérateur Laplacien" pour nous ramener à la résolution d'une famille de simples équations différentielles ordinaires du deuxième ordre. Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection dense et compacte (typiquement $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$).

Théorème 3.3.1 *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que $V \subset H$ avec injection compacte et dense. Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive dans V. Soient un temps final $T > 0$, une donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, et un terme source $f \in L^2(]0,T[, H)$. Alors le problème*

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}(u(t), v)_H + a(u(t), v) = (f(t), v)_H, \ \ \forall\, v \in V, \ 0 < t < T, \\ u(t=0) = u_0, \\ \dfrac{du}{dt}(t=0) = u_1, \end{cases}$$

a une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω et de T) telle que

$$(3.17)\qquad \|u\|_{\mathcal{C}([0,T];V)} + \|u\|_{\mathcal{C}^1([0,T];H)} \le C(\|u_0\|_V + \|u_1\|_H + \|f\|_{L^2(]0,T[;H)}).$$

Preuve : La démonstration est basée sur les mêmes principes du Théorème 3.1.1. Dans une première étape, on montre que toute solution u est une série de fonctions propres. Dans une deuxième étape, nous démontrons la convergence de cette série dans les espaces $\mathcal{C}([0,T]; V)$ et $\mathcal{C}^1([0,T]; H)$.

Étape 1. Supposons que $u \in \mathcal{C}([0,T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H)$ est solution de (3.16). Introduisons la base Hilbertienne $(u_k)_{k \ge 1}$ de H composée des fonctions propres de la formulation variationnelle (2.2) vérifiant

$$u_k \in V, \text{et } a(u_k, v) = \lambda_k \langle u_k, v \rangle_H, \forall\, v \in V.$$

On écrit $u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) u_k$ avec $\alpha_k(t) = (u(t), u_k)_H$. En choisissant $v = u_k$ dans (3.16), et en notant $\beta_k(t) = (f(t), u_k)_H$, $\alpha_k^0 = (u_0, u_k)_H$ et $\alpha_k^1 = (u_1, u_k)_H$, on obtient

$$(3.18)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha_k}{dt^2} + \lambda_k \alpha_k = \beta_k \quad \text{dans }]0,T[, \\ \alpha_k(t=0) = \alpha_k^0, \ \ \dfrac{d\alpha_k}{dt}(t=0) = \alpha_k^1. \end{cases}$$

Posons $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, l'unique solution de (3.18) est

$$(3.19)\qquad \alpha_k(t) = \alpha_k^0 \cos(\omega_k t) + \frac{\alpha_k^1}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \beta_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds,$$

ce qui donne la formule explicite pour la solution u (qui est donc unique).

Étape2. Pour démontrer que la série

$$(3.20)\qquad \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\alpha_j^0 \cos(\omega_j t) + \frac{\alpha_j^1}{\omega_j} \sin(\omega_j t) + \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \beta_j(s) \sin(\omega_j(t-s)) ds \right) u_j,$$

converge dans $\mathcal{C}([0,T]; V) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H)$, on va montrer que la suite $w^k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t) u_j$ des sommes partielles de cette série est de Cauchy. Dans V nous considérons le produit scalaire

$a(u,v)$ pour lequel la famille $(u_j)_{j\geq 1}$ est orthogonale. Par orthogonalité dans H et dans V des u_j (voir le Théorème 2.1.2), on obtient pour $l > k$, et pour tout temps t

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) = \sum_{j=k+1}^{l} \lambda_j |\alpha_j(t)|^2, \tag{3.21}$$

Calculons maintenant $\left\| \frac{d}{dt}(w^l - w^k) \right\|_H^2$.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d}{dt}(w^l - w^k) \right\|_H^2 &= \left(\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j(t) u_j \Big), \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=k+1}^{l} \alpha_i(t) u_i \Big) \right)_H \\
&= \left(\sum_{j=k+1}^{l} \frac{d\alpha_j}{dt}(t) u_j, \sum_{i=k+1}^{l} \frac{d\alpha_i}{dt}(t) u_i \right)_H \\
&= \sum_{j=k+1}^{l} \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right| \sum_{i=k+1}^{l} \left| \frac{d\alpha_i}{dt}(t) \right| (u_j, u_i)_H \\
&= \sum_{j=k+1}^{l} \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

