République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....................

№ de séries : ..................

**Mémoire de fin d'études**

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité :** Mathématiques.

**Option :** Mathématiques Fondamentales .

**Thème**

# Équations et systèmes d'équations aux différences non linéaires

**Présenté par :**

– Beldi Imane

– Bouzoul Loubna

**Devant le jury :**

| | | |
|---|---|---|
| Président | : M. Ahmia | MCB Université de Jijel |
| Encadreur | : M. Boulouh | MAB Université de Jijel |
| Examinateur | : F. Belhannache | MCB Université de Jijel |

Promotion **2017/2018**

# REMERCIEMENTS

Avant tout, nous remercions Allah tout puissant qu'il nous a guidé tout au long de nos vie, qu'il nous a donné le courage et la patience pour dépasser tous les moments difficiles, qu'il nous a permis d'achever ce travail et de pouvoir le mettre entre vos mains aujourd'hui.

Ce travail est l'aboutissement d'un long cheminement ou cours du quel nous avons bénéficié de l'encadrement, des encouragement et du soutien de plusieurs personnes au quelles nous tenons profondément et sincèrement à remercier a cet égard, nous tenons à remercier Mme« **Boulouh Mounira**» pour tout ce qu'elle a fourni comme efforts pour nous avoir procuré un sujet d'actualité et pour nous avoir encadrer tout au long de la préparation du mémoire.

Nous adressons nos vifs remerciements à Mr«**Ahmia Moussa**», Mme«**Belhannache Farida**» qu'ils nous ont fait l'honneur d'avoir accepté d'être membres de nos jury.

Nous tenons à nos familles et amis soient de pris ou de loin qui nous ont supporté et encouragé tout au long de ces années, un grand merci à tout le monde.

*DÉDICACE*

*Au nom de dieu le tout puissant qui m'a éclairé le bon chemin.*

*Je dédie ce travail :*

*A ma famille dont leurs mérites, leurs sacrifices. Les mots me manquent pour exprimer toute la reconnaissance, la fierté et le profond amour que je vous porte pour les sacrifices qu'ils ont consenti pour ma réussite, qu'ils trouvent ici le témoignage de mon attachement ma reconnaissance, gratitude et respect, que dieu leur préservent bonne santé et longue vie. J'essaierai toujours d'être vos espoirs.*

*A mes chères sœurs : Soumia et Zineb.*

*A mes chères frères : Yasser, Walid, Islam et Aymane.*

*A toute ma grande famille sans exception.*

*A mes meilleurs amies : Fatima, , Biso, Chocha, Lamia, Maha, Wahiba, Zahia, Ibtissame , Dalila, Marwa, Souhila, Amina, Samah, Loubna, Louiza et Wafa.*

*A tous ceux qui j'aime et qui m'aiment*

*Imane*

## *DÉDICACE*

*Au nom de dieu le tout puissant qui m'a éclairé le bon chemin.*

*A mon père qui n'a jamais cessé de croire en moi.*

*A ma mère, source d'affection et de tendresse.*

*A ma sœur Ahlam.*

*A mon frère Bilal et sa femme Sara.*

*A ma grande famille.*

*A qui je dédie ce modeste travail de fin d'étude pour leur affection et gratitude, pour tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour moi, qu'ils trouvent ici l'expression bien modeste de ma reconnaissance.*

*A mes amies Louiza, Wafa, Imane, Meriem, Rachida, Chahra, Ratiba et Ilham.*

*A tous ceux qui j'aime*

*Et qui me sont chers.*

*Loubna*

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Les équations aux différences est un objet mathématique très utilisé dans les contestes différents dans plusieurs branches de la science, par exemple elles sont utilisées pour modéliser quelques phénomènes dans la physique, la biologie, l'écologie,...etc. Une équation aux différences est l'analogue discret d'une équation différentielle, c'est une équation relie plusieurs termes d'une même suite.

Notre mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons des notions fondamentales sur les équations aux différences linéaires et non linéaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement des solution de deux équations aux différences non linéaires d'ordre 3 et $k+1$.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude de deux systèmes d'équations aux différentes non linéaires.

# CHAPITRE 1

# GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et théorèmes concernant les équations aux différences linéaires et non linéaires que l'on utilise dans les chapitres suivants. Pour plus détails vous pouvez consulter [2], [3] et [6].

