République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université de Jijel.

N d'ordre :
Série :

Thèse

Présentée à l'Université de Jijel.
Pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité: Mathématiques
Option: Equations Différentielles

Quelques Problèmes de contrôle optimal pour des inclusions différentielles

Par

Doria AFFANE

Soutenue le devant le jury composé de

M. Denche	Prof. Université de Constantine	Président
D. Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel	Directrice de thèse
A. Aibeche	Prof. Université de Sétif	Examinateur
M. Benchohra	Prof. Université de Sidi Bel Abbes	Examinateur
S. Djebali	Prof. ENS de Kouba	Examinateur
T. Zerzaihi	Prof. Université de Jijel	Examinateur

Quelques Problèmes de contrôle optimal pour des inclusions différentielles

DORIA AFFANE

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

L'étude de problèmes mathématiques et physiques conduit généralement à la résolution des équations et inclusions différentielles. L'étude revient souvent à déterminer les solutions quand elles existent ou à donner une étude analytique permettant d'en dégager leurs propriétés.

Les résultats exposés dans cette thèse présentent une contribution à l'étude, d'une part, de l'existence de solutions pour des équations et inclusions différentielles du second ordre, principalement celles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones, avec des conditions aux limites en deux points, et d'une autre part leurs applications à des problèmes de contrôle optimal.

Hatman [20] a donné pour la première fois une étude sur des équations ordinaires du second ordre avec des conditions aux limites en deux points dans un espace de dimension finie. Cette étude a été généralisée par Gupta [19], Marano ([27, 28]), Gomaa [17], ils ont donné des résultats d'existence pour des équations et inclusions différentielles avec des conditions aux limites en deux et trois points. Azzam, Castaing et Thibault [7] ont généralisé ces résultats aux espaces de Banach séparables.

Ces dernières années, ont été publiés de nombreux résultats concernant les problèmes d'évolution perturbés du second ordre avec des conditions aux limites, gouvernées par des opérateurs maximaux monotones (voir par exemple [7], [8]). L'analyse de problèmes d'évolution perturbés par une fonction Lipschitzienne est surtout motivée par leurs applications à des problèmes de contrôle. Nous nous sommes intéressés dans notre travail à des problèmes de contrôle optimal, où les contrôles sont identifiés par des mesures de Young (désintégrées) correspondantes, nous montrons que la borne inférieure du critère dans le problème original est égale au minimum dans le problème relaxé.

Jawhar [22] a démontré le théorème de relaxation pour les problèmes de contrôle gouvernés par le processus de la rafle convexe. Ensuite, d'autres résultats ont été obtenus pour le processus de la rafle non convexe par Castaing, Salvadori et Thibault [13]. Dans [12], Castaing, Jofré et Salvadori, ont étudié les problèmes de contrôle gouvernés par le processus de la rafle non convexe, et ceux gouvernés par un opérateur m-accrétif.

Cette thèse est constituée de quatres chapitres, dans le premier on rappele quelques résultats de base et les outils qui seront utilisés dans toute la suite, tels que la notion de multi-applications, leur mesurabilité, des théorèmes de compacité dans les espaces fonctionnels ainsi que la notion des mesures de Young.

Dans le chapitre 2, nous donnons un résultat d'existence et d'unicité pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone avec des conditions aux limites en deux points de la forme

$$(P_{A,f}) \begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)\dot{u}(t) + f(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p. \quad t \in [0,1] \\ \dot{u}(0) = 0, \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

dans un espace de dimension finie E, où $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ est un opérateur maximal monotone et $f : [0,1] \times E \times E \to E$ une application Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$, vérifiant la condition de Lipschitz sur $E \times E$ et une condition de croissance linéaire. En utilisant la théorie des mesures de Young, nous abordons un problème de contrôle optimal de type Bolza. Sa description est la suivante :
Soient Z un espace métrique compact $\Gamma : [0,1] \to k(Z)$ une multi-application Lebesgue-mesurable et

$$\Sigma(t) = \{\sigma \in \mathcal{M}_+^1(Z) / \ \sigma(\Gamma(t)) = 1\}, \forall t \in [0,1],$$

où $\mathcal{M}_+^1(Z)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur Z. L'ensemble des sélections Lebesgue-mesurables de $\Gamma(.)$ (resp. $\Sigma(.)$) est noté par S_Γ (resp. S_Σ). Soit $I : [0,1] \times E \times E \times Z \to I\!R$ un intégrande de Carathéodory. Nous étudions le lien entre le problème dit original

$$(P_O) : \inf_{\zeta \in S_\Gamma} \int_0^1 I(t, u_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), \zeta(t))dt$$

où u_ζ est la solution unique de l'inclusion

$$(D_O)\quad \begin{cases} -\ddot{u}_\zeta(t) \in A(t)\dot{u}_\zeta(t) + f(t, u_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), \zeta(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [0,1] \\ \dot{u}_\zeta(0) = 0; \;\; u_\zeta(1) + \dot{u}_\zeta(1) = 0, \end{cases}$$

et le problème relaxé

$$(P_{\mathcal{R}}) : \inf_{\nu \in \mathcal{R}} \int_0^1 [\int_Z I(t, u_\nu(t), \dot{u}_\nu(t), z)\nu_t(dz)]dt$$

où u_ν est la solution de l'inclusion

$$(D_{\mathcal{R}}) \begin{cases} -\ddot{u}_\nu(t) \in A(t)\dot{u}_\nu(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t, u_\nu(t), \dot{u}_\nu(t), z)\nu_t(dz) \;\; p.p. \;\; t \in [0,1] \\ \dot{u}_\nu(0) = 0; \;\; u_\nu(1) + \dot{u}_\nu(1) = 0. \end{cases}$$

Le problème original (P_O) n'admet pas nécessairement de solution optimal par contre $\inf(P_O)$ est fini et le problème admet des suites minimisantes. Historiquement, en calcul des variations, puis en contrôle optimal, pour traiter de telles situations, les auteurs dans [29], [18], [25] et [24] ont pensé à introduire un second problème de contrôle dit relaxé, et ayant les propriétés suivantes.

- Le problème relaxé a au moins une solution optimale.
- $\inf(P_O) = \min(P_{\mathcal{R}})$.
- Les solutions optimales du problème $(P_{\mathcal{R}})$ sont les points d'adhérence des suites minimisantes du problème (P_O).

Le chapitre 3 contient l'étude de l'existence de solutions du problème

$$(P_F) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(u(t), \dot{u}(t)), \;\; p.p. \;\; t \in [a,b], \\ u(a) = u(b) = v_0, \end{cases}$$

avec $F : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs presque convexes.
Des résultats d'existence de solutions avec des conditions aux limites en trois points quand F est une multi-application à valeurs convexes compactes ont été donnés en dimension finie dans [23], [28]. Après, les auteurs dans [7], ont démontré des résultats d'existence pour le même problème mais dans le contexte des espaces de Banach séparables. Le but de notre étude est d'établir un résultat d'existence pour (P_F) dans un espace de dimension fini mais avec F à valeurs presque convexes, i.e., on remplace la convexité par une condition plus faible. La méthode utilisée dans notre étude est inspirée de l'étude des

inclusions différentielles du premier ordre, donnée par Cellina et Ornelas [15]. Donc notre résultat élargit cette étude au second ordre.

Dans le chapitre 4, on démontre l'equivalence entre le problème bien posé et l'affinité de l'application g par rapport à la variable contrôle pour un problème de la forme

$$(P_{f,g}) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) + g(t, z(t)) \quad p.p \quad t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Les premiers traveaux sur le problème bien posé ont été introduit par Hadamard et Tykhonov. Après les autheurs dans [35], [36], ont développé la notion et la définition du problème bien posé avec perturbation, et ils l'ont relié au contrôle optimal. Dans [37], Zolezzi a étudie l'equivalence entre l'affinité sur les variations des contrôles et le problème bien posé de Hadamard et Tykhonov, il a démontré que pour les systèmes différentiels ordinaires l'affinité des trajectoires désirées est une condition nécessaire et suffisante pour avoir un problème bien posé. Muselli [29] a généralisé cette étude, il a donné un problème de contrôle optimal quadratique dans un espace de Hilbert, pour une équation différentielle avec perturbation du premier ordre, et il a trouvé une équivalence entre le problème bien posé et l'affinité de la perturbation par rapport au contrôle. Notre travail élargit cette étude aux équations différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux points.

Le Chapitre 2 a été l'objet d'un article en collaboration avec D. Azzam-Laouir paru dans le journal applicable Analysis [2].

Le Chapitre 3 a été l'objet d'un article à paraitre dans EJQTDE [1].

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notations de base, quelques résultats fondamentaux sur les multi-applications, des théorèmes de compacité et de convergence, utilisé dans cette thèse. Une grande partie de ce chapitre est consacrée au principe de mesurabilité, en particulier les mesures de Young.

1.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle .,. \rangle$ leur produit de dualité, et $\|.\|$ la norme de E. On note par

. $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E et E_σ l'espace de Banach E muni de la topologie faible.

. $\overline{\mathbf{B}}_E$ ou $\overline{\mathbf{B}}_E\,(0,1)$ la boule unité fermée de E.

. Si A est un sous ensemble de E alors

. $\overline{A}$ est la fermeture de A.

. $co(A)$ l'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ la fermeture de l'enveloppe convexe de A.

. $\mathcal{X}_A$ la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x \in A \\ 0 & \text{si } \ x \notin A. \end{cases}$$

. $\delta(.,A)$ la fonction indicatrice de A, définie par

$$\delta(x,A)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in A \\ +\infty & \text{si } x\notin A. \end{cases}$$

. La fonction polaire de $\delta(.,A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction $\delta^{*}(.,A)$, définie sur E' par

$$\delta^{*}(x',A)=\sup_{x\in A}\langle x',x\rangle .$$

. La masse de Dirac est définie par

$$\delta_{x}=\begin{cases} 0 & \text{si } x\neq 0 \\ +\infty & \text{si } x=0. \end{cases}$$

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.1 *Soit X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1) $\emptyset\in\Sigma$,

2) $A\in\Sigma\Rightarrow X\backslash A\in\Sigma$,

3) $A_{n}\in\Sigma\Rightarrow\bigcup\limits_{n\in N}A_{n}\in\Sigma.$

Le couple (X,Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.

Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.2 *Soient $(X_{1,}\Sigma_{1}),(X_{2,}\Sigma_{2})$ deux espaces mesurables et g une fonction définie sur X_1 à valeurs dans X_2, on dit que g est (Σ_1,Σ_2)-mesurable si pour tout $A\in\Sigma_1, g^{-1}(A)\in\Sigma_2$.*
Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma_1,\mathcal{B}(X))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.3 *Soit (X,Σ) un espace mesurable et M un espace métrique. Alors une fonction $g:X\longrightarrow M$ est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si g est $(\Sigma,\mathcal{B}(M))$-mesurable et $g(X)$ est séparable.*

Définition 1.4 *Soit (X, Σ) un espace mesurable et M un espace métrique. On dit que la fonction $f : X \to M$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$-mesurable et $f(X)$ fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.1 *Sous les notations de la définition 1.4, nous avons les caractérisations suivantes*
- f est Bochner mesurable,
- il existe une suite de fonctions Σ-étagées définies sur X à valeurs dans M, convergeant simplement vers f,
- il existe une suite de fonctions dénombrablement Σ-étagées définies sur X à valeurs dans M, convergeant uniformément sur X vers f.

On donne dans ce qui suit quelques notions sur les mesures.

Définition 1.5 *Soit (X, Σ) un espace mesurable, alors l'application $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{I\!R}$ est une mesure sur X si*

1) $\nu(\emptyset) = 0$.

2) $\nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$, pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.

Le triplé (X, Σ, ν) est appelé espace mesuré.
Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$, ou l'espace (X, Σ, ν) est positive.

Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, ν) est fini.

Si X est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{I\!R}$ est appelée mesure Borélienne.

On dit que ν est une mesure de probabilité si $\nu(X) = 1$.

Définition 1.6 *Soit X un espace topologique séparé et ν une mesure Borélienne. Alors ν est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F de X, tels que $F \subset A \subset O$ et $\nu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.7 *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$. Soit Z un sous ensemble de X, on dit que Z est ν-négligeable ou négligeable (s'il n'y a pas de confusion), s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*

On dit qu'une propriété sur X est vraie ν-presque partout (ν.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est ν-négligeable .

La tribu ν-complétée de Σ notée Σ_ν est la tribu engendrée par Σ et les ensembles ν-négligeables, c'est à dire,

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z : \ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu\text{-négligeable}\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble ν-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.8 *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec ν finie. Notons $\Sigma^* = \Sigma_\nu$, et soit $\nu^* : \Sigma^* \longrightarrow \overline{I\!R}$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(Z)$ pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable. Alors (X, Σ^*, ν^*) est un espace mesuré avec ν^* finie et complète et on a $\nu^* = \nu$ sur Σ. (X, Σ^*, ν^*) est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré (X, Σ, ν).*

Théorème 1.1 *Soient X un espace topologique compact, Σ une algèbre sur X et $\nu : \Sigma \longrightarrow \overline{I\!R}$ une fonction additive, régulière et bornée. Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur X contenant Σ. Alors il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \overline{I\!R}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\widetilde{\Sigma}$.*

Théorème 1.2 *Soit (T, Σ, ν) un espace mesuré complet avec ν finie, X un espace métrique complet séparable et $G \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$. Alors la projection de G sur T est mesurable, i.e.,*

$$proj_T(G) = \{t \in T : \exists x \in X, (t, x) \in G\} \in \Sigma_\nu.$$

Définition 1.9 *Soit (T, Σ) un espace mesuré et ν une mesure positive sur Σ. On appelle atome de ν tout ensemble $A \in \Sigma$ vérifiant $\nu(A) \neq 0$ et pour tout sous ensemble $B \subset A$, $\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = \nu(A)$.*

Théorème 1.3 *(Théorème de Lyapunov) [21]. Soit (T, Σ) un espace mesurable et ν une mesure sur Σ à valeurs dans $I\!R^n$. On suppose ν sans atomes. Alors $\{\nu(A) : \ A \in \Sigma\}$ est convexe.*

1.3 Mesure de Borel et mesure de Lebesgue sur $I\!R$

Soient t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq$

t_1, et les unions finies de ces intervalles. Il est claire que Σ est une algèbre sur J.
Définissons $\nu : \Sigma \longrightarrow I\!R$ par

$$\nu\left(\{t_0\}\right) = 0,\ \nu\left(]t', t'']\right) = t' - t'' \quad \text{et} \quad \nu\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \nu\left(A_j\right)$$

avec $k \in I\!N$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée. La mesure ν est une mesure additive, régulière et bornée. Par le Théorème 1.1, elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ, et qui n'est autre que la tribu Borélienne $\mathcal{B}(J)$. Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée la mesure de Borel sur J.

Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $\left(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu}\right)$. Alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue -mesurables de J et ν^* est la mesure de Lebesgue sur J.

Dans la suite de ce travail, pour tout ensemble compact I de $I\!R$, on note par

. $L(I)$ la tribu de Lebesgue sur I,

. μ ou dt la mesure de Lebesgue,

. $\mathbf{L}_E^p(I)\,(1 \leq p < \infty)$ l'espace des applications Lebesgue Bochner-intégrables définies sur I à valeurs dans l'espace de Banach E, c'est à dire, les applications f Lebesgue Bochner-mesurables et telles que $\|f\|_p = (\int_I \|f\|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ est finie.

1.4 Quelques notions sur les mesures de Young

Pour plus de détails sur les mesures de Young on peut se référer à [31], [32] et [33].

Définition 1.10 *Soient* $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ *deux espaces mesurables,* $\theta : X_1 \longrightarrow X_2$ *une application mesurable et* ν_1 *une mesure positive sur* X_1*. Alors l'image de* ν_1 *par* θ *est la mesure* $\nu_2 = \nu_1 \circ \theta^{-1}$ *(où* θ^{-1} *est considérée comme application de* Σ_2 *dans* Σ_1*), c'est à dire*

$$\nu_2(B) = \nu_1\left(\theta^{-1}(B)\right), \forall B \in \Sigma_2.$$

Si $\varphi : X_2 \longrightarrow \overline{I\!R}$ est une fonction mesurable telle que φ est positive ou ν_2-intégrable alors

$$\int_{X_2} \varphi d\nu_2 = \int_{X_1} \varphi \circ \theta d\nu_1.$$

Définition 1.11 *Soit $\Omega \subset I\!R^n$ (ouvert ou compact), (Ω, Σ, η) un espace mesuré positive et $u : \Omega \longrightarrow S = I\!R^d$ une application mesurable. Alors la mesure de Young associée à u est l'image ν de η par l'application $\theta : \Omega \longrightarrow \Omega \times S$ définie par*

$$\theta(x) = (x, u(x)),$$

c'est à dire, $\nu = \eta \circ \theta^{-1}$. Si $\psi : \Omega \times S \longrightarrow \overline{I\!R}$ est une fonction mesurable telle que ψ est positive ou ν-intégrable alors

$$\int_{\Omega \times S} \psi d\nu = \int_{\Omega} \psi(\theta(x)) d\eta(x) = \int_{\Omega} \psi(x, u(x)) d\eta(x).$$

La mesure de Young ν est l'unique mesure sur $\Omega \times S$ portée par le graphe de u et telle que

$$\nu(A \times S) = \eta(A), \forall A \in \Sigma.$$

On note par $(\nu_x)_{x \in \Omega}$ une désintégration de ν, i.e., une famille de mesures de probabilité sur S telle que pour tout $\varphi : \Omega \times S \longrightarrow \overline{I\!R}$ mesurable qui est soit positive soit ν-mesurable, on ait

$$\int_{\Omega \times S} \varphi d\nu = \int_{\Omega} [\int_S \varphi(x, s) \nu_x(ds)] \eta(dx).$$

Notons que si $u : \Omega \longrightarrow S$ est une application mesurable et ν la mesure de Young associée à u alors $\nu_x = \delta_{u(x)}$, avec $\delta_{u(x)}$ la masse de Dirac au point $u(x)$.

Définition 1.12 *On dit que $\psi : \Omega \times S \longrightarrow I\!R$ est un intégrande de Carathéodory si*

- *ψ est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(S)$-mesurable,*

- *pour tout $x \in \Omega$ fixé, $\psi(x, .)$ est continue, bornée et $x \longmapsto \|\psi(x, .)\|$ est η-mesurable.*

L'espace des intégrandes de Carathéodory définis sur $\Omega \times S$ est noté $\mathcal{G}_c(\Omega, \eta; S)$.

Définition 1.13 *Une suite $(\nu^n)_{n \in \mathbf{N}}$ de mesures de Young converge étroitement vers ν, si pour tout intégrande de Carathéodory ψ on ait*

$$\int_{\Omega \times S} \psi d\nu^n \longrightarrow \int_{\Omega \times S} \psi d\nu.$$

Définition 1.14 *Notons par* $\mathcal{Y}(\Omega,\eta;S)$ *l'ensemble des mesures de Young, i.e., l'ensemble des mesures positives sur* $\Omega \times S$ *qui ont leurs projections sur* Ω *égales à* η. *Supposons que* $\mathcal{Y}(\Omega,\eta;S)$ *soit muni de la topologie la plus faible rendant les applications* $\nu \mapsto \int_{\Omega\times S} \psi d\nu$ *continues, où,* ψ *parcourt l'espace* $\mathcal{G}_c(\Omega,\eta;S)$. *Cette topologie est appelée topologie de la convergence étroite où topologie Narrow et notée* $\sigma(\mathcal{Y}(\Omega,\eta;S),\mathcal{G}_c(\Omega,\eta;S))$.

Proposition 1.1 *Soit* (u_n) *une suite d'applications définies sur* Ω *et à valeurs dans* S. *Alors la convergence en mesure de* (u_n) *vers* u_∞ *est équivalente à la convergence étroite des mesures de Young* (ν^n) *associées aux* u_n *vers la mesure de Young* ν^∞ *associée à* u_∞, *c'est à dire,*

$$u_n \longrightarrow u_\infty, \eta \ p.p \iff \int_{\Omega\times S} \psi d\nu^n \longrightarrow \int_{\Omega\times S} \psi d\nu^\infty.$$

pour tout $\psi \in \mathcal{G}_c(\Omega,\eta;S)$.

1.5 Multi-applications et sélections

Définition 1.15 *Soient* X, Y *deux ensembles non vides. Une multi-application* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y, *est une fonction qui à chaque élément* $x \in X$ *associe un sous ensemble* $F(x)$ *de* Y, *on note* $F : X \rightrightarrows Y$ *ou* $F : X \longrightarrow P(Y)$, $(P(Y)$ *est l'ensemble des parties de* $Y)$. *Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application* $F : X \rightrightarrows Y$ *sont donnés par*

$$D(F) = Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\},$$

$$gph(F) = \{(x,y) \in X \times Y : x \in D(F), y \in F(x)\},$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.16 *Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *une multi-application. On appelle sélection de* F *toute application* $f : X \longrightarrow Y$ *vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X.$$

1.6 Mesurabilité des multi-applications

Pour plus de détails sur la mesurabilité des multi-applications se référer à [14].

Définition 1.17 *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace topologique et $\Gamma : X \rightrightarrows Y$. On dit que Γ est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable si pour tout ouvert V de X,*

$$\Gamma^{-1}(V) = \{t \in J : \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.2 *Soient Z un espace métrique, Y un espace métrique séparable, et soit $f : T \times Y \longrightarrow Z$ une application de Carathéodory. Alors l'application f est $(\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(Z))$-mesurable.*

Lemme 1.2 *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Considérons les propriétés suivantes*

1) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout Borélien B de X;

2) $\Gamma^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé de X;

3) $\Gamma^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout ouvert V de X;

4) il existe une suite (σ_n) de sélections mesurables de Γ telle que

$$\forall t \in J, \Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n \in \boldsymbol{N}};$$

5) pour tout $x \in X$, la fonction distance $t \mapsto d(x, \Gamma(t))$ est mesurable ;

6) le graphe de Γ appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 5) \Rightarrow 6)$.

Si Γ est à valeurs non vides complètes alors $3) \Leftrightarrow 5) \Leftrightarrow 4)$.

Si X est un espace de Banach séparable et Γ est à valeurs convexes compactes, alors la mesurabilité de Γ est équivalente à la mesurabilité de la fonction d'appui $t \mapsto \delta^*(x', \Gamma(t))$, pour tout $x' \in X'$.

Lemme 1.3 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$, σ-finie et Σ ν-complète. Soient X un espace métrique complet et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées, alors*

$$1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4) \Leftrightarrow 5) \Leftrightarrow 6).$$

Définition 1.18 *Soient (J, Σ, ν) un espace mesuré fini, X un espace métrique séparable et $\Gamma : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors l'ensemble de toutes les sélections ν-mesurables de Γ est défini par*

$$S_\Gamma = \{\sigma : J \to X,\ \sigma\ \nu\text{-mesurable et } \sigma(t) \in \Gamma(t)\ p.p.\ t \in J\}.$$

Théorème 1.4 *(Théorème d'existence de sélections mesurables).*
Soient (J, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Soit Z un espace métrique compact, on note par $\mathcal{C}(Z) = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(Z)$ l'espace de Banach des fonctions $f : Z \longrightarrow \mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme, et $\mathcal{C}(Z)'$ le dual de $\mathcal{C}(Z)$ muni de la topologie faible, $\sigma\left(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}(J), \mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)}(J)\right)$ la topologie stable. Et $\mathcal{M}^1_+(Z)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Z, $\mathcal{M}^1_+(Z)$ est une partie convexe compacte de $\mathcal{C}(Z)'$.

Lemme 1.4 *Soient $(J, \mathcal{F}, \nu)$ un espace de probabilité complet, Z un espace métrique compact, $\Gamma : J \rightrightarrows Z$ une multi-application scalairement ν-mesurable, à valeurs non vides convexes compactes. On pose*

$$\Sigma(t) = \left\{\sigma \in \mathcal{M}^1_+(Z) : \sigma(\Gamma(t)) = 1\right\}, \forall t \in J.$$

Alors la multi-application $\Sigma : J \rightrightarrows \mathcal{M}^1_+(Z)$ à valeurs non vides convexes compactes est scalairement ν-mesurable, de plus S_Σ l'ensemble de sélections scalairement ν-mesurables de Σ est convexe et $\sigma\left(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}(J), \mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)}(J)\right)$ compact.

Théorème 1.5 *Soient $(J, \mathcal{F}, \nu)$ un espace de probabilité complet, Z un espace métrique compact, $\Gamma : J \rightrightarrows Z$ une multi-application scalairement ν-mesurable, à valeurs non vides convexes compactes.*
Soit

$$\Sigma(t) = \left\{\sigma \in \mathcal{M}^1_+(Z) : \sigma(\Gamma(t)) = 1\right\}, \forall t \in J.$$

Si ν est sans atomes, alors l'ensemble S_Γ des sélections ν-mesurables de Γ est dense dans l'ensemble S_Σ des sélections ν-mesurables de Σ pour la topologie stable $\sigma(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}(J), \mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)}(J))$.

1.7 Concepts de continuité des multi-applications

Définition 1.19 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$. On dit que F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x \in X$.*
Nous avons la propriétés suivantes.

Le graphe d'une multi-application s.c.s à valeurs fermées est fermé. Donc si F est s.c.s à valeurs fermées,

$$\limsup_{x \to x'} F(x) \subset F(x'),$$

tel que

$$\limsup_{x \to x'} F(x) = \bigcup_{x_i \to x'} \limsup_{i \to \infty} F(x_i) = \{u / \exists x_i \to x',\ \exists u_i \to x \text{ avec } u_i \in F(x_i)\}.$$

Proposition 1.3 *Soit (J, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$, σ-finie et Σ ν-complète. Soient X un espace métrique complet et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vide fermées. Si F est semi-continue supérieurement, alors F est mesurable.*

Enonçons le Théorème de fermeture (voir [14]) pour les multi-applications s.c.s. suivant.

Théorème 1.6 *Soient E un espace de Banach séparable, X un espace topologique et Φ une multi-application définie sur $[0, T] \times X$ à valeurs non vides convexe compactes dans E et telle que pour tout $t \in [0, T]$ fixé, $\Phi(t, .)$ est s.c.s. Soient (x_n), x des applications définies sur $[0, T]$ à valeurs dans X et (y_n), y des applications intégrables définies sur $[0, T]$ à valeurs dans E.*
Supposons que

a) $\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t)$ *p.p. sur* $[0, T]$,

b) (y_n) *converge vers* y $\sigma(\mathbf{L}^1_E, \mathbf{L}^\infty_{E'})$,

c) $y_n(t) \in \Phi(t, x_n(t))$, *p.p. sur* $[0, T]$.

Alors $y(t) \in \Phi(t, x(t))$, p.p. sur $[0, T]$.

Proposition 1.4 *([6]) Soient Y un espace localement convexe et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement sur X à valeurs compactes. Alors la multi-application $\overline{co}(F) : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue supérieurement sur X.*

Définition 1.20 *Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)\,dt.$$

On voit bien qu'une fonction absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.

Définition 1.21 *Soit f une application de l'espace de Banach E à valeurs dans $\overline{I\!R}$. On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $a \in E$ si et seulement si*

$$\liminf_{x \to a} f(x) \geq f(a).$$

1.8 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.7 *(Théorème de convergence de Lebesgue [26]).*
Soient (J, Σ, μ) un espace mesuré fini, E un espace de Banach et (f_n) la suite de fonctions Bochner-integrable définies sur J à valeurs dans E, converge μ-p.p vers une fonction $f : J \to E$ et si de plus les f_n supposées μ-intégrables vérifient μ-p.p. et pour tout n

$$|f_n(t)| \leq g(t),$$

où g est une fonction μ-intégrable à valeurs réelles positives indépendante de n, alors f est Bochner-intégrable et nous avons

$$\mu(f) = \lim_{n \to \infty} \mu(f_n).$$

Lemme 1.5 *(Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite majorée (resp. minorée) dans $\boldsymbol{L}^1_E(\mu)$ telle que la suite $(\mu(f_n))$ est minorée (resp. majorée) dans $I\!R$. Alors la limite supérieure (resp. inférieure) de la suite (f_n) est μ-intégrable et l'on a*

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} f_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(f_n)$$

respectivement

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n).$$

Théorème 1.8 *Soit φ une fonction à valeurs réelles, définie sur $V_s \times (E \setminus A)$, où V_s est un voisinage d'un point $s \in I\!R$, $E = I\!R^k$ et $A \subset E$ un sous ensemble μ-négligeable. Si pour chaque $t \in V_s$, la fonction $x \mapsto \varphi(t,x)$ est μ-intégrable sur E et si de plus, sur $V_s \times (E \setminus A)$, la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à t vérifiant l'inégalité*

$$|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)| \leq g(x)$$

où g est μ-intégrable et indépendante de t, alors la fonction

$$t \mapsto \int \varphi(t,x) d\mu(x),$$

est dérivable au point s et l'on a

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(s,x) d\mu(x) = \int \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,x) d\mu(x).$$

Théorème 1.9 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà [3]). Soient J un espace métrique compact, (Y,d) un espace métrique complet et H un sous ensemble de $\mathcal{C}(J,Y)$, l'espace des applications continues définies sur J à valeurs dans Y, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors H est relativement compact si et seulement si H est équicontinu et $H(x)$ est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x) : \; f \in H\}.$$

Théorème 1.10 *(Corollaire du Théorème d'Ascoli-Arzéla [3]). Soient J un sous espace métrique compact de $I\!R$, E un espace de dimension finie et (f_n) une suite de fonctions absolument continues définies sur J à valeurs dans E, satisfaisant les conditions suivantes*

i) $\forall t \in J, (f_n(t))$ *est un sous ensemble relativement compact dans E,* *ii) il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in \boldsymbol{L}^1_{\boldsymbol{R}}(J)$ telle que*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t) \text{ p.p. sur } J.$$

Alors il existe une sous suite de (f_n) qui converge vers une fonction absolument continue $f : J \longrightarrow E$ au sens suivant

a) (f_n) converge uniformément vers f,

b) $\left(\dot{f}_n\right)$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $\boldsymbol{L}^1_E(J)$, i.e., $\left(\dot{f}_n\right)$ converge $(\sigma(\boldsymbol{L}^1_E, \boldsymbol{L}^\infty_E)$ vers $\dot{f}$.

Théorème de Scorza-Dragoni

Définition 1.22 *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces topologiques et $f : J \times X \to Y$. On dit que f est une fonction de Carathéodory si $f(., x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in X$, fixé et $f(t, .)$ est continue pour tout $t \in J$, fixé.*

Théorème 1.11 *(Théorème de Scorza-Dragoni) ([10]). Soient J un espace métrique compact, (J, Σ, ν) un espace mesuré positif de Radon. Soient X un espace métrique séparable complet, E un espace de dimension finie et $h : J \times X \to E$ une fonction de Carathéodory. Alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $J_\varepsilon \subset J$ tel que $\nu(J \setminus J_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de h à $J_\varepsilon \times X$ est continue.*

Théorème du prolongement de Dugundji

Théorème 1.12 *[16]. Soient X un espace métrique, A un sous ensemble fermé de X et Y un espace vectoriel localement convexe. Soit $f : A \to Y$ une application continue. Alors il existe une application continue $\widetilde{f} : X \longrightarrow Y$ qui prolonge f à X, c'est à dire $f(x) = \widetilde{f}(x), \forall x \in A$. De plus*

$$\widetilde{f}(X) \subset co(f(A)).$$

1.9 Quelques Résultats de compacité

Théorème 1.13 *(Théorème de Banach-Dieudonné). Soit E un espace de Banach séparable, $\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ la boule unité fermée de E'. Alors sur $\overline{\mathbf{B}}_{E'}$ la topologie de la convergence faible coincide avec la topologie de convergence compacte. $(\overline{\mathbf{B}}_{E'}, \sigma(E', E))$ est métrisable.*

Théorème 1.14 *(Théorème d'Eberlein-Šmulian).*
Soit S un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) *S est faiblement (relativement) séquentiellement compact.*

ii) *S est faiblement (relativement) compact.*

Théorème 1.15 *(Théorème de Banach-Mazur). Soit (x_n) une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors il existe une suite (z_n) (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$) convergeant fortement vers x.*

Théorème 1.16 *(Théorème de Carathéodory). Soit $A \subset I\!R^n$. Pour tout $x \in coA$ il existe $x_1, ...x_m \in A$ tels que $m \leq n+1$ et*

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$$

ou $\lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$ et $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$

Corollaire 1.1 *L'enveloppe convexe d'un sous ensemble compact d'un espace de dimension finie est compact.*

Démonstration.

Notons que dans un espace de dimension finie un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné. Soit $A \subset I\!R^n$ un ensemble compact, d'après le Théorème de Carathéodory $co(A)$ est borné, il suffit de montrer que $co(A)$ est fermé.
Soit $(x_k)_{k \in I\!N}$ une suite d'éléments de $co(A)$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x_0$. D'après le Théorème de Carathéodory nous avons pour tout $k \in I\!N$

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,k} x_{i,k}, \tag{1.1.1}$$

où

$$x_{i,k} \in A,\ \lambda_{1,k} + ... + \lambda_{n+1,k} = 1,\ \lambda_{i,k} \geq 0. \tag{1.1.2}$$

La suite $(x_{i,k})_k$, est bornée dans A qui est compact et la suite $(\lambda_{i,k})_k$ est bornée dans $I\!R$ qui est de dimension finie, alors par extraction de sous suites on peut supposer que $(x_{i,k})_k$ converge vers $x_{i,0} \in A$ et $(\lambda_{i,k})_k$ converge vers

$\lambda_{i,0}$. Comme A est compact, nous aurons $x_{i,0} \in A$, passons à la limite dans la relation (1.1.1) nous aurons

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,0} x_{i,0},$$

avec

$$x_{i,0} \in A,\ \lambda_{1,0} + ... + \lambda_{n+1,0} = 1,\ \lambda_{i,0} \geq 0.$$

On conlut que $x_0 \in co(A)$. Par conséquant $co(A)$ est fermé. ∎

1.10 Lemme de Gronwall

Lemme 1.6 *Soient f, g, h des fonctions définies sur $[0, T]$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t f(\tau) h(\tau) d\tau,$$

alors

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau) h(\tau) \exp\left(\int_\tau^t h(s) ds\right) d\tau.$$

1.11 Quelques Théorèmes du point fixe

Théorème 1.17 *(voir [26]) Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble convexe fermé de E et $f : S \to S$ une application continue telle que l'image $f(S)$ est relativement compact. Alors f admet un point fixe dans S.*

Théorème 1.18 *(Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan).*
Soient X un espace topologique séparé localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application s.c.s à valeurs non vides convexes fermées. Alors F admet un point fixe dans S, c'est à dire, il existe $x \in S$ tel que $x \in F(x)$.