En additionant (3.21) et (3.24), on trouve

$$a(w^l - w^k, w^l - w^k) + \left\| \frac{d}{dt}(w^l - w^k) \right\|_H^2 = \sum_{j=k+1}^{l} \left(\lambda_j |\alpha_j(t)|^2 + \left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 \right).$$

Or, en multipliant (3.18) par $d\alpha_k/dt$ on obtient

$$\left(\frac{d^2\alpha_j}{dt^2}(t) \right) \left(\frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right) + \lambda_j \alpha_j(t) \frac{d\alpha_j}{dt}(t) = \beta_j(t) \frac{d\alpha_j}{dt}(t),$$

et en intégrant sur l'intervalle $[0, t]$, on trouve

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_j}{dt} \right)^2 (t) \right]_0^t + \lambda_j \left[\frac{\alpha_j^2(t)}{2} \right]_0^t = \int_0^t \beta_j(s) \frac{d\alpha_j}{dt}(s) ds,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha_j}{dt}(0) \right)^2 + \lambda_j \frac{\alpha_j^2(t)}{2} - \lambda_j \frac{\alpha_j^2(0)}{2} = \int_0^t \beta_j(s) \frac{d\alpha_j}{dt}(s) ds,$$

alors,

$$\left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right|^2 + \lambda_j |\alpha_j(t)|^2 = |\alpha_j^1|^2 + \lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 2 \int_0^t \beta_j(S) \frac{d\alpha_j}{dt}(s) ds.$$

De la formule (3.19), on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d\alpha_j}{dt}(t) \right| &= \left| -\alpha_j^0 \omega_j \sin(\omega_j t) + \alpha_j^1 \cos(\omega t) + \int_0^t \beta_j(s) \cos(\omega_j (t-s)) ds \right| \\
&\leq \omega_j |\alpha_j^0| + |\alpha_j^1| + \int_0^t |\beta_j(s)| ds.
\end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats on en déduit

$$\left|\frac{d\alpha_j}{dt}(t)\right|^2 + \lambda_j|\alpha_j(t)|^2 \leq 2|\alpha_j^1|^2 + 2\lambda_j|\alpha_j^0|^2 + 2t\int_0^t |\beta_j(s)|^2\, ds. \tag{3.23}$$

Par conséquent

$$\|w^l - w^k\|_V^2 + \left\|\frac{d}{dt}(w^l - w^k)\right\|_H^2 \leq 2\sum_{j=k+1}^{l}\left(|\alpha_j^1|^2 + \lambda_j|\alpha_j^0|^2 + t\int_0^t |\beta_j(s)|^2\, ds\right).$$

Comme $u_0 \in V, u_1 \in H$ et $f \in L^2(]0,T[;H)$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_V^2 &= a(u_0, u_0)\\
&= a(\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^0 u_j, \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0 u_i)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^0 \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0 a(u_j, u_i)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^0 \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0 \lambda_j(u_j, u_i)_H\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|\alpha_j^0|^2\\
&= \sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j|\alpha_j^0|^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

$$\|u_1\|_H^2 = \sum_{j=1}^{+\infty}|< u_1, u_j >_H|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty}|\alpha_j^1|^2,$$

et on a aussi

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds = \|f\|^2_{L^2(]0,T[;H)} < +\infty.$$

La série

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left(|\alpha_j^1|^2 + \lambda_j|\alpha_j^0|^2 + t\int_0^t |\beta_j(s)|^2\, ds\right),$$

est donc convergente, ce qui implique que sa suite des sommes partielles est de Cauchy, d'où

$$\lim_{k,l\to+\infty}\max_{0\leq t\leq T}\left(\|w^l(t) - w^k(t)\|_V^2 + \left\|\frac{d}{dt}(w^l(t) - w^k(t))\right\|_H^2\right) = 0.$$

En d'autre termes, la suite w^k est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T];V)$ et dans $\mathcal{C}^1([0,T],H)$. Ces espaces étant complets, on en déduit sa convergence et on notera u sa limite. En particulier, comme