## 1.1 Équations aux différences linéaires

**Définition 1.1.** *Une équation aux différences linéaire d'ordre* $k \in \mathbb{N}^*$ *est une relation de la forme*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + ... + p_k(n)y(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.1}$$

*avec* $g$ *et* $p_i$ *sont des fonctions réelles,* $i = 1, 2...k$ *,* $p_k(n) \neq 0, \quad \forall n \geqslant n_0$ *et*
$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_{0+1}, ...\}$.

**Définition 1.2.** *L'équation* (1.1) *est dite équation aux différences linéaire non homogène si* $g(n) \neq 0$*,* $n \geq n_0$.

**Définition 1.3.** *L'équation* (1.1) *avec* $g \equiv 0$ *i.e.,* $g(n) = 0, \forall n \geqslant n_0$ *et dite équation aux différences homogène d'ordre* $k$ *i.e.,*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + p_2(n)y(n+k-2) + ... + p_k(n)y(n) = 0. \tag{1.2}$$

**Remarque.** *En général on associe* $k$ *valeurs initiales avec l'équation aux différences* (1.1) *i.e.,*

$$y(n_0) = c_0,\ y(n_0+1) = c_1, ...,\ y(n_0+k-1) = c_k, \tag{1.3}$$

*où* $c_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}),\ i = 1...k.$

**Lemme 1.4.** *L'équation aux différences* (1.1) *avec les valeurs initiales* (1.3) *admet une et une seule solution.*

**Définition 1.5.** *Une solution de l'équation aux différences linéaire* (1.1) *est une suite* $(x(n)_{n \geq n_0}) \in \mathbb{K}$ *qui satisfait* (1.1)*.*

**Définition 1.6.** *Les fonctions* $f_1, f_2, ..., f_r$ *sont dites linéairement dépendantes pour* $n \geq n_0$ *s'il existe des constantes* $a_1, a_2, ..., a_r$ *pas toutes nulles vérifient*

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + ... + a_r f_r(n) = 0,\ \forall n \geq n_0 \tag{1.4}$$

*Si* $a_j \neq 0$*,on peut diviser* (1.4) *par* $a_j$ *pour obtenir*

$$\begin{aligned} f_j(n) &= \frac{-a_1}{a_j} f_1(n) - \frac{-a_2}{a_j} f_2(n) - ... - \frac{-a_r}{a_j} f_r(n) \\ &= -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \end{aligned}$$

**Définition 1.7.** *Un ensemble des* $k$ *solutions de l'équation aux différences* (1.2) *linéairement indépendant est appelé ensemble fondamental.*

**Définition 1.8.** *Le Casoratien* $W(n)$ *des solutions* $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ *de l'équation aux différences* (1.2) *est défini par*

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & . \ . \ . & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & . \ . \ . & x_k(n+1) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & . \ . \ . & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

**Exemple 1.9.** *Soit l'équation aux différences linéaire d'ordre* 3 *suivante*

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0, \quad n = 0, 1, ...$$

*Cette équation a pour solutions* $2^n, (-2)^n$ *et* $(-3)^n$ *alors*

$$\begin{aligned} W(n) &= \det \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix} \\ &= 2^n(-2)^n(-3)^n \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & (-2) & (-3) \\ 2^2 & (-2)^2 & (-3)^2 \end{pmatrix} \\ &= -20(12)^n. \end{aligned}$$

**Lemme 1.10.** *(Lemme d'Abel)*
*Soit* $x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)$ *des solutions de l'équation* (1.2), *alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left( \prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0), \; n \geqslant n_0$$

**Notation**

$$\prod_{i=j}^{k} a_i = 1, \; j > k.$$
$$\sum_{i=j}^{k} a_i = 0, \; j > k.$$

**Démonstration.** Nous allons montrer le lemme pour $k = 3$. Le cas général, on peut le démontrer da la même façon.
Soient $(x_1(n))_{n \geq n_0}, (x_2(n))_{n \geq n_0},$ *et* $(x_3(n))_{n \geq n_0}$ trois solutions de (1.2).
Alors d'après la formule (1.5) on a

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+3) & x_2(n+3) & x_3(n+3) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