Le corollaire suivant du Théorème de Kakutani-Ky Fan nous donne la forme faible de ce dernier.

Théorème 1.19 *[26] Soient E un espace de Banach, S un sous ensemble non vide convexe faiblement compact de E et $F : S \rightrightarrows S$ une multi-application faiblement-faiblement s.c.s et à valeurs non vides convexes faiblement fermées. Alors F admet un point fixe dans S.*

Dans toute la suite de se travail on note par

. $\mathbf{C}_E([a,b])$, $(0 \leq a < b < +\infty)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [a,b] \to E$, nuni de la norme sup.

. $\mathbf{L}^1_E([a,b])$ l'espace de toutes les applications continues $u : [a,b] \to E$, Lebesgue-Bochner intégrables.

. $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ l'espace de toutes les applications $u \in \mathbf{C}_E([a,b])$ ayant une dérivée première absolument continue et une dérivée second faible dans $\mathbf{L}^1_E([a,b])$.

Chapitre 2

Etude de l'existence de solution optimale pour une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone

2.1 Introduction

Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous présentons un théorème d'existence pour une équation différentielle ordinaire du second ordre de la forme

$$(P_f)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)), \quad p.p. \;\; t \in [0, 1], \\ \dot{u}(0) = 0; \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

dans un espace de Banach séparable E.
Hartman [20] a fait une étude originale des problèmes à deux conditions aux limites, pour une équation différentielle ordinaire. Dans [7], [19], [28], les auteurs ont généralisé cette étude pour les problèmes avec des conditions aux limites en trois points, pour le même type d'équations.

Dans la section 2, nous étudions l'existence et l'unicité de solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0, 1])$ pour l'inclusion différentielle

$$(P_{A,f})\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)\dot{u}(t) + f(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, 1] \\ \dot{u}(0) = 0, \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

avec E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone et $f : [0,1] \times E \times E \to E$ une application Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$, vérifiant la condition de Lipschitz sur $E \times E$, en se basant sur le théorème d'existence pour l'équation différentielle (P_f), et en utilisant les approximations de Yosida.

Dans la section 3, et comme application du résultat obtenu dans la deuxième section, nous présentons un problème de type Bolza et une propriété de relaxation en contrôle optimal pour l'inclusion $(P_{A,f})$, où les contrôles sont des mesures de Young.

2.2 Résultats d'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ pour une équation différentielle du second ordre.

On commence par un Lemme préliminaire où on démontre quelques propriétés d'une fonction de Green nous permettant de résoudre nos problèmes avec des conditions aux limites en deux points. Cette fonction a été utilisée par plusieurs auteurs nous citons ([5, 7, 20]).
On considère $\mathbf{C}_E^1([0,1])$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E^1} = \max\{\frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}\|u(t)\|, \max_{t\in[0,1]}\|\dot{u}(t)\|\}$$

Lemme 2.1 *Soit E un espace de Banach séparable, soit $G : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} t-2 & si \quad 0 \le s \le t, \\ s-2 & si \quad t \le s \le 1. \end{cases}$$

Alors on a les résultats suivants.
(1) Si $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ avec $\dot{u}(0) = 0$ et $u(1) + \dot{u}(1) = 0$, alors

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.1.1}$$

(2) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1[$ pour tout $s \in [0,1]$, c'est à dire que $G(.,s)$ est dérivable à droite sur $[0,1[$ et dérivable à gauche sur $]0,1]$ à part sur la diagonale. Sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le s < t \\ 0 & si \quad t < s \le 1. \end{cases}$$

(3) $G(.,.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t,s\in[0,1]}|G(t,s)| \le 2, \quad \sup_{t,s\in[0,1],t\neq s}|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \le 1. \tag{2.1.2}$$

(4) Pour $f \in \mathbf{L}_E^1([0,1])$ et $u_f : [0,1] \to E$ definie par

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

De plus, l'application u_f est dérivable, et sa dérivée $\dot{u}_f$ vérifie

$$\lim_{h\to 0}\frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h}=\dot{u}_f(t)=\int_0^1\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds. \qquad (2.1.3)$$

pour tout $t\in[0,1]$. Alors $\dot{u}_f(0)=0$ et $\dot{u}_f(1)+u_f(1)=0$. Par conséquent, $\dot{u}_f$ est une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans E.
(5) L'application $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, i.e, pour tout $x'\in E'$, la fonction scalaire $\langle x',\dot{u}_f(.)\rangle$ est dérivable, avec $\frac{d}{dt}\langle x',\dot{u}_f(t)\rangle=\langle x',\ddot{u}_f(t)\rangle$, de plus

$$\ddot{u}_f=f \;\; p.p. \;\; sur\; [0,1]. \qquad (2.1.4)$$

Démonstration.
1) Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds &= \int_0^t(t-2)\ddot{u}(s)ds+\int_t^1(s-2)\ddot{u}(s)ds\\
&= (t-2)[\dot{u}(s)]_0^t+[(s-2)\dot{u}(s)]_t^1-\int_t^1\dot{u}(s)ds\\
&= (t-2)(\dot{u}(t)-\dot{u}(0))+[-\dot{u}(1)-(t-2)\dot{u}(t)]-u(1)+u(t)\\
&= u(t)-[\dot{u}(1)+u(1)]=u(t),
\end{aligned}$$

d'où

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds.$$

2) Pour tout $s\in[0,1]$, fixé et pour tout $h>0$ assez petit avec $t<t+h$, nous avons

$$\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le s\le t\\ 0 & \text{si} \quad t<s\le 1.\end{cases}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h}=\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad 0\le s\le t\\ 0 & \text{si} \quad t<s\le 1.\end{cases}$$

3) D'après la définition de G et de sa dérivée, nous avons $|G(t,s)|\le 2$ et $|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}|\le 1$. On conclut que

$$\sup_{t,s\in[0,1]}|G(t,s)|\le 2$$

et

$$\sup_{t,s\in[0,1],t\neq s}|\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}|\leq 1.$$

4) Soit $f\in \mathbf{L}^1_E([0,1])$ et soit l'application $u_f:[0,1]\to E$ definie par

$$u_f(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t\in[0,1].$$

Comme

$$\sup_{t,s\in[0,1]}|G(t,s)|\leq 2,$$

le théorème de la convergence dominé nous assure la continuité de u_f sur $[0,1]$.
On veut démontrer maintenant que u_f est dérivable.
En effet,
a) la fonction $G(t,.)f(.)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t\in[0,1]$,
b) d'aprés 2), la fonction $G(t,.)$ est dérivable pour tout $t\in[0,1]$, fixé, et donc la fonction $G(t,.)f(.)$ l'est aussi.
c) $\|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\|\leq\|f(s)\|$, pour tout $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$.
Les propriétés a), b) et c) nous permettant de conclure, par le Théorème 1.8, que u_f est dérivable et que sa dérivée est donnée par

$$\dot{u}_f(t)=\int_0^1\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds.$$

On voit bien que $\dot{u}_f(0)=0$. D'autre part

$$\begin{aligned}\dot{u}_f(1)+u_f(1) &= \int_0^1\frac{\partial G}{\partial t}(1,s)f(s)ds+\int_0^1 G(1,s)f(s)ds\\ &= \int_0^1 f(s)ds-\int_0^1 f(s)ds=0.\end{aligned}$$

5) Par la relation (2.1.3) et la definition de $\frac{\partial G}{\partial t}$ nous avons

$$\dot{u}_f(t)=\int_0^t f(s)ds,$$

pour tout $t \in [0,1]$, d'où, pour tout $x' \in E'$,

$$\begin{aligned}\langle x', \ddot{u}(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \dot{u}(t)\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \int_0^t f(s)ds\rangle \\ &= \langle x', f(t)\rangle\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.
Soit (e'_n) une suite d'éléments de E' qui sépare les points de E. Alors nous avons $\langle e'_n, \ddot{u}_f(t)\rangle = \langle e'_n, f(t)\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $t \in [0,1]$. On conclut que $\ddot{u}_f = f$ p.p. ■

La proposition suivante est une conséquence du Lemme 3.1 elle nous sera utile dans la démonstration de nos théorèmes.

Proposition 2.1 *Soit E un espace de Banach séparable, et soit $f : [0,1] \to E$ une application continue (resp. dans $\mathbf{L}^1_E([0,1])$). Alors l'application*

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,1]$$

est la solution unique dans $\mathbf{C}^2_E([0,1])$ (resp. $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$) du problème

$$(P)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), \quad \forall t \in [0,1], \\ \dot{u}(0) = 0; \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, nous avons

$$u_f(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)ds = \int_0^t (t-2)f(s)ds + \int_t^1 (s-2)f(s)ds$$

d'où

$$\dot{u}_f(t) = \int_0^t f(s)ds$$

donc

$$\ddot{u}_f(t) = f(t)\ p.p.$$

avec

$$\dot{u}_f(0) = 0;\ u_f(1) + \dot{u}_f(1) = 0.$$

Par conséquent u_f est solution du problème (P).
Unicité de la solution.
Soient u_f, v_f deux solutions de (P). Alors

$$\ddot{u}_f(t) = \ddot{v}_f(t),\ \forall t \in [0,1].$$

D'aprés 1) du Lemme 2.1,

$$u_f(t) = v_f(t),\ \forall t \in [0,1],$$

et donc $u_f = v_f$, d'où l'unicité de la solution. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal e cette section.

Théorème 2.1 *Soient E un espace de dimension finie et $f : [0,1]\times E\times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

i) *pour tout $(x,y) \in E\times E$ fixé, $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$;*

ii) *pour tout $t \in [0,1]$ fixé, $f(t,.,.)$ est continue sur $E \times E$;*

iii) *il existe une fonction non négative $m \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,1])$ tel que*

$$\|f(t,x,y)\| \leq m(t),\ \forall\ (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E.$$

Alors l'équation différentielle

$$(P_f) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,u(t),\dot{u}(t)), & p.p.\ \ t \in [0,1], \\ \dot{u}(0) = 0; \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

admet une solution $u \in \mathbf{W}^{2,1}_E\ ([0,1])$.

Démonstration.
Etape 1.
Supposons que f est continue sur $[0,1] \times E \times E$. Soit

$$S = \{h \in \mathbf{C}^1_E([0,1]) :\ \|h\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}}\}.$$

Il est clair que S est un sous ensemble convexe fermé de $\mathbf{C}^1_E([0,1])$.
Pour tout $h \in S$, l'équation différentielle

$$(P_{f,h}) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,h(t),\dot{h}(t)), & p.p\ \ t \in [0,1], \\ \dot{u}(0) = 0; \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

admet, d'après la Proposition 2.1, une solution unique $u_h \in \mathbf{C}^2_E([0,1])$ définie par

$$u_h(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, h(s), \dot{h}(s)) ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Considerons l'application $P : h \mapsto u_h$ définie sur S à valeurs dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ par $P(h) = u_h$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|u_h(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s) f(s, h(s), \dot{h}(s)) ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s)| \|f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds \\ &\leq 2\int_0^1 m(s) ds = 2\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{2}\|u_h(t)\| \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R}. \tag{2.1.5}$$

De la même façon nous avons

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_h(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s, h(s), \dot{h}(s)) ds\| \\ &\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \|f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds \\ &\leq \int_0^1 m(s) ds = \|m\|_{\mathbf{L}^1_R}, \end{aligned}$$

alors

$$\|\dot{u}_h(t)\| \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R}. \tag{2.1.6}$$

Les relations (2.1.5) et (2.1.6) nous donnent $\|u_h\|_{\mathbf{C}^1_E([0,1])} \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R}$, c'est à dire, $u_h \in S$. Par conséquent, P est une application de S dans lui même.

La continuité de P.

Soit (h_n) une suite d'éléments de S convergeant vers h dans S. Par le Lemme 2.1 et la Proposition 2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \|u_{h_n}(t) - u_h(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s) f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) ds - \int_0^1 G(t,s) f(s, h(s), \dot{h}(s)) ds\| \\ &= \|\int_0^1 G(t,s)[f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))] ds\| \\ &\leq 2\int_0^1 \|f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\|u_{h_n}(t) - u_h(t)\| \leq \int_0^1 \|f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds,$$

d'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{h_n}(t) - \dot{u}_h(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s, h(s), \dot{h}(s)) ds\| \\
&= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)[f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(t, h(s), \dot{h}(s))] ds\| \\
&\leq \int_0^1 \|f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds.
\end{aligned}$$

Ces deux inégalités, nous donnent

$$\|u_{h_n} - u_h\|_{\mathbf{C}_E^1} \leq \int_0^1 \|f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|P(h_n) - P(h)\|_{\mathbf{C}_E^1} &= \|u_{h_n} - u_h\|_{\mathbf{C}_E^1} \\
&\leq \int_0^1 \|f(s, h_n(s), \dot{h}_n(s)) - f(s, h(s), \dot{h}(s))\| ds.
\end{aligned}$$

Comme f est continue, la suite $(\|f(., h_n(.), \dot{h}_n(.)) - f(., h(.), \dot{h}(.))\|)_n$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Et donc

$$\|P(h_n) - P(h)\|_{\mathbf{C}_E^1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'où la continuité de P.

La compacité relative de $P(S)$ dans $\mathbf{C}_E^1([0,1])$.

Nous avons, pour tout $h \in S$,

$$\|\ddot{u}_h(t)\| \leq m(t), \forall t \in [0,1]$$

et par les relations (2.1.5) et (2.1.6), il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, les ensembles

$$\{u_h(t),\ h \in S\} \text{ et } \{\dot{u}_h(t),\ h \in S\}$$

sont relativement compacts dans E.
D'autre part, pour tous $t, \tau \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\|u_h(t) - u_h(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)f(s,h(s),\dot{h}(s))ds - \int_0^1 G(\tau,s)f(s,h(s),\dot{h}(s))ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| \|f(s,h(s),\dot{h}(s))\| ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)| m(s) ds,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_h(t) - \dot{u}_h(\tau)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s,h(s),\dot{h}(s))ds - \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s)f(s,h(s),\dot{h}(s))ds\| \\ &\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s)| \|f(s,h(s),\dot{h}(s))\| ds \\ &\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s)| m(s) ds.\end{aligned}$$

Comme $m \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,1])$ et G est uniformément continue, nous obtenons l'equicontinuité des ensembles

$$\{u_h : \; h \in S\} \text{ et } \{\dot{u}_h : \; h \in S\}.$$

Le théorème d'Arzelà-Ascoli nous donne leur compacité relative dans $\mathbf{C}_E([0,1])$.
D'où

$$P(S) = \{u_h : \; h \in S\}$$

est relativement compact dans $\mathbf{C}^1_E([0,1])$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{C}^1_E}$. Le théorème du point fixe (Théorème 1.18), nous permet de conclure que P admet un point fixe qui est en fait la solution, du problème considéré.

Etape 2.

Supposons maintenant que f vérifie les hypothèses du Théorème 2.1.
Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Scorza-Dragoni, il existe un ensemble compact $J_\varepsilon \subset [0,1]$, tel que la mesure de Lebesgue de $([0,1] \setminus J_\varepsilon)$ est inférieure à ε et la restriction g_ε de f à $J_\varepsilon \times E \times E$ est continue.
D'où, l'existence d'une suite croissante d'ensembles compacts (J_n) dans $[0,1]$ telle que la mesure de Lebesgue de $([0,1] \setminus J_n)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, et la restriction g_n de f à $J_n \times E \times E$ est continue.
Soit $\tilde{f}_n$ le prolongement continue de Dugundji de g_n à $[0,1] \times E \times E$.

Notons que $\tilde{f}_n$ satisfait les hypothèses vérifiées par f dans l'étape 1. On applique les arguments de la démonstration de l'étape 1 à chaque $\tilde{f}_n$ on obtient pour tout $n \in I\!N$ une solution $u_n \in \mathbf{C}_E^2([0,1])$ du problème

$$\begin{cases} \ddot{u}_n(t) = \tilde{f}_n(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)), \quad \forall t \in [0,1], \\ \dot{u}_n(0) = 0; \quad u_n(1) + \dot{u}_n(1) = 0. \end{cases}$$

Nous avons pour tout $n \in I\!N$,

$$\|\ddot{u}_n(t)\| \leq m(t), \forall t \in [0,1].$$

Donc, on peut extraire de la suite $(\ddot{u}_n(.))$ une sous suite convergeant faiblement* dans $\mathbf{L}_E^\infty([0,1])$ vers une fonction $w(.)$.
D'autre part, nous avons

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_n(s)ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

et

$$\dot{u}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}_n(s)ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

alors pour tous $t, \tau \in [0,1]$

$$\|u_n(t) - u_n(\tau)\| \leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|m(s)ds,$$

et

$$\|\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(\tau)\| \leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)|m(s)ds.$$

Comme $m \in \mathbf{L}^1_{I\!R}([0,1])$ et G est uniformément continue, les suites $(u_n(.))$ et $(\dot{u}_n(.))$ sont equicontinues.
De plus, par les relations (2.1.5) et (2.1.6), et pour tout $t \in [0,1]$ les suites $(u_n(t))$ et $(\dot{u}_n(t))$ sont relativement compactes. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, (u_n) et $(\dot{u}_n)$ sont relativement compactes dans $\mathbf{C}_E([0,1])$. Par extraction de sous suites notées aussi (u_n) et $(\dot{u}_n)$ respectivement, on peut conclure que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u ayant une dérivée $\dot{u}$ absolument continue avec $\ddot{u} = w$ et satisfaisant $\dot{u}(0) = 0$ et $u(1) + \dot{u}(1) = 0$. On doit montrer que

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)), \ p.p\ t \in [0,1].$$

Par construction, il existe pour tout $n \in I\!N$ un ensemble N_n de mesure de Lebesgue négligeable, tel que

$$\ddot{u}_n(t) = f(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)), \forall t \in J_n \setminus N_n.$$

Soit $N_0 = ([0,1] \setminus \bigcup_n J_n) \bigcup (\bigcup_n N_n)$ qui est Lebesgue négligeable.
Si $t \notin N_0$, alors il existe un entier $p = p(t)$ tel que

$$\ddot{u}_n(t) = f(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)), \ \textit{pour tout } n \geq p,$$

cette relation nous donne

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\sup \langle x', \ddot{u}_n(t)\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\sup \langle x', f(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))\rangle \\ &\leq \langle x', f(t, u(t), \dot{u}(t))\rangle, \end{aligned}$$

pour tout $x' \in E'$ et pour tout $n \geq p$. Comme $(\ddot{u}_n)$ converge faiblement* vers $\ddot{u}$ dans $\mathbf{L}^\infty_E([0,1])$, on aura pour tout ensemble $A \subset [0,1]$ et pour tout $x' \in E'$,

$$\int_A \langle x', \ddot{u}(t)\rangle dt = \lim_{n\to\infty} \int_A \langle x', \ddot{u}_n(t)\rangle dt,$$

en utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\begin{aligned} \int_A \langle x', \ddot{u}(t)\rangle dt &= \lim_{n\to\infty} \int_A \langle x', \ddot{u}_n(t)\rangle dt \\ &\leq \int_A \lim_{n\to\infty}\sup \langle x', \ddot{u}_n(t)\rangle dt \\ &\leq \int_A \langle x', f(t, u(t), \dot{u}(t))\rangle dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\langle x', \int_A \ddot{u}(t) dt\rangle \leq \langle x', \int_A f(t, u(t), \dot{u}(t)) dt\rangle,$$

pour tout $x' \in E'$, et par conséquent

$$\ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) \ p.p \ t \in [0,1].$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

2.3 Un résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone.

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$, pour une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur maximal monotone avec des conditions aux limites en deux points dans un espace de dimension finie, de la forme

$$(P_{A,f})\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A(t)\dot{u}(t) + f(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p. \quad t \in [0,1] \\ \dot{u}(0) = 0, \quad u(1) + \dot{u}(1) = 0, \end{cases}$$

où $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ est un opérateur maximal monotone, E un espace de dimension finie et $f : [0,1] \times E \times E \to E$ une application Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$, vérifiant la condition de Lipschitz sur $E \times E$.

Rappelons qu'un opérateur $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ est monotone, si pour tous $t \in [0,1]$, $\lambda > 0$, et pour tous $x_1 \in D(A(t))$, $x_2 \in D(A(t))$, $y_1 \in A(t)x_1$ et $y_2 \in A(t)x_2$ nous avons

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|.$$

Si $A(t)$ est monotone et $R(I_E + \lambda A(t)) = E$, on dit que $A(t)$ est maximal monotone, où

$$D(A(t)) = \{x \in E : A(t)x \neq 0\}$$

est le domaine de $A(t)$ et $R(I_E + \lambda A(t))$ est le rang de $(I_E + \lambda A(t))$.

Dans ce qui suit, on donne des résultats sur les opérateurs maximaux monotones, qui nous seront utiles dans la démonstration de nos théorèmes. On peut se référer à [9] et [34] pour des résultats détaillés.

Définition 2.1 *Soit $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ un opérateur et $\lambda > 0$. Alors*

a) *l'opérateur $J_\lambda(t) : D(J_\lambda(t)) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$J_\lambda(t) = (I_E + \lambda A(t))^{-1}$$

où $D(J_\lambda(t)) = R(I_E + \lambda A(t))$, est appelé la résolvante de $A(t)$,

b) *l'opérateur $A_\lambda(t) : D(A_\lambda(t)) \subset E \rightrightarrows E$ défini par*

$$A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(I_E - J_\lambda(t))$$

où $D(A_\lambda(t)) = R(I_E + \lambda A(t))$, est appelé l'approximation de Yosida de $A(t)$.

Lemme 2.2 *Un opérateur $A(t) : D(A(t)) \subset E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ est maximal monotone si et seulement si pour tout $\lambda > 0$, la résolvante $J_\lambda(t)$ de $A(t)$ est univoque et non-expansive, c'est à dire, $J_\lambda(t)$ est univoque et vérifie la relation*

$$\|J_\lambda(t)x - J_\lambda(t)y\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in R(I_E + \lambda A(t)).$$

Proposition 2.2 *Soit $A(t) : D(A) \subset E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone, et $\lambda > 0$. Alors*

1) *$A_\lambda(t)$ est univoque, maximal monotone et Lipschitzienne de rapport $\dfrac{2}{\lambda}$ sur $R(I_E + \lambda A(t))$,*

2) *$A_\lambda(t)x \in AJ_\lambda(t)x$, $\forall x \in R(I_E + \lambda A(t))$;*

3) *$\dfrac{1}{\lambda}\|J_\lambda A(t)x - x\| = \|A_\lambda(t)x\| \leq |A(t)x|_0$, $\forall x \in R(I_E + \lambda A(t)) \cap D(A(t))$, où*

$$|A(t)x|_0 = \inf\{\|y\|;\ y \in A(t)x\},$$

et

$$J_\lambda A(t) = (I_E + \lambda A(t))^{-1}$$

est la résolvante de $A(t)$.

Théorème 2.2 *Soit X un espace de Banach qui a son dual topologique uniformément convexe. Alors le graphe de tout opérateur maximal monotone $A : D(A) \subset X \rightrightarrows X$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre premier résultat d'existence pour le problème $(P_{A,f})$ en supposant que la perturbation f est bornée par une fonction intégrable non-negative.

Proposition 2.3 *Soient E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone. Considérons la fonction $f : [0,1] \times E \times E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes*

i) *pour tout $(x,y) \in E \times E$, $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$;*

ii) *il existe deux fonctions non-negatives $k_1(.)$, $k_2(.)$ Lebesgue-mesurables sur $[0,1]$ telles que*

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tous $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in [0,1] \times E \times E$.
Supposons aussi que les hypothèses suivantes sont vérifiés

(H_1) *pour tout* $y \in E$ *et tout* $\lambda > 0$ *la fonction* $t \mapsto J_\lambda A(t)y$ *est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction* $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ *telle que* $t \mapsto J_\lambda A(t)\overline{g}(t)$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_E([0,1])$;

(H_2) *il existe une fonction* $m \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,1])$ *telle que*

$$|A(t)y|_0 + \|f(t,x,y)\| \leq m(t), \quad \forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E.$$

Alors l'inclusion différentielle $(P_{A,f})$ *admet une solution unique* $u \in \boldsymbol{W}^{2,1}_E([0,1])$.

Pour la démonstration de notre Théorème on a besoin du

Lemme 2.3 *Soit* E *un espace de Hilbert séparable,* $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ *un opérateur maximal monotone satifaisant la condition*
(H) *pour tout* $y \in E$ *et tout* $\lambda > 0$ *la fonction* $t \mapsto J_\lambda A(t)y$ *est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction* $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ *telle que* $t \mapsto J_\lambda A(t)\overline{g}(t)$ *appartient à* $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.
Soient $(u_n), (v_n)$ *deux suites dans* $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ *vérifiant*

i) (u_n) *converge fortement vers* $u \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ *et* (v_n) *converge vers* $v \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ *par rapport à la topologie faible* $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]), \mathbf{L}^2_E([0,1]))$;

ii) $v_n(t) \in A(t)u_n(t)$ *pour tout* $n \in I\!N$ *et presque pour tout* $t \in [0,1]$.

Alors $v(t) \in A(t)u(t)$, *p.p.* $t \in [0,1]$.

Démonstration.
Soit $I_{\mathbf{L}^2}$ l'identité de $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ et soit

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_E([0,1]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0,1])$$

l'opérateur défini par

$$v \in \mathcal{A}u \Leftrightarrow v(t) \in A(t)u(t), \ p.p.\ t \in [0,1].$$

Comme $A(t)$ est monotone, $\mathcal{A}$ l'est aussi.
En effet, soient $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A})$, $v_1 \in \mathcal{A}u_1$, $v_2 \in \mathcal{A}u_2$, $t \in [0,1]$ et $\lambda > 0$. Nous avons $u_1, u_2 \in D(\mathcal{A})$ donc $u_1(t), u_2(t) \in D(A(t))$, pour tout $t \in [0,1]$ et

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^2} &= \left(\int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \|u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(u_1 - u_2) + \lambda(v_1 - v_2)\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, c'est à dire, que pour tout $\lambda > 0$,

$$R(I_{\mathbf{L}^2} + \lambda\mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_E([0,1]).$$

Soit $\lambda > 0$ et soit $g \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$.
Par l'hypothèse (H), il existe $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ telle que la fonction

$$\overline{h} : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}\overline{g}(t)$$

appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.
Considérons la fonction

$$h : t \mapsto (I_E + \lambda A(t))^{-1}g(t),$$

nous avons

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathbf{L}^2} &\leq \|h - \overline{h}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \|g - \overline{g}\|_{\mathbf{L}^2} + \|\overline{h}\|_{\mathbf{L}^2}, \end{aligned}$$

du fait que $(I_E + \lambda A(t))^{-1}$ est non-expansive.
Comme $g, \overline{g}$ et $\overline{h}$ sont des fonctions de $\mathbf{L}^2_E([0,1])$, on déduit que h est Lebesgue mesurable et appartient à $\mathbf{L}^2_E([0,1])$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} h(t) = (I_E + \lambda A(t))^{-1}g(t),\ p.p \quad &\Leftrightarrow \quad g(t) \in h(t) + \lambda A(t)h(t),\ p.p. \\ &\Leftrightarrow \quad g \in h + \lambda\mathcal{A}h \\ &\Leftrightarrow \quad h \in (I_{\mathbf{L}^2} + \lambda\mathcal{A})^{-1}g, \end{aligned}$$

c'est à dire, $\forall g \in \mathbf{L}^2_E([0,1]), \exists h \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$ telle que

$$h \in (I^2_{\mathbf{L}} + \lambda\mathcal{A})^{-1}g,$$

d'où

$$R(I_{\mathbf{L}^2} + \lambda\mathcal{A}) = \mathbf{L}^2_E([0,1]).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone sur l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.
Par conséquant, d'après le Théorème 2.2, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement faiblement séquentiellement fermé. Comme la suite (u_n) converge fortement vers u dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ et la suite (v_n) converge faiblement vers v, on conclut que $v \in \mathcal{A}$, i.e., $v(t) \in \mathcal{A}(t)u(t)$, presque partout.

Démonstration du Théorème.

Soit (λ_n) une suite décroissante dans $]0,1[$ telle que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \in I\!N$, considérons l'application

$$g_n(t,x,y) = A_{\lambda_n}(t)y + f(t,x,y),\ \forall (t,x,y) \in [0,1] \times E \times E.$$

D'après la propriété 3) de la Proposition 2.2 et l'hypothèse (H_2), nous avons pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$.

$$\begin{aligned} |g_n(t,x,y)| &\leq \quad \|A_{\lambda_n}(t)y\| + \|f(t,x,y)\| \\ &\leq \quad |A(t)y|_0 + \|f(t,x,y)\| \leq m(t). \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse (H_1) et la propriété 1) dans la proposition 2.2 impliquent que l'application $(t,y) \mapsto A_{\lambda_n}(t)y$ est de Carathéodory, c'est à dire, Lebesgue mesurable sur $[0,1]$ et continue sur E. En appliquant le théorème 2.1 nous obtenons pour tout $n \in I\!N$, l'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ d'une solution u_n pour l'équation différentielle

$$(P_{g_n}) \begin{cases} -\ddot{u}_n(t) = g_n(t, u_n(t), \dot{u}_n(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [0,1], \\ \dot{u}_n(0) = 0; \;\; u_n(1) + \dot{u}_n(1) = 0, \end{cases}$$

avec

$$u_n(t) = \int_0^1 G(t,s) g_n(t, u_n(s), \dot{u}_n(s)) ds;\ \forall t \in [0,1]$$

et

$$\dot{u}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) g_n(t, u_n(s), \dot{u}_n(s)) ds;\ \forall t \in [0,1].$$

En appliquant les arguments de la démonstration du Théorème 2.1, on conclut que $(u_n(.))$ et $(\dot{u}_n(.))$ sont relativement compactes. Par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(u_n(.))$ converge vers u dans $(\mathbf{C}_E^1([0,1]), \|.\|_{\mathbf{C}_E^1})$ avec $\dot{u}(0) = 0,\ u(1) + \dot{u}(1) = 0$ et que $(\ddot{u}_n(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}_E^2([0,1]), \mathbf{L}_E^2([0,1]))$ vers $\ddot{u}$.

D'autre part, par les hypothèses sur f nous avons $(f(., u_n(.), \dot{u}_n(.)))_n$ converge vers la fonction $f(., u(.), \dot{u}(.))$ presque partout et aussi

$$\|f(t, u_n(t), \dot{u}_n(t))\| \leq m(t)\ \forall t \in [0,1],$$

par le théorème de convergence de Lebesgue (Théorème 1.7), on conclut que $\|f(t, u(t), \dot{u}(t))\| \leq m(t)$ et $(f(., u_n(.), \dot{u}_n(.)))_n$ converge vers la fonction

$f(.,u(.),\dot{u}(.))$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$ et par conséquent cette convergence est vrais $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]),\mathbf{L}^2_E([0,1]))$.
D'après la propriété 2) de la Proposition 2.2 nous avons pour p.p. $t \in [0,1]$,

$$-\ddot{u}_n(t) - f(t,u_n(t),\dot{u}_n(t)) = A_{\lambda_n}(t)\dot{u}_n(t) \in A(t)J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t). \qquad (2.3.1)$$

D'autre part, nous avons

$$\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| \leq \|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(t)\| + \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\|. \quad (2.3.2)$$

En utilisant la propriété 3) de la Proposition 2.2 et l'hypothèse (H_2), nous obtenons

$$\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(t)\| = \lambda_n\|A_{\lambda_n}(t)\dot{u}_n(t)\| \leq \lambda_n m(t). \qquad (2.3.3)$$

Nous avons $\lambda_n m(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par la relation (2.3.3), on voit que

$$\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(t)\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

et donc

$$\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Par les relations (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.3) nous avons

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| &\leq \|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}_n(t)\| + \|\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| \\
&\leq \lambda_n m(t) + \|\dot{u}_n(t)\| + \|\dot{u}(t)\| \\
&\leq \lambda_n m(t) + 3\int_0^1 m(s)ds.
\end{aligned}$$

Or, $\lambda_n < 1$, pour tout $n \in I\!N$ nous obtenons pour p.p. $t \in [0,1]$,

$$\|J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(t) - \dot{u}(t)\| < m(t) + 3\int_0^1 m(s)ds.$$

La fonction $m \in \mathbf{L}^2_E([0,1])$, et par suite, en utilisant le Théorème de Lebesgue, on conclut que $J_{\lambda_n}A(t)\dot{u}_n(.)$ converge vers $\dot{u}(.)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$.
Considérons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{A} : \mathbf{L}^2_E([0,1]) \rightrightarrows \mathbf{L}^2_E([0,1])$$

defini par

$$z \in \mathcal{A}y \Longleftrightarrow z(t) \in A(t)y(t) \ p.p. \ t \in [0,1].$$

On a vu que $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$, et donc son graphe est fortement-faiblement séquentiellement fermé (Théorème 2.2). Comme $(\ddot{u}_n(.)+f(.,u_n(.),\dot{u}_n(.)))_n$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,1]),\mathbf{L}^2_E([0,1]))$ vers $\ddot{u}(.)+f(.,u(.),\dot{u}(.))$ et $J_{\lambda_n}A(.)\dot{u}_n(.)$ converge fortement vers $\dot{u}(.)$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,1])$, de la relation (2.3.1) on déduit que

$$-\ddot{u}(t) \in A(t)\dot{u}(t) + f(t,u(t),\dot{u}(t)) \ p.p.\ t \in [0,1].$$

Unicité de solution.