$(w^k(0), \frac{dw^k}{dt}(0))$ converge vers (u_0, u_1) dans $V \times H$, on obtient les conditions initiales voulues. D'autre part, il est clair que $u(t)$, en tant que somme de la série (3.18) vérifie la formulation variationnelle (3.13) pour chaque fonction test $v = u_k$. Comme $(u_k/\sqrt{\lambda_k})$ est une base Hilbertienne de V, $u(t)$ vérifie donc la formulation variationnelle (3.13) pour tout $v \in V$, i.e. que $u(t)$ est bien la solution recherchée de (3.13).
Finalement, on vérifie facilement que

$$a(w^l(t), w^l(t)) + \left\| \frac{dw^l}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq 2\sum_{j=1}^{l} |\alpha_j^1|^2 + 2\sum_{j=1}^{l} \lambda_j |\alpha_j^0|^2 + 2T\sum_{j=1}^{l} \int_0^T |\beta_j(s)|^2 ds.$$

En faisant tendre l vers l'infini, on obtient

$$\|u(t)\|_V^2 + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_H^2 \leq 2\Big(\|u_0\|_V^2 + \|u_1\|_H^2 + T\|f\|^2_{L^2(]0,T[;H)} \Big).$$

L'estimation (3.17) s'obtient en utilisant la continuité de l'injection de V dans H. ∎

3.4 Applications

Théorème 3.4.1 *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, et un temps final $T > 0$. On considère une donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et un terme source $f \in L^2(]0, T[; L^2(\Omega)$. Alors l'équation des ondes*

$$(3.24) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{p.p. dans } \Omega\times]0,T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{p.p. dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) & \text{p.p. dans } \Omega, \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in \mathcal{C}([0,T]; H_0^1\Omega) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; L^2\Omega)$. De plus, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de Ω et de T) telle que, pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 + \left| \nabla u(x,t) \right|^2 \right) dx \leq C \left(\int_\Omega \left(|u_1(x)|^2 + \left| \nabla u_0(x) \right|^2 \right) dx + \int_0^t \int_\Omega |f(x,s)|^2 dx ds \right).$$

Preuve : La démonstration est semblable à celle du Théorème 3.2.1. Les hypothèses du Théorème 3.1.1 étant satisfaites avec $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$ et la forme bilinéaire de la formulation variationnelle (3.15), il reste à vérifier que l'unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T], H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\Omega))$ de cette formulation variationnelle est bien une solution de (3.24). En effet, si la solution u est suffisamment régulière, par intégration par partie la formulation variationnelle (3.15) est équivalente à

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_\Omega u(x,t)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x,t) \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x,t)v(x)dx.$$

qui est équivalente à

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u - f \right) v \, dx = 0,$$

pour presque tout temps $t \in]0,T[$ et pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et donc valable pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par conséquent

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} - \Delta u - f = 0 \quad \text{p.p. dans }]0,T[\times\Omega.$$

La condition aux limites de Dirichlet provient du fait que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, pour tout $t \in]0,T[$, et la condition initiale s'obtient de la continuité $u(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ et de $du/dt(t)$ en $t = 0$ comme fonction à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

Chapitre 4

Annexe

4.1 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$,$(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Proposition 4.1.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E.*
2. *f est continue en un point $x_0 \in E$.*
3. *f est bornée sur la boule unité.*
4. *f est bornée sur la sphère unité.*
5. *l'image par f d'un ensemble borné de E est un ensemble borné de F.*
6. *il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq c\,\|x\|_E \quad \forall x \in E$.*
7. *f est uniformément continue sur E.*

On note

- $L(E, F) :=\{f : E \to F\,;\, f$ est linéaire$\}$.
- $\mathcal{L}(E, F) :=\{f : E \to F\,;\, f$ est linéaire continue$\}$.
- $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.
- $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. E' est appelé **le dual topologique** de E.

Définition 4.1.2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue i.e. $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit la norme de f dans $\mathcal{L}(E, F)$ par*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Proposition 4.1.3

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{x \in B'(0,1)} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in S(0,1)} \|f(x)\|_F \\ &= \inf\{c > 0,\ \|f(x)\|_F \leq c\,\|x\|_E \quad \forall x \in E\}.\end{aligned}$$

Proposition 4.1.4 (Inégalité fondamentale) *Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue sur E. Alors*

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Théorème 4.1.5 *[**Théorème de Hhan-Banach**] Soit E un espace vectoriel normé et soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors toute forme linéaire continue ϕ sur G se prolonge en une forme linéaire ψ continue sur E tout entier. De plus, ce prolongement préserve la norme i.e. $\|\phi\|_{G'} = \|\psi\|_{E'}$.*

4.2 Opérateurs bornés

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$,$(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach sur le même corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 4.2.1 *On appelle opérateur **borné** de E dans F, toute application linéaire continue $A : E \to F$.*

Théorème 4.2.2 (Théorème de l'isomorphisme de Banach) *Soit A un opérateur borné et bijectif de E sur F, alors A^{-1} est borné.*

Théorème 4.2.3 (Théorème du graphe fermé) *Soit A un opérateur linéaire de E dans F. Alors A est borné si et seulement si son graphe*

$$G(A) = \{(u, Au)\,;\, u \in E\},$$

est fermé dans $E \times F$.