De (1.2), on a pour tout $1 \leq i \leq 3$,

$$x_i(n+3) + p_3(n)x_i(n) + p_1(n)x_i(n+2) + p_2(n)x_i(n+1) = 0,$$

ou

$$x_i(n+3) = -p_3(n)x_i(n) - p_1(n)x_i(n+2) - p_2(n)x_i(n+1).$$

En substituant la valeur de $x_i(n+3)$, $i = 1, 2, 3$ dans (1.6), on obtient

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

où

$$\alpha = -p_3(n)x_1(n) - [p_1(n)x_1(n+2) + p_2(n)x_1(n+1)],$$

$$\beta = -p_3(n)x_2(n) - [p_1(n)x_2(n+2) + p_2(n)x_2(n+1)],$$

$$\gamma = -p_3(n)x_3(n) - [p_1(n)x_3(n+2) + p_2(n)x_3(n+1)].$$

En utilisant les propriétés du déterminant dans (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ -p_3(n)x_1(n) & -p_3(n)x_2(n) & -p_3(n)x_3(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_3(n) \det \begin{pmatrix} x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \end{pmatrix} \\ &= -p_3(n)(-1)^2 \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & x_3(n) \\ x_1(n+2) & x_2(n+2) & x_3(n+2) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & x_3(n+1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n)W(n). \tag{1.8}$$

$$W(n) = (-1)^3 p_3(n-1)W(n-1)$$

$$W(n-1) = (-1)^6 p_3(n-2)W(n-2)$$

$$\vdots$$

$$W(n_0+1) = (-1)^{3(n-n_0)} p_3(n_0)W(n_0).$$

Par recense la solution est donne par

$$\begin{aligned} W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i)\right] W(n_0), \quad n \geqslant n_0 \\ &= (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i) W(n_0)\right]. \end{aligned}$$

**Corollaire 1.11.** *La famille des solutions*

$$\{(x_1(n))_{n\geq n_0}, (x_2(n))_{n\geq n_0}, ..., (x_k(n))_{n\geq n_0}\}$$

*de l'équation* (1.2) *est linéairement indépendante si et seulement si* $W(n) \neq 0, \ \forall n \geq n_0$.

**Démonstration.** Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in K$ telle que

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + ... + \alpha_k x_k(n) = 0, \quad n \geq n_0 \\ \alpha_1 x_1(n+1) + \alpha_2 x_2(n+1) + ... + \alpha_k x_k(n+1) = 0, \quad n \geq n_0 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \alpha_1 x_1(n+k-1) + \alpha_2 x_2(n+k-1) + ... + \alpha_k x_k(n+k-1) = 0, \quad n \geq n_0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit

$$X(n).b = 0, \tag{1.9}$$

avec

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & . \ . \ . & x_k(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & . \ . \ . & x_k(n+1) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1(n+k-1) & x_2(n+k-1) & . \ . \ . & x_k(n+k-1) \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$\det X(n) = W(n)$.

Le système (1.9) admet uniquement la solution triviale si et seulement

$$\det X(n) = W(n) \neq 0,\ n \geq n_0.$$

**Théorème 1.12.** *L'ensemble des solutions* $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ *de* (1.2) *est dit ensemble fondamental si et seulement si pour un certain* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *le Casoratien* $W(n_0) \neq 0$.

**Exemple 1.13.** *Vérifier que* $5^n, 2^n, 3^n$ *est un ensemble fondamental de l'équation*

$$x(n+3) - 10x(n+2) + 31x(n+1) - 30x(n) = 0.$$

*Solutions de l'équation sont* $5^n$, $2^n$ *et* $3^n$ *donc le Casoratien de ces solutions est donné par*

$$W(n+1) = \det \begin{pmatrix} 5^n & 2^n & 3^n \\ 5^{n+1} & 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 5^{n+2} & 2^{n+2} & 3^{n+2} \end{pmatrix}$$

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 25 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
$$= 6 \neq 0.$$

*Ainsi d'après le Corollaire* (1.11) *les solutions* $5^n$, $2^n$ *et* $3^n$ *sont linéairement indépendantes et donc forment un ensemble fondamental.*

Le théorème suivant montre que l'équation aux différences linéaire homogène (1.2) admet toujours un ensemble fondamental de solutions .