Soient u_1, u_2 deux solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ du problème $(P_{A,f})$.
Par la monotonicité de l'opérateur $A(t)$, nous avons pour p.p. $t \in [0,1]$

$$\langle -\ddot{u}_1(t) + \ddot{u}_2(t) - f(t,u_1(t),\dot{u}_1(t)) + f(t,u_2(t),\dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\rangle \geq 0$$

d'où

$$\langle \ddot{u}_1(t)-\ddot{u}_2(t), \dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\rangle \leq \langle -f(t,u_1(t),\dot{u}_1(t))+f(t,u_2(t),\dot{u}_2(t)), \dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\rangle$$

et

$$\frac{d}{dt}(\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2) \leq 2\|f(t,u_1(t),\dot{u}_1(t)) - f(t,u_2(t),\dot{u}_2(t))\|\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|,$$

utilisons la condition ii) sur f, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(\|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\|^2) \leq 2(k_1(t)\|u_1(t)-u_2(t)\|+k_2(t)\|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\|)\|\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)\|.$$

Considérons la fonction $\gamma(t)$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{\|u_1(t) - u_2(t)\|}{\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|} & \text{si} \quad \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\| \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\| = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}(\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2) \leq 2(k_1(t)\gamma(t) + k_2(t))\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2,$$

en intégrant la dernière inégalité par rapport à t et sachant que $\|\dot{u}_1(0) - \dot{u}_2(0)\| = 0$, nous obtenons

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|^2 \leq 2\int_0^t (k_1(s)\gamma(s) + k_2(s))\|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|^2 ds,$$

en appliquant le Lemme de Gronwall, il vient que

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\| = 0, \quad \forall t \in [0, 1],$$

d'où $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$, par conséquent $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2$.
Par le Lemme 2.1 nous avons

$$u_1(t) = \int_0^1 G(t, s)\ddot{u}_1(s)ds = \int_0^1 G(t, s)\ddot{u}_2(s)ds = u_2(t), \ \forall t \in [0, 1],$$

c'est à dire, $u_1 = u_2$, d'où l'unicité de la solution. ■

On donne maintenant un résultat d'existence de solution du problème $(P_{A,f})$ quand on suppose sur la perturbation f une condition de croissance linéaire.

Théorème 2.3 *Soient E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$ ($t \in [0, 1]$) un opérateur maximal monotone et $f : [0, 1] \times E \times E \to E$ une application vérifiant les conditions suivantes*

i) *pour tout $(x, y) \in E \times E$ fixé, $f(., x, y)$ est Lebesgue mesurable sur $[0, 1]$;*

ii) *il existe deux fonctions positives $k_1(.)$, $k_2(.)$ Lebesgue-mesurables sur $[0, 1]$ telles que*

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tout $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in [0, 1] \times E \times E$;

iii) *il existe trois fonctions positives m_1, p et q dans $\mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0, 1])$ satisfaisant*

$$\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} < 1$$

telles que

$$\|f(t, x, y)\| \leq m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|,$$

pour tout $(t, x, y) \in [0, 1] \times E \times E$.
Supposons aussi que les hypothèses suivantes sont satisfaites

(H_1) pour tout $y \in E$ et tout $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto J_\lambda A(t)y$ est Lebesgue-mesurable et il existe une fonction $\overline{g} \in \mathbf{L}^2_E([0, 1])$ telle que $t \mapsto J_\lambda A(t)\overline{g}(t)$ appartient $\mathbf{L}^2_E([0, 1])$;

(H_2) il existe une fonction $m_2 \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0, 1])$ telle que

$$|A(t)y|_0 \leq m_2(t); \ \forall (t, y) \in [0, 1] \times E.$$

Alors le problème $(P_{A,f})$ admet une solution unique $u \in \mathbf{W}^{2,1}_E([0, 1])$.

Pour la démonstration de notre théorème nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit E un espace de dimension finie. Supposons que les hypothèses* ***i)**,**iii)***, *(H_1) et (H_2) du Théorème 2.3 sont satisfaites.*

Si u est une solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ du problème $(P_{A,f})$, alors pour tout $t \in [0,1]$ nous avons

$$\|u(t)\| \leq 2\alpha, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \alpha$$

avec

$$\alpha = \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}}$$

et

$$m = m_1 + m_2.$$

Démonstration.
Supposons que u est une solution du problème $(P_{A,f})$. Alors

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq 2\int_0^1 (m(s) + \frac{1}{2}p(s)\|u(s)\| + q(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\
&\leq 2\int_0^1 (m(s) + p(s)\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} + q(s)\|u\|_{\mathbf{C}^1_E})ds \\
&\leq 2\int_0^1 m(s)ds + 2\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}\int_0^1 (p(s)+q(s))ds,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\| \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}. \tag{2.4.1}$$

De la même façon nous avons,

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &= \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\
&\leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \\
&\leq \int_0^1 (m(s) + \frac{1}{2}p(s)\|u(s)\| + q(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\
&\leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}. \tag{2.4.2}$$

Les inégalités (2.4.1) et (2.4.2) nous donnent

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E},$$

d'où

$$(1 - \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \|m\|_{\mathbf{L}^1_R},$$

et donc

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}} = \alpha. \tag{2.4.3}$$

Par la relation (2.4.3) et la définition de $\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}$, nous aurons pour tout $t \in [0,1]$,

$$\|u(t)\| \leq 2\alpha \quad \text{et} \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \alpha.$$

Démonstration du Théorème 2.3.
Considérons l'application $\Phi_\kappa : [0,1] \times E \to E$ definie par

$$\Phi_\kappa(t,x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \|x\| \leq \kappa \\ \dfrac{\kappa x}{\|x\|} & \text{si} \quad \|x\| > \kappa. \end{cases}$$

Considérons l'application $f_0 : [0,1] \times E \times E \to E$ definie par

$$f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_{2\alpha}(t,x), \Phi_\alpha(t,y)).$$

On voit bien que l'application f_0 hérite les propriétés **i**) et **ii**), c'est à dire,

i) pour tout $(x,y) \in E \times E$ fixé, $f(.,x,y)$ est Lebesgue mesurable sur $[0,1]$;

ii) il existe deux fonctions positives $k_1(.)$, $k_2(.)$ Lebesgue-mesurables sur $[0,1]$ telles que

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \leq 2k_1(t)\|x_1 - x_2\| + 2k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tout $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in [0,1] \times E \times E$;
En effet.
i) Démontrons que la fonction

$$t \mapsto f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_{2\alpha}(t,x), \Phi_\alpha(t,y))$$

est Lebegue-mesurable sur $[0,1]$.
Soit $\epsilon > 0$, d'après le Théorème de Scorza-Dragoni, il existe un compact $I_\epsilon \subset [0,1]$, tel que la mesure de Lebesgue de $([0,1] \setminus I_\epsilon)$ est inférieure où égale à ϵ et la restriction de f à $I_\epsilon \times E \times E$ est continue, alors la fonction

$$t \mapsto f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_{2\alpha}(t,x), \Phi_\alpha(t,y))$$

est continue sur I_ϵ, et donc Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$, puisque ϵ est arbitraire et $\Phi_{2\alpha}$ et Φ_α sont constantes par rapport à t et donc continue par rapport à cette variable.
ii) Nous avons,

$$\|f_0(t,x_1,y_1)-f_0(t,x_2,y_2)\| = \|f(t,\Phi_{2\alpha}(t,x_1),\Phi_\alpha(t,y_1))-f(t,\Phi_{2\alpha}(t,x_2),\Phi_\alpha(t,y_2)\|,$$

pour tous (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in E \times E$. Comme f est Lipschitzienne sur $E \times E$, on obtient

$$\|f_0(t,x_1,y_1)-f_0(t,x_2,y_2)\| \le k_1(t)\|\Phi_{2\alpha}(t,x_1)-\Phi_{2\alpha}(t,x_2)\|+k_2(t)\|\Phi_\alpha(t,y_1)-\Phi_\alpha(t,y_2)\|.$$

D'après la définition de l'application Φ_κ nous avons
si $\|x_1\| \le \kappa,\ \|x_2\| \le \kappa$ et $\|y_1\| \le \kappa,\ \|y_2\| \le \kappa$,

$$\|\Phi_\kappa(t,x_1) - \Phi_\kappa(t,x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \le 2\|x_1 - x_2\|,$$

et

$$\|\Phi_\kappa(t,y_1) - \Phi_\kappa(t,y_2)\| = \|y_1 - y_2\| \le 2\|y_1 - y_2\|.$$

si $\|x_1\| > \kappa$ et $\|x_2\| > \kappa$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\kappa(t,x_1) - \Phi_\kappa(t,x_2)\| &= \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|} - \frac{\kappa x_2}{\|x_2\|}\| = \kappa\|\frac{x_1\|x_2\| - x_2\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\| \\
&= \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}\|x_1\|x_2\| - x_2\|x_1\| - x_1\|x_1\| + x_1\|x_1\|\| \\
&= \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}\|x_1(\|x_2\| - \|x_1\|) + \|x_1\|(x_1 - x_2)\| \\
&\le \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}[\|x_1\||(\|x_1\| - \|x_2\|)| + \|x_1\|\|x_1 - x_2\|] \\
&\le \frac{\kappa}{\|x_2\|}(\|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\|) \\
&< 2\|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}$$

si $\|x_1\| > \kappa$ et $\|x_2\| \leq \kappa$ ($\|x_1\| > \kappa \geq \|x_2\|$) on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\|\Phi_\kappa(t,x_1) - \Phi_\kappa(t,x_2)\| & = & \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|} - x_2\| \\
& = & \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|} - x_2 + \frac{\kappa x_2}{\|x_1\|} - \frac{\kappa x_2}{\|x_1\|}\| \\
& = & \|\frac{\kappa}{\|x_1\|}(x_1 - x_2) + x_2(\frac{\kappa}{\|x_1\|} - 1)\| \\
& \leq & \frac{\kappa}{\|x_1\|}\|x_1 - x_2\| + \|x_2\|(1 - \frac{\kappa}{\|x_1\|}) \\
& < & \|x_1 - x_2\| + \frac{\|x_1\| - \kappa}{\|x_1\|}\|x_2\| \\
& < & \|x_1 - x_2\| + \frac{\|x_1\| - \kappa}{\|x_1\|}\|x_1\| \\
& = & \|x_1 - x_2\| + \|x_1\| - \kappa \\
& \leq & \|x_1 - x_2\| + \|x_1\| - \|x_2\| \\
& \leq & \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\| = 2\|x_1 - x_2\|.
\end{array}$$

De façon similaire nous aurons

$$\|\Phi_\kappa(t,y_1) - \Phi_\kappa(t,y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|.$$

Par conséquent pour tous $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in [0,1] \times E \times E$

$$\|f_0(t,x_1,y_1) - f_0(t,x_2,y_2)\| \leq 2k_1(t)\|x_1 - x_2\| + 2k_2(t)\|y_1 - y_2\|.$$

Nous avons aussi, pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$

$$\begin{array}{rcl}
\|f_0(t,x,y)\| & = & \|f(t,\Phi_{2\alpha}(t,x),\Phi_\alpha(t,y))\| \\
& \leq & m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|\Phi_{2\alpha}(t,x)\| + q(t)\|\Phi_\alpha(t,y)\| \\
& \leq & m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)2\alpha + q(t)\alpha \\
& = & m_1(t) + \alpha(p(t) + q(t)) = \beta(t).
\end{array}$$

Par conséquent l'application f_0 satisfait toutes les hypothèses de la Proposition 2.3.

On conclut alors l'existence d'une solution u dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ du problème (P_{A,f_0}).
Montrons maintenant que u est la solution du problème (P_{A,f_0}) si et seulement si u est la solution du problème $(P_{A,f})$.
a) Si u est une solution du problème (P_{A,f_0}). Alors

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq |A(t)\dot{u}(t)|_0 + \|f_0(t,u(t),\dot{u}(t))\| \leq m_2(t) + \beta(t).$$

Utilisons la dernière inégalité et les deux relations suivantes

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

et

$$\dot{u}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds, \ \forall t \in [0,1],$$

nous obtenons

$$\|u(t)\| \leq \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \leq \int_0^1 |G(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \leq 2\int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|\ddot{u}(s)\|ds \leq \int_0^1 \|\ddot{u}(s)\|ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq 2\int_0^1 (m_2(s) + \beta(s))ds \\
&\leq 2\int_0^1 (m_2(s) + m_1(s) + \alpha(p(s) + q(s))ds \\
&= \int_0^1 2(m(s) + \alpha(p(s) + q(s)))ds \\
&\leq 2(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \alpha\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \\
&= 2(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \\
&= 2(\frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}}) = 2\alpha,
\end{aligned}$$

et de la même façon nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &\leq \int_0^1 (m_2(s) + \beta(s))ds \\
&\leq \int_0^1 (m_2(s) + m_1(s) + \alpha(p(s) + q(s))ds \\
&= \int_0^1 (m(s) + \alpha(p(s) + q(s))ds \\
&\leq (\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \alpha\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \\
&= (\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}}\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \\
&= (\frac{\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}}) = \alpha,
\end{aligned}$$

comme, $\|u(t)\| \leq 2\alpha$ et $\|\dot{u}(t)\| \leq \alpha$ nous aurons

$$\Phi_{2\alpha}(t, u(t)) = u(t) \quad \text{et} \quad \Phi_\alpha(t, \dot{u}(t)) = \dot{u}(t),$$

donc

$$f_0(t, u(t), \dot{u}(t)) = f(t, u(t), \dot{u}(t)).$$

Par conséquent, u est solution du problème $(P_{A,f})$.
b) Supposons maintenant que u est une solution du problème $(P_{A,f})$.
D'après le Lemme 2.2 nous avons

$$\|u(t)\| \leq 2\alpha, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \alpha, \ \forall t \in [0, 1].$$

Alors

$$f(t, u(t), \dot{u}(t)) = f_0(t, u(t), \dot{u}(t)),$$

d'où u est une solution du problème (P_{A,f_0}).
Par le Théorème 2.3 la solution du problème (P_{A,f_0}) est unique, d'où l'unicité de la solution du problème $(P_{A,f})$. ■

2.4 Un problème de contrôle optimal pour l'inclusion $(P_{A,f})$.

Dans cette section nous étudions un exemple de problème de contrôle optimal dont l'évolution est régie par notre inclusion différentielle $(P_{A,f})$, où les contrôles sont des mesures de Young. Nous montrons que la borne inférieure du critère dans le problème original est égale au minimum dans le problème relaxé, c'est à dire que notre problème est de type Bolza.

Soient Z un espace métrique compact, $k(Z)$ l'ensemble de tous les parties compactes de Z, $\Gamma : [0,1] \to k(Z)$ une multi-application Lebesgue-mesurable et $\mathcal{M}^1_+(Z)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Radon sur Z.
Notons que $\mathcal{M}^1_+(Z)$ est un espace métrisable compact pour la topologie $\sigma(\mathbf{C}(Z)', \mathbf{C}(Z))$.
Soient E un espace de dimension finie, $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [0,1])$ un opérateur maximal monotone, $f : [0,1] \times E \times E \times Z \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes

i) pour tout $(x, y, z) \in E \times E \times Z$, $f(., x, y, z)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$;

ii) il existe deux fonctions positives $k_1(.), k_2(.)$ Lebesgue-mesurables sur $[0,1]$ telles que

$$\|f(t, x_1, y_1, z) - f(t, x_2, y_2, z)\| \le k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tous $(t, x_1, y_1, z), (t, x_2, y_2, z) \in [0,1] \times E \times E \times Z$;

iii) il existe trois fonctions positives m_1, p et q dans $\mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,1])$ satisfaisant

$$\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} < 1$$

telles que

$$\|f(t, x, y, z)\| \le m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|,$$

pour tous $(t, x, y, z) \in [0,1] \times E \times E \times Z$.
Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) du Théorème 2.3, sont vérifiées.
Considérons les solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ des poblèmes suivants

$$(D_O) \begin{cases} -\ddot{u}_\zeta(t) \in A(t)\dot{u}_\zeta(t) + f(t, u_\zeta(t), \dot{u}_\zeta(t), \zeta(t)) \;\; p.p. \;\; t \in [0,1] \\ \dot{u}_\zeta(0) = 0; \;\; u_\zeta(1) + \dot{u}_\zeta(1) = 0, \end{cases}$$

où ζ appartient à S_Γ l'ensemble de tous les contrôles originaux, i.e.,

$$S_\Gamma = \{\zeta : [0,1] \to Z / \; \zeta \text{ Lebesgue-mesurable et } \zeta(t) \in \Gamma(t) \text{ p.p. } t \in [0,1]\},$$

et

$$(D_{\mathcal{R}}) \begin{cases} -\ddot{u}_\nu(t) \in A(t)\dot{u}_\nu(t) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t, u_\nu(t), \dot{u}_\nu(t), z)\nu_t(dz) \;\; p.p. \;\; t \in [0,1] \\ \dot{u}_\nu(0) = 0; \;\; u_\nu(1) + \dot{u}_\nu(1) = 0, \end{cases}$$

où ν appartient à l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les contrôles relaxé,

$\mathcal{R} = \{\nu : [0,1] \to \mathcal{M}^1_+(Z)/\ \nu$ Lebesgue-mesurable et $\nu_t \in \Sigma(t)$ p.p. $t \in [0,1]\}$

avec

$$\Sigma(t) = \{\sigma \in \mathcal{M}^1_+(Z)/\ \sigma(\Gamma(t)) = 1\}, \forall t \in [0,1].$$

Notons que l'existence des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ du problème $(D_{\mathcal{R}})$ est assurée par le Théorème 2.3, puisque l'application g_ν ($\nu \in \mathcal{R}$) définie sur $[0,1] \times E \times E$ par

$$g_\nu(t,x,y) = \int_{\Gamma(t)} f(t,x,y,z)\nu_t(dz)$$

hérite les propriétés de f, c'est à dire,

i) pour tout $(x,y) \in E \times E$, $g_\nu(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$;

ii) il existe deux fonctions positives $k_1(.), k_2(.)$ Lebesgue-mesurables sur $[0,1]$ telles que

$$\|g_\nu(t,x_1,y_1) - g_\nu(t,x_2,y_2)\| \le k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tous $(t,x_1,y_1), (t,x_2,y_2) \in [0,1] \times E \times E$;

iii) il existe trois fonctions positives m_1, p et q dans $\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([0,1])$ satisfaisant $\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < 1$ telles que

$$\|g_\nu(t,x,y)\| \le m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|,$$

pour tous $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$.

En effet,

i) Démontrons que la fonction

$$t \mapsto g_\nu(t,x,y) = \int_{\Gamma(t)} f(t,x,y,z)\nu_t(dz)$$

est Lebegue-mesurable sur $[0,1]$.

Soit $\epsilon > 0$, d'après le théorème de Scorza-Dragoni, il existe un compact

$I_\epsilon \subset [0,1]$, tel que la mesure de Lebesgue de $([0,1] \setminus I_\epsilon)$ est inférieure à ϵ et la restriction de f à $I_\epsilon \times E \times E \times Z$ est continue, alors la fonction

$$t \mapsto g_\nu(t,x,y) = \int_Z f(t,x,y,z)\nu_t(dz)$$

est continue sur I_ϵ, et donc Lebesgue-mesurable sur $[0,1]$, puisque ϵ est arbitraire.
ii) Nous avons

$$\begin{aligned}
\|g_\nu(t,x,y)\| &= \|\int_{\Gamma(t)} f(t,x,y,z)\nu_t(dz)\| \\
&\leq \int_{\Gamma(t)} \|f(t,x,y,z)\|\nu_t(dz) \\
&\leq \int_{\Gamma(t)} (m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|)\nu_t(dz) \\
&= (m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|)\int_{\Gamma(t)} \nu_t(dz) \\
&= (m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|)\nu_t(\Gamma(t)) \\
&= m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|
\end{aligned}$$

puisque $\nu \in \mathcal{R}$, et donc $\nu_t \in \mathcal{M}_+^1(Z)$.
D'où

$$\|g_\nu(t,x,y)\| \leq m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|x\| + q(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times E \times E$.
iii) Nous avons, pour tout $\nu \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
\|g_\nu(t,x_1,y_1) - g_\nu(t,x_2,y_2)\| &= \|\int_{\Gamma(t)} f(t,x_1,y_1,z)\nu_t(dz) - \int_{\Gamma(t)} f(t,x_2,y_2,z)\nu_t(dz)\| \\
&= \|\int_{\Gamma(t)} (f(t,x_1,y_1,z) - f(t,x_2,y_2,z))\nu_t(dz)\| \\
&\leq \int_{\Gamma(t)} \|f(t,x_1,y_1,z) - f(t,x_2,y_2,z)\|\nu_t(dz) \\
&\leq (k_1(t)\|x_1 - y_1\| + k_2(t)\|x_2 - y_2\|)\int_{\Gamma(t)} \nu_t(dz) \\
&= k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|
\end{aligned}$$

d'où

$$\|g_\nu(t,x_1,y_1) - g_\nu(t,x_2,y_2)\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|$$

pour tous $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in [0,1] \times E \times E$.

Enonçons dans ce qui suit un résultat sur la convergence des mesures de Young qui nous sera utile dans la démonstration de notre théorème principal.

Lemme 2.5 *Soit (ν^n) une suite d'éléments de $\mathcal{R}$ convergeant pour la topologie narrow vers $\nu^\infty \in S_\Sigma$. Pour tout $n \in I\!N \cup \{\infty\}$, soit u_{ν^n} la solution unique dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,1])$ du problème*

$$(D_\mathcal{R}) \begin{cases} -\ddot{u}_{\nu^n}(t) \in A(t)\dot{u}_{\nu^n}(t) + \displaystyle\int_{\Gamma(t)} f(t,u_{\nu^n}(t),\dot{u}_{\nu^n}(t),z)\nu_t^n(dz), \ p.p.\ t \in [0,1] \\ \dot{u}_{\nu^n}(0) = 0; \quad u_{\nu^n}(1) + \dot{u}_{\nu^n}(1) = 0. \end{cases}$$

Alors la suite (u_{ν^n}) converge uniformément vers u_{ν^∞}.

Démonstration.
Nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_{\nu^n}(t)\| &= \|A(t)\dot{u}_{\nu^n}(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t,u_{\nu^n}(t),\dot{u}_{\nu^n}(t),z)\nu_t^n(dz)\| \\ &= \|A(t)\dot{u}_{\nu^n}(t) + g_{\nu^n}(t,u_{\nu^n}(t),\dot{u}_{\nu^n}(t))\| \\ &\leq |A(t)\dot{u}_{\nu^n}(t)|_0 + \|g_{\nu^n}(t,u_{\nu^n}(t),\dot{u}_{\nu^n}(t))\| \\ &\leq m_2(t) + m_1(t) + \frac{1}{2}p(t)\|u_{\nu^n}(t)\| + q(t)\|\dot{u}_{\nu^n}(t)\|, \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.4 nous avons

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_{\nu^n}(t)\| &\leq m_2(t) + m_1(t) + \alpha(p(t) + q(t)) \\ &= m_2(t) + \beta(t). \end{aligned}$$

Par extraction d'une sous suite on peut supposer que $(\ddot{u}_{\nu^n}(.))$ converge $\sigma(\mathbf{L}_E^2([0,1]),\mathbf{L}_E^2([0,1]))$ vers une certaine application $w(.)$.
D'autre part, et d'après les relations (2.1.5) et (2.1.6), on voit que pour tout

$t \in [0,1]$, $(u_{\nu^n}(t))$ et $(\dot{u}_{\nu^n}(t))$ sont relativement compactes dans $\mathbf{C}_E([0,1])$. En plus, nous avons pour tous $t, \tau \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\|u_{\nu^n}(t) - u_{\nu^n}(\tau)\| &= \|\int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_{\nu^n}(s)ds - \int_0^1 G(\tau,s)\ddot{u}_{\nu^n}(s)ds\| \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|\|\ddot{u}_{\nu^n}(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|(m_2(s) + \beta(s))ds,\end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^n}(\tau)\| \leq \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial \tau}(\tau,s)|(m_2(s) + \beta(s))ds.$$

Comme $(m_2(.) + \beta(.)) \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,1])$ et G est uniformément continue, donc $(u_{\nu^n}(.))$ et $(\dot{u}_{\nu^n}(.))$ sont équicontinus. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli (u_{ν^n}) et $(\dot{u}_{\nu^n})$ sont relativement compactes dans $\mathbf{C}_E([0,1])$. Par extraction d'une sous suite, on peut supposer que (u_{ν^n}) converge dans $(\mathbf{C}^1_E, \|.\|_{\mathbf{C}^1_E})$ vers u^∞ avec $\ddot{u}^\infty = w$.

On doit montrer que $u^\infty = u_{\nu^\infty}$.

Comme l'opérateur $A(t)$ est monotone, nous avons

$$\langle -g_{\nu^n}(t, u_{\nu^n}(t), \dot{u}_{\nu^n}(t)) - \ddot{u}_{\nu^n}(t) + g_{\nu^\infty}(t, u_{\nu^\infty}(t), \dot{u}_{\nu^\infty}(t)) + \ddot{u}_{\nu^\infty}(t), \dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\rangle \geq 0$$

d'où

$$\langle \ddot{u}_{\nu^n}(t) - \ddot{u}_{\nu^\infty}(t), \dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\rangle \leq$$

$$\langle \dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t), g_{\nu^n}(t, u_{\nu^n}(t), \dot{u}_{\nu^n}(t)) - g_{\nu^\infty}(t, u_{\nu^\infty}(t), \dot{u}_{\nu^\infty}(t))\rangle,$$

qui est equivalent à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|^2 \leq \langle \dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t), g_{\nu^n}(t, u_{\nu^n}(t), \dot{u}_{\nu^n}(t)) - g_{\nu^\infty}(t, u_{\nu^\infty}(t), \dot{u}_{\nu^\infty}(t))\rangle.$$

En intégrant par rapport t, nous aurons pour tout $t \in [0,1]$

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|^2 \leq \int_0^t \langle \dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^n}(s), \dot{u}_{\nu^n}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds. \tag{2.5.1}$$

Posons pour tout $n \in I\!N$ et tout $t \in [0,1]$

$$L_n(t) = \int_0^t \langle \dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^n}(s), \dot{u}_{\nu^n}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds,$$

et écrivons

$$L_n(t) = L_n^1(t) + L_n^2(t) + L_n^3(t),$$

tels que

$$L_n^1(t) = \int_0^t \langle \dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^n}(s), \dot{u}_{\nu^n}(s)) - g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds,$$

$$L_n^2(t) = \int_0^t \langle \dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}^\infty(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds,$$

et

$$L_n^3(t) = \int_0^t \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds.$$

Utilisons la condition de Lipschitz sur g_{ν^n} nous aurons

$$\begin{aligned}
\|L_n^1(t)\| &\leq \int_0^t \|\dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|(k_1(s)\|u_{\nu^n}(s) - u_{\nu^\infty}(s)\| + k_2(s)\|\dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|)ds \\
&\leq \int_0^t \|\dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|^2(k_1(s)\gamma_n(s) + k_2(s))ds,
\end{aligned}$$

où

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\|u_{\nu^n}(t) - u_{\nu^\infty}(t)\|}{\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|} & \text{si} \quad \|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\| \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad \|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\| = 0, \end{cases}$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\|u^\infty(t) - u_{\nu^\infty}(t)\|}{\|\dot{u}^\infty(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|} & \text{si} \quad \|\dot{u}^\infty(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\| \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad \|\dot{u}^\infty(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\| = 0, \end{cases}$$

D'autre part, nous avons l'estimation suivante,

$$\begin{aligned}
\|L_n^2(t)\| &\leq \|u_{\nu^n} - u^\infty\|_{\mathbf{C}_E^1} \int_0^1 \|g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\|ds, \\
&\leq \|u_{\nu^n} - u^\infty\|_{\mathbf{C}_E^1} \int_0^1 (\|g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\| + \|g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\|)ds \\
&\leq 2\|u_{\nu^n} - u^\infty\|_{\mathbf{C}_E^1} \int_0^1 (m(s) + \frac{1}{2}p(s)\|u_{\nu^\infty}(s)\| + q(s)\|\dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|)ds.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\|L_n^2(t)\| = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Posons pour tout $(s,z) \in [0,1] \times Z$

$$h(s,z) = \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), f(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s), z)\rangle,$$

et obsevons que

$$\|h(s,z)\| \leq (m(s) + \frac{1}{2}p(s)\|u_{\nu^\infty}(s)\| + q(s)\|\dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|)\|u_{\nu^\infty} - u^\infty\|_{\mathbf{C}_E^1},$$

alors h est un intégrande de Carathéodory. D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(t)} h(s,z)\nu_t^\infty(dz) &= \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), \int_{\Gamma(t)} f(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s), z)\nu_t^\infty(dz)\rangle \\ &= \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(t)} h(s,z)\nu_t^n(dz) &= \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), \int_{\Gamma(t)} f(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s), z)\nu_t^n(dz)\rangle \\ &= \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\|L_n^3(t)\| &= \|\int_0^t \langle \dot{u}^\infty(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s), g_{\nu^n}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \dot{u}_{\nu^\infty}(s))\rangle ds\| \\ &\leq \int_0^t \|\int_{\Gamma(t)} h(s,z)(\nu_t^n - \nu_t^\infty)(dz)\| ds,\end{aligned}$$

utilisons la convegence $\sigma(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}, \mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)})$ de (ν^n) vers ν^∞, nous aurons

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n^3(t)\| = 0, \forall t \in [0,1].$$

D'où la relation (2.5.1) s'écrit comme suit

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|^2 \leq \|L_n^2(t)\| + \|L_n^3(t)\| + \int_0^t \|\dot{u}_{\nu^n}(s) - \dot{u}_{\nu^\infty}(s)\|^2 (k_1(s)\gamma_n(s) + k_2(s))ds.$$

Par le Lemme de Gronwall nous obtenons

$$\|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\|^2 \leq 2(\|L_n^2(t)\| + \|L_n^3(t)\| +$$

$$\int_0^t (\|L_n^2(\tau)\| + \|L_n^3(\tau)\|)(k_1(\tau)\gamma_n(\tau) + k_2(\tau))e^{\int_\tau^t (k_1(s)\gamma_n(s) + k_2(s))ds} d\tau),$$

comme $\lim_{n\to\infty} \|L_n^2(t)\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|L_n^3(t)\| = 0$, et $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(\tau)$ existe, alors nous aurons

$$\lim_{n\to\infty} \|\dot{u}_{\nu^n}(t) - \dot{u}_{\nu^\infty}(t)\| = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent $(\dot{u}_{\nu^n})$ converge uniformément vers $\dot{u}^\infty$ donc $\dot{u}_{\nu^\infty} = \dot{u}^\infty$, et $\ddot{u}_{\nu^\infty} = \ddot{u}^\infty$. Par suite

$$u_{\nu^\infty}(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_{\nu^\infty}(s)ds = \int_0^1 G(t,s)\ddot{u}_\infty(s)ds = u_\infty(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

c'est à dire, $u_{\nu^\infty} = u_\infty$. ■

Enonçons dans ce qui suit un autre résultat sur la convergence des mesures de Young qui nous sera utile dans la démonstration du théorème qui suit.

Théorème 2.4 *([11]).*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet, S un espace Polonais (i.e, un espace séparable et métrisable par une métrique complète). et E un espace de Banach séparable. Soit (u^n) une suite d'applications définies sur Ω à valeurs dans E et qui sont $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$-mesurables, convergeant ponctuellement vers une application u^∞ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$-mesurable. Soit (ζ^n) une suite d'applications définies sur Ω à valeurs dans S qui sont $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(S))$-mesurables, narrow convergeante vers une mesure de Young $\lambda^\infty \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; S)$.
Soit $J : \Omega \times E \times \mathbf{S} \to I\!R$ un intégrande de Carathéodory, telle que $(J(., u^n(.), \zeta^n(.)))$ est uniformément intégrable. Alors nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega J(\omega, u^n(\omega), \zeta^n(\omega))p(d\omega) = \int_\Omega [\int_{\mathbf{S}} J(\omega, u^\infty(\omega), s)\lambda_\omega^\infty(ds)]p(d\omega).$$

Définition 2.2 *On dit que la suite (ν^n) converge en probabilité vers ν^∞ si et seulement si la suite (δ_{ν^n}) converge étroitement vers δ_{ν^∞}.*

Dans notre démononstration nous aurons besoin aussi de la propriété du produit des mesures de young suivante.

Proposition 2.4 *Soient S et E deux espaces Polonais, $(\mu^n) \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; S)$ et $(\nu^n) \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; E)$ deux suites convergeant en probabilité vers $\mu^\infty \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; S)$ et $\mu^\infty \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; S)$. Alors $(\nu^n \otimes \mu^n)_n$ converge vers $\nu^\infty \otimes \mu^\infty$ en probabilité.*

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat pour un problème de contrôle optimal du type Bolza, associé à une inclusion différentielle du second ordre où les contrôles sont des mesures de Young.