Définition 4.2.4 (Opérateur inversible) *Un opérateur borné $A : E \to F$ est dit inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(E)$ telle que $BA = I$ (resp. $AB = I$). A est dit **inversible** s'il est inversible à gauche et à droite et les deux inverses coincident, dans ce cas l'inverse de A sera noté A^{-1}.*

Proposition 4.2.5 *Soit E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur borné vérifiant $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Alors l'opérateur $I - A$ est inversible et on a*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

4.3 Espaces de Hilbert

Définition 4.3.1 *Un espace vectoriel réel ou complexe E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est appelé **espace préhilbertien**.*
*Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien complet pour la norme induite par son produit scalaire.*

Proposition 4.3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un espace préhilbertien de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$. Alors*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in E.$$

Théorème 4.3.3 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$. Pour tout $f \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que*

$$f(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

De plus, $\|f\|_{H'} = \|u\|$.

Définition 4.3.4 *Soit* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert de norme* $\|\cdot\|$. *Une suite* $(e_n)_n$ *de vecteurs de* H *est appelée* ***base hilbertienne*** *de* H *si* $(e_n)_n$ *est une famille orthonormale qui vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes*

1. *La suite* $(e_n)_n$ *est totale dans* H *i.e.* $H = \overline{[(e_n)_n]}$.
2. *Pour tout* $x \in H$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n$ *converge et* $\sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n > e_n = x$.
3. *Pour tout* $x \in H$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2$ *converge et on a l'**identité de Parseval***

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 = \|x\|^2.$$

Théorème 4.3.5 *Soit* H *un espace de Hilbert séparable i.e. admettant une partie dénombrable dense. Alors* H *admet une base hilbertienne dénombrable.*

4.4 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 4.4.1 *Soit* X *un espace de Banach défini sur* Ω *de norme* $\|\cdot\|_X$. *Soit* $0 < T \leq +\infty$. *Pour un entier* $k \geq 0$, *nous noterons*
• $\mathcal{C}^k([0,T],X)$, *l'espace des fonctions* k *fois continûment dérivables sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* X. *C'est un espace de Banach pour la norme*

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k([0,T];X)} = \left(\sum_{m=0}^{k} \sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{d^m v}{dt^m}(t) \right\|_X \right).$$

• $L^2(]0,T[;X)$: *l'espace des fonctions de* $]0,T[$ *dans* X *telle que la fonction* $t \to \|u(t)\|_X$ *appartient à l'espace usuel* $L^2(]0,T[,\mathbb{R})$ *i.e.*

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^2 dt < +\infty.$$

Muni de la norme

$$\|v\|_{L^2(]0,T[;X)} = \sqrt{\int_0^T \|v(t)\|_X^2 dt},$$

$L^2(]0,T[;X)$ *est un espace de Banach. De plus, si* X *est un espace de Hilbert de produit scalaire* $< \cdot,\cdot >_X$, *alors* $L^2(]0,T[;X)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$< u, v >_{L^2(]0,T[;X)} = \int_0^T < u(t), v(t) >_X dt.$$

4.5 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 4.5.1 *Soit* V *un espace de Hilbert réel de norme* $\| \,.\, \|$. *On considère :*

1. *$a(.,.)$ une forme bilinéaire sur V, i.e. $w \to a(w,v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \to a(w,v)$est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$.*
2. *$a(\cdot,\cdot)$ est continue, i.e. qu'il existe $M > 0$ tel que*
$$|a(w,v)| \leq M\|w\|\|v\| \text{ pour tout } w,v \in V.$$
3. *$a(\cdot,\cdot)$ est coercive (ou elliptique), i.e. qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 \text{ pour tout } v \in V.$$
4. *$L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V, i.e. $v \to L(v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $c > 0$ tel que*
$$\big|L(v)\big| \leq C\|v\| \text{ pour tout } v \in V.$$

Alors le problème
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ dans } V \text{ tel que} \\ a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in V, \end{cases}$$
admet une solution unique u dans V.