**Théorème 1.14.** *(Théorème Fondamental )*
*Si $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ alors l'équation aux différences* (1.2) *admet un ensemble fondamental de solutions.*

**Démonstration.** Soit la famille des solutions $\{(x_1(n))_{n\geq n_0}, (x_2(n))_{n\geq n_0}, ..., (x_k(n))_{n\geq n_0}\}$ de l'équation (1.2) avec les valeurs initiales
$x_1(n_0) = 1, x_1(n_0+1) = ... = x_1(n_0+k-1) = 0 \quad e_1 = (1, 0, ..., 0).$
$x_2(n_0) = 0, x_2(n_0+1) = 1, x_2(n_0+2) = ... = x_2(n_0+k-1) = 0 \quad e_2 = (0, 1, ..., 0).$
.
.
.
$x_k(n_0) = ... = x_k(n_0+k+2) = 0, x_k(n_0+k-1) = 1 \quad e_k(0, 0, ..., 1).$

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \det I_k = 1 \neq 0.$$

**Lemme 1.15.** *Si $(x_1(n))_{n\geq n_0}, (x_2(n))_{n\geq n_0}$, sont des solutions de l'équation* (1.1)*, alors $(x_1(n) - x_2(n))$ est une solution de l'équations aux différence* (1.2)*.*

**Définition 1.16.** *Soit $\{x_1(n), x_2(n), ..., x_k(n)\}$ un ensemble fondamental de solutions de* (1.2)*. Alors la solution générale de* (1.2) *est donnée par*

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n),$$

*pour des constantes arbitraires $a_i$.*

**Théorème 1.17.** *Soient $\{(x_1(n))_{n\geq n_0}, (x_2(n))_{n\geq n_0}, ..., (x_k(n))_{n\geq n_0}\}$ un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.2)*, alors toute solution de l'équation* (1.1) *prend la* *forme*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n) + y_p(n).$$

*Pour $y_p(n)$ est un solution particulière.*

**Démonstration.** Soit $(y(n))_{n\geq n_0}$ la solution générale de l'équation (1.1) et $(y_p(n))_{n\geq n_0}$ est solution particulière.

D'après le lemme précédant $(y(n) - y_p(n)), n \geq n_0$ est une solution de l'équation aux différences (1.2) donc

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n), \quad n \geq n_0$$

i.e.,

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i(n) + y_p(n), \quad n \geq n_0.$$

Dans la partie suivante, on s'intéresse aux équations aux différences linéaires à coefficients constants.

**Équations aux différences linéaire homogène à coefficients constants**

Considérons l'équation aux différences d'ordre $k$ suivante

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + p_2 y(n+k-2) + ... + p_k y(n) = 0 \ , \tag{1.10}$$

telle que $n \in \mathbb{N}_{n_0}, p_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k$ et $p_k \neq 0$.
Le but est de trouver un ensemble fondamental de solutions et par conséquent la solution générale de (1.10).

**Théorème 1.18.** *L'équation* (1.10) *a des solutions de la forme $x(n) = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, où $\lambda$ est une racine du polynôme*

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + ... + p_k.$$

**Démonstration.** On a $x(n) = \lambda^n$ solution de l'équation (1.10) donc

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + p_2 \lambda^{n+k-2} + ... + p_k \lambda^n = 0 \ ,$$

$$\lambda^n[\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_k] = 0 \ ,$$

et $\lambda^n \neq 0$ alors

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_k = 0.$$

**Définition 1.19.** *Le polynôme $P$ donne par*

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + ... + p_k,$$

*s'appelle polynôme caractéristique associé à l'équation aux différences* (1.10).

**Théorème 1.20.** *Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont $k$ racines deux à deux distinctes du polynôme $P$ alors $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.10).

**Démonstration.** Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ les racines distinctes du polynôme caractéristique, alors $\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n$ sont des solutions de l'équation (1.10) et soit $W(n)$ le Casoratien de ces solutions donc

$$\begin{aligned} W(n) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n & . \ . \ . & \lambda_k^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & . \ . \ . & \lambda_k^{n+1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & . \ . \ . & \lambda_k^{n+k-1} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . \ . \ . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . \ . \ . & \lambda_k \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & . \ . \ . & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1\lambda_2...\lambda_k)^n \prod_{1\leq i<j\leq k} (\lambda_i - \lambda_j). \end{aligned}$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ alors $W(n) \neq 0$ et par conséquent $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.10), et la solution générale de cette équation s'écrit

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_k\lambda_k^n \ ,$$

avec $c_i \in \mathbb{C},\ i = 1, ..., k,\ n \geq n_0$.