Théorème 2.5 *Supposons que E est de dimension finie. Soit $I : [0,1]\times E\times E\times Z \to I\!R$ un intégrande de Carathéodory telle que*
(C) pour toute (ζ^n) suite d'éléments de S_Γ, la suite $(I(.,u_{\zeta^n}(.),\dot{u}_{\zeta^n}(.),\zeta^n(.)))_n$ est uniformément intégrable. Considérons les problèmes de contrôle suivants

$$(P_O) : \inf_{\zeta\in S_\Gamma}\int_0^1 I(t,u_\zeta(t),\dot{u}_\zeta(t),\zeta(t))dt$$

et

$$(P_{\mathcal{R}}) : \inf_{\nu\in\mathcal{R}}\int_0^1 [\int_Z I(t,u_\nu(t),\dot{u}_\nu(t),z)\nu_t(dz)]dt$$

où u_ζ (resp. u_ν) est la solution unique associée à ζ (resp. ν) du problème (D_O) (resp.$(D_{\mathcal{R}})$). Alors nous avons

$$\inf(P_O) = \min(P_{\mathcal{R}}).$$

Démonstration.
D'après le Lemme 1.4, S_Σ est compact métrisable pour la topologie stable $\sigma(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'},\mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)})$ et S_Γ est dense dans S_Σ pour la même topologie.
Soit $\nu\in\mathcal{R}$. Il existe une suite (ζ^n) dans S_Γ tel que la mesure de Young associée à (ζ^n) est narrow convergeante vers ν.
D'après le Lemme 2.3, (u_{ζ^n}) converge vers u_ν dans $(\mathbf{C}^1_E([0,1]),\|.\|_{\mathbf{C}^1_E([0,1])})$, où pour $n\in I\!N$, u_{ζ^n} est l'unique solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ du problème

$$\begin{cases} -\ddot{u}_{\zeta^n}(t)\in A(t)\dot{u}_{\zeta^n}(t)+f(t,u_{\zeta^n}(t),\dot{u}_{\zeta^n}(t),\zeta^n(t)) \quad p.p. \quad t\in[0,1] \\ \dot{u}_{\zeta^n}(0)=0; \quad u_{\zeta^n}(1)+\dot{u}_{\zeta^n}(1)=0. \end{cases}$$

Utilisons cette convergence et le produit des mesures de Young pour conclure que le produit $(\delta_{u_{\zeta^n}}\otimes\delta_{\dot{u}_{\zeta^n}}\otimes\delta_{\zeta^n})$ est narrow convergeant vers $\delta_{u_\nu}\otimes\delta_{\dot{u}_\nu}\otimes\nu$. D'après l'hypothèse (C), $(I(t,u_{\zeta^n}(t),\dot{u}_{\zeta^n}(t),\zeta^n(t)))$ est uniformément integrable et par le Théorème 2.4, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I(t,u_{\zeta^n}(t),\dot{u}_{\zeta^n}(t),\zeta^n(t))dt = \int_0^1[\int_{\Gamma(t)} I(t,u_\nu(t),\dot{u}_\nu(t),z)\nu_t(dz)]dt,$$

d'autre part, (ζ_n) est une suite minimisant (P_O), c'est à dire,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 I(t,u_{\zeta^n}(t),\dot{u}_{\zeta^n}(t),\zeta^n(t))dt = \inf_{\zeta(.)\in S_\Gamma}\int_0^1 I(t,u_\zeta(t),\dot{u}_\zeta(t),\zeta(t))dt$$

donc
$$\int_0^1 I(t, u_{\zeta^n}(t), \dot{u}_{\zeta^n}(t), \zeta^n(t))dt \geq \inf(P_O), \quad \forall n \in I\!N.$$
Par conséquent
$$\int_0^1 [\int_{\Gamma(t)} I(t, u_\nu(t), \dot{u}_\nu(t), z)\nu_t(dz)]dt \geq \inf(P_O),$$
alors
$$\inf(P_{\mathcal{R}}) \geq \inf(P_O),$$
la densité de S_Γ dans S_Σ pour la topologie stable $\sigma(\mathbf{L}^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}, \mathbf{L}^1_{\mathcal{C}(Z)})$, donne
$$\inf(P_{\mathcal{R}}) \leq \inf(P_O),$$
par suite
$$\inf(P_{\mathcal{R}}) = \inf(P_O).$$
On doit montrer que $\inf(P_O)$ est vraiment le minimum, pour cette raison il suffit de démontrer que
$$S_{\mathcal{R}} = \{u_\nu : \ \nu \in \mathcal{R}\}$$
l'ensemble des solutions de $(P_{\mathcal{R}})$ dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,1])$ est compact pour la convergence uniforme.
Soit (ν^n) une suite de points de $\mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}$ est compact métrisable pour la topologie stable, on peut supposer que (ν^n) est narraw convergeante vers $\nu \in \mathcal{R}$. D'après le Lemme 2.3, on conclut que (u_{ν^n}) converge uniformément vers u_ν et par conséquent $S_{\mathcal{R}}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme, d'où
$$\inf(P_O) = \min(P_{\mathcal{R}}).$$
Ce qui achève la démonstration de notre théorème. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec un second membre à valeurs presque convexes.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne quelques théorèmes d'existence pour des inclusions différentielles du second ordre avec des conditions aux limites en deux points dans un espace de dimension finie E, de la forme

$$(P_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(u(t), \dot{u}(t)), \;\; p.p. \;\; t \in [a, b], \; (0 \leq a < b < \infty) \\ \qquad\qquad u(a) = u(b) = v_0. \end{cases}$$

Des résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles $\ddot{u}(t) \in F(t, u(t), \dot{u}(t)), t \in [0, 1]$, avec des conditions aux limites en trois points quand $F : [0, 1] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs convexes compactes Lebesgue- mesurable sur $[0, 1]$, semi-continue supérieurement sur $E \times E$ et intégrablement bornée, ont été établis en dimension finie dans [23], [27]. Après, les auteurs dans [7], ont démontré des résultats d'existence pour le même problème mais dans le contexte des espaces de Banach séparables.

Le but de notre étude est d'établir un résultat d'existence pour (P_F) dans un espace de dimension finie mais avec F à valeurs presque convexes, i.e., on remplace la convexité par une condition plus faible. La méthode utilisée dans notre travail est inspirée de l'étude des inclusions différentielles du premier ordre, donnée par Cellina et Ornelas [15].

Dans la section 2, nous démontrons que l'ensemble des solutions de l'inclusion (P_F) est non vide et compact dans le cas où F est une multi-application semicontinue supérieurement, à valeurs convexes et

$$F(x,y) \subset (p(t)\|x\| + bq(t))\|y\|\overline{\mathbf{B}}_E \ \forall x, y \in [a,b].$$

Dans la section 3, nous étudions l'inclusion (P_F) dans le cas où F est à valeurs presque convexes, i.e., on remplace la convexité des valeurs de F dans la première section par une condition plus faible.

3.2 Résultats d'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$ pour une équation différentielle du second ordre.

Comme dans le premier chapitre, on commence par un lemme où on démontre quelques propriétés d'une fonction de Green nous permettant de résoudre nos problèmes avec des conditions aux limites en deux points.
On considère $\mathbf{C}_E^1([a,b])$ $(0 \leq a < b < \infty)$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E^1} = \max\{\max_{t\in[a,b]}\|u(t)\|, b\max_{t\in[a,b]}\|\dot{u}(t)\|\}.$$

Lemme 3.1 *Soient E un espace de Banach séparable, $v_0 \in E$ et $G : [a,b] \times [a,b] \to I\!R$, $(0 \leq a < b < \infty)$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{b}(b-t)(s-a) & si \quad a \leq s \leq t \leq b, \\ \\ -\dfrac{1}{b}(t-a)(b-s) & si \quad a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Alors on a les résultats suivants.

(1) Si $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$ avec $u(a) = u(b) = v_0$, alors

$$u(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \quad \forall t \in [a,b]. \tag{3.1.2}$$

(2) $G(.,s)$ est dérivable sur $[a,b[$ pour tout $s \in [a,b]$, à part sur la diagonale et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}(s-a) & si \quad a \leq s \leq t \\ -\dfrac{1}{b}(b-s) & si \quad t < s \leq b. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

(3) $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t,s\in[a,b]}|G(t,s)| \leq b, \qquad \sup_{t,s\in[a,b]}|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1. \tag{3.1.4}$$

(4) Soit $f \in \mathbf{L}^1_E([a,b])$ et soit $u_f : [a,b] \to E$ l'application définie par

$$u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [a,b].$$

Alors

$$u_f(a) = u_f(b) = v_0.$$

De plus, la fonction u_f est dérivable, et sa dérivée $\dot{u}_f$ vérifie

$$\lim_{h\to 0}\frac{u_f(t+h)-u_f(t)}{h} = \dot{u}_f(t) = \frac{b}{b-a}\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \tag{3.1.5}$$

pour tout $t \in [a,b]$. Par conséquent, $\dot{u}_f$ est continue sur $[a,b]$ à valeurs dans E.

(5) La fonction $\dot{u}_f$ est scalairement dérivable, i.e, il existe une fonction $\ddot{u}_f : [0,1] \to E$ telle que, pour tout $x' \in E'$, la fonction scalaire $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ est dérivable, avec

$$\frac{d}{dt}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle,$$

et

$$\ddot{u}_f = f \ p.p. \ sur \ [a,b]. \tag{3.1.6}$$

Démonstration.
(1) Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)\ddot{u}(s)ds &= \frac{b}{b-a}\int_a^t -\frac{1}{b}(b-t)(s-a)\ddot{u}(s)ds + \frac{b}{b-a}\int_t^b -\frac{1}{b}(t-a)(b-s)\ddot{u}(s)ds \\
&= \frac{-1}{b-a}[(b-t)[(s-b)\dot{u}(s)-u(s)]_a^t + (t-a)[(b-s)\dot{u}(s)+u(s)]_t^b] \\
&= \frac{-1}{b-a}[(b-t)v_0 + (t-a)(b-t)\dot{u}(t) - (b-t)u(t) \\
&+ (t-a)v_0 - (t-a)(b-t)\dot{u}(t) - (t-a)] \\
&= \frac{-1}{b-a}[(b-a)v_0 - (b-a)u(t)] = u(t) - v_0,
\end{aligned}$$

d'où

$$u(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)\ddot{u}(s)ds.$$

(2) Pour tout $s \in [a,b]$, fixé et pour tout $h > 0$ assez petit avec $t < t+h$, nous avons

$$\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h} = \begin{cases} \frac{-1}{b}(s-a)\frac{(b-t-h)-(b-t)}{h} & si \ \ a \leq s \leq t \\ \frac{-1}{b}(b-s)\frac{(t+h-a)-(t-a)}{h} & si \ \ t < s \leq b. \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(t+h,s)-G(t,s)}{h} = \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{b}(s-a) & si \ \ a \leq s \leq t \\ \frac{-1}{b}(b-s) & si \ \ t < s \leq b. \end{cases}$$

Donc $G(.,s)$ est dérivable à droite sur $]a,b]$, et sa valeur est donnée par (3.1.3).

(3) D'après la définition de G, nous avons pour $a \leq t < s \leq b$,

$$|G(t,s)| = |-\frac{1}{b}(b-t)(s-a)| = \frac{1}{b}(b-t)(s-a) \leq b$$

et si $a \leq s < t \leq b$

$$|G(t,s)| = |-\frac{1}{b}(t-a)(b-s)| = \frac{1}{b}(t-a)(b-s) \leq b$$

on conclut que

$$\sup_{t,s\in[a,b]} |G(t,s)| \leq b.$$

D'après la définition de la dérivé de $G(t,.)$, il est facile de vérifier que

$$\sup_{t,s\in[a,b]} |\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}| \leq 1.$$

4) Soit $f \in \mathbf{L}^1_E([a,b])$ et soit l'application $u_f : [a,b] \to E$ definie par

$$u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [a,b],$$

$$\sup_{t,s\in[a,b]} |G(t,s)| \leq b,$$

le théorème de Lebesgue nous donne la continuité de u_f sur $[a,b]$.
On veut démontre maintenant que u_f est dérivable.

En effet,
a) la fonction $G(t,.)f(.)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t \in [a,b]$,
b) d'après 2), la fonction $G(t,.)$ est dérivable pour tout $t \in [a,b]$, fixé, et donc la fonction $G(t,.)f(.)$ l'est aussi.
c) $\|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)\| \leq \|f(s)\|$, pour tout $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$.
Les propriétés a), b) et c) nous permettent de conclure, d'après le Théorème 1.14, que u_f est dérivable et que sa dérivée est donnée par

$$\dot{u}_f(t) = \frac{b}{b-a}\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds.$$

On voit bien que $u_f(a) = u_f(b) = v_0$.
5) La relation (3.1.5) nous donne

$$\dot{u}_f(t) = \frac{1}{b-a}[\int_a^b f(s)ds - a\int_a^t f(s)ds - b\int_t^b f(s)ds],$$

pour tout $t \in [a,b]$, d'où pour tout $x' \in E'$

$$\begin{aligned}
\langle x', \ddot{u}(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \dot{u}(t)\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\langle x', \frac{1}{b-a}(\int_a^b f(s)ds - a\int_a^t f(s)ds - b\int_t^b f(s)ds)\rangle \\
&= \langle x', f(t)\rangle
\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.
Soit (e'_n) une suite d'éléments de E' qui sépare les points de E. Alors nous avons $\langle e'_n, \dot{u}_f(t)\rangle = \langle e'_n, f(t)\rangle$ pour tout $n \in I\!N$ et pour presque tout $t \in [a,b]$.
On conclut que $\ddot{u}_f = f$ presque partout. ■

La proposition suivante est une conséquence du Lemme 3.1, elle nous sera utile dans la démonstration de nos théorèmes.

Proposition 3.1 *Soient E un espace de Banach séparable et $f : [a,b] \to E$ une application continue (résp. dans $\boldsymbol{L}^1_E([a,b])$). Alors la fonction*

$$u_f(t) = v_0 + \frac{1}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \in [a,b]$$

est l'unique solution dans $\mathbf{C}^2_E([a,b])$ (résp. $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$) du problème

$$(P)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), \quad \forall t \in [a,b], \\ u(a) = u(b) = v_0. \end{cases}$$

Démonstration.
Nous avons
$$u_f(t) = v_0 + \frac{1}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$
de la relation (3.1.1) nous obtenons
$$u_f(t) = v_0 - \frac{1}{b-a}[\int_a^t (b-t)(s-a)f(s)ds + \int_t^b (t-a)(b-s)f(s)ds]$$
d'où
$$\begin{aligned} \dot{u}_f(t) &= \frac{-1}{b-a}[\int_a^t (a-s)f(s)ds + (b-t)(t-a)f(t) \\ &+ \int_t^b (b-s)f(s)ds - (t-a)(b-t)f(t)] \\ &= \frac{-1}{b-a}[-\int_a^t (s-a)f(s)ds + \int_t^b (b-s)f(s)ds] \end{aligned}$$
et donc
$$\ddot{u}_f(t) = \frac{-1}{b-a}[-(t-a)f(t) - (b-t)f(t) = f(t)$$
avec $u_f(a) = u_f(b) = v_0$.
<u>**Unicité de la solution.**</u>
Soient u_f, v_f deux solutions de (P). Alors
$$\ddot{u}_f(t) = \ddot{v}_f(t),\ \forall t \in [a,b].$$
D'aprés 1) du Lemme 3.1,
$$u_f(t) = v_f(t),\ \forall t \in [a,b],$$
et donc $u_f = v_f$, d'où l'unicité de la solution. ∎

3.3 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec un second membre à valeurs convexes.

On démontre dans cette partie un résultat d'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$ pour une inclusion différentielle avec un second membre à valeurs convexes. On commence par le cas où les valeurs de F sont intégrablement bornées.

Proposition 3.2 *Soient E un espace de dimension finie et $F : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs compactes convexes, semi-continue supérieurement sur $E \times E$. Supposons qu'il existe une fonction non négative $m \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([a,b])$, telle que $F(x,y) \subset m(t)\overline{\mathbf{B}}_E$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.*
Soit $v_0 \in E$. Alors l'ensemble des solutions dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$ du problème

$$(P_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(u(t), \dot{u}(t)), \ \ p.p. \ \ t \in [a,b], \\ \qquad\qquad u(a) = u(b) = v_0, \end{cases}$$

est non vide et compact dans $\mathbf{C}^1_E([a,b])$.

Démonstration.
Etape 1.
Soit

$$\mathbf{S} = \{f \in \mathbf{L}^1_E([a,b]) : \|f(t)\| \le m(t), \ p.p. \ t \in [a,b]\}$$

et

$$\mathbf{X} = \{u_f : [a,b] \to E : \ \ u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [a,b], \ f \in \mathbf{S}\}.$$

Il est clair que $\mathbf{S}$ et $\mathbf{X}$ sont convexes.
Montrons que $\mathbf{S}$ est un sous ensemble $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$ compact de $\mathbf{L}^1_E([a,b])$.
En effet, soit (f_n) une suite de $\mathbf{S}$. On voit que, (f_n) est bornée dans $\mathbf{L}^\infty_E([a,b])$, donc on peut supposer par extraction d'une suite, que (f_n) converge faiblement* ou $\sigma(\mathbf{L}^\infty_E([a,b]), \mathbf{L}^1_E([a,b]))$ vers une fonction $f \in \mathbf{L}^\infty_E([a,b]) \subset \mathbf{L}^1_E([a,b])$. Par conséquent, pour tout $y(.) \in \mathbf{L}^1_E([a,b])$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(.), y(.)\rangle = \langle f(.), y(.)\rangle.$$

Soit $z(.) \in \mathbf{L}^\infty_E([a,b]) \subset \mathbf{L}^1_E([a,b])$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(.), z(.)\rangle = \langle f(.), z(.)\rangle.$$

Ce qui montre que (f_n) converge faiblement ou $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$ vers $f(.)$ et que $\|f(t)\| \leq m(t)$ p.p sur $[a,b]$, car $\mathbf{S}$ est convexe et fortement fermé dans $\mathbf{L}^1_E([a,b])$, et donc il est faiblement fermé dans $\mathbf{L}^1_E([a,b])$.
Maintenant, montrons que $\mathbf{X}$ est compact dans $\mathbf{C}^1_E([a,b])$ muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{C}^1_E}$.
Pour tout $u_f \in \mathbf{X}$ et tous $t, \tau \in [a,b]$ nous avons

$$\begin{aligned}\|u_f(t) - u_f(\tau)\| &\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b |G(t,s) - G(\tau,s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b |G(t,s) - G(\tau,s)| |m(s)| ds\end{aligned}$$

et, d'après la relation (3.1.5) du Lemme 3.1, nous avons

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_f(t) - \dot{u}_f(\tau)\| &\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| |m(s)| ds\end{aligned}$$

Comme $m \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([a,b])$ et G est uniformément continue nous aurons l'équicontinuité des ensembles $\mathbf{X}$ et $\{\dot{u}_f : u_f \in \mathbf{X}\}$.
D'autre part, pour tout $u_f \in \mathbf{X}$ et tout $t \in [a,b]$, nous avons par les relations (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.5)

$$\begin{aligned}\|u_f(t)\| &= \|v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s) f(s) ds\| \\ &\leq \|v_0\| + \frac{b}{b-a}\int_a^b |G(t,s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a}\|m\|_{\mathbf{L}^1_R},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_f(t)\| &= \|\frac{b}{b-a}\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f(s) ds\| \\ &= \frac{b}{b-a}\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \|f(s)\| ds \\ &\leq \frac{b}{b-a}\|m\|_{\mathbf{L}^1_R},\end{aligned}$$

donc $\mathbf{X}(t)$ et $\{\dot{u}_f(t) : u_f \in \mathbf{X}\}$ sont relativement compacts dans l'espace de dimension finie E.

On conclut que $\mathbf{X}$ est relativement compact dans $(\mathbf{C}^1_E([a,b]), \|.\|_{\mathbf{C}^1_E})$.
Montrons que $\mathbf{X}$ est fermé dans $(\mathbf{C}^1_E([a,b]), \|.\|_{\mathbf{C}^1_E})$.
Fixons une suite (u_{f_n}) de $\mathbf{X}$ convergeant vers $u \in \mathbf{C}^1_E([a,b])$. Alors, pour tout $n \in I\!N$

$$u_{f_n}(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f_n(s)ds, \ \forall t \in [a,b]$$

et $f_n \in \mathbf{S}$. Comme $\mathbf{S}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$-compact, par extraction d'une sous suite on peut conclure que (f_n) converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$ vers $f \in \mathbf{S}$. Posons pour tout $t \in [a,b]$

$$u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds,$$

on obtient pour tout $z(.) \in \mathbf{L}^\infty_E([a,b])$ et tout $t \in [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\langle f_n(.), G(t,.)z(.)\rangle = \langle f(.), G(t,.)z(.)\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_a^b \langle G(t,s)f_n(s), z(s)\rangle ds &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \langle f_n(s), G(t,s)z(s)\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle f(s), G(t,s)z(s)\rangle ds \\
&= \int_a^b \langle G(t,s)f(s), z(s)\rangle ds.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $z(.) = \mathcal{X}_{[a,b]}(.)e_j$ où $\mathcal{X}_{[a,b]}(.)$ est la fonction caractéristique de $[a,b]$ et (e_j) une base de E, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \langle G(t,s)f_n(s), \mathcal{X}_{[a,b]}(s)e_j\rangle ds = \int_a^b \langle G(t,s)f(s), \mathcal{X}_{[a,b]}(s)e_j\rangle ds\,,$$

qui est équivalent à

$$\langle \lim_{n\to\infty}\int_a^b G(t,s)f_n(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_a^b G(t,s)f(s)ds, e_j\rangle$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty}(v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f_n(s)ds) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds = u_f(t),$$

i.e., $u = u_f$.
Par conséquent, la suite (u_{f_n}) converge vers u_f dans $\mathbf{C}_E([a,b])$.
Par les mêmes arguments nous démontrons que la suite $(\dot{u}_{f_n})$ où

$$\dot{u}_{f_n}(t) = \frac{b}{b-a}\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_n(s)ds, \forall t \in [a,b]$$

converge vers $\dot{u}_f$ dans $\mathbf{C}_E([a,b])$. Ainsi, (u_{f_n}) converge vers u_f dans $\mathbf{C}^1_E([a,b])$.
D'où la compacité de $\mathbf{X}$ dans $(\mathbf{C}^1_E([a,b]), \|.\|_{\mathbf{C}^1})$.

Etape 2.

Remarquons que l'application $u : [a,b] \to E$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ de l'inclusion (P_F) si et seulement si il existe $u = u_f \in \mathbf{X}$ et $f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t))$ pour p.p $t \in [a,b]$.
Montrons que pour toutes applications Lebesgue-mesurables $v, w : [a,b] \to E$, il existe une sélection Lesbegue-mesurable $s \in \mathbf{S}$ tel que $s(t) \in F(v(t), w(t))$ p.p.
Soient $v, w : [a,b] \to E$ deux applications mesurables, alors, d'après le Lemme 1.1, il existe deux suites de fonctions étagées $v_n, w_n : [a,b] \to E$ tel que (v_n) converge ponctuellement vers v et (w_n) converge ponctuellement vers w, pour E muni de la topologie de la convergence uniforme. Notons que les multi-fonctions $F(v_n(.), w_n(.))$ sont Lebesgue-mesurables sur $[a,b]$. D'après le théorème de sélections mesurables (Théorème 1.4), il existe une sélection Lesbegue-mesurable $s_n(.)$ de $F(v_n(.), w_n(.))$, telle que

$$s_n(t) \in F(v_n(t), w_n(t)) \subset m(t)\overline{\mathbf{B}}_E,\ \forall t \in [a,b].$$

Comme $(s_n) \subset \mathbf{S}$ et $\mathbf{S}$ est $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$-compact, par le théorème d'Eberlein-Šmulian, on peut extraire de (s_n) une sous suite (s'_n) qui converge $\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$ vers une application $s \in \mathbf{S}$. On doit invoquer ici le fait que $\mathbf{S}$ est un ensemble faiblement compact et métrisable dans l'espace de Banach $\mathbf{L}^1_E([a,b])$.
Appliquant maintenant le théorème de Mazur à (s'_n), nous obtenons l'existence d'une suite (z_n) avec

$$z_n \in co\{s'_m :\ m \geq n\}$$

telle que (z_n) converge vers s presque partout sur E.
Alors pour presque partout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} s(t) &\in \bigcap_{k\geq 0} \overline{\{z_n(t) : n \geq k\}} \\ &\subset \bigcap_{k \geq 0} \overline{co}\{s'_n(t) :\ n \geq k\}. \end{aligned}$$

Comme $s'_n(t) \in F(v_n(t), w_n(t))$, on obtient

$$\begin{aligned} s(t) &\in \bigcap_{k\geq 0} \overline{co}\{\bigcup_{n\geq k} F(u_n(t), w_n(t))\} \\ &= \overline{co}(\limsup_{n\to\infty} F(u_n(t), w_n(t))), \end{aligned}$$

utilisons la convergence ponctuelle de $(v_n(.))$ et $(w_n(.))$ vers $v(.)$ et $w(.)$ respectivement, la semi-continuité supérieure de F et la compacité de ses valeurs on déduit que

$$s(t) \in \overline{co}(F(u(t), w(t))) = F(u(t), w(t)),$$

car $F(u(t), w(t))$ est un ensemble convexe fermé.

Etape 3.

Considérons la multi-application $\Phi : \mathbf{S} \rightrightarrows \mathbf{S}$, définie par

$$\Phi(f) = \{g \in \mathbf{S} : \ g(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)) \ p.p. \ sur \ [a, b]\},$$

où $u_f \in \mathbf{X}$.

D'après la démonstration de l'étape 2, $\Phi(f)$ est non vide pour tout $f \in \mathbf{S}$. Cette considération nous mène à l'application du théorème du point fixe Kakutani-ky Fan à la multi-application $\Phi(.)$.

Montrons que $\Phi(f)$ est convexe. Soient $f \in \mathbf{S}$ et $g_1, g_2 \in \Phi(f)$, et $\alpha \in [0, 1]$, d'après la définition de $\Phi(f)$ on a

$$g_1(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.p. \ sur \ [a, b]$$

et

$$g_2(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.p. \ sur \ [a, b].$$

Comme $F(u_f(t), \dot{u}_f(t))$ est convexe, on aura

$$\alpha g_1(t) + (1 - \alpha) g_2(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)), \ p.p. \ sur \ [a, b]$$

et donc

$$\alpha g_1 + (1 - \alpha) g_2 \in \Phi(f),$$

d'où la convexité de $\Phi(f)$.

D'autre part, pour tout $f \in \mathbf{S}$, $\Phi(f)$ est faiblement compact.

En effet, soit $f \in \mathbf{S}$ et soit (g_n) une suite d'éléments de $\Phi(f)$ convergeant

$\sigma(\mathbf{L}^1_E([a,b]), \mathbf{L}^\infty_E([a,b]))$ vers g.
Nous avons $g_n \in \Phi(f)$ et donc

$$g_n(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)),\ p.p.$$

D'après le Théorème 1.6, on conclut que

$$g(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)),\ p.p.$$

Par conséquence, $g \in \Phi(f)$ et donc $\Phi(f)$ est faiblement fermé dans $\mathbf{S}$.
Finalement la compacité faible de $\mathbf{S}$ implique celle de $\Phi(f)$.
Montrons maintenant la semi-continuité supérieure de Φ. Pour ça, il suffit de montrer que le graphe de Φ défini par

$$ghp(\Phi) = \{(f,g) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S} :\ g \in \Phi(f)\}$$

est séquentiellement faiblement fermé dans $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.
Soit (f_n, g_n) une suite d'éléments du graphe de Φ, c'est à dire, $(f_n, g_n) \subset \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ avec $g_n \in \Phi(f_n)$, pour tout $n \in I\!N$, et telle que (f_n, g_n) converge vers $(f,g) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}$. Par ce qui a précédé les suites (u_{f_n}) et $(\dot{u}_{f_n})$ convergent ponctuellement vers u_f et $\dot{u}_f$ respectivement.
Nous avons (g_n) converge faiblement vers $g \in \mathbf{S}$. Comme

$$g_n(t) \in F(u_{f_n}(t), \dot{u}_{f_n}(t)),\ p.p.,$$

et suivons les mêmes arguments de la démonstration de l'étape 2 nous aurons $g(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t))$ presque partout. Donc le graphe de Φ est faiblement fermé dans $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$. D'où la semi-continuité supérieure faible-faible de Φ.
En appliquant le corollaire du théorème de Kakutani-Ky Fan, on obtient un point fixe $f \in \mathbf{S}$ tel que $f \in \Phi(f)$ et donc $f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t))$ presque partout $t \in [a,b]$. D'après le Lemme 3.1

$$\ddot{u}_f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t))\ p.p\ t \in [a,b],$$

avec $u_f(a) = u_f(b) = v_0$. L'application u_f est en fait la solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ de l'inclusion différentielle (P_F).
La compacité de l'ensemble de solutions du problème (P_F),

$$\{u_f : [a,b] \to E :\ \ u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds, \forall t \in [a,b],\ f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t))\},$$

découle de la compacité de $\mathbf{X}$ démontré dans l'étape 1 et les arguments précédents, puisque $f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)) \subset m(t)\overline{\mathbf{B}}_E$. ■

Dans ce quit suit, on donne un résultat d'existence de solutions pour le problème (P_F), en supposant que F vérifie une condition de croissance linéaire.

Théorème 3.1 *Soient E un espace de dimension finie, et $F : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs compactes convexes, semi-continue supérieurement sur $E \times E$. Supposons qu'il existe deux fonctions positives p, q dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([a,b])$ satisfaisant $\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \dfrac{b-a}{b^2}$ telles que $F(x,y) \subset (p(t)\|x\| + bq(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E$ pour tout $(x,y) \in E \times E$. Soit $v_0 \in E$. Alors l'ensemble des solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ du problème*

$$(P_F)\begin{cases} \ddot{u}(t) \in F(u(t), \dot{u}(t)), \ \ p.p. \ \ t \in [a,b], \\ \qquad\qquad u(a) = u(b) = v_0, \end{cases}$$

est non vide et compact dans $\mathbf{C}^1_E([a,b])$.

Pour la démonstration de notre théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 3.2 *Soit E un espace de dimension finie. Supposons que les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites. Si u est solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ du problème (P_F), alors pour tout $t \in [a,b]$ nous avons*

$$\|u(t)\| \leq \alpha \ \ et \ \ \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{b},$$

avec

$$\alpha = \frac{\|v_0\|}{1 - \dfrac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}}.$$

Démonstration.
Supposons que $u : [a,b] \to E$ est une solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a,b])$ du problème (P_F), alors il existe une application mesurable $f : [a,b] \to E$ telle que

$$f(t) \in F(u_f(t), \dot{u}_f(t)) \ p.p \ t \in [a,b]$$

et

$$u(t) = u_f(t) = v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s) f(s) ds, \ \forall t \in [a,b].$$

Par conséquent, pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \|v_0 + \frac{b}{b-a}\int_a^b G(t,s)f(s)ds\| \\
&\leq \|v_0\| + \frac{b}{b-a}\int_a^b |G(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \|v_0\| + \frac{b}{b-a}\int_a^b b(p(s)\|u(s)\| + bq(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\
&\leq \|v_0\| + \frac{b}{b-a}\int_a^b b(p(s)\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} + q(s)\|u\|_{\mathbf{C}^1_E})ds \\
&\leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}\int_a^b (p(s)+q(s))ds,
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|u(t)\| \leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}. \tag{3.2.1}$$

De la même façon nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &= \|\frac{b}{b-a}\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds\| \\
&\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|f(s)\|ds \\
&\leq \frac{b}{b-a}\int_a^b (p(s)\|u(s)\| + bq(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\
&\leq \frac{b}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
b\|\dot{u}(t)\| &\leq \frac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \\
&\leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Les inégalités (3.2.1) et (3.2.2) donnent

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E},$$

ou bien

$$(1 - \frac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \|v_0\|,$$

c'est à dire,

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \frac{\|v_0\|}{1 - \dfrac{b^2}{b-a}\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}} = \alpha.$$

Par la définition de $\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}$ on conclut que pour tout $t \in [a,b]$

$$\|u(t)\| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{b}.$$

Démonstration du Théorème 3.1.
Considérons l'application $\varphi_\kappa : E \to E$ définie par

$$\Phi_\kappa(t,x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \|x\| \leq \kappa \\ \dfrac{\kappa x}{\|x\|} & \text{si} \quad \|x\| > \kappa. \end{cases}$$

et considérons la multi-application $F_0 : E \times E \rightrightarrows E$ definie par

$$F_0(x,y) = F(\varphi_\alpha(x), \varphi_{\frac{\alpha}{b}}(y)).$$

Alors F_0 hérite toutes les propriétés de F, c'est à dire, $F_0 : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs compactes convexes, semi-continue supérieurement sur $E \times E$, et qu'il existe deux fonctions positives p, q dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([a,b])$ satisfaisant $\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \dfrac{b-a}{b^2}$ telles que $F_0(x,y) \subset (p(t)\|x\| + bq(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.
Montrons que F_0 est semi-continue supérieurement.
Considérons $f_0 : E \times E \to E \times E$ l'application continue définie par

$$f_0(x,y) = (\varphi_\alpha(x), \varphi_{\frac{\alpha}{b}}(y)).$$

Soit V un ouvert de $E \times E$, nous avons

$$F_0^{-1}(V) = (F \circ f_0)^{-1}(V) = f_0^{-1}(F^{-1}(V)),$$

de la semi-continuité supérieur de F et de la continuité de f_0 on conclut que $F_0^{-1}(V)$ est ouvert. D'où F_0 est semi-continue supérieurement.
D'autre par, pour tout $(x,y) \in E \times E$

$$\begin{aligned} F_0(x,y) &= F(\varphi_\alpha(x), \varphi_{\frac{\alpha}{b}}(y)) \\ &\subset (p(t)\|\varphi_\alpha(x)\| + bq(t)\|\varphi_{\frac{\alpha}{b}}(y)\|)\overline{\mathbf{B}}_E \\ &\subset (p(t)\alpha + b\frac{1}{b}q(t)\alpha)\overline{\mathbf{B}}_E \\ &= \alpha(p(t)+q(t))\overline{\mathbf{B}}_E = \beta(t)\overline{\mathbf{B}}_E, \end{aligned}$$

avec $\beta(t) = \alpha(p(t) + q(t))$ et donc $\beta \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0, T])$.
Par conséquent F_0 vérifie les hypothèses de la Proposition 3.2. Par suite il existe une solution u dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([a, b])$ du problème (P_F).
On démontre maintenant que u est solution du problème (P_{F_0}) si et seulement si u est solution du (P_F).
Si u est une solution du problème (P_{F_0}), alors, il existe une application $f_0 \in \mathbf{L}^1_E([a, b])$ telle que $u = u_{f_0}$ et

$$f_0(t) \in F_0(u(t), \dot{u}(t)) \ p.p. \ t \in [a, b]$$

et

$$\|f_0(t)\| \leq \beta(t) = \alpha(p(t) + q(t)).$$

Utilisons la dernière inégalité et le fait que pour tout $t \in [a, b]$

$$u(t) = v_0 + \frac{b}{b-a} \int_a^b G(t, s) f_0(s) ds,$$

et

$$\dot{u}(t) = \frac{b}{b-a} \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) f_0(s) ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a} \|\beta\|_{\mathbf{L}^1_R} \\
&= \|v_0\| + \frac{b^2}{b-a} \alpha \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} \\
&= \|v_0\| + (\frac{b^2}{b-a}) \frac{\|v_0\|}{1 - \frac{b^2}{b-a} \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}} \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} \\
&= \frac{\|v_0\|}{1 - \frac{b^2}{b-a} \|p + q\|_{\mathbf{L}_{R^1}}} = \alpha,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}(t)\| &\leq \frac{b}{b-a} \|\beta\|_{\mathbf{L}^1_R} = \frac{b}{b-a} \alpha \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} \\
&= (\frac{b}{b-a}) \frac{\|v_0\|}{1 - \frac{b^2}{b-a} \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}} \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R} \\
&\leq (\frac{b}{b-a}) (\frac{\|v_0\|}{1 - \frac{b^2}{b-a} \|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}}) (\frac{b-a}{b^2}) = \frac{\alpha}{b}.
\end{aligned}$$

Les dernières relations montrent que

$$\varphi_\alpha(u(t)) = u(t) \quad \text{et} \quad \varphi_{\frac{\alpha}{b}}(\dot{u}(t)) = \dot{u}(t),$$

ceci implique que

$$F_0(u(t), \dot{u}(t)) = F(u(t), \dot{u}(t)).$$

Par conséquent, u est solution du (P_F).
Supposons maintenant que u est une solution du problème (P_F). Par le Lemme 3.2, nous aurons pour tout $t \in [a, b]$

$$\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{b}.$$

D'où

$$F(u(t), \dot{u}(t)) = F_0(u(t), \dot{u}(t));$$

et donc u est une solution du problème (P_{F_0}). ■

3.4 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle du second ordre avec un second membre à valeurs presque convexes.