4.6 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 4.6.1 *Pour tout entier $m \geq 1$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*
$$H^m(\Omega) = \Big\{ v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m \Big\},$$
muni de la norme
$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$
L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_{m,\Omega}$
$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u(x)\, \partial^\alpha v(x)\, dx.$$

4.6.1 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 4.6.2 *$H_0^1(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Remarque 4.6.3 *$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, car $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ donc complet.*

Théorème 4.6.4 (***Inégalité de Poincaré-Friedrichs***) *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, alors il existe une constante $c(\Omega)$ qui ne dépend que du diamètre de Ω telle que*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Corollaire 4.6.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, on a :*

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1 + c^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \textit{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

où $c(\Omega)$ est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Corollaire 4.6.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, la semi-norme*

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par $\| \cdot \|_{1,\Omega}$.

Corollaire 4.6.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace, l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $| \cdot |_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert.*

Théorème 4.6.8 (Théorème de Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Alors, l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Remarque 4.6.9 *Rappelons que si E et F sont deux espaces vectoriels normés tels que $E \subset F$, alors l'injection de E dans F est continue et on note $E \hookrightarrow F$, si l'opérateur Identité de E dans F est continue i.e.*

$$\exists\, c > 0; \| u \|_F \leq c \| u \|_E, \forall u \in E.$$

L'injection est dite compacte si l'opérateur Identité est compact i.e. de toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite qui converge dans F.

4.6.2 Théorème de trace et formules de Green

Théorème 4.6.10 (Théorème de trace) *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Gamma) \\ u & \longrightarrow & u|_\Gamma, \end{array}$$

s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelée opérateur trace et notée γ_0.

Proposition 4.6.11 *Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{ u \in H^1(\Omega) : \; \gamma_0 u = 0 \textit{ sur } \Gamma \Big\}.$$

Définition 4.6.12 *Pour $u \in H^2(\Omega)$, sa dérivée normale sur Γ est définie par*

$$\gamma_0 \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^{N} n_i \, \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où n_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de la fonction n (exprimée dans les coordonnées cartésiennes $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$) définie presque partout par

$$\begin{array}{rcl} n : \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \\ x & \longmapsto & n(x). \end{array}$$

Remarquons que $\gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$, puisque grâce au Théorème 4.6.10, tous les $\gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ sont dans $L^2(\Gamma)$ et que $|n_i| \leq 1$. Ceci prouve aussi que l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 \dfrac{\partial}{\partial n} : H^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Gamma) \\ u & \longrightarrow & \gamma_0 \dfrac{\partial u}{\partial n}, \end{array}$$

est linéaire continue.

Théorème 4.6.13 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0 u \, \gamma_0 v \, n_i \, d\sigma.$$

Corollaire 4.6.14 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta u \, v \; dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_0 \frac{\partial u}{\partial n} \, \gamma_0 v \, d\sigma. \tag{4.2}$$

4.6.3 Quelques compléments utils

Théorème 4.6.15 (Théorème d'injection de Sobolev) *On suppose que Ω est un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^m$. Alors, si $k < m - \frac{N}{2}$ l'espace $H^m(\Omega)$ est un sous espace de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ avec injection continue.*

Théorème 4.6.16 (Théorème de régularité) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème variationnel*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v, \; \forall \; v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $u \in H^2(\Omega)$ et il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|u\|_{2.\Omega} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

1. *Si* Ω *et de classe* $\mathcal{C}^{m+2}$ *et si* $f \in H^m(\Omega)$ *pour un entier* $m \geq 1$, *alors* $u \in H^{m+2}(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{m+2.\Omega} \leq c\|f\|_{m.\Omega},$$

   en particulier si $m > \frac{N}{2}$, *alors* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$.
2. *Si* Ω *et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et si* $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, *alors* $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Bibliographie

[1] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation,* École Polytechnique, 2007.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris, 1983.

[3] S. Maingot et D. Manceau, *Théorie spectrale,* polycopié de cours,

[4] U. Herbach, *Mathématiques du tambour : une histoire de valeurs propres !,* Rapport de stage, Magistère de Mathématiques de Rennes, 2ème année.

[5] Y. Sonntag, *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Ellipses, 1998.