**Proposition 1.21.** *[2]*
*Supposons que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, $r < k$ sont les racines du polynôme caractéristique avec les multiplicités $m_1, m_2, ..., m_r$ respectivement telle que $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$ alors*

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, ..., n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n, ..., n^{m_2-1}\lambda_2^n, ..., \lambda_r^n, n\lambda_r^n, ..., n^{m_r-1}\lambda_r^n\}$$

*est un ensemble fondamental de l'équation* (1.10) *et la solution générale s'écrit*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^i \lambda_i^n, \quad c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Table 1.1 – Tableau des solutions particulières $y_p(n)$ de l'équation (1.2)

| g(n) | $y_p(n)$ |
|---|---|
| $a^n$ | $c_1 a^n$ |
| $n^K$ | $c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k$ |
| $n^k a^k$ | $c_0 a^n + c_1 n a^n + ... + c_k n^k a^n$ |
| $\sin(bn), \cos(bn)$ | $c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$ |
| $a^n \sin(bn), a^n \cos(bn)$ | $(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$ |
| $a^n n^k \sin(bn), a^n n^k \cos(bn)$ | $(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k)a^n \sin(bn) + (d_0 + d_1 n + ... + d_k n^k)a^n \cos(bn)$ |

**Exemple 1.22.** *Soit l'équation d'ordre* 2

$$y(n+2) + 8y(n+1) + 12y(n) = e^n\ ,\quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

*Le polynôme caractéristique est*

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 8\lambda + 12\ .$$

*Les racines sont $\lambda_1 = -6$ et $\lambda_2 = -2$.*

*Donc la solution générale de l'équation* (1.11) *est*

$$y_h(n) = c_1(-6)^n + c_2(-2)^n.$$

*Solution particulière de l'équation* (1.11) *a la forme*

$$y_p(n) = ke^n,$$

*on remplaça* $y_p(n) = ke^n$ *dans l'équation* (1.11)*, nous obtenons*

$$ke^{n+2} + 8ke^{n+1} + 12ke^n = e^n,$$

*donc*

$$ke^2 + 8ke + 12k = 1$$

*d'où*

$$k = \frac{1}{e^2 + 8e + 12}$$

*donc*

$$y_p(n) = \frac{e^n}{e^2 + 8e + 12} .$$

*Ainsi la solution générale de* (1.11)

$$\begin{aligned} y(n) &= y_p(n) + y_h(n) \\ &= c_1(-6)^n + c_2(-2)^n + \frac{e^n}{e^2 + 8e + 12} . \end{aligned}$$

## 1.2 Équations aux différences non linéaires

**Définition 1.23.** *Soit* $\mathbb{G}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{G}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{G}$ *une fonction continue.*

*Une équation aux différences non linéaire non autonome d'ordre* $k+1$ *est une équation de la forme*

$$x(n+1) = f(n, x(n), x(n-1), ..., x(n-k)), \quad n = 0, 1, 2... \tag{1.12}$$

*avec* $x(k), x(k-1), ..., x(1), x(0)$ *sont les valeurs initiales et la fonction* $f$ *n'est pas de la forme* (1.1)*.*

**Remarque.** *Une équation aux différences non linéaire autonome d'ordre* $k+1$ *est une équation de la forme*

$$x(n+1) = f(x(n), x(n-1), ..., x(n-k)), \quad n = 0, 1, 2... \tag{1.13}$$

**Exemple 1.24.** *L'équation*

$$x(n+2) = \frac{x(n-1)}{1 - x(n)x(n-1)} ,$$

*avec* $x(0), x(1) \in ]0, +\infty[$ , $n = 0, 1...$ *est une équation aux différence non linéaire autonome d'ordre* 3.

**Définition 1.25.** *Une solution de l'équation aux différences non linéaire* (1.12) ($respect$(1.13)) *est une suite vérifie l'équation* (1.12) ($respect$(1.13)).

En général, on ne peut pas résoudre les équations aux différences non linéaires. Mais il ya a équations que l'on peut résoudre on les transforme à des équations linéaires.

Dans cette partie on discute quelques types de ces équations.

**Transformation d'une équations aux différences non linéaire a une équation aux différences linéaire**

**Type 1 :** Équation de Riccati

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Pour résoudre cette équation, on pose

$$z(n) = \frac{1}{x(n)} \ ,$$

et en remplaçant dans (1.14), on trouve

$$q(n)z(n+1) + p(n)z(n) + 1 = 0 \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour l'équation non homogène

$$y(n+1)y(n) + p(n)y(n+1) + q(n)y(n) = g(n), \tag{1.15}$$

on pose

$$y(n) = \frac{z(n+1)}{z(n)} - p(n) \ ,$$

et en remplaçant dans (1.15) on obtient

$$z(n+2) + (q(n) - p(n+1))z(n+1) - (g(n) + p(n)q(n))z(n) = 0,$$

qui est une équation linéaire.