On démontre dans cette partie un nouveau résultat d'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$ pour l'inclusion différentielle (P_F) où $F : E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs compactes presque convexes. La presque convexité ici est une version plus faible de la convexité.
Voici la définition des ensembles presque convexes.

Définition 3.1 *Soit X un espace vectoriel. L'ensemble $K \subset X$ est dit presque convexe, si pour tout $\xi \in co(K)$ il existe deux constantes λ_1 et λ_2, $0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2$, telles que*

$$\lambda_1 \xi \in K \ \ et \ \ \lambda_2 \xi \in K.$$

Remarques.

- Tout ensemble convexe est presque convexe.

- Si l'ensemble K est presque convexe est $0 \in co(K)$ alors $0 \in K$.

Exemples.

Les ensembles suivants sont presque convexes :

- l'ensemble $K = \partial C$, où C est un convexe qui ne contient pas l'origine,

- l'ensemble $K = \{0\} \cup \partial C$, où C est un convexe qui contient l'origine.

On démontre maintenant le théorème principal de cette section.

Théorème 3.2 *Soient E un espace de dimension finie, et $F : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs compactes, presque convexes, semi-continue supérieurement sur $E \times E$ et vérifie les hypothèses suivantes*

1) *il existe deux fonctions positives p, q dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([a,b])$, satisfaisant*

$$\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_{R}} < \frac{b-a}{b^2},$$

telles que

$$F(x,y) \subset (p(t)\|x\| + bq(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E$$

pour tout $(x,y) \in E \times E$,

2) *$F(x, \zeta y) \subset \zeta F(x,y)$. pour tout $(x,y) \in E \times E$ et $\zeta > 0$*

Soit $v_0 \in E$. Alors le problème (P_F) admet au mois une solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a,b])$.

Pour la démonstration de notre théorème on a besoin du théorème suivant.

Théorème 3.3 *Soit $F : E \times E \rightrightarrows E$ une multi-application semi-continue supérieurement sur $E \times E$. Supposons que l'hypothèse (2) du Théorème 3.2. est satisfait. Soit $v_0 \in E$ et soit $x : [a,b] \to E$, une solution du problème*

$$(P_{co(F)}) \begin{cases} \ddot{u}(t) \in co(F(u(t), \dot{u}(t))), \ \ p.p. \ \ t \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = v_0, \end{cases}$$

et supposons que λ_1 et λ_2 sont deux constantes $(0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2)$, telles que pour tout $t \in [a,b]$,

$$\lambda_1 \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) \ \ et \ \ \lambda_2 \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)).$$

Alors il existe une application $t = t(\tau)$, non décroissante, absolument continue définie de l'intervalle $[a,b]$ dans lui même, tel que $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$ est la solution du problème (P_F). De plus $\tilde{x}(a) = \tilde{x}(b) = v_0$.

Démonstration.
Etape 1.
Soit $[\alpha, \beta]$, $(0 \leq \alpha < \beta < +\infty)$ un intervalle et supposons qu'il existe deux constantes λ_1 et λ_2 tel que $0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2$. Supposons de plus que $\lambda_1 > 0$. Montrons qu'il existe deux sous ensembles mesurables de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, avec $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ leurs fonctions caractéristiques et telles que $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_{[\alpha,\beta]}$, et il existe une fonction absolument continue $s = s(\tau)$ sur $[\alpha, \beta]$, telle que $s(\alpha) - s(\beta) = \alpha - \beta$, et

$$\dot{s}(\tau) = \mathcal{X}_1(\tau) \frac{1}{\lambda_1} + \mathcal{X}_2(\tau) \frac{1}{\lambda_2}.$$

En effet, soit γ définie par

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } \ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \\ \dfrac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit bien de cette définition que $0 \leq \gamma \leq 1$ et

$$\gamma\lambda_1 + (1-\gamma)\lambda_2 = \gamma(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2 = 1.$$

En particulier

$$\int_{\alpha}^{\beta} 1 d\tau = \gamma\lambda_1 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\lambda_1} d\tau + (1-\gamma)\lambda_2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\lambda_2} d\tau. \tag{3.3.1}$$

D'après le théorème de Lyapunov (Théorème 1.3) les deux ensembles définies par

$$\mathcal{A} = \{\mu(A) = \int_A \frac{1}{\lambda_1} dt / \ A \in \Sigma\}$$

et

$$\mathcal{B} = \{\nu(A) = \int_A \frac{1}{\lambda_2} dt / \ A \in \Sigma\}$$

sont convexes, alors $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est convexe, donc on peut écrire

$$\forall \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ (\alpha + \beta)(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \beta(\mathcal{A} + \mathcal{B}). \tag{3.3.2}$$

Par la relation (3.3.1) nous avons

$$\int_{[\alpha,\beta]} d\mu = \gamma\lambda_1 \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_1} d\mu + (1-\gamma)\lambda_2 \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_2} d\mu,$$

avec

$$\int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_1} d\mu + 0 = \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_1} d\mu + \int_{\emptyset} \frac{1}{\lambda_2} d\mu \in \mathcal{A} + \mathcal{B}$$

et

$$0 + \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_2} d\mu = \int_{\emptyset} \frac{1}{\lambda_1} d\mu + \int_{[\alpha,\beta]} \frac{1}{\lambda_2} d\mu \in \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

ce qui implique

$$\int_{[\alpha,\beta]} d\mu \in \gamma\lambda_1(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + (1-\gamma)\lambda_2(\mathcal{A} + \mathcal{B}),$$

de la relation (3.3.2) nous aurons

$$\int_{[\alpha,\beta]} d\mu \in (\gamma\lambda_1 + (1-\gamma)\lambda_2)(\mathcal{A} + \mathcal{B}),$$

et comme $\gamma\lambda_1 + (1-\gamma)\lambda_2 = 1$ nous obtenons

$$\int_{[\alpha,\beta]} d\mu \in (\mathcal{A} + \mathcal{B}),$$

c'est à dire, il existe deux ensembles $A_1, A_2 \in \Sigma$ telles que

$$\int_{[\alpha,\beta]} d\mu = \int_{A_1} \frac{1}{\lambda_1} d\mu + \int_{A_2} \frac{1}{\lambda_2} d\mu.$$

Soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ leurs fonctions caractéristiques et telles que $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_{[\alpha,\beta]}$. Posons

$$\sigma(\tau) = \mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \sigma(\tau)d\tau &= \int_\alpha^\beta [\mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2}]d\tau \\
&= \int_{A_1} \frac{1}{\lambda_1} d\tau + \int_{A_2} \frac{1}{\lambda_2} d\tau \\
&= \int_\alpha^\beta 1 d\tau = \beta - \alpha
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $\dot{s}(\tau) = \mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2}$. Alors $\int_\alpha^\beta \dot{s}(\tau)d\tau = \beta - \alpha$.

Etape 2.

a) Considérons l'ensemble

$$C = \{\tau \in [a,b] : \quad 0 \in F(x(\tau), \dot{x}(\tau))\}.$$

Montrons que C est fermé. Soit (τ_n) une suite d'éléments de C convergeant vers $\tau \in [a,b]$, alors pour tout $n \in I\!N$ nous avons

$$0 \in F(x(\tau_n), \dot{x}(\tau_n)).$$

Comme F est semi-continue supérieurement, à valeurs compactes, donc son graphe est fermé, et comme les fonctions $x(.)$ et $\dot{x}(.)$ sont continues, nous aurons $0 \in F(x(\tau), \dot{x}(\tau))$. D'où le résultat.
D'autre part, et sans perdre de généralité on peut supposer que pour tout $t \in C$, $\lambda_1 \ddot{x}(t) = 0$, et quand $\ddot{x}(t) = 0$ on peut prendre $\lambda_2 = 1$.
(b) Supposons que C est un ensemble vide. Dans ce cas $\lambda_1 \neq 0$, donc on peut appliquer l'étape 1 sur l'intervalle $[a,b]$. Soit $s(\tau) = a + \int_a^\tau \dot{s}(\omega)d\omega$, s est non décroissante de plus $s(a) = a$ et

$$s(b) = a + \int_a^b \dot{s}(\omega)d\omega = a + (b-a) = b,$$

donc s est définie de $[a,b]$ dans lui même.
Soit $t:[a,b]\to[a,b]$ son inverse donc $t(a)=a$ et $t(b)=b$.
D'autre part, nous avons

$$\frac{d}{d\tau}s(t(\tau))=\dot{s}(t(\tau))\dot{t}(\tau)=1.$$

ce qui implique

$$\dot{t}(\tau)=\frac{1}{\dot{s}(t(\tau))}=\lambda_1\mathcal{X}_1(t(\tau))+\lambda_2\mathcal{X}_2(t(\tau)).$$

Considérons l'application $\tilde{x}(\tau)=x(t(\tau))$, nous avons

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau)=\dot{t}(\tau)\dot{x}(t(\tau)),$$

comme $\ddot{t}(\tau)=0$, donc

$$\frac{d^2}{ds^2}\tilde{x}(\tau)=(\dot{t}(\tau))^2\ddot{x}(t(\tau))+\ddot{t}(\tau)\dot{x}(t(\tau))=\ddot{x}(t(\tau))(\dot{t}(\tau))^2,$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}\frac{1}{\dot{t}(\tau)}\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) & = & \ddot{x}(t(\tau))(\dot{t}(\tau)) \\ & = & \ddot{x}(t(\tau))[\lambda_1\mathcal{X}_1(t(\tau))+\lambda_2\mathcal{X}_2(t(\tau))] \\ & \in & F(x(t(\tau)),\dot{x}(t(\tau))) \\ & = & F(\tilde{x}(\tau),\frac{1}{\dot{t}}(\tau)\dot{\tilde{x}}(\tau)),\end{array}$$

utilisons l'hypothèse (2) sur F, on obtient

$$F(\tilde{x}(\tau),\frac{1}{\dot{t}(\tau)}\dot{\tilde{x}}(\tau))\subseteq\frac{1}{\dot{t}(\tau)}F(\tilde{x}(\tau),\dot{\tilde{x}}(\tau))$$

et donc

$$\frac{1}{\dot{t}(\tau)}\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau)\in\frac{1}{\dot{t}(\tau)}F(\tilde{x}(\tau),\dot{\tilde{x}}(\tau)),$$

par conséquent

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau)\in F(\tilde{x}(\tau),\dot{\tilde{x}}(\tau)).$$

(c) Maintenant on suppose C non vide. Soit $c = \sup\{\tau : \tau \in C\}$, $c \in C$.
En effet, nous avons

$$c = \sup\{\tau : \tau \in C\} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists \tau_\epsilon \in C : c - \epsilon < \tau_\epsilon \leq c,$$

on peut écrire

$$\forall n > 0,\ \exists (\tau_n) \in C : c - \frac{1}{n} < \tau_n \leq c < c + \frac{1}{n},$$

c'est à dire,

$$\forall n > 0,\ \exists (\tau_n) \in C : |\tau_n - c| < \frac{1}{n},$$

donc il existe une suite (τ_n) dans C tel que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = c$, comme C est fermé, $c \in C$.
D'autre part, l'ensemble $([a,b] \setminus C)$ est un ouvert, il existe donc une partition $(]a_i, b_i[)_i$ de $([a,b] \setminus C)$ composée d'intervalles disjoints deux à deux avec l'exception de deux intervalles prenant la forme $[a_{i_i}, b_{i_i}[$ où $a_{i_i} = a$ et $]a_{i_f}, b_{i_f}]$ où $a_{i_f} = c$. Pour tout i, appliquons l'étape 1 sur chaque intervalle $]a_{i_i}, b_{i_i}[$, donc il existe deux sous ensembles K_1^i et K_2^i, de $]a_{i_i}, b_{i_i}[$ leurs fonctions caractéristiques sont $\mathcal{X}_1^i(.)$, $\mathcal{X}_2^i(.)$ respectivement tel que $\mathcal{X}_1^i + \mathcal{X}_2^i = \mathcal{X}_{]a_i,b_i[}$.
Posons

$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}\mathcal{X}_1^i(\tau) + \frac{1}{\lambda_2}\mathcal{X}_2^i(\tau)$$

on obtient

$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega)d\omega = b_i - a_i.$$

(d) Sur l'intervalle $[a,c]$ nous avons

$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\lambda_2}\mathcal{X}_C(\tau) + \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_1}\mathcal{X}_1^i(\tau) + \frac{1}{\lambda_2}\mathcal{X}_2^i(\tau)\right),$$

où la somme est prise pour tous les intervalles inclus dans $[a,c]$ à l'exception de $]c,b]$. Donc, nous avons

$$\int_a^c \dot{s}(\omega)d\omega = \kappa \leq c - a$$

puisque $\lambda_2 \geq 1$ et $\displaystyle\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\tau)d\tau = b_i - a_i$.
Posons $s(\tau) = a + \displaystyle\int_a^\tau \dot{s}(\omega)d\omega$, alors s a un inverse défini de $[a,c]$ à valeurs

dans $[a, \kappa + a]$.
(e) Soit $t : [a, \kappa + a] \to [a, c]$ l'inverse de $s(.)$. Le prolongement absolument continu de $t(.)$ noté $\tilde{t}(.)$ est défini sur $[a, c]$, tel que $\frac{d}{d\tau}\tilde{t}(\tau) = 0$ pour $\tau \in]\kappa + a, c]$.
Démontrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau))$ est la solution du problème (P_F) sur l'intervalle $[a, c]$ et que $\tilde{x}(c) = x(c)$.
D'après (b), nous avons pour $\tau \in [a, \kappa + a]$, $\tilde{t}(\tau) = t(\tau)$ est inversible, et

$$\dot{t}(\tau) = \lambda_2 \mathcal{X}_C(\tau) + \sum_i (\lambda_1 \mathcal{X}_1^i(\tau) + \lambda_2 \mathcal{X}_2^i(\tau)).$$

Comme

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) = (\dot{t}(\tau))^2 \ddot{x}(t(\tau)) + \ddot{t}(\tau)\dot{x}(t(\tau)) = \ddot{x}(t(\tau))(\dot{t}(\tau))^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\dot{t}(\tau)}\frac{d^2\tilde{x}(\tau)}{d\tau^2} &= \ddot{x}(t(\tau))(\dot{t}(\tau)) \\
&= \ddot{x}(t(\tau))[\lambda_2 \mathcal{X}_C(t(\tau)) + \sum_i (\lambda_1 \mathcal{X}_1^i(t(\tau)) + \lambda_2 \mathcal{X}_2^i(t(\tau)))] \\
&\in F(x(t(\tau)), \dot{x}(t(\tau))) = F(\tilde{x}(\tau), \frac{1}{\dot{t}}(\tau)\dot{\tilde{x}}(\tau)) \\
&\subseteq \frac{1}{\dot{t}(\tau)} F(\tilde{x}(\tau), \dot{\tilde{x}}(\tau))
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\frac{d^2}{ds^2}\tilde{x}(\tau) \in F(\tilde{x}(\tau), \dot{\tilde{x}}(\tau)).$$

En particulier, nous avons $t(k + a) = c$ et $\frac{d}{d\tau}\tilde{t}(\tau) = 0$ pour tout $\tau \in]k + a, c]$, on obtient alors

$$\tilde{t}(\tau) = \tilde{t}(k + a) = t(k + a), \ \forall \tau \in]k + a, c],$$

d'où

$$\tilde{x}(k + a) = x(\tilde{t}(k + a)) = x(\tilde{t}(\tau)) = \tilde{x}(\tau), \ \forall \tau \in]k + a, c],$$

donc, pour $\tau \in]\kappa + a, c]$, $\tilde{x}$ est constante et puisque $c \in C$, nous avons

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\tilde{x}(\tau) = 0 \in F(x(c), \dot{x}(c)) = F(\tilde{x}(\kappa + a), \frac{1}{\dot{t}(k + a)}\dot{\tilde{x}}(\kappa + a)) = F(\tilde{x}(\tau), \dot{\tilde{x}}(\tau)).$$

(f) Pour démontrer l'existence de la solution du problème (P_F) sur l'intervalle $[c, b]$, nous avons $\lambda_1 > 0$ donc on peut appliquer l'étape 1 et (b).
Ce qui complète la démonstration de notre théorème.
Démonstration du Théorème 3.2.
Nous avons $co(F) : E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs compactes, semi-continue supérieurement sur $E \times E$.
D'autre part, et pour tout $(x, y) \in E \times E$, nous avons

$$\begin{aligned} co(F(x,y) &\subset (p(t)\|x\| + bq(t)\|y\|)co(\overline{\mathbf{B}}_E) \\ &= (p(t)\|x\| + bq(t)\|y\|)\overline{\mathbf{B}}_E. \end{aligned}$$

On voit bien que la multi-application $co(F) : E \times E \rightrightarrows E$ vérifie tous les hypothèses du Théorème 3.1. Donc le problème $(P_{co(F)})$ admet une solution x dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a, b])$. Comme les valeurs de F sont presque convexes, d'où l'existence de deux constantes λ_1 et λ_2 $(0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2)$, tels que, pour presque tout $t \in [a, b]$,

$$\lambda_1 \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)) \text{ et } \lambda_2 \ddot{x}(t) \in F(x(t), \dot{x}(t)).$$

Utilisons le Théorème 3.3, on conclut que le problème (P_F) admet une solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([a, b])$.
Ce qui achève la démonstration de notre théorème principal. ■

Chapitre 4

L'affinité sur les variations des contrôles et le problème bien posé pour une équation différentielle du second ordre.

4.1 Introduction

Le terme mathématique du problème bien posé (well-posedness) provient d'une définition de Hadamard (1902). Il pensait que les modèles mathématiques des phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes

1) une solution existe,

2) la solution est unique,

3) la solution dépend de façon continue des données, pour une topologie raisonnable.

Comme exemples sur les problèmes bien posés nous avons le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace et l'équation de la chaleur avec des conditions initiales spécifiées. Ces problèmes peuvent être qualifiés de naturels, dans le sens où, il existe des processus physiques qui résolvent ces problèmes. Il est fréquent que les problèmes inverses ne soient pas bien posés.

Les premiers travaux concernant les problèmes bien posés ont été introduits par Hadamard et Tykhonov. Après, l'auteur dans [35], [36] a développé la notion et la définition du problème bien posé par perturbation, et il l'a relié au contrôle optimale. Dans [37] et [29] les auteurs ont démontré l'équivalence entre l'affinité sur les variations contrôles et le problème bien posé pour des équations différentielles non homogènes du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(t, z(t)) \quad p.p \quad t \in [0, T] \\ u(0) = v, \end{cases}$$

où A est un opérateur lineaire borné.
Le but de notre travail est de généraliser cette étude à une équation différentielle du second ordre avec des conditions aux limites de la forme suivante

$$(P_{f,g}) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) + g(t, z(t)) \quad p.p \quad t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Dans la première section on donne un résultat d'existence et d'unicité pour le problème sans perturbation, dans la section 2, nous démontrons quelques propriétés de la solution du problème, puis la convexité et la Gâteaux différentiabilité de la fonction quadratique du problème $(P_{f,g})$. A la fin, nous étudions l'équivalence entre le problème bien posé et l'affinité sur g par rapport au contrôle.

4.2 Un résultat d'existence pour une équation différentielle du second ordre.

On démontre dans cette partie un résultat d'existence dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,T])$, pour l'équation différentielle du second ordre

$$(P_f)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) \quad p.p \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

En premier lieu, on donne un cas particulier du Lemme 3.1.
On considère $\mathbf{C}_E^1([0,T])$ muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbf{C}_E^1} = \max\{\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|, T \max_{t\in[0,T]} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

Lemme 4.1 *Soient E un espace de Banach séparable, $T > 0$ et $G : [0,T] \times [0,T] \to I\!R$, la fonction définie par :*

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{T}(T-t)s \quad si \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \\ -\dfrac{1}{T}t(T-s) \quad si \quad 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Alors on a les résultats suivants.

(1) Si $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}([0,T])$ avec $u(0) = u(T) = 0$, alors

$$u(t) = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.1.2}$$

(2) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,T[$ pour tout $s \in [0,T]$, à part sur la diagonale et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \dfrac{s}{T} \quad si \quad 0 \leq s < t \\ -\dfrac{1}{T}(T-s) \quad si \quad t < s \leq T. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

(3) $G(.,.)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t,s\in[0,T]} |G(t,s)| \leq T, \qquad \sup_{t,s\in[0,T],t\neq s} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1. \tag{4.1.4}$$

(4) Soit $f \in \mathbf{L}^1_E([0,T])$ *et soit* $u_f : [0,T] \to E$ *l'application définie par*

$$u_f(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T]$$

alors

$$u_f(0) = u_f(T) = 0.$$

De plus, l'application u_f *est dérivable, et sa dérivée* $\dot{u}_f$ *vérifie*

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} = \dot{u}_f(t) = \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds, \tag{4.1.5}$$

pour tout $t \in [0,T]$. *Par conséquent,* $\dot{u}_f$ *est continue sur* $[0,T]$ *à valeurs dans* E.

(5) L'application $\dot{u}_f$ *est scalairement dérivable, i.e, il existe une application* $\ddot{u}_f : [0,T] \to E$ *telle que, pour tout* $x' \in E'$, *la fonction scalaire* $\langle x', \dot{u}_f(.)\rangle$ *est dérivable, avec*

$$\frac{d}{dt}\langle x', \dot{u}_f(t)\rangle = \langle x', \ddot{u}_f(t)\rangle,$$

et

$$\ddot{u}_f = f \ p.p. \ sur \ [0,T]. \tag{4.1.6}$$

La proposition suivante est une conséquence du Lemme 4.1.

Proposition 4.1 *Soit* E *un espace de Banach séparable, et soit* $f : [0,T] \to E$ *une application continue (résp. dans* $\boldsymbol{L}^1_E([0,T])$*). Alors l'application* $u_f : [0,T] \to E$ *définie par*

$$u_f(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds, \ \ \forall t \in [0,T]$$

est la solution unique dans $\mathbf{C}^2_E([0,T])$ *(résp. dans* $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$*) du problème*

$$(P)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t), \quad \forall t \in [0,T], \\ \quad u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

Maintenant on donne un résultat d'existence pour une équation différentielle du second ordre, qui nous sera utile dans la suite, pour la démonstration on répette les mêmes étapes de démonstration du Théorème 2.1.

Théorème 4.1 *Supposons que E est un espace de dimension finie. Soit $f : [0,T] \times E \times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

(i) *pour tout $(x,y) \in E \times E$ fixé, $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$;*

(ii) *pour tout $t \in [0,T]$ fixé, $f(t,.,.)$ est continue sur $E \times E$;*

(iii) *il existe une fonction non négative $m \in \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ telle que*

$$\|f(t,x,y)\| \leq m(t), \ \forall \ (t,x,y) \in [0,T] \times E \times E.$$

Alors, le problème

$$(P_f) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,u(t),\dot{u}(t)), \ \ p.p. \ \ t \in [0,T], \\ \qquad u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

admet une solution $u \in \boldsymbol{W}^{2,1}_E([0,T])$.

On démontre dans la partie suivante le résultat principal pour l'équation différentielle (P_f) en supposant que f vérifie une condition de croissance linéaire.

Théorème 4.2 *Soient E un espace de dimension finie et $f : [0,T] \times E \times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

(i) *pour tout $(x,y) \in E \times E$ fixé, $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$;*

(ii) *il existe deux fonctions non négatives k_1, k_2 dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ satisfaisants*

$$(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$$

et

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous $(t,x_1,y_1),(t,x_2,y_2) \in [0,T] \times E \times E$;

(iii) *il existe trois fonctions non négatives m, p et q dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ satisfaisants*

$$\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \frac{1}{T},$$

telles que

$$\|f(t,x,y)\| \leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times E \times E$. *Alors l'équation différentielle*

$$(P_f)\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,u(t),\dot{u}(t)), \ \ p.p. \ \ t \in [0,T], \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}\ ([0,T])$.

Pour la démonstration de notre théorème nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2 *Soit E un espace de dimension finie. Supposons que les hypothèses **i**), **ii**) et **iii**) du Théorème 4.2 sont satisfaites.*
Si u est solution dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,T])$ du problème (P_f), alors pour tout $t \in [0,T]$ nous avons

$$\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{T}$$

avec

$$\alpha = \frac{T\|m\|_{\mathbf{L}_R^1}}{1 - T\|p+q\|_{\mathbf{L}_R^1}}.$$

Démonstration.
Supposons que u est une solution du problème (P_f). Alors $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}([0,T])$, et de la relation (4.1.2) nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \|\int_0^T G(t,s)\ddot{u}(s)ds\| \\ &= \|\int_0^T G(t,s)f(s,u(s),\dot{u}(s))ds\| \\ &\leq \int_0^T |G(t,s)|\|f(s,u(s),\dot{u}(s))\|ds, \end{aligned}$$

l'hypothèse **iii**) et la relation (4.1.4) impliquent que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq T\int_0^T (m(s) + p(s)\|u(s)\| + Tq(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\ &\leq T\int_0^T (m(s) + p(s)\|u\|_{\mathbf{C}_E^1} + q(s)\|u\|_{\mathbf{C}_E^1})ds \\ &= T(\int_0^T m(s)ds + \|u\|_{\mathbf{C}_E^1}\int_0^T (p(s)+q(s))ds). \end{aligned}$$

d'où,

$$\|u(t)\| \leq T(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}). \tag{4.2.1}$$

De la même façon nous avons,

$$\begin{array}{rcl} \|\dot{u}(t)\| & = & \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}(s)ds \\ & = & \|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s,u(s),\dot{u}(s))ds\| \\ & \leq & \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|f(s,u(s),\dot{u}(s))\|ds \\ & \leq & \int_0^T (m(s)+p(s)\|u(s)\|+Tq(s)\|\dot{u}(s)\|)ds \\ & \leq & \|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}, \end{array}$$

d'où

$$T\|\dot{u}(t)\| \leq T(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}). \tag{4.2.2}$$

Les inégalités (4.2.1) et (4.2.2) nous donnent

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq T(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}\|u\|_{\mathbf{C}^1_E}),$$

et donc

$$(1 - T\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq T\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}.$$

On conclut que

$$\|u\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \frac{T\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - T\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}} = \alpha. \tag{4.2.3}$$

De la relation (4.2.3) nous aurons, pour tout $t \in [0,T]$

$$\|u(t)\| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{T}.$$

Démonstration du Théorème 4.2.
Considérons maintenant l'application $\Phi_\kappa : [0,T] \times E \to E$ definie par

$$\Phi_\kappa(t,x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad \|x\| \leq \kappa \\ \frac{\kappa x}{\|x\|} & \text{si} \quad \|x\| > \kappa. \end{cases}$$

Considérons maintenant une autre application $f_0 : [0,T] \times E \times E \to E$ definie par
$$f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_\alpha(t,x), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y)).$$
L'application f_0 hérite les hypothèses (**i**) et (**ii**) supposées sur f, c'est à dire,

(**i**) pour tout $(x,y) \in E \times E$ fixé, $f_0(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$;

(**ii**) il existe deux fonctions non négatives k_1, k_2 dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ satisfaisants
$$(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$$
et
$$\|f_0(t,x_1,y_1) - f_0(t,x_2,y_2)\| \leq 2k_1(t)\|x_1 - x_2\| + 2k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$
pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$,
En effet,
i) Démontrons que la fonction
$$t \mapsto f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_\alpha(t,x), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y))$$
est Lebegue-mesurable sur $[0,T]$.
Soit $\epsilon > 0$, d'après le théorème de Scorza-Dragoni, il existe un compact $I_\epsilon \subset [0,T]$, tel que la mesure de Lebesgue de $([0,T] \setminus I_\epsilon)$ est inférieure où égale à ϵ et la restriction de f à $I_\epsilon \times E \times E$ est continue, alors la fonction
$$t \mapsto f_0(t,x,y) = f(t, \Phi_\alpha(t,x), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y))$$
est continue sur I_ϵ, et donc Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$, puisque ϵ est arbitraire et les applications Φ_α et $\Phi_{\frac{\alpha}{T}}$ sont constantes par rapport à t et donc continues par rapport à cette variable.
ii) Nous avons,
$$\|f_0(t,x_1,y_1) - f_0(t,x_2,y_2\| = \|f(t, \Phi_\alpha(t,x_1), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y_1)) - f(t, \Phi_\alpha(t,x_2), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y_2)\|,$$
pour tous (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in E \times E$. Comme f est Lipschitzienne sur $E \times E$, on obtient
$$\|f_0(t,x_1,y_1) - f_0(t,x_2,y_2\| \leq k_1(t)\|\Phi_\alpha(t,x_1) - \Phi_\alpha(t,x_2)\| + k_2(t)\|\Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y_1) - \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t,y_2)\|.$$
D'après la définition de l'application Φ_κ
si $\|x_1\| \leq \kappa,\ \|x_2\| \leq \kappa$ et $\|y_1\| \leq \kappa,\ \|y_2\| \leq \kappa$, nous aurons
$$\|\Phi_\kappa(t,x_1) - \Phi_\kappa(t,x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \leq 2\|x_1 - x_2\|,$$

et

$$\|\Phi_\kappa(t,y_1)-\Phi_\kappa(t,y_2)\| = \|y_1-y_2\| \leq 2\|y_1-y_2\|,$$

si $\|x_1\|>\kappa$ et $\|x_2\|>\kappa$ nous aurons

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\kappa(t,x_1)-\Phi_\kappa(t,x_2)\| &= \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|}-\frac{\kappa x_2}{\|x_2\|}\| = \kappa\|\frac{x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\| \\
&= \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}\|(x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|-x_1\|x_1\|+x_1\|x_1\|)\| \\
&= \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}\|x_1(\|x_2\|-\|x_1\|)+\|x_1\|(x_1-x_2)\| \\
&\leq \frac{\kappa}{\|x_1\|\|x_2\|}[\|x_1\||(\|x_1\|-\|x_2\|)|+\|x_1\|\|x_1-x_2\|] \\
&\leq \frac{\kappa}{\|x_2\|}(\|x_1-x_2\|+\|x_1-x_2\|) \\
&< 2\|x_1-x_2\|,
\end{aligned}$$

si $\|x_1\|>\kappa$ et $\|x_2\|\leq\kappa$ ($\|x_1\|>\kappa\geq\|x_2\|$) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Phi_\kappa(t,x_1)-\Phi_\kappa(t,x_2)\| &= \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|}-x_2\| \\
&= \|\frac{\kappa x_1}{\|x_1\|}-x_2+\frac{\kappa x_2}{\|x_1\|}-\frac{\kappa x_2}{\|x_1\|}\| \\
&= \|\frac{\kappa}{\|x_1\|}(x_1-x_2)+x_2(\frac{\kappa}{\|x_1\|}-1)\| \\
&\leq \frac{\kappa}{\|x_1\|}\|x_1-x_2\|+\|x_2\|(1-\frac{\kappa}{\|x_1\|}) \\
&< \|x_1-x_2\|+\frac{\|x_1\|-\kappa}{\|x_1\|}\|x_2\| \\
&< \|x_1-x_2\|+\frac{\|x_1\|-\kappa}{\|x_1\|}\|x_1\| \\
&= \|x_1-x_2\|+\|x_1\|-\kappa \\
&\leq \|x_1-x_2\|+\|x_1\|-\|x_2\| \\
&\leq \|x_1-x_2\|+\|x_1-x_2\| = 2\|x_1-x_2\|.
\end{aligned}$$

De façon similaire nous aurons

$$\|\Phi_\kappa(t,y_1)-\Phi_\kappa(t,y_2)\| \leq 2\|y_1-y_2\|.$$

Par conséquent, pour tous $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in [0, T] \times E \times E$

$$\|f_0(t, x_1, y_1) - f_0(t, x_2, y_2)\| \leq 2k_1(t)\|x_1 - x_2\| + 2k_2(t)\|y_1 - y_2\|.$$

Nous avons aussi, pour tout $(t, x, y) \in [0, T] \times E \times E$

$$\begin{aligned} \|f_0(t, x, y)\| &= \|f(t, \Phi_\alpha(t, x), \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t, y))\| \\ &\leq m(t) + p(t)\|\Phi_\alpha(t, x)\| + Tq(t)\|\Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t, y)\| \\ &\leq m(t) + p(t)\alpha + Tq(t)\frac{\alpha}{T} \\ &= m(t) + \alpha(p(t) + q(t)) = \beta(t). \end{aligned}$$

Par conséquent l'application f_0 satisfait toutes les hypothèses du Théorème 4.1. D'où l'existence d'une solution $u \in \mathbf{W}_E^{2,1}([0, T])$ du problème (P_{f_0}). Montrons maintenant que u est une solution du problème (P_{f_0}) si et seulement si u est une solution du problème (P_f).
a) Si u est une solution du problème (P_{f_0}). Alors nous avons

$$\|\ddot{u}(t)\| = \|f_0(t, u(t), \dot{u}(t))\| \leq \beta(t).$$

Utilisons la dernière inégalité et la relation

$$u(t) = \int_0^T G(t, s) f_0(s, u(s), \dot{u}(s)) ds, \forall t \in [0, T],$$

nous obtenons

$$\|u(t)\| \leq \int_0^T |G(t, s)| \|f_0(s, u(s), \dot{u}(s))\| ds \leq \int_0^T |G(t, s)| \beta(s) ds,$$

la relation (4.1.4) implique

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq T\int_0^T \beta(s) ds \\ &= T\int_0^T (m(s) + \alpha(p(s) + q(s))) ds \\ &\leq T(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \alpha\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \\ &= T(\|m\|_{\mathbf{L}^1_R} + \frac{T\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - T\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}}\|p + q\|_{\mathbf{L}^1_R}) \end{aligned}$$

et donc
$$\|u(t)\| \leq \frac{T\|m\|_{\mathbf{L}^1_R}}{1 - T\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R}} = \alpha. \tag{4.2.4}$$

Par les mêmes calculs, la relation

$$\dot{u}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) f_0(s, u(s), \dot{u}(s)) ds, \forall t \in [0,T]$$

nous donne

$$\begin{aligned} \|\dot{u}(t)\| &\leq \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \|f_0(s, u(s), \dot{u}(s))\| ds \\ &\leq \int_0^T \|f_0(s, u(s), \dot{u}(s))\| ds \leq \int_0^T \beta(s) ds, \end{aligned}$$

d'où
$$T\|\dot{u}(t)\| \leq T \int_0^T \beta(s) ds \leq \alpha. \tag{4.2.5}$$

Par les inégalités (4.2.4) et (4.2.5) nous aurons

$$\Phi_\alpha(t, u(t)) = u(t) \ \text{ et } \ \Phi_{\frac{\alpha}{T}}(t, \dot{u}(t)) = \dot{u}(t),$$

et donc
$$f_0(t, u(t), \dot{u}(t)) = f(t, u(t), \dot{u}(t)).$$

Par conséquent, u est une solution du problème (P_f).
b) Supposons maintenant que u est une solution du problème (P_f).
D'après le Lemme 4.2 nous avons

$$\|u(t)\| \leq \alpha, \quad \|\dot{u}(t)\| \leq \frac{\alpha}{T}, \ \forall t \in [0,T].$$

Alors
$$f(t, u(t), \dot{u}(t)) = f_0(t, u(t), \dot{u}(t)),$$

d'où u est une solution du problème (P_{f_0}).
Unicité de la solution.
Soient u_1, u_2 deux solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$ du problème (P_f). Pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\|\ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t)\| = \|f(t, u_1(t), \dot{u}_1(t)) - f(t, u_2(t), \dot{u}_2(t))\|,$$

comme f est Lipschitzienne nous aurons

$$\|\ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t)\| \leq k_1(t)\|u_1(t) - u_2(t)\| + k_2(t)\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|,$$

d'où

$$\|\ddot{u}_1(t)-\ddot{u}_2(t)\| \leq k_1(t)\|\int_0^T G(t,s)(\ddot{u}_1(s)-\ddot{u}_2(s))ds\|+k_2(t)\|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(\ddot{u}_1(s)-\ddot{u}_2(s))ds\|,$$

la relation (4.1.4) implique

$$\begin{aligned} \|\ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t)\| &\leq Tk_1(t)\int_0^T \|\ddot{u}_1(s) - \ddot{u}_2(s)\|ds + k_2(t)\int_0^T \|\ddot{u}_1(s) - \ddot{u}_2(s)\|ds \\ &= (Tk_1(t) + k_2(t))\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E}. \end{aligned}$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\ddot{u}_1(t) - \ddot{u}_2(t)\|dt &\leq \int_0^T (Tk_1(t) + k_2(t))\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E} dt \\ &= (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E}$$

et donc

$$(1 - (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}))\|\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq 0,$$

et par conséquent $\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2$, ceci nous donne

$$u_1(t) = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_1(s)ds = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_2(s)ds = u_2(t), \ \forall t \in [0,T].$$

On conclut alos que $u_1(t) = u_2(t)$, $\forall t \in [0,T]$, c'est à dire, $u_1 = u_2$. ■

4.3 Quelques propriétés de la solution du problème considéré

Dans cette section nous étudions les propriétés de la solution du problème

$$(P_{f,B,c})\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,u(t),\dot{u}(t)) + B(t)z(t) + c(t) \quad p.p \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

où $f : [0,T] \times E \times E \to E$, $c : [0,T] \to E$ sont deux applications et B un opérateur linéaire borné.
On commence par un rappel sur les opérateurs linéaires bornés.

Soient X, Y deux espaces vectoriels normés, et X', Y' leurs duals topologiques, on appelle un opérateur borné de X dans Y toute application linéaire continue de X dans Y, et on note par $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis de X à valeurs dans Y.
Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ alors,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|Tx\| : \ x \in X, \|x\| = 1\}$$

et

$$\|Tx\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|, \forall x \in X.$$

De plus, $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ est le plus petit nombre réel positive M tel que

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X.$$

On appelle adjoint de T l'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(Y', X')$ tel que

$$\forall x \in X, \ \forall y' \in Y', \ \ \langle x, T^*y'\rangle_{X,X'} = \langle Tx, y'\rangle_{Y,Y'}$$

et

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y',X')} = \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}. \tag{4.3.1}$$

Si $T \in \mathcal{L}(X,X)$ tel que $T^* = T$, on dit que T est un opérateur auto-adjoint.

Nous énonçons dans la suite le résulat principal de cette section.

Proposition 4.2 *Soient E, Z deux espaces de dimension finie et $f : [0,T] \times E \times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

(i) *pour tout* $(x,y) \in E \times E$ *fixé,* $f(.,x,y)$ *est Lebesgue-mesurable sur* $[0,T]$;

(ii) *il existe deux fonctions non négatives* k_1, k_2 *dans* $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ *satisfaisant* $(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$ *telles que*

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$.
Soit $B \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}([0,T])$ *un opérateur et* $c : [0,T] \to E$ *une application Lebesgue-mesurable, vérifiant la propriété suivante*

(iii) *il existe trois fonctions non négatives* m, p *et* q *dans* $\mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ *satisfaisant*

$$\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \frac{1}{T},$$

telles que

$$\|f(t,x,y)\| + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}\|z(t)\| + \|c(t)\| \leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times E \times E$ *et tout* $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$.
Alors, pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ *il existe une solution unique* u_z *dans* $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$ *du problème*

$$(P_{f,B,c})\begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t,u(t),\dot{u}(t)) + B(t)z(t) + c(t) \quad p.p \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) = 0. \end{cases}$$

De plus, pour (z_n) *une suite d'éléments de* $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$*, si* (z_n) *converge fortement vers* z *dans* $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ *(resp.* (z_n) *converge* $\sigma(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),\mathbf{L}^2_Z([0,T]))$ *vers* z*) alors* (u_{z_n}) *converge vers* u_z *dans* $\mathbf{C}^1_E([0,T])$ *muni de la norme* $\|.\|_{\mathbf{C}^1_E}$.

Démonstration.
Notons que l'existence de solutions dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$ du problème $(P_{f,B,c})$ est assurée par le Théorème 4.2, car pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ l'application $h_z : [0,T] \times E \times E \to E$ définie par

$$h_z(t,x,y) = f(t,x,y) + B(t)z(t) + c(t),$$

vérifie les propriétés suivantes
i) pour tout $(x,y) \in E \times E$, fixé $h_z(.,x,y)$ Lebesgue-mesurable sur $([0,T])$; car $f(.,x,y), c(.)$ et $B(.)z(.)$ sont Lebesgue-mesurables sur $[0,T]$.

ii) Il existe deux fonctions non négatives k_1, k_2 dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ satisfaisant $(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$ et

$$\begin{aligned}\|h_z(t,x_1,y_1) - h_z(t,x_2,y_2)\| &= \|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \\ &\leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$.
iii) Il existe trois fonctions non négatives m, p et q dans $\mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ satisfaisant

$$\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \frac{1}{T},$$

telles que

$$\begin{aligned}\|h_z(t,x,y)\| &= \|f(t,x,y) + B(t)z(t) + c(t)\| \\ &\leq \|f(t,x,y)\| + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}\|z(t)\| + \|c(t)\| \\ &\leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,\end{aligned}$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times E \times E$.
Considérons maintenant la suite $(z_n) \subset \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ qui converge fortement vers z. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_{z_n} l'unique solution dans $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$ du problème

$$(P_{h_{z_n}})\begin{cases} \ddot{u}_{z_n}(t) = h_{z_n}(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)), \ p.p\ t \in [0,T], \\ u_{z_n}(0) = u_{z_n}(T) = 0. \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\ddot{u}_{z_n}(t)\| &= \|h_{z_n}(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\| \\ &\leq m(t) + p(t)\|u_{z_n}(t)\| + Tq(t)\|\dot{u}_{z_n}(t)\|,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.2 nous avons

$$\begin{aligned}\|\ddot{u}_{z_n}(t)\| &\leq m(t) + p(t)\alpha + Tq(t)\frac{\alpha}{T} \\ &\leq m(t) + (p(t)+q(t))\alpha = \beta(t).\end{aligned}$$

La fonction $\beta \in \mathbf{L}^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, et par suite $(\ddot{u}_{z_n})$ est bornée dans $\mathbf{L}^2_E([0,T])$, qui est réflexif, donc on peut lui extraire une sous suite qui converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]), \mathbf{L}^2_E([0,T]))$

vers une fonction $w \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$. D'autre part, les suites (u_{z_n}) et $(\dot{u}_{z_n})$ sont équicontinues. En effet, nous avons

$$u_{z_n}(t) = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

et

$$\dot{u}_{z_n}(t) = \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

et donc pour $t, \tau \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \|u_{z_n}(t) - u_{z_n}(\tau)\| &\leq \int_0^T |G(t,s) - G(\tau,s)| \|\ddot{u}_{z_n}(s)\| ds \\ &\leq \int_0^T |G(t,s) - G(\tau,s)| \beta(s) ds, \end{aligned}$$

et

$$\|\dot{u}_{z_n}(t) - \dot{u}_{z_n}(\tau)\| \leq \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(\tau,s)| \beta(s) ds.$$

Comme $\beta \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T]) \subset \mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ et G est uniformément continue, alors les suites $(u_{z_n}(.))$ et $(\dot{u}_{z_n}(.))$ sont équicontinues. D'autre part, nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|u_{z_n}(t)\| &= \|\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds\| \\ &\leq \int_0^T |G(t,s)| \|\ddot{u}_{z_n}(s)\| ds \leq T\|\beta\|_{\mathbf{L}^1_E}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_{z_n}(t)\| &= \|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds\| \\ &\leq \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \|\ddot{u}_{z_n}(s)\| ds \leq \|\beta\|_{\mathbf{L}^1_E}. \end{aligned}$$

Donc les suites $(u_{z_n}(t))$ et $(\dot{u}_{z_n}(t))$ sont relativement compactes. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, (u_{z_n}) et $(\dot{u}_{z_n})$ sont relativement compactes dans $\mathbf{C}_E([0,T])$. Par extraction de sous suites notées aussi (u_{z_n}) et $(\dot{u}_{z_n})$ respectivement, on peut conclure que la suite (u_{z_n}) converge uniformément vers une fonction u ayant une dérivée $\dot{u}$ absolument continue.
La convergence faible de $(\ddot{u}_{z_n})$ vers $w \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, nous permet d'écrire pour chaque $x' \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ddot{u}_{z_n}, x' \rangle_{\mathbf{L}^2,\mathbf{L}^2} = \langle w, x' \rangle_{\mathbf{L}^2,\mathbf{L}^2},$$

i.e.,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \ddot{u}_{z_n}(s), x'(s)\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), x'(s)\rangle ds,$$

en prenant $x'(.) = G(t,.)y(.)$ pour $t \in [0,T]$, avec $y(.) \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$, nous aurons alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \ddot{u}_{z_n}(s), G(t,s)y(s)\rangle ds = \int_0^T \langle w(s), G(t,s)y(s)\rangle ds,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s), y(s)\rangle ds &= \lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \ddot{u}_{z_n}(s), G(t,s)y(s)\rangle ds \\ &= \int_0^T \langle w(s), G(t,s)y(s)\rangle ds \\ &= \int_0^T \langle G(t,s)w(s), y(s)\rangle ds,\end{aligned}$$

en particulier pour $y(.) = \mathcal{X}_{[0,T]}(.)e_j$ où $\mathcal{X}_{[0,T]}(.)$ est la fonction caractéristique de $[0,T]$ et (e_j) une base de E, on obtient alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s), \mathcal{X}_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds = \int_0^T \langle G(t,s)w(s), \mathcal{X}_{[0,T]}(s)e_j\rangle ds\,,$$

qui est équivalent à

$$\langle \lim_{n\to\infty}\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds, e_j\rangle = \langle \int_0^T G(t,s)w(s)ds, e_j\rangle,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds = \int_0^T G(t,s)w(s)ds = u(t).$$

On conclut que $\ddot{u} = w$ et que u satisfait $u(0) = u(T) = 0$.
Montrons maintenant que $u = u_z$.
i) Supposons que (z_n) converge vers z dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|u_{z_n}(t) - u_z(t)\| &= \|\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_n}(s)ds - \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_z(s)ds\| \\ &= \|\int_0^T G(t,s)(\ddot{u}_{z_n}(s) - \ddot{u}_z(s))ds\|,\end{aligned}$$

d'autre part, nous avons

$$\ddot{u}_{z_n}(t) = f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)) + B(t)z_n(t) + c(t)$$

et

$$\ddot{u}_z(t) = f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) + B(t)z(t) + c(t),$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u_{z_n}(t) - u_z(t)\| &= \|\int_0^T G(t,s)(\ddot{u}_{z_n}(s) - \ddot{u}_z(s))ds\| \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)|\|f(s, u_{z_n}(s), \dot{u}_{z_n}(s)) - f(s, u_z(s), \dot{u}_z(s))\|ds \\
&+ \int_0^T |G(t,s)|\|B(s)z_n(s) - B(s)z(s)\|ds,
\end{aligned}$$

utilisons la condition (ii) sur f et la relation (4.1.4), nous aurons

$$\begin{aligned}
\|u_{z_n}(t) - u_z(t)\| &\leq T\int_0^T (k_1(s)\|u_{z_n}(s) - u_z(s)\| + k_2(s)\|\dot{u}_{z_n}(s) - \dot{u}_z(s)\|)ds \\
&+ T\int_0^T \|B(s)(z_n(s) - z(s))\|ds,
\end{aligned}$$

comme $B \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}([0,T])$ et $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|B(s)(z_n(s) - z(s))\|ds &\leq (\int_0^T \|B(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T \|z_n(s) - z(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n - z\|_{\mathbf{L}^2_E},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u_{z_n}(t) - u_z(t)\| &\leq T\int_0^T (k_1(s)\|u_{z_n}(s) - u_z(s)\| + k_2(s)\|\dot{u}_{z_n}(s) - \dot{u}_z(s)\|)ds \\
&+ T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n - z\|_{\mathbf{L}^2_E} \\
&\leq T\int_0^T (k_1(s) + k_2(s)\frac{1}{T})\|u_{z_n} - u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} ds + T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n - z\|_{\mathbf{L}^2_E} \\
&= (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|u_{z_n} - u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} + T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n - z\|_{\mathbf{L}^2_E}.
\end{aligned}$$

Ansi,

$$\|u_{z_n}(t) - u_z(t)\| \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|u_{z_n} - u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} + T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n - z\|_{\mathbf{L}^2_E}.$$

De la même façon, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_{z_n}(t)-\dot{u}_z(t)\| &= \|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(\ddot{u}_{z_n}(s)-\ddot{u}_z(s))ds\| \\
&\leq \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|f(s,u_{z_n}(s),\dot{u}_{z_n}(s))-f(s,u_z(s),\dot{u}_z(s))\|ds \\
&+ \int_0^T |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|\|B(s)z_n(s)-B(s)z(s)\|ds \\
&\leq \int_0^T (k_1(s)\|u_{z_n}(s)-u_z(s)\|+k_2(s)\|\dot{u}_{z_n}(s)-\dot{u}_z(s)\|)ds \\
&+ \int_0^T \|B(s)(z_n(s)-z(s))\|_E ds \\
&\leq \int_0^T (k_1(s)+\frac{1}{T}k_2(s))\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E}ds+\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E} \\
&= \frac{1}{T}[(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E}+T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E}].
\end{aligned}$$

Donc

$$T\|\dot{u}_{z_n}(t)-\dot{u}_z(t)\| \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E}+T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E}.$$

D'où,

$$\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E})\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E}+T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E},$$

ceci nous donne

$$(1-(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E}))\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq T\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E},$$

c'est à dire,

$$\|u_{z_n}-u_z\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq \frac{T}{(1-(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_E}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_E}))}\|B\|_{\mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}}\|z_n-z\|_{\mathbf{L}^2_E}.$$

Passons à la limite nous obtenons la convergence de (u_{z_n}) vers u_z dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$.
ii) Supposons maintenant que (z_n) converge $\sigma(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),\mathbf{L}^2_Z([0,T]))$ vers z. Montrons que $(\ddot{u}_{z_n}(.)-f(.,u_{z_n}(.),\dot{u}_{z_n}(.)))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]),\mathbf{L}^2_E([0,T]))$

vers $(\ddot{u}_z(.) - f(., u_z(.), \dot{u}_z(.)))$.
Nous avons $\beta(.) \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T]))$, et pour tout $n \in I\!N$,

$$\|f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\| \leq \beta(t),$$

donc

$$f(., u_{z_n}(.), \dot{u}_{z_n}(.)) \in \mathbf{L}^2_E([0,T]),$$

et comme pour tout $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)) = f(t, u(t), \dot{u}(t))$$

on conclut $\|f(t, u(t), \dot{u}(t))\| \leq \beta(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et que $(f(., u_{z_n}(.), \dot{u}_{z_n}(.)))_n$ converge vers $f(., u(.), \dot{u}(.))$ dans $\mathbf{L}^2_E([0,T]))$ et par conséquent cette convergence est aussi vraie $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]), \mathbf{L}^2_E([0,T]))$.
Comme nous avons la convergence $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]), \mathbf{L}^2_E([0,T]))$ de $(\ddot{u}_{z_n}(.))$ vers $\ddot{u}(.)$, donc la suite $(\ddot{u}_{z_n}(.) - f(., u_{z_n}(.), \dot{u}_{z_n}(.)))$ converge $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]), \mathbf{L}^2_E([0,T]))$ vers $(\ddot{u}(.) - f(., u(.), \dot{u}(.)))$. D'autre part, nous avons

$$\ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)) = B(t)z_n(t) + c(t),$$

et u_z est la solution unique de l'équation

$$\ddot{u}_z(t) - f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) = B(t)z(t) + c(t). \tag{4.3.2}$$

Soit $\sigma \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$ et $B^* \in \mathcal{L}(E,Z)([0,T])$ l'opérateur adjoint de B, c'est à dire,

$$\forall x \in E, \forall y \in Z : \quad \langle x, B(t)y\rangle_E = \langle B^*(t)x, y\rangle_Z.$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \sigma(t), (\ddot{u}_{z_n}(t) - \ddot{u}_z(t)) + (f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)))\rangle_E dt \\
&\qquad = \int_0^T \langle \sigma(t), B(t)[z_n(t) - z(t)]\rangle_E dt \\
&\qquad = \int_0^T \langle B^*(t)\sigma(t), z_n(t) - z(t)\rangle_Z dt.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi

$$\int_0^T \|B^*(t)\sigma(t)\|^2_Z dt \leq \int_0^T \|B^*(t)\|^2_{\mathcal{L}(E,Z)} \|\sigma(t)\|^2_Z dt,$$

la relation (4.3.1) nous donne

$$\int_0^T \|B^*(t)\sigma(t)\|_Z^2 dt \leq \int_0^T \|B(t)\|^2_{\mathcal{L}(Z,E)} \|\sigma(t)\|_Z^2 dt,$$

d'après l'hypohèse (iii) et le Lemme 4.2 nous avons

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)} \|\sigma(t)\|_Z \leq \beta(t),$$

donc,

$$\int_0^T \|B^*(t)\sigma(t)\|_Z^2 dt \leq \int_0^T (\beta(t))^2 dt < \infty,$$

c'est à dire, $B^*(.)\sigma(.) \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ d'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle B^*(t)\sigma(t), z_n(t) - z(t)\rangle_Z dt = 0,$$

on conclut alors que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \sigma(t), (\ddot{u}_{z_n}(t) - \ddot{u}_z(t)) + (f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t)))\rangle_E dt = 0.$$

Posons

$$\rho_n(t) = \langle \sigma(t), \ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\rangle$$

nous avons

$$\begin{aligned} |\rho_n(t)| &= |\langle \sigma(t), \ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\rangle| \\ &\leq \|\sigma(t)\| \|\ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\|, \end{aligned}$$

par l'hypothèse (iii) et le Lemme 4.2 nous avons

$$\|\ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\| \leq 2\beta(t)$$

et

$$\|\sigma(t)\| \leq \frac{\beta(t)}{\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}},$$

d'où

$$|\rho_n(t)| \leq 2\frac{(\beta(t))^2}{\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}},$$

avec $\dfrac{(\beta(t))^2}{\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}} \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T])$, utilisons le théorème de la convergence de Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \sigma(t), \ddot{u}_{z_n}(t) - f(t, u_{z_n}(t), \dot{u}_{z_n}(t))\rangle_E dt = \int_0^T \langle \sigma(t), \ddot{u}(t) - f(t, u(t), \dot{u}(t))\rangle_E dt,$$

c'est à dire,

$$\int_0^T \langle \sigma(t), (\ddot{u}(t) - \ddot{u}_z(t)) + (f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) - f(t, u(t), \dot{u}(t)))\rangle_E dt = 0,$$

d'où

$$\ddot{u}(t) - f(t, u(t), \dot{u}(t)) = \ddot{u}_z(t) - f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) = B(t)z(t) + c(t).$$

De l'unicité de la solution du problème (4.3.2) on conclut que $u = u_z$. Donc (u_{z_n}) converge vers u_z dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$. $\blacksquare$

4.4 Propriétés de la fonction quadratique

Dans la partie suivante on démontre des propriétés de la fonction quadratique $\tilde{I}_\nu$, il s'agit de la convexité stricte et la différentiabilité au sens de Gâteaux.

Soient E et Z deux espaces de dimension finie, et considérons l'espace des trajectoires désirées $U = \mathbf{L}^2_E([0,T]) \times \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_U = \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathbf{L}^2_E} + \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbf{L}^2_Z},$$

où $\nu_i = (y_i, w_i)$ $(i = 1,2)$, et $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ l'espace des contrôles.

Considérons le problème de minimisation suivant :
pour $\nu^* = (y^*, w^*) \in U$, on veut minimiser la fonction quadratique

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\nu^*}(z) &= \int_0^T [\langle u_z(t) - y^*(t), P(t)(u_z(t) - y^*(t)) \rangle_E \\ &+ \langle z(t) - w^*(t), Q(t)(z(t) - w^*(t)) \rangle_Z] dt, \end{aligned}$$

sur l'ensemble admissible non vide

$$\mathcal{A} = \{ z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]) : \ u_z \text{ solution du problème } (P_{f,g}) \text{ et } (u_z, z) \in K \},$$

où K est un sous ensemble non vide fermé convexe de $\mathbf{L}^2_E([0,T]) \times \mathbf{L}^2_Z([0,T])$, et le problème $(P_{f,g})$ est donné par

$$(P_{f,g}) \begin{cases} \ddot{u}(t) = f(t, u(t), \dot{u}(t)) + g(t, z(t)) \ \ p.p \ \ t \in [0,T] \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

avec $P \in \mathbf{L}^\infty_{\mathcal{L}(E,E)}([0,T])$ et $Q \in \mathbf{L}^\infty_{\mathcal{L}(Z,Z)}([0,T])$ sont des opérateurs auto adjoints.
Et le problème d'optimisation global $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$, tel que

$$I_{\nu^*} : \mathbf{L}^2_Z([0,T]) \to]-\infty, +\infty]$$

défini par

$$I_{\nu^*}(z) = \begin{cases} \tilde{I}_{\nu^*}(z) & si \ \ z \in \mathcal{A} \\ +\infty & sinon, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

ici on minimise $\tilde{I}_{\nu^*}(z)$ pour $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$. Notons par

$$V(\nu) = \inf\{ I_\nu(q) : \ \ q \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]) \}$$

la valeur optimale, où ν appartient à l'ensemble

$$D = \{\nu \in U : \ \ \|\nu - \nu^*\| < \delta\}, \ \delta > 0.$$

Et

$$arg\min(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*}) = \begin{cases} A & \text{si} \quad \inf\limits_{x \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])} I_{\nu^*}(x) \neq +\infty \\ \emptyset & \text{si} \quad \inf\limits_{x \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])} I_{\nu^*}(x) = +\infty, \end{cases}$$

où

$$A = \{z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]) : \ I(z) = \inf_{x \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])} I(x)\}.$$

Le problème d'optimisation global $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ est dit bien posé si les conditions suivantes sont vérifieés.

1) Il existe un unique minimum

$$q^* = arg\min(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*}). \tag{4.4.2}$$

2) La fonction

$$V(\nu) \text{ est finie pour tout } \nu \in D. \tag{4.4.3}$$

3) Pour toutes suites (ν_n) dans U et (q_n) dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ telles que

$$\nu_n \to \nu^* \text{ et } I_{\nu_n}(q_n) - V(\nu_n) \to 0$$

nous avons

$$q_n \to q^* \text{ et } V(\nu_n) \to V(\nu^*). \tag{4.4.4}$$

La suite (q_n) avec la propriété (4.4.4) est dite asymptotiquement minimisée par rapport à (ν_n).

Définition 4.1 *Soit J une fonction de E dans $I\!R \cup \{+\infty\}$. On dit que J est Gâteaux-différentiable en $u \in dom(J)$ si la dérivée directionnelle*

$$J'(u;v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{J(u+v) - J(u)}{t}$$

existe dans toute direction v de E et si l'application $v \mapsto J'(u;v)$ est linéaire continue. On note $J'(u;v) = \langle DJ(u), v \rangle$.

Nous énonçons dans la suite le resulat principal de cette section.

Proposition 4.3 *Soient E un espace de dimension finie, $f : [0,T]\times E\times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

(i) *pour tout $(x,y) \in E \times E$, fixé $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$,*

(ii) *pour tout $t \in [0,T]$, fixé $f(t,.,.)$ est linéaire sur $E \times E$,*

(iii) *il existe deux fonctions non négatives k_1, k_2 Lebesgue mesurables sur $[0,T]$ satisfaisants*

$$(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$$

telles que

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$.
Soit $B \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}([0,T])$ un opérateur et $c : [0,T] \to E$ une application Lebesgue-mesurable telle que

(iv)

$$f(t,\zeta(t),\dot{\zeta}(t)) = 0, \forall t \in [0,T]$$

où

$$\zeta(t) = \int_0^T G(t,s)c(s)ds \ \ et \ \ \dot{\zeta}(t) = \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)c(s)ds,$$

(v) *il existe trois fonctions non négatives m, p et q dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ satisfaisants*

$$\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \frac{1}{T},$$

telles que

$$\|f(t,x,y)\| + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}\|z(t)\| + \|c(t)\| \leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times E \times E$.
Supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in E$, $\xi' \in Z$ et presque pour tout $t \in [0,T]$ nous avons

$$\langle \xi, P(t)\xi \rangle \geq \alpha\|\xi\|^2, \ \langle \xi', Q(t)\xi' \rangle \geq \alpha\|\xi'\|^2. \tag{4.4.5}$$

Alors $\tilde{I}_\nu$ vérifie les proprietés suivantes

1) $\tilde{I}_\nu(.)$ est strictement convexe pour tout $\nu \in U$.

2) Si $\nu_n \to \bar{\nu}$ dans U et $z_n \to \bar{z}$ dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ alors

$$\tilde{I}_{\nu_n}(z_n) \to \tilde{I}_{\bar{\nu}}(\bar{z}).$$

3) Soit $\nu = (y,w) \in U$, pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ la différentielle $D\tilde{I}_\nu(z)$ existe et vérifie

$$\begin{aligned}\langle D\tilde{I}_\nu(z), p\rangle &= 2\int_0^T \langle u_p(t) - \zeta(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E dt\\ &+ \qquad 2\int_0^T \langle p(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z dt.\end{aligned}$$

Démonstration.
Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$, montrons que pour tout $t \in [0,T]$

$$\ddot{u}_{z_1}(t) + \ddot{u}_{z_2}(t) + c(t) = \ddot{u}_{z_1+z_2}(t).$$

Nous avons

$$\ddot{u}_{z_1}(t) = f(t, u_{z_1}(t), \dot{u}_{z_1}(t)) + B(t)z_1(t) + c(t), \quad u_{z_1}(t) = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_1}(s)ds$$

et

$$\ddot{u}_{z_2}(t) = f(t, u_{z_2}(t), \dot{u}_{z_2}(t)) + B(t)z_2(t) + c(t), \quad u_{z_2}(t) = \int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_2}(s)ds$$

donc

$$\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t) = f(t, u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t), \dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t))+B(t)(z_1(t)+z_2(t))+2c(t),$$

c'est à dire,

$$\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-c(t) = f(t, u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t), \dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t))+B(t)(z_1(t)+z_2(t))+c(t),$$

nous avons aussi

$$\ddot{u}_{z_1+z_2}(t) = f(t, u_{z_1+z_2}(t), \dot{u}_{z_1+z_2}(t)) + B(t)(z_1(t) + z_2(t)) + c(t),$$

alors

$$\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t) = f(t, u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t), \dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t))-f(t, u_{z_1+z_2}(t), \dot{u}_{z_1+z_2}(t)),$$

l'hypothèse (iv) nous donne

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t) &= f(t,u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t),\dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t))\\ &- f(t,u_{z_1+z_2}(t),\dot{u}_{z_1+z_2}(t))-f(t,\zeta(t),\dot{\zeta}(t))\end{aligned}$$

de la linéairité de $f(t,.,.)$ nous aurons

$$\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t)=f(t,u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t)-u_{z_1+z_2}(t)-\zeta(t),\dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t)-\dot{u}_{z_1+z_2}(t)-\dot{\zeta}(t)),$$

par l'hypothèse (iii) nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t)\| &\leq k_1(t)\|u_{z_1}(t)+u_{z_2}(t)-u_{z_1+z_2}(t)-\zeta(t)\|\\ &+ k_2(t)\|\dot{u}_{z_1}(t)+\dot{u}_{z_2}(t)-\dot{u}_{z_1+z_2}(t)-\dot{\zeta}(t)\|,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t)\| &\leq k_1(t)\|\int_0^T G(t,s)(\ddot{u}_{z_1}(s)+\ddot{u}_{z_2}(s)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(s)-c(s))ds\|\\ &+ k_2(t)\|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(\ddot{u}_{z_1}(s)+\ddot{u}_{z_2}(s)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(s)-c(s))ds\|,\end{aligned}$$

d'après la relation (4.1.4) nous aurons

$$\|\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t)\|\leq (Tk_1(t)+k_2(t))\int_0^T\|\ddot{u}_{z_1}(s)+\ddot{u}_{z_2}(s)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(s)-c(s)\|ds,$$

c'est à dire,

$$\|\ddot{u}_{z_1}(t)+\ddot{u}_{z_2}(t)-\ddot{u}_{z_1+z_2}(t)-c(t)\|\leq (Tk_1(t)+k_2(t))\|\ddot{u}_{z_1}+\ddot{u}_{z_2}-\ddot{u}_{z_1+z_2}-c\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

en intégrant la dernière inégalité par rapport à t, nous obtenons

$$\|\ddot{u}_{z_1}+\ddot{u}_{z_2}-\ddot{u}_{z_1+z_2}-c\|_{\mathbf{L}^1_E}\leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|\ddot{u}_{z_1}+\ddot{u}_{z_2}-\ddot{u}_{z_1+z_2}-c\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

ainsi,

$$(1-(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}))\|\ddot{u}_{z_1}+\ddot{u}_{z_2}-\ddot{u}_{z_1+z_2}-c\|_{\mathbf{L}^1_E}\leq 0$$

avec $(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})<1$, par conséquent

$$\|\ddot{u}_{z_1}+\ddot{u}_{z_2}-\ddot{u}_{z_1+z_2}-c\|_{\mathbf{L}^1_E}=0,$$

d'où pour tout $t \in [0, T]$

$$\ddot{u}_{z_1}(t) + \ddot{u}_{z_2}(t) = \ddot{u}_{z_1+z_2}(t) + c(t). \tag{4.4.6}$$

Soit $z \in \mathbf{L}^2_Z([0, T])$ et $h \in I\!R$, montrons que pour tout $t \in [0, T]$

$$\ddot{u}_{hz}(t) = h\ddot{u}_z(t) + (1 - h)c(t).$$

Nous avons

$$\ddot{u}_z(t) = f(t, u_z(t), \dot{u}_z(t)) + B(t)z(t) + c(t),\ u_z(t) = \int_0^T G(t, s)\ddot{u}_z(s)ds$$

donc

$$h\ddot{u}_z(t) = f(t, hu_z(t), h\dot{u}_z(t)) + hB(t)z(t) + hc(t).$$

D'autre part

$$\ddot{u}_{hz}(t) = f(t, u_{hz}(t), \dot{u}_{hz}(t)) + hB(t)z(t) + c(t),$$

c'est à dire,

$$\ddot{u}_{hz}(t) + (h - 1)c(t) = f(t, u_{hz}(t), \dot{u}_{hz}(t)) + hB(t)z(t) + hc(t),$$

de la linéairité de $f(t, ., .)$ nous aurons

$$h\ddot{u}_z(t) - \ddot{u}_{hz}(t) - (h - 1)c(t) = f(t, hu_z(t) - u_{hz}(t), h\dot{u}_z(t) - \dot{u}_{hz}(t)),$$

par l'hypothèse (iv) nous obtenons

$$\begin{aligned} h\ddot{u}_z(t) - \ddot{u}_{hz}(t) - (h - 1)c(t) &= f(t, hu_z(t) - u_{hz}(t), h\dot{u}_z(t) - \dot{u}_{hz}(t)) - (h - 1)f(t, \zeta(t), \dot{\zeta}(t)) \\ &= f(t, hu_z(t) - u_{hz}(t) - (h - 1)\zeta(t), \dot{u}_{hz}(t) - h\dot{u}_z(t) - (h - 1)\dot{\zeta}(t)), \end{aligned}$$

et par l'hypothèse (iii) nous aurons

$$\begin{aligned} \|h\ddot{u}_z(t) - \ddot{u}_{hz}(t) - (h - 1)c(t)\| &\leq k_1(t)\|hu_z(t) - u_{hz}(t) - (h - 1)\zeta(t)\| \\ &+ k_2(t)\|h\dot{u}_z(t) - \dot{u}_{hz}(t) - (h - 1)\dot{\zeta}(t)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|h\ddot{u}_z(t) - \ddot{u}_{hz}(t) - (h - 1)c(t)\| &\leq k_1(t)\|\int_0^T G(t, s)(h\ddot{u}_z(s) - \ddot{u}_{hz}(s) - (h - 1)c(s))ds\| \\ &+ k_2(t)\|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)(h\ddot{u}_z(s) - \ddot{u}_{hz}(s) - (h - 1)c(s))ds\|, \end{aligned}$$

d'après la relation (4.1.4) nous aurons

$$\begin{aligned}\|h\ddot{u}_z(t) - \ddot{u}_{hz}(t) - (h-1)c(t)\| &\leq (Tk_1(t) + k_2(t))\int_0^T \|h\ddot{u}_z(s) - \ddot{u}_{hz}(s) - (h-1)c(s)\|ds \\ &= (Tk_1(t) + k_2(t))\|h\ddot{u}_z - \ddot{u}_{hz} - (h-1)c\|_{\mathbf{L}^1_E},\end{aligned}$$

en intégrant par rapport à t, nous obtenons

$$\|h\ddot{u}_z - \ddot{u}_{hz} - (h-1)c\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|h\ddot{u}_z - \ddot{u}_{hz} - (h-1)c\|_{\mathbf{L}^1_E},$$

c'est à dire,

$$(1 - (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}))\|h\ddot{u}_z - \ddot{u}_{hz} - (h-1)c\|_{\mathbf{L}^1_E} \leq 0$$

avec $(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$, par conséquent

$$\|h\ddot{u}_z - \ddot{u}_{hz} - (h-1)c\|_{\mathbf{L}^1_E} = 0,$$

d'où pour tout $t \in [0,T]$

$$h\ddot{u}_z(t) = \ddot{u}_{hz}(t) + (h-1)c(t). \tag{4.4.7}$$

Soient maintenant $z_1, z_2 \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ et $h_1, h_2 \in I\!R$,

$$h_1 u_{z_1}(t) + h_2 u_{z_2}(t) = h_1\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_1}(s)ds + h_2\int_0^T G(t,s)\ddot{u}_{z_2}(s)ds,$$

donc

$$h_1 u_{z_1}(t) + h_2 u_{z_2}(t) = \int_0^T G(t,s)[h_1\ddot{u}_{z_1}(s) + h_2\ddot{u}_{z_2}(s)]ds,$$

par les relations (4.4.6) et (4.4.7) nous obtenons

$$\begin{aligned}h_1\ddot{u}_{z_1}(t) + h_2\ddot{u}_{z_2}(t) &= \ddot{u}_{h_1z_1}(t) + (h_1-1)c(t) + \ddot{u}_{h_2z_2}(t) + (h_2-1)c(t) \\ &= \ddot{u}_{(h_1z_1+h_2z_2)}(t) + c(t) + (h_1+h_2-2)c(t) \\ &= \ddot{u}_{(h_1z_1+h_2z_2)}(t) + (h_1+h_2-1)c(t),\end{aligned}$$

on conclut alors que

$$h_1 u_{z_1}(t) + h_2 u_{z_2}(t) + (1-h_1-h_2)\zeta(t) = u_{(h_1z_1+h_2z_2)}(t). \tag{4.4.8}$$

1) Montrons que $\tilde{I}_\nu(.)$ est strictement convexe pour tout $\nu \in U$, i.e.,

$\forall z_1, z_2 \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]),\ z_1 \neq z_2,\ \forall \lambda \in]0,1[:\ \tilde{I}_\nu(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2) < \lambda \tilde{I}_\nu(z_1)+(1-\lambda)\tilde{I}_\nu(z_2)$.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]),\ z_1 \neq z_2$ et $\lambda \in]0,1[$. Par la relation (4.4.8) nous obtenons pour tout $t \in [0,T]$,

$$\lambda u_{z_1}(t) + (1-\lambda)u_{z_2}(t) = u_{(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)}(t). \tag{4.4.9}$$

Soit $\nu = (y,w) \in U$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\nu(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \quad &= \int_0^T [\langle u_{(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)}(t) - y(t), P(t)(u_{(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)}(t) - y(t))\rangle_E \\ &+ \quad \langle (\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)(t) - w(t), Q(t)((\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)(t) - w(t))\rangle_Z]dt, \end{aligned}$$

on pose pour tout $t \in [0,T]$

$$J_P(t) = \langle u_{(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)}(t) - y(t), P(t)(u_{(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)}(t) - y(t))\rangle_E$$

et

$$J_Q(t) = \langle (\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)(t) - w(t), Q(t)((\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)(t) - w(t))\rangle_Z.$$

D'après la relation (4.4.9) nous aurons

$$J_P(t) = \langle \lambda u_{z_1}(t) + (1-\lambda)u_{z_2}(t) - y(t), P(t)(\lambda u_{z_1}(t) + (1-\lambda)u_{z_2}(t) - y(t))\rangle_E,$$

donc

$$J_P(t) = \langle \lambda(u_{z_1}(t) - y(t)) + (1-\lambda)(u_{z_2}(t) - y(t)), P(t)(\lambda(u_{z_1}(t) - y(t)) + (1-\lambda)(u_{z_2}(t) - y(t))\rangle$$

ansi,

$$\begin{aligned} J_P(t) \quad = \quad & \lambda^2\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle + \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_2}(t) - y(t))\rangle \\ + \quad & (1-\lambda)^2\langle u_{z_2}(t) - y(t), P(t)(u_{z_2}(t) - y(t))\rangle + \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_2}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle. \end{aligned}$$

Pour tout $\varrho \in I\!R$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \varrho^2\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle \quad &= \quad \varrho^2\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle \\ &+ \quad \varrho\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle \\ &- \quad \varrho\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle \\ &= \quad \varrho\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle \\ &- \quad \varrho(1-\varrho)\langle u_{z_1}(t) - y(t), P(t)(u_{z_1}(t) - y(t))\rangle. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\lambda^2\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle &= \lambda\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1-\lambda)^2\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle &= (1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle\\ &- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}J_P(t) &= \lambda\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &+ (1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle\\ &- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle\\ &+ \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle\\ &+ (1-\lambda)\lambda\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &= \lambda\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &+ (1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle\\ &- \lambda(1-\lambda)[\langle u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &+ \langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-u_{z_2}(t))\rangle,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}J_P(t) &= \lambda\langle u_{z_1}(t)-y(t),P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle\\ &+ (1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t),P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle \qquad (4.4.10)\\ &- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t),P(t)(u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t))\rangle.\end{aligned}$$

De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned}
J_Q(t) &= \lambda\langle z_1(t)-w(t), Q(t)(z_1(t)-w(t))\rangle \\
&+ (1-\lambda)\langle z_2(t)-w(t), Q(t)(z_2(t)-w(t))\rangle \qquad (4.4.11)\\
&- \lambda(1-\lambda)\langle z_1(t)-z_2(t), Q(t)(z_1(t)-z_2(t))\rangle.
\end{aligned}$$

Par les relations (4.4.10) et (4.4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2) &= \int_0^T [\lambda\langle u_{z_1}(t)-y(t), P(t)(u_{z_1}(t)-y(t))\rangle \\
&+ (1-\lambda)\langle u_{z_2}(t)-y(t), P(t)(u_{z_2}(t)-y(t))\rangle \\
&- \lambda(1-\lambda)\langle u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t), P(t)(u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t))\rangle \\
&+ \lambda\langle z_1(t)-w(t), Q(t)(z_1(t)-w(t))\rangle \\
&+ (1-\lambda)\langle z_2(t)-w(t), Q(t)(z_2(t)-w(t))\rangle \\
&- \lambda(1-\lambda)\langle z_1(t)-z_2(t), Q(t)(z_1(t)-z_2(t))\rangle]dt,
\end{aligned}$$

par la définition de $\tilde{I}_\nu(.)$ nous aurons

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2) &= \lambda\tilde{I}_\nu(z_1)+(1-\lambda)\tilde{I}_\nu(z_2) \\
&- \lambda(1-\lambda)\int_0^T [\langle u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t), P(t)(u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t))\rangle \\
&+ \langle z_1(t)-z_2(t), Q(t)(z_1(t)-z_2(t))\rangle]dt,
\end{aligned}$$

en utilisant la relation (4.4.5) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2) &\leq \lambda\tilde{I}_\nu(z_1)+(1-\lambda)\tilde{I}_\nu(z_2) \\
&- \lambda(1-\lambda)\alpha\int_0^T (\|u_{z_1}(t)-u_{z_2}(t)\|_E^2+\|z_1(t)-z_2(t)\|_Z^2)dt \\
&= \lambda\tilde{I}_\nu(z_1)+(1-\lambda)\tilde{I}_\nu(z_2)-\lambda(1-\lambda)\alpha(\|u_{z_1}-u_{z_2}\|^2_{\mathbf{L}^2_E}+\|z_1-z_2\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}),
\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{I}_\nu(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2) < \lambda\tilde{I}_\nu(z_1)+(1-\lambda)\tilde{I}_\nu(z_2).$$

Par conséquent $\tilde{I}_\nu(.)$ est strictement convexe pour tous $z_1 \neq z_2$ et $\nu \in U$.

2) Soit $\nu_n = (y_n, w_n)$, telle que la suite (ν_n) converge vers $\bar{\nu} = (\bar{y}, \bar{w})$ dans U, et (z_n) converge vers $\bar{z}$ dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$. D'après la Proposition 4.3, nous avons la convergence de la suite (u_{z_n}) vers $u_{\bar{z}}$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$. Alors

$$\begin{array}{rcl} |\tilde{I}_{\nu_n}(z_n) - \tilde{I}_{\bar{\nu}}(\bar{z})| & = & |\displaystyle\int_0^T [\langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle_E \\ & + & \langle z_n(t) - w_n(t), Q(t)(z_n(t) - w_n(t))\rangle_Z] dt \\ & - & \displaystyle\int_0^T [\langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle_E \\ & + & \langle \bar{z}(t) - \bar{w}(t), Q(t)(\bar{z}(t) - \bar{w}(t))\rangle_Z] dt|. \end{array}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{array}{rl} & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle - \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ = & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle - \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ + & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t)\rangle - \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ + & \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle - \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle. \end{array}$$

D'après les hypothèses sur P nous aurons

$$\begin{array}{rl} & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle - \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ = & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t) - u_{\bar{z}}(t) + \bar{y}(t))\rangle \\ + & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ + & \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t) - u_{\bar{z}}(t) + \bar{y}(t))\rangle \\ - & \langle u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t))\rangle \\ = & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t) + u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t) - u_{\bar{z}}(t) + \bar{y}(t))\rangle \\ + & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle - \langle u_{z_n}(t) - y_n(t), P(t)(u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t))\rangle \\ = & \langle u_{z_n}(t) - y_n(t) + u_{\bar{z}}(t) - \bar{y}(t), P(t)(u_{z_n}(t) - y_n(t) - u_{\bar{z}}(t) + \bar{y}(t))\rangle. \end{array}$$

De la même façon et d'après les hypothèses sur Q nous aurons

$$\begin{aligned}&\langle z_n(t)-w_n(t),Q(t)(z_n(t)-w_n(t))\rangle-\langle\bar z(t)-\bar w(t),Q(t)(\bar z(t)-\bar w(t))\rangle\\ =&\quad\langle z_n(t)-w_n(t)+\bar z(t)-\bar w(t),Q(t)(z_n(t)-w_n(t)-\bar z(t)+\bar w(t))\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned}|\tilde I_{\nu_n}(z_n)-\tilde I_{\bar\nu}(\bar z)| &= |\int_0^T[\langle u_{z_n}(t)-y_n(t)-u_{\bar z}(t)+\bar y(t),P(t)(u_{z_n}(t)-y_n(t)+u_{\bar z}(t)-\bar y(t))\rangle_E\\ &+\quad\langle z_n(t)-w_n(t)-\bar z(t)+\bar w(t),Q(t)(z_n(t)-w_n(t)+\bar z(t)-\bar w(t))\rangle_Z]dt|\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|\tilde I_{\nu_n}(z_n)-\tilde I_{\bar\nu}(\bar z)| &\le \int_0^T|\langle u_{z_n}(t)-y_n(t)-u_{\bar z}(t)+\bar y(t),P(t)(u_{z_n}(t)-y_n(t)+u_{\bar z}(t)-\bar y(t))\rangle_E\\ &+\quad\langle z_n(t)-w_n(t)-\bar z(t)+\bar w(t),Q(t)(z_n(t)-w_n(t)+\bar z(t)-\bar w(t))\rangle_Z|dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\tilde I_{\nu_n}(z_n)-\tilde I_{\bar\nu}(\bar z)| &\le \int_0^T(\|u_{z_n}(t)-y_n(t)-u_{\bar z}(t)+\bar y(t)\|_E\|P(t)(u_{z_n}(t)-y_n(t)+u_{\bar z}(t)-\bar y(t))\|_E\\ &+\quad\|z_n(t)-w_n(t)-\bar z(t)+\bar w(t)\|_Z\|Q(t)(z_n(t)-w_n(t)+\bar z(t)-\bar w(t))\|_Z)dt\\ &\le \|P\|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathcal L(E,E)}}\int_0^T\|u_{z_n}(t)-y_n(t)-u_{\bar z}(t)+\bar y(t)\|\|u_{z_n}(t)-y_n(t)+u_{\bar z}(t)-\bar y(t)\|dt\\ &+\ \|Q\|_{\mathbf{L}^\infty_{\mathcal L(E,E)}}\int_0^T\|z_n(t)-w_n(t)-\bar z(t)+\bar w(t)\|\|(z_n(t)-w_n(t)+\bar z(t)-\bar w(t))\|dt.\end{aligned}$$

Comme $P\in\mathbf{L}^\infty_{\mathcal L(E,E)}([0,T])$ et $Q\in\mathbf{L}^\infty_{\mathcal L(Z,Z)}([0,T])$, en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\begin{aligned}|\tilde I_{\nu_n}(z_n)-\tilde I_{u_{\bar z}}(\bar z)| &\le const.(\|u_{z_n}-y_n-u_{\bar z}+\bar y\|_{\mathbf{L}^2_E}\|u_{z_n}-y_n+u_{\bar z}-\bar y\|_{\mathbf{L}^2_E}\\ &+\quad\|z_n-w_n-\bar z+\bar w\|_{\mathbf{L}^2_Z}\|z_n-w_n+\bar z-\bar w\|_{\mathbf{L}^2_Z}),\end{aligned}$$

en passant à la limite, on conclut que $\tilde I_{\nu_n}(z_n)\to\tilde I_{\bar\nu}(\bar z)$.

3) Soient $\nu=(y,w)\in U$, $h\in I\!R$ et $z,p\in\mathbf{L}^2_Z([0,T])$. Soit u_{z+hp} l'unique $\mathbf{W}^{2,1}_E([0,T])$-solution du problème

$$(P_{f,B,c})\begin{cases}\ddot u_{z+hp}(t)=f(t,u_{z+hp}(t),\dot u_{z+hp}(t))+B(t)(z+hp)(t)+c(t)\quad p.p\quad t\in[0,T]\\ u_{z+hp}(0)=u_{z+hp}(T)=0.\end{cases}$$

Par la relation (4.4.8)

$$u_{z+hp}(t) = u_z(t) + hu_p(t) - h\zeta(t).$$

Soit $\tilde{I}'_\nu(z;p)$ la dérivée directionnelle de $\tilde{I}_\nu$ au point z dans la direction p, i.e.,

$$\tilde{I}'_\nu(z;p) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{I}_\nu(z+hp) - \tilde{I}_\nu(z)}{h}$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(z+hp) &= \int_0^T [\langle u_{(z+hp)}(t) - y(t), P(t)(u_{(z+hp)}(t) - y(t))\rangle_E \\
&+ \langle (z+hp)(t) - w(t), Q(t)((z+hp)(t) - w(t))\rangle_Z] dt \\
&= \int_0^T [\langle u_z(t) + hu_p(t) - h\zeta(t) - y(t), P(t)(u_z(t) + hu_p(t) - h\zeta(t) - y(t))\rangle \\
&+ \langle z(t) + hp(t) - w(t), Q(t)(z(t) + hp(t) - w(t))\rangle_Z] dt.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{I}_\nu(z+hp) - \tilde{I}_\nu(z)}{h} &= \frac{1}{h}[\int_0^T [\langle u_z(t) + hu_p(t) - h\zeta(t) - y(t), P(t)(u_z(t) + hu_p(t) \\
&- h\zeta(t) - y(t))\rangle + \langle z(t) + hp(t) - w(t), Q(t)(z(t) + hp(t) - w(t))\rangle \\
&- \langle u_z(t) - y(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E \\
&+ \langle z(t) - w(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z] dt] \\
&= \frac{1}{h}[\int_0^T \langle hu_p(t) - h\zeta(t), P(t)(2u_z(t) + hu_p(t) \\
&- h\zeta(t) - 2y(t))\rangle_E + \langle hp(t), Q(t)(2z(t) + hp(t) - 2w(t))\rangle_Z] dt,
\end{aligned}$$

en faisant tendre h vers 0 nous obtenons

$$\begin{aligned}
\tilde{I}'_\nu(z;p) &= \int_0^T [\langle u_p(t) - \zeta(t), 2P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E + \langle p(t), 2Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z] dt \\
&= 2\int_0^T (\langle u_p(t) - \zeta(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E + \langle p(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z) dt.
\end{aligned}$$

Montrons que $\tilde{I}'_\nu(z;.)$ est une fonction linéaire continue.
Soit (p_n) une suite d'éléments de $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ convergeant vers $\bar{p}$, utilisons le Lemme 4.3, nous obtenons (u_{p_n}) converge vers $u_{\bar{p}}$ dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$, alors,

$$\begin{aligned} |\tilde{I}'_\nu(z;p_n) - \tilde{I}'_\nu(z;\bar{p})| &= |\lim_{h\to 0}\frac{\tilde{I}_\nu(z+hp_n)-\tilde{I}_\nu(z)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\tilde{I}_\nu(z+h\bar{p})-\tilde{I}_\nu(z)}{h}| \\ &= |\lim_{h\to 0}\frac{\tilde{I}_\nu(z+hp_n)-\tilde{I}_\nu(z+h\bar{p})}{h}|, \end{aligned}$$

en utilisant 2), nous aurons $\tilde{I}'_\nu(z;p_n) \to \tilde{I}'_\nu(z;\bar{p})$, quand $n\to+\infty$, d'où la continuité de $\tilde{I}'_\nu(z;.)$.
Soit $p_1,p_2 \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{I}'_\nu(z;p_1+p_2) &= 2\int_0^T \langle u_{p_1+p_2}(t)-\zeta(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle (p_1(t)+p_2(t)), Q(t)(z(t)-w(t))\rangle dt, \end{aligned}$$

par la relation (4.4.8) nous aurons

$$\begin{aligned} \tilde{I}'_\nu(z;p_1+p_2) &= 2\int_0^T \langle (u_{p_1}(t)+u_{p_2}(t)-\zeta(t))-\zeta(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle (p_1(t)+p_2(t)), Q(t)(z(t)-w(t))\rangle dt \\ &= 2\int_0^T \langle u_{p_1}(t)-\zeta(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle p_1(t), Q(t)(z(t)-w(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle u_{p_2}(t)-\zeta(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle (p_2(t), Q(t)(z(t)-w(t)))\rangle dt, \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\tilde{I}'_\nu(z;p_1+p_2) = \tilde{I}'_\nu(z;p_1) + \tilde{I}'_\nu(z;p_2).$$

Pour tout $p \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ et tout $\beta \in I\!R$ nous avons

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}'_\nu(z;\beta p) &= 2\int_0^T \langle (u_{\beta p}(t) - \zeta(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle dt \\
&+ \langle \beta p(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle) dt \\
&= 2\int_0^T (\langle \beta u_p(t) + (1-\beta)\zeta(t) - \zeta(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle \\
&+ \langle (\beta p(t), Q(t)(z(t) - w(t)))\rangle) dt \\
&= \beta[2\int_0^T \langle u_p(t) - \zeta(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle dt \\
&+ 2\int_0^T \langle (p(t), Q(t)(z(t) - w(t)))\rangle dt] \\
&= \beta \tilde{I}'_\nu(z;p).
\end{aligned}
$$

D'où la Gâteaux différentiabilité de $\tilde{I}_\nu$, de plus la Gâteaux différentielle $D\tilde{I}_\nu(.)$, de $\tilde{I}_\nu(.)$ est donnée par

$$\langle D\tilde{I}_\nu(z), p\rangle = \tilde{I}'_\nu(z;p), \forall p \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]).$$

■

4.5 Le problème bien posé et l'affinité sur la variable contrôle

Dans cette section on étudie l'équivalence entre le problème bien posé et l'affinité sur g par rapport au contrôle pour notre équation différentielle $(P_{f,g})$. Ceci, en utilisant le Théorème 4.2 d'existence et d'unicité des solutions de ce problème et les propriétés données dans les sections 4.3 et 4.4.

On considère le problème de minimisation : minimiser la fonction quadratique $\tilde{I}_{\nu^*}(z)$ sur l'ensemble admissible non vide

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]) : \ u_z \text{ solution du problème } (P_{f,g}) \ et \ (u_z, z) \in K\},$$

avec K un sous ensemble non vide fermé convexe de $\mathbf{L}^2_E([0,T]) \times \mathbf{L}^2_Z([0,T])$, et le problème d'optimisation global $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$, tel que $I_{\nu^*} : \mathbf{L}^2_Z([0,T]) \to]-\infty, +\infty]$ est défini par (4.4.1). Notons par

$$V(\nu) = \inf\{I_\nu(q) : \quad q \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])\}$$

la valeur optimale où ν appartient à l'ensemble

$$D = \{\nu \in U : \quad \|\nu - \nu^*\| < \delta\}, \ \delta > 0.$$

Dans la première partie, nous montrons que le problème $(P_{f,g})$ est bien posé lorsque g est donné par la formule $g(t,z) = B(t)z(t) + c(t)$, c'est à dire,

1) il existe un unique minimum

$$q^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*}). \tag{4.5.1}$$

2) La fonction

$$V(\nu) \text{ est finie pour tout } \nu \in D. \tag{4.5.2}$$

3) Pour toutes suites (ν_n) dans U et (q_n) dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ telles que

$$\nu_n \to \nu^* \ \text{ et } \ I_{\nu_n}(q_n) - V(\nu_n) \to 0$$

nous avons

$$q_n \to q^* \ \text{ et } \ V(\nu_n) \to V(\nu^*). \tag{4.5.3}$$

Dans la seconde partie, nous considérons le problème $(P_{f,g})$ et nous étudions l'équivalence entre le problème bien posé et l'affinité sur l'application $g : [0,T] \times Z \to E$.

Avant de donner nos résulats concernant l'équivalence entre le problème bien posé et l'affinité, on commence par les Théorèmes suivants.

Théorème 4.3 *Soit X un espace de Banach, N un fermé convexe non vide de X et $J : N \to I\!R$. Si J est strictement convexe sur N, alors elle a au plus un minimum sur N.*

Théorème 4.4 *Soient X un espace de Banach réflexif, J une fonctionnelle convexe de X dans $I\!R \bigcup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement pour la topologie forte. Si (v_n) est une suite de X faiblement convergente vers v alors*

$$J(v) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(v_n).$$

Théorème 4.5 *Soient X un espace de Banach réflexif, N un fermé convexe non vide de X, $J : N \to I\!R$, une fonctionnelle Gâteaux différentiable sur N. J est convexe si et seulement si*

$$\forall (p_1, p_2) \in N \times N : \; J(p_1) - J(p_2) \geq \langle DJ(p_2), p_1 - p_2 \rangle.$$

Théorème 4.6 *Soient X un espace de Banach réflexif, N un sous ensemble convexe de X et $J : N \to I\!R$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable sur N. Soit $u = \min\limits_{v \in N}(J(v))$, alors*

$$\forall v \in N : \; \langle D(J(u)), v - u \rangle \geq 0.$$

Le résultat suivant nous sera utile dans la démonstration de notre Théorème principal.

Proposition 4.4 *Sous les hypothèses de la proposition 4.3, nous avons*
  1) *pour tout $\nu \in U$ il existe un unique $z_\nu = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_\nu)$;*
  2) *si (ν_n) est une suite convergeant vers ν^* dans Z, tel que*

$$z_n = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu_n}) \quad et \quad z^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$$

alors (z_n) converge vers z^* dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$.

Démonstration.
1) Soit $\nu = (y, w) \in U$, par la relation (4.4.5), et comme $\mathcal{A} \neq \emptyset$, on aura pour tout $z \in Z$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_\nu(z) &= \int_0^T [\langle u_z(t) - y(t), P(t)(u_z(t) - y(t)) \rangle_E \\ &+ \langle z(t) - w(t), Q(t)(z(t) - w(t)) \rangle_Z] dt \\ &\geq \alpha(\|u_z - y\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|z - w\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}) \geq 0. \end{aligned}$$

D'où $V(\nu) \in I\!R$ et $\tilde{I}_\nu$ est minorée.
Soit $(z_n)_n \subset \mathcal{A}$ une suite minimisante pour $\tilde{I}_\nu : \mathbf{L}^2_Z([0,T]) \to I\!R$, i.e,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_\nu(z_n) = \inf_{z\in\mathcal{A}} \tilde{I}_\nu(z).$$

Comme $z_n \in \mathcal{A}$, par l'hypohèse (v) et le Lemme 4.2 nous avons

$$\|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}\|z_n(t)\| \leq \beta(t),$$

d'où

$$\|z_n(t)\| \leq \frac{\beta(t)}{\|B\|_{\mathcal{L}(Z,E)}},$$

comme $\beta \in \mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ alors $\|z_n\|_{\mathbf{L}^2_Z}$ est bornée dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$, d'où l' existence d'une sous suite (z_{n_k}) convergeant $\sigma(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), \mathbf{L}^2_Z([0,T]))$ vers z_0, et d'après la Proposition 4.2, $(u_{z_{n_k}})$ converge vers u_{z_0} dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$. Par le Lemme 4.2 nous avons pour tout $t \in [0,T]$ $\|u_{z_{n_k}}(t)\| \leq \alpha$, donc pour $\delta \in \mathbf{L}^2_E([0,T])$

$$|\langle \delta(t), u_{z_{n_k}}(t)\rangle_E| \leq \alpha\|\delta(t)\|,$$

par le théorème de Lebesgue nous aurons

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle \delta(t), u_{z_{n_k}}(t)\rangle_E dt = \int_0^T \langle \delta(t), u_{z_0}(t)\rangle_E dt,$$

d'où $(u_{z_{n_k}})$ convergence $\sigma(\mathbf{L}^2_E([0,T]), \mathbf{L}^2_E([0,T]))$ vers u_{z_0}. Et comme K est un ensemble convexe fortement fermé, donc il est faiblement fermé et alors $(u_{z_0}, z_0) \in K$. Par conséquent, $z_0 \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A}$ est fermé.
Par la relation (4.4.9) et la convexité de K nous aurons la convexité de $\mathcal{A}$.
Montons que $\tilde{I}_\nu$ est convexe, nous avons

$$\begin{aligned}(D\tilde{I}'_\nu(p_2), p_1 - p_2) &= 2\int_0^T \langle u_{p_1-p_2}(t) - \zeta(t), P(t)(u_{p_2}(t) - y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle p_1(t) - p_2(t), Q(t)(p_2(t) - w(t))\rangle dt,\end{aligned}$$

par la relation (4.4.8) nous aurons

$$\begin{aligned}(D\tilde{I}'_\nu(p_2), p_1 - p_2) &= 2\int_0^T \langle u_{p_1}(t) - u_{p_2}(t), P(t)(u_{p_2}(t) - y(t))\rangle dt \\ &+ 2\int_0^T \langle (p_1(t) - p_2(t)), Q(t)(p_2(t) - w(t))\rangle dt,\end{aligned}$$

et comme

$$
\begin{aligned}
&2\langle u_{p_1}(t)-u_{p_2}(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
= &\quad 2(\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle)\\
= &\quad 2(\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-u_{p_1}(t))\rangle+\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle\\
- &\quad \langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle)\\
= &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
+ &\quad [\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
+ &\quad 2\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-u_{p_1}(t))\rangle\\
= &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
+ &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle+\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-u_{p_1}(t))\rangle\\
- &\quad \langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
= &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
+ &\quad \langle u_{p_1}(t)-u_{p_2}(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle+\langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-u_{p_1}(t))\rangle\\
= &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
+ &\quad \langle u_{p_1}(t)-u_{p_2}(t),P(t)(u_{p_2}(t)-u_{p_1}(t))\rangle\\
= &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle\\
- &\quad \langle u_{p_1}(t)-u_{p_2}(t),P(t)(u_{p_1}(t)-u_{p_2}(t))\rangle\\
\leq &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle\\
- &\quad \alpha\|u_{p_1}-u_{p_2}\|^2_{\mathbf{L}^2_E}\\
\leq &\quad \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle-\langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle.
\end{aligned}
$$

Par les mêmes calculs nous avons

$$2\langle p_1(t)-p_2(t),Q(t)(p_2(t)-w(t))\rangle \leq \langle p_1(t)-w(t),Q(t)(p_1(t)-w(t))\rangle-\langle p_2(t)-w(t),Q(t)(p_2(t)-w(t))\rangle.$$

D'où

$$\begin{array}{rcl}(D\tilde{I}'_\nu(p_2),p_1-p_2) & \leq & \int_0^T \langle u_{p_1}(t)-y(t),P(t)(u_{p_1}(t)-y(t))\rangle - \langle u_{p_2}(t)-y(t),P(t)(u_{p_2}(t)-y(t))\rangle dt \\ & + & \int_0^T \langle p_1(t)-w(t),Q(t)(p_1(t)-w(t))\rangle - \langle p_2(t)-w(t),Q(t)(p_2(t)-w(t))\rangle dt \\ & = & \tilde{I}_\nu(p_1)-\tilde{I}_\nu(p_2).\end{array}$$

Le Théorème 4.5, nous donne la convexité de $\tilde{I}_\nu$.
Soit (p_n) une suite de points de $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ convergeant vers p. La propriété 2) de la Proposition 4.3 implique que

$$\tilde{I}_\nu(p_n)\to\tilde{I}_\nu(p) \text{ quand } n\to+\infty$$

i.e, $\tilde{I}_\nu$ est continu, d'où la semi-continuité inférieure. Utilisons le Théorème 4.4 nous aurons,

$$\liminf_{n\to\infty} I_\nu(z_{n_k})=\liminf_{n\to\infty}\tilde{I}_\nu(z_{n_k})\geq\tilde{I}_\nu(z_0)=I_\nu(z_0)=\inf_{z\in\mathcal{A}}\tilde{I}_\nu(z),$$

c'est à dire, z_0 est un minimum pour $\tilde{I}_\nu$. Le Théorème 4.3 nous donne l'unicité de ce minimum.

2) Soit $(\nu_n)=(y_n,w_n)$ une suite convergeant vers $\nu^*=(y^*,w^*)\in U$, $z_n=$ $arg\ min(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),I_{\nu_n})$, donc (z_n) est la suite des minimums uniques des problèmes d'optimisation globals $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),I_{\nu_n})$, et soit $z^*=arg\ min(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),I_{\nu^*})$. Pour tout $z\in\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ et tout $n\in I\!N$ nous avons

$$\tilde{I}_{\nu_n}(z)\geq\tilde{I}_{\nu_n}(z_n)\geq\alpha(\|u_{z_n}-y_n\|^2_{\mathbf{L}^2_E}+\|z_n-w_n\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}),$$

et d'après la Proposition 4.3 nous avons

$$\tilde{I}_{\nu_n}(z)\to\tilde{I}_{\nu^*}(z) \text{ quand } n\to+\infty.$$

Suivant les arguments de la démonstration 1), il existe $p\in\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ et une sous suite $(z_{n_k})\subset\mathcal{A}$ tel que (z_{n_k}) converge $\sigma(\mathbf{L}^2_Z([0,T]),\mathbf{L}^2_Z([0,T]))$ vers p, et $(u_{z_{n_k}})$ converge vers u_p dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$, et

$$\begin{array}{rcl}|\int_0^T\langle u_{p-z_{n_k}}(t)-\zeta(t),P(t)(u_p(t)-y_{n_k}(t))\rangle dt| & \leq & \int_0^T\|u_p(t)-u_{z_{n_k}}(t)\|\|P(t)(u_p(t)-y_{n_k}(t))\|dt \\ & \leq & const.\int_0^T\|u_p(t)-u_{z_{n_k}}(t)\|\|u_p(t)-y_{n_k}(t)\|dt,\end{array}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$|\int_0^T \langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_p(t) - y_{n_k}(t))\rangle dt \leq \quad const.\|u_p - u_{z_{n_k}}\|_{\mathbf{L}^2_E}\|u_p - y_{n_k}\|_{\mathbf{L}^2_E},$$

de la convergence de $(u_{z_{n_k}})$ vers u_p et la convergence de (y_{n_k}) vers y^* nous aurons

$$\int_0^T \langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_p(t) - y_{n_k}(t))\rangle_E dt \to 0. \tag{4.5.4}$$

De la même façon et de la convergence de (z_{n_k}) vers p et la convergence de (w_{n_k}) vers w^* nous aurons

$$\int_0^T \langle (p - z_{n_k})(t), Q(t)(p(t) - w_{n_k})\rangle_Z dt \to 0. \tag{4.5.5}$$

Comme

$$\begin{aligned} \langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p), p - z_{n_k}\rangle &= 2\int_0^T [\langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_p(t) - y_{n_k}(t))\rangle_E \\ &+ \quad \langle (p - z_{n_k})(t), Q(t)(-w_{n_k})(t)\rangle_Z] dt, \end{aligned}$$

et de (4.5.4) et (4.5.5) on conclut que

$$\lim_{k\to\infty} \langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p), p - z_{n_k}\rangle = 0. \tag{4.5.6}$$

Pour $z_{n_k} = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), \tilde{I}_{\nu_{n_k}})$

$$\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p) \geq \tilde{I}_{\nu_{n_k}}(z_{n_k}) \geq 0.$$

Par le Théorème 4.6 nous avons $\langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(z_{n_k}), p - z_{n_k}\rangle \geq 0$ et donc

$$\langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p), p - z_{n_k}\rangle \geq \langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p), p - z_{n_k}\rangle - \langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(z_{n_k}), p - z_{n_k}\rangle$$

d'où

$$\begin{array}{rcl}
\langle D\tilde{I}_{\nu_{n_k}}(p), p - z_{n_k}\rangle & \geq & 2\int_0^T \langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_p(t) - y_{n_k}(t))\rangle_E \\
& + & \langle p(t) - z_{n_k}(t), Q(t)(p(t) - w_{n_k}(t))\rangle_Z dt \\
& - & 2\int_0^T \langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_{z_{n_k}}(t) - y_{n_k}(t))\rangle_E \\
& + & \langle p(t) - z_{n_k}(t), Q(t)(z_{n_k}(t) - w_{n_k}(t))\rangle_Z dt \\
& = & 2\int_0^T \langle u_{p-z_{n_k}}(t) - \zeta(t), P(t)(u_p(t) - u_{z_{n_k}}(t))\rangle_E \\
& + & \langle p(t) - z_{n_k}(t), Q(t)(p(t) - z_{n_k}(t))\rangle_Z dt \\
& = & 2\int_0^T \langle u_p(t) - u_{z_{n_k}}(t), P(t)(u_p(t) - u_{z_{n_k}}(t))\rangle_E \\
& + & \langle p(t) - z_{n_k}(t), Q(t)(p(t) - z_{n_k}(t))\rangle_Z dt \\
& \geq & 2\alpha(\|u_p - u_{z_{n_k}}\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|p - z_{n_k}\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}),
\end{array}$$

par la relation (4.5.6), on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(\|u_p - u_{z_{n_k}}\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|p - z_{n_k}\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}) = 0,$$

c'est à dire, z_{n_k} converge vers p dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$. La propriété 2) de la Proposition 4.3 nous donne

$$I_{\nu^*}(z) \geq \tilde{I}_{\nu^*}(z) = \lim_{k\to\infty} \tilde{I}_{\nu_{n_k}}(z) \geq \lim_{k\to\infty} \tilde{I}_{\nu_{n_k}}(z_{n_k}) = I_{\nu^*}(p)$$

pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$. Comme $argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ est unique, nous aurons $p = z^*$ et (z_n) converge vers z^*. ■

Enonçons dans ce qui suit le résultat suivant qui nous sera aussi utile dans la démonstration du théorème principal.

Théorème 4.7 *Soient E un espace de dimension finie, $f : [0,T] \times E \times E \to E$ une application vérifiant les propriétés suivantes*

i) *pour tout $(x,y) \in E \times E$, fixé $f(.,x,y)$ est Lebesgue-mesurable sur* $[0,T]$,

ii) *pour tout* $t \in [0,T]$, *fixé* $f(t,.,.)$ *est linéaire sur* $E \times E$,

iii) *il existe deux fonctions non négatives* k_1, k_2 *Lebesgue mesurables sur* $[0,T]$ *satisfaisant*

$$(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$$

telles que

$$\|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$.
Soit $B \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}([0,T])$ *un opérateur et* $c : [0,T] \to E$ *une application Lebesgue-mesurable telle que*

iv)

$$f(t,\zeta(t),\dot{\zeta}(t)) = 0, \forall t \in [0,T]$$

où

$$\zeta(t) = \int_0^T G(t,s)c(s)ds \quad et \quad \dot{\zeta}(t) = \int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)c(s)ds,$$

v) *il existe trois fonctions non négatives* m, p *et* q *dans* $\mathbf{L}^2_{\boldsymbol{R}}([0,T])$ *satisfaisant*

$$\|p+q\|_{\mathbf{L}^1_R} < \frac{1}{T},$$

telles que

$$\|f(t,x,y)\| + \|B(t)\|_{\mathcal{L}(Z,E)}\|z(t)\| + \|c(t)\| \leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y) \in [0,T] \times E \times E$.
Supposons aussi que (4.4.5) est vérifiée. Soit $g(t,z(t)) = B(t)z(t) + c(t)$ *dans le problème* $(P_{f,g})$. *Alors pour tout* $\nu^* \in U$ *le problème d'optimisation* $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ *tel que*

$$I_{\nu^*} : \mathbf{L}^2_Z([0,T]) \to]-\infty, +\infty]$$

défini par

$$I_{\nu^*}(z) = \begin{cases} \tilde{I}_{\nu^*}(z) & si \;\; z \in \mathcal{A} \\ +\infty & sinon, \end{cases}$$

est bien posé.

Démonstration.
Pour $\nu^* = (y^*, w^*) \in U$, le problème d'optimisation $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ est bien posé si

1) il existe un unique minimum

$$q^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*}); \tag{4.6.1}$$

2) la fonction

$$V(\nu) \text{ est finie pour tout } \nu \in D; \tag{4.6.2}$$

3) pour toutes suites (ν_n) dans U et (q_n) dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ telles que

$$\nu_n \to \nu^* \text{ et } I_{\nu_n}(q_n) - V(\nu_n) \to 0$$

nous avons

$$q_n \to q^* \; et \; V(\nu_n) \to V(\nu^*). \tag{4.6.3}$$

1) En tenant compte de la propriété 1) obtenue dans la Proposition 4.4, il existe un unique minimum

$$q^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*}).$$

2) Par l'hypothèse (4.4.5) nous avons pour tous $\nu = (y,w) \in D$, et $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\nu(z) &= \int_0^T [\langle u_z(t) - y(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E \\ &+ \langle z(t) - w(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z]dt \\ &\geq \alpha(\|u_z - y\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|z - w\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}) \geq 0.\end{aligned}$$

i.e., $V(\nu) \in I\!R$, pour tout $\nu \in D$, d'où (4.6.2).
3) Maintenant on démontre la condition (4.6.3).
a) Soit $\nu = (y,w) \in U$, on pose $z_\nu = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_\nu) \in \mathcal{A}$. Nous avons pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$

$$I_\nu(z) - V(\nu) \geq \tilde{I}_\nu(z) - V(\nu),$$

comme

$$\begin{aligned}\tilde{I}_\nu(z) - V(\nu) &= \int_0^T [\langle u_z(t) - y(t), P(t)(u_z(t) - y(t))\rangle_E + \langle z(t) - w(t), Q(t)(z(t) - w(t))\rangle_Z]dt \\ &- \int_0^T [\langle u_{z_\nu}(t) - y(t), P(t)(u_{z_\nu}(t) - y(t))\rangle_E + \langle z_\nu(t) - w(t), Q(t)(z_\nu(t) - w(t))\rangle_Z]dt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\langle u_z(t)-y(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle - \langle u_{z_\nu}(t)-y(t), P(t)(u_{z_\nu}(t)-y(t))\rangle \\
&= \langle u_z(t)-u_{z_\nu}(t), P(t)(u_z(t)-u_{z_\nu}(t))\rangle + \langle u_z(t)-u_{z_\nu}(t), P(t)(u_{z_\nu}(t)-y(t))\rangle \\
&+ \langle u_{z_\nu}(t)-y(t), P(t)(u_z(t)-u_{z_\nu}(t))\rangle + \langle u_{z_\nu}(t)-y(t), P(t)(u_{z_\nu}(t)-y(t))\rangle \\
&- \langle u_{z_\nu}(t)-y(t), P(t)(u_{z_\nu}(t)-y(t))\rangle \\
&= \langle u_z(t)-u_{z_\nu}(t), P(t)(u_z(t)-y(t))\rangle + \langle u_{z_\nu}(t)-y(t), P(t)(u_z(t)-u_{z_\nu}(t))\rangle \\
&= \langle u_{z-z_\nu}(t)-\zeta(t), P(t)(u_z(t)+u_{z_\nu}(t)-2y(t))\rangle,
\end{aligned}$$

de la même façon

$$\begin{aligned}
&\langle z(t)-w(t), Q(t)(z(t)-w(t))\rangle_Z + \langle z_\nu(t)-w(t), Q(t)(z_\nu(t)-w(t))\rangle_Z \\
&\qquad = \langle z(t)-z_\nu(t), Q(t)(z(t)+z_\nu(t)-2w(t))\rangle.
\end{aligned}$$

D'après 3) de la Proposition 4.3 nous aurons

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\nu(z)-V(\nu) &= \int_0^T [\langle u_{z-z_\nu}(t)-\zeta(t), P(t)(u_z(t)+u_{z_\nu}(t)-2y(t))\rangle \\
&+ \langle z(t)-z_\nu(t), Q(t)(z(t)+z_\nu(t)-2w(t))\rangle]dt \\
&= 2\int_0^T [\langle u_{z-z_\nu}(t)-\zeta(t), P(t)(u_{z_\nu}(t)-y(t))\rangle \\
&+ \langle z(t)-z_\nu(t), Q(t)(z_\nu(t)-w(t))\rangle]dt \\
&+ \int_0^T [\langle u_z(t)-u_{z_\nu}(t), P(t)(u_z(t)-u_{z_\nu}(t))\rangle \\
&+ \langle z(t)-z_\nu(t), Q(t)(z(t)-z_\nu(t))\rangle]dt \\
&= \langle D\tilde{I}_\nu(z_\nu), z-z_\nu\rangle + \int_0^T [\langle u_z(t)-u_{z_\nu}(t), P(t)(u_z(t)-u_{z_\nu}(t))\rangle_E \\
&+ \langle z(t)-z_\nu(t), Q(t)(z(t)-z_\nu(t))\rangle_Z]dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{I}_\nu(z)-V(\nu) \geq \alpha(\|u_z-u_{z_\nu}\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|z-z_\nu\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}), \tag{4.6.4}$$

ceci en utilisons le Théorème 4.6.
b) Pour la démonstration de la condition (4.6.3), considérons la suite $(\nu_n) = ((y_n, w_n))$ telle que (ν_n) converge vers ν^*, et (z_n) la suite asymptotiquement minimisée qui correspond à (ν_n), par la relation (4.6.4) nous avons

$$I_{\nu_n}(z_n) - V(\nu_n) \geq \alpha(\|u_{z_n} - u_{z_{\nu_n}}\|^2_{\mathbf{L}^2_E} + \|z_n - z_{\nu_n}\|^2_{\mathbf{L}^2_Z}).$$

Comme

$$V(\nu_n) = \inf\{I_{\nu_n}(z_n), z_n \in \mathbf{L}^2_E([0,T])\},$$

nous aurons

$$\lim_{n\to\infty}(I_{\nu_n}(z_n) - V(\nu_n)) = 0$$

et donc

$$\|u_{z_n} - u_{z_{\nu_n}}\|_{\mathbf{L}^2_E} \to 0 \ \text{ et } \ \|z_n - z_{\nu_n}\|_{\mathbf{L}^2_Z} \to 0,$$

i.e., $z_\nu = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu_n})$. D'après la Proposition 4.3, la suite (z_n) converge vers z^* dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$, avec $z^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$, et par la Proposition 4.2, on conclut que (u_{z_n}) converge vers u_{z^*} dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$. D'où $V(\nu_n) \to V(\nu^*)$. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Dans se qui suit on démontre l'équivalence entre le problème bien posé pour tout $\nu^* \in U$ et l'affinité sur la fonction g pour la variable contrôle dans le problème $(P_{f,g})$.
On commence par des définitions et un corollaire sur les ensembles de Čebyšev.

Définition 4.2 *Soit X un espace de Banach le sous ensemble G de X est de Čebyšev, si pour tout point $x \in G$ il existe un point unique $p(x) \in X$, tel que $\|x - y\| > \|x - p(x)\|$ si $y \in X$ et $y \neq p(x)$.*

Définition 4.3 *Soit (X, d) un espace métrique, le sous ensemble G de X est dit approximativement compact si pour tout $x \in X$ et toute suite (y_n) de G tels que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = d(x, G),$$

il existe une sous suite (y_{n_k}) de (y_n) convergeant vers un élement de G.

Corollaire 4.1 *(voir [4]) Si G est un sous ensemble de Čebyšev et approximativement compact, alors G est convexe.*

Définition 4.4 *Soit X, Y deux espaces vectoriels. L'application $g : X \to Y$ est affine, si pour tous $x, y \in X$ et tout $b \in I\!R$,*

$$g(bx + (b-1)y) = bg(x) + (b-1)g(y).$$

Le Lemme suivant nous donne une propriété des fonctions affines.

Lemme 4.3 *Soient W et Y deux espaces vectoriels réels, et $h : W \to Y$ une application de graphe convexe. Alors h est affine.*

Remarque 4.1 *Si la relation (4.4.5) est vérifiée, alors pour $\nu_i = (y_i, w_i) \in U$, $i = 1, 2$, la fonction $\langle ., . \rangle_1$ définie sur U par*

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_1 = \int_0^T \langle y_1(t), P(t)y_2(t) \rangle_E + \langle w_1(t), Q(t)w_2(t) \rangle_Z$$

est un produit scalaire qui induit sur U une structure hilbertienne équivalente à la structure usuelle. On note par $\|.\|_1$ la norme correspondante à $\langle ., . \rangle_1$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat principal.

Théorème 4.8 *Soient E, Z deux espaces de dimension finie et $f : [0, T] \times E \times E \to E$ une application telle que*

i) *pour tout $(x, y) \in E \times E$, fixé $f(., x, y)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0, T]$,*

ii) *pour tout $t \in [0, T]$, fixé $f(t, ., .)$ est linéaire sur $E \times E$,*

iii) *il existe deux fonctions non négatives k_1, k_2 Lebesgue mesurables sur $[0, T]$ satisfaisant*

$$(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}) < 1$$

et telles que

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2\| \leq k_1(t)\|x_1 - x_2\| + k_2(t)\|y_1 - y_2\|,$$

pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times E$.
Soit $g : [0, T] \times Z \to E$ une application dans $\mathbf{L}^1_E([0, T])$ telle que

iv) *il existe trois fonctions m, p et q non négatives dans $\mathbf{L}^1_{\boldsymbol{R}}([0, T])$ satisfaisant*

$$\|p + q\|_{\mathbf{L}^2_R} < \frac{1}{T}$$

et telles que

$$\|f(t,x,y)\| + \|g(t,u)\| \leq m(t) + p(t)\|x\| + Tq(t)\|y\|,$$

pour tout $(t,x,y,u) \in [0,T] \times E \times E \times Z$,

v) *si* (z_n) *est une suite d'éléments de* $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$ *qui converge vers* z, *il existe une sous suite* (z_{n_k}) *telle que*

$$\|g(.,z_{n_k}(.)) - g(.,z(.))\|_{\mathbf{L}^1_E} \to 0.$$

Supposons que (4.4.5) est satisfaite. Soit $(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ *le problème défini par (4.4.1) avec* $K = \mathbf{L}^2_E([0,T]) \times \mathbf{L}^2_Z([0,T])$. *Si le problème (4.4.1) est bien posé pour tout* $\nu^* \in U$, *alors il existe un* $B \in \mathbf{L}^2_{\mathcal{L}(Z,E)}$ *et une application Lebesgue-mesurable* $c : [0,T] \to E$, *tel que* $g(t,u) = B(t)u + c(t)$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et tout* $u \in Z$.

Démonstration.
Etape 1. Soit G le sous ensemble de U défini par

$$G = \{(l,z) \in U : \quad l = u_z \text{ est la solution unique du problème } (P_{f,g})\}. \tag{4.7.1}$$

Démontrons que si le problème défini par (4.4.1) est bien posé pour tout $\nu^* \in U$ alors G est convexe, c'est à dire, que G est de Čebyšev et approximativement compact (Corollaire 4.1).
Soit $\nu^* = (y^*, w^*) \in U$, d'après la condition (4.6.1), il existe un unique minimum $z^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$. Pour $p^* = (u_{z^*}, z^*) \in U$, nous aurons

$$\begin{aligned} \|p^* - \nu^*\|_1^2 &= \langle p^* - \nu^*, p^* - \nu^* \rangle_1 \\ &= \int_0^T [\langle u_{z^*}(t) - y^*(t), P(t)(u_{z^*}(t) - y^*(t))\rangle \\ &+ \langle z^*(t) - w^*(t), Q(t)(z^*(t) - w^*(t))\rangle] dt \\ &= \tilde{I}_{\nu^*}(z^*), \end{aligned}$$

et comme $z^* = argmin(\mathbf{L}^2_Z([0,T]), I_{\nu^*})$ alors

$$\tilde{I}_{\nu^*}(z^*) \leq \tilde{I}_{\nu^*}(z), \ \forall z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T]),$$

et par suite, pour tout $z \in \mathbf{L}^2_Z([0,T])$ avec $z \neq z^*$

$$\begin{aligned}\|p^* - \nu^*\|_1^2 &< \int_0^T [\langle u_z(t) - y^*(t), P(t)(u_z(t) - y^*(t))\rangle \\ &+ \langle z(t) - w^*(t), Q(t)(z(t) - w^*(t))\rangle]dt \\ &= \langle p - \nu^*, p - \nu^*\rangle_1 = \|p - \nu^*\|_1^2,\end{aligned}$$

et donc

$$\|p^* - \nu^*\|_1 < \|p - \nu^*\|_1, \forall p = (u_z, z) \in U \text{ et } p \neq p^*. \tag{4.7.2}$$

On conclut que G est de Čebyšev.
Soit $\nu^* = (y^*, w^*) \in U$ et (l_n, z_n) une suite d'éléments de G telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|(l_n, z_n)\|_1 = \inf\{\|p - z^*\|_1,\ p \in G\}. \tag{4.7.3}$$

Par la définition de l'ensemble G (4.7.1) et pour tout $n \in I\!N$, $l_n = u_{z_n}$ est la solution unique du problème $(P_{f,g})$. Par la relation (4.7.3) on peut écrire

$$\tilde{I}_{\nu^*}(z_n) \to V(\nu^*),$$

alors (z_n) est une suite asymptotiquement minimisée par rapport à $\nu_n = \nu^*$, pour tout $n \in I\!N$. Par la condition (4.6.3) du problème bien posé on conclut que pour tout $\nu^* \in U$, la suite (z_n) converge vers z^* dans $\mathbf{L}^2_Z([0,T])$. D'après l'hypothèse (v) du Théorème 4.8, il existe une sous suite (z_{n_k}) telle que

$$\|g(., z_{n_k}(.)) - g(., z^*(.))\|_{\mathbf{L}^1_E} \to 0.$$

Le Lemme 4.1 et la Proposition 4.1 nous permmettent d'écrire

$$\begin{aligned}\|u_{z_{n_k}}(t) - u_{z^*}(t)\| &= \|\int_0^T G(t,s)(\ddot{u}_{z_{n_k}}(s) - \ddot{u}_{z^*}(s))ds\| \\ &\leq T\int_0^T \|\ddot{u}_{z_{n_k}}(s) - \ddot{u}_{z^*}(s)\|ds \\ &= T\int_0^T \|f(s, u_{z_{n_k}}(s), \dot{u}_{z_{n_k}}(s)) - f(s, u_{z^*}(s), \dot{u}_{z^*}(s)) \\ &+ g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds \\ &\leq T\int_0^T (\|f(s, u_{z_{n_k}}(s), \dot{u}_{z_{n_k}}(s)) - f(s, u_{z^*}(s), \dot{u}_{z^*}(s))\| \\ &+ \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|)ds,\end{aligned}$$

par la Lipschizité de $f(t,.,.)$ nous aurons pour tout $n \in I\!N$,

$$\begin{array}{rcl} \|u_{z_{n_k}}(t) - u_{z^*}(t)\| & \leq & T\int_0^T [k_1(s)\|u_{z_{n_k}}(s) - u_{z^*}(s)\| + k_2(s)\|\dot{u}_{z_{n_k}}(s) - \dot{u}_{z^*}(s)\| \\ & + & \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|]ds \\ & \leq & (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} \\ & + & T\int_0^T \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds, \end{array}$$

d'où

$$\|u_{z_{n_k}}(t) - u_{z^*}(t)\| \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} + T\int_0^T \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds. \tag{4.7.4}$$

Par les mêmes calculs nous aurons

$$\begin{array}{rcl} \|\dot{u}_{z_{n_k}}(t) - \dot{u}_{z^*}(t)\| & = & \|\int_0^T \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(\ddot{u}_{z_{n_k}}(s) - \ddot{u}_{z^*}(s))ds\| \\ & \leq & \int_0^T \|\ddot{u}_{z_{n_k}}(s) - \ddot{u}_{z^*}(s)\|ds \\ & = & \int_0^T \|f(s, u_{z_{n_k}}(s), \dot{u}_{z_{n_k}}(s)) - f(s, u_{z^*}(s), \dot{u}_{z^*}(s)) \\ & + & g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds \\ & \leq & \int_0^T (k_1(s)\|u_{z_{n_k}}(s) - u_{z^*}(s)\| + k_2(s)\|\dot{u}_{z_{n_k}}(s) - \dot{u}_{z^*}(s)\| \\ & + & \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|)ds \\ & \leq & (\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \frac{1}{T}\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} + \int_0^T \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds, \end{array}$$

d'où

$$T\|\dot{u}_{z_{n_k}}(t) - \dot{u}_{z^*}(t)\| \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} + T\int_0^T \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds. \tag{4.7.5}$$

Les relations (4.7.4) et (4.7.5) nous donnent

$$\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} \leq (T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R} + \|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})\|u_{z_{n_k}} - u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E} + T\int_0^T \|g(s, z_{n_k}(s)) - g(s, z^*(s))\|ds.$$

D'où

$$(1-(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R}))\|u_{z_{n_k}}-u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E}\leq T\int_0^T\|g(s,z_{n_k}(s))-g(s,z^*(s))\|ds,$$

et

$$\|u_{z_{n_k}}-u_{z^*}\|_{\mathbf{C}^1_E}\leq \frac{T}{1-(T\|k_1\|_{\mathbf{L}^1_R}+\|k_2\|_{\mathbf{L}^1_R})}\int_0^T\|g(s,z_{n_k}(s))-g(s,z^*(s))\|ds.$$

Passant à la limite nous aurons la convergence de la suite $(u_{z_{n_k}})$ vers u_{z^*} dans $\mathbf{C}^1_E([0,T])$.

Etape 2.

Montrons que l'application $\eta:\mathbf{L}^2_Z([0,T])\to\mathbf{C}^1_E([0,T])$ définie par $\eta(z)=u_z$, u_z étant la solution unique du problème $(P_{f,g})$, est affine.

Soit $(z_i,u_{z_i})\in gph(\eta)$, $i=1,2$, on pose $l_i=u_{z_i}$, donc $(l_i,z_i)\in G$. Par la convexité de G nous aurons pour tout $\lambda\in[0,1]$,

$$(\lambda l_1+(1-\lambda)l_2,\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\in G,$$

c'est à dire, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\lambda l_1(t)+(1-\lambda)l_2(t)=\lambda u_{z_1}(t)+(1-\lambda)u_{z_2}(t)=u_{\lambda z_1+(1-\lambda)z_2}(t),$$

et donc

$$\lambda\eta(z_1)(t)+(1-\lambda)\eta(z_2)(t)=\eta(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)(t)$$

et $(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2,\eta(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)\in gph(\eta)$. Par conséquent le graphe de η est convexe, et par le Lemme 4.5 on conclut que η est affine.

Etape 3.

Montrons que g est affine sur Z, c'est à dire, pour tous $x,y\in Z$, et tout $b\in I\!R$,

$$g(t,bx+(1-b)y)=bg(t,x)+(1-b)g(t,y).$$

Soient $x,y\in Z$ et $b\in I\!R$. Considérons les problèmes suivants

$$\ddot{u}(t)=f(t,u(t),\dot{u}(t))+g(t,\gamma(t)),\ u(0)=u(T)=0 \qquad (4.7.6)$$

$$\ddot{u}(t)=f(t,u(t),\dot{u}(t))+g(t,\delta(t)),\ u(0)=u(T)=0 \qquad (4.7.7)$$

$$\ddot{u}(t)=f(t,u(t),\dot{u}(t))+g(t,b\gamma(t)+(1-b)\delta(t)),\ u(0)=u(T)=0 \qquad (4.7.8)$$

avec $\gamma(t) = x\mathcal{X}_{[0,T]}(t)$ et $\delta(t) = y\mathcal{X}_{[0,T]}(t)$. Soient u_1, u_2 et u_3 les solutions uniques dans $\mathbf{W}_E^{2,1}([0,T])$ des problèmes (4.7.6), (4.7.7) et (4.7.8) respectivement. D'après la définition de l'application η nous aurons

$$\eta(\gamma)(t) = u_1(t), \ \eta(\delta)(t) = u_2(t) \text{ et } \eta(b\gamma + (1-b)\delta)(t) = u_3(t).$$

Comme η est affine, on obtient pour tout $t \in [0,T]$,

$$\eta(b\gamma + (1-b)\delta)(t) = b\eta(\gamma)(t) + (1-b)\eta(\delta)(t),$$

d'où

$$u_3(t) = bu_1(t) + (1-b)u_2(t), \ \forall\, t \in [0,T].$$

L'unicité des solutions des problèmes (4.7.6), (4.7.7) et (4.7.8) nous permettent d'écrire

$$\ddot{u}_3(t) = f(t, u_3(t), \dot{u}_3(t)) + bg(t, \gamma(t)) + (1-b)g(t, \delta(t))$$

et

$$\ddot{u}_3(t) = f(t, u_3(t), \dot{u}_3(t)) + g(t, b\gamma(t) + (1-b)\delta(t)),$$

par conséquent

$$bg(t, \gamma(t)) + (1-b)g(t, \delta(t)) = g(t, b\gamma(t) + (1-b)\delta(t)),$$

c'est à dire,

$$bg(t,x) + (1-b)g(t,y) = g(t, bx + (1-b)y),$$

donc g est affine sur Z, on conclut qu'il existe $B \in L^2_{\mathbf{L}(Z,E)}$ et $c : [0,T] \to E$ tel que $g(t,z) = B(t)z + c(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et tout $z \in Z$. ■

Conclusion. Nous avons présenté dans ce chapitre un ensemble d'idées dans la résolution d'un problème bien posé et son lien avec le contrôle optimale pour une équation différentielle du seconde ordre. Dans les perspectives, nous allons essayer dans le premier temps, de traiter le même problème en affaiblissant un petit peu les hypothèses suppoées sur f, en second lieu d'étendre ce résultat aux inclusion différentielle.

Bibliographie

[1] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Second-order differential inclusion with almost convex right-hand sides.* Electronic Journal of Qualitative Theory of Differentil Equations. (2011), No. 34, 1-14.

[2] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *A control problem governed by a second-order differential inclusion.* Applicable Analysis. Vol. 88, No. 12, December 2009, 1677-1690.

[3] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions. Set-valued maps and Viability Theory,* Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[4] E. Asplund, *Čebyšev sets in Hilbert space,* Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1969) 235-240.

[5] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de quelques problèmes d'èvolution du second ordre,* Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine, (2003).

[6] D. Azzam-Laouir, *Polycopié : Cours d'analyse convexe.* Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel, 2009.

[7] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three boundary value problems for second ordre differential inclusions in Banach spaces* , control Cybernics, Vol.32 (2002) No. 3.

[8] D. Azzam-Laouir and S. Lounis, *Nonconvex perturbations of second order maximal monotone differential inclusions.* Topological Methods in Nonlinear Analysis. Volume 35, 2010, 305-317.

[9] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).

[10] C. Castaing *Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza,* C.R. Acad. Sc. Série A, Paris, t. 271, (1970), pp. 396-398.

[11] C. Castaing, P.R. De Fitte and M. Valadier, *Young Measures on Topological Spaces with Applications in control Theory and Probability Theory.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[12] C. Castaing, A. Jofre, A. Salvadori *Control problems gouverned by functional, evolution inclusions with Young measures,* J. Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Volume 5, (2004), 131-152.

[13] C. Castaing, A. Salvadori, L. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process,* Journal of Nonlinear and Convex Analysis. Volume 2, november 2, (2001), 217-241.

[14] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions,* Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin 580,(1970).

[15] A. Cellina and A. Ornelas, *Existence of solution to differential inclusion and optimal control problems in the autonomous case,* Siam J. Control Optim. Vol. 42, (2003) No. 1, pp. 260-265.

[16] J. Dugundji, *An extension of Tietze's Theorem,* Pacific J.Math. 1(1951),353-367

[17] A. M. M. Gomaa, *Set-valued Functions and Set-valud Differential Equation,* Thesis Faculty of Science Cairo-University (2000).

[18] A. Ghoulia-Houri, *Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable.* Revue d'informatique et de recherche opérationnelle No 4 (1967) p.7-32.

[19] C. P. Gupta, *Solvability of three-point nonlinear boundary value problem for a second order differential equation,* J. Math. Anal. Appl. 168 (1992), 540-551.

[20] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations,* John Wiley and Sons, New York, London Sydney(1967).

[21] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis,* Kluwer academic publishers.

[22] A. Jawhar, *Existence de solutions optimales pour des problèmes de contrôles de systèmes gouvernés par des équations différentielles multivoques,* Séminaire d'analyse convexe. Montpellier (1985).

[23] A. G. Ibrahim and A. M. M. Gomaa, *Existence theorems for functional multivalued three-point boundary value problem of second order,* J. Egypt. Math. Soc 8(2) (2000), 155-168.

[24] A. Ioffe, et V. Tihomirov, *Extension des problèmes en calcul des variations,* Trudy moskovskovo matematiceskovo obserstva, 18 (1968) p. 188-246.

[25] A. Ionescu et C. Tulcea, *On the lifting property (IV) Disintegration of measures,* Annales de l'Institut Fourier 14-2 (1964).

[26] M. Kisielewicz, *Differential Inclusions and Optimal Control*, PWN-Polish Scientific Publishers, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[27] S. A. Marano, *Existence theorems for multivalued boundary value problem*, Bull. Australian Math. Soc. 45 (1992), 249-260.

[28] S. A. Marano, *A remark on a second order three-point boundary value problem*, J. Math. Anal. Apll 183 (1994), 518-522.

[29] E. Muselli, *Affinity and well-posedness for Optimal Control Problems in Hilbert Spaces.* Journal of Convex Analysis. Volume 14(2007), No. 4,767-784.

[30] M. Valadier, *Young measures,* Methods of Nonconvex Analysis (A. Cellina, ed), Lectures Notes in Math, vol. 1446, Spinger-Verlag, Berlin, (1990), pp. 152-188.

[31] M. Valadier, *Young measures,* Methods of Nonconvex Analysis (A. Cellina, ed), Lectures Notes in Math, vol. 1446, Spinger-Verlag, Berlin, (1990), pp. 152-188.

[32] M. Valadier, *Applications des mesures de Young aux suites uniformément intégrables dans un espace de Banach séparable*, Sém. Anal. Convexe 20(1990), 3.1-.14.

[33] M. Valadier, *A course on Young mesures,* Workshop di teoria della Misura e Analisi Reale, Grado, September 19-October 2, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 26 suppl, (1994), 349-394.

[34] Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions.* Longman Scientific & Technical, Harlow. With a foreword by A. Pazy. I. I. (1987).

[35] T. Zolezzi, *Well-posedness criteria in optimization with application to the calculus of variations.* Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 25 (1995) 437-453.

[36] T. Zolezzi, *Extended well-posedness of optimization problems.* J.Optimization Theory Appl. 91 (1996) 257-268.

[37] T. Zolezzi, *A characterization of well-posed optimal control systems.* SIAM J., Control Optimization 19 (1981) 604-616.