**Exemple 1.26.** *Résoudre l'équation* $x(n+1) = \frac{x(n)}{2+x(n)}$.

*on a*

$$x(n+1) = \frac{x(n)}{2 + x(n)} \ ,$$

*i.e.,*

$$2x(n+1) + x(n+1)x(n) = x(n).$$

*En posant*

$$x(n) = \frac{1}{y(n)}$$

*on trouve*

$$\frac{2}{y(n+1)} + \frac{1}{y(n+1)y(n)} = \frac{1}{y(n)} \ ,$$

*donc*

$$y(n+1) - 2y(n) = 1. \tag{1.16}$$

*Le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à* (1.16) *est*

$$P(\lambda) = \lambda - 2.$$

*Le seule racine du polynôme* $P$ *est* $\lambda = 2$ *donc*

$$y_h(n) = c_1 2^n.$$

*Solution particulière est*

$$y_p(n) = c,$$

*en remplaçant* $y_p(n)$ *dans* (1.16) *on obtient*

$$c - 2c = 1$$

*i.e.,* $c = -1$ *et donc*

$$y_p(n) = -1.$$

*D'où la solution générale de* (1.16) *est*

$$y(n) = c_1 2^n - 1.$$

*Et on a*

$$y_0 = c_1 - 1 \ et \ y_0 = \frac{1}{x_0} \ ,$$

*donc*

$$c_1 = \frac{x_0 + 1}{x_0},$$

*alors*

$$y(n) = \frac{(x_0+1)2^n - x_0}{x_0},$$

*d'où*

$$x(n) = \frac{x_0}{(x_0+1)2^n - x_0}.$$

**Type 2 :** Soit l'équation

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n)+b(n)}{c(n)x(n)+d(n)}, \tag{1.17}$$

avec $c(n) \neq 0$ et $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0,\ \forall n \geq 0.$

Pour résoudre cette équation on pose

$$c(n)x(n) + d(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}. \tag{1.18}$$

En substituant $x(n)$ par

$$\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}$$

dans (1.17) nous obtenons

$$\frac{y(n+2)}{c(n+1)y(n+1)} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} = \frac{a(n)\left[\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}\right] + b(n)}{\frac{y(n+1)}{y(n)}}$$

cette équation s'écrit sous la forme

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = c(0)x(0) + d(0), \tag{1.19}$$

où

$$p_1(n) = -\frac{c(n)d(n+1) + a(n)c(n+1)}{c(n)}$$

et

$$p_2(n) = (a(n)d(n) - b(n)c(n))\frac{c(n+1)}{c(n)}.$$

**Exemple 1.27.** *Résoudre l'équation aux différences*

$$x(n+1) = \frac{x(n)+b}{x(n)+1}, \quad b \neq 1, \quad b > 0, \tag{1.20}$$

*avec* $a = c = d = 1,$ *et on a* $ad - bc = 1 - b \neq 0$ *car* $b \neq 1$

*on pose*

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)} - 1 \tag{1.21}$$

*dans* (1.20)*, on obtient*

$$y(n+2) - 2y(n+1) + (1+b)y(n) = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = x(0) + 1.$$

*Le polynôme caractéristique de cette équation est*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + (b+1).$$

*Les racines du polynôme caractéristique sont*

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{b} \text{ et } \lambda_1 = 1 + \sqrt{b},$$

*par conséquent*

$$y_h(n) = c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n.$$

*De la forme* (1.21) *nous avons*

$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{y(n+1)}{y(n)} - 1 \\
&= \frac{c_1(1-\sqrt{b})^{n+1} + c_2(1+\sqrt{b})^{n+1}}{c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n} - 1 \\
&= \frac{c_1(1-\sqrt{b})^{n+1} + c_2(1+\sqrt{b})^{n+1} - c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n}{c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n} \\
&= \frac{c_1(1-\sqrt{b})^n[1-\sqrt{b}-1] + c_2(1+\sqrt{b})^n[1+\sqrt{b}-1]}{c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n} \\
&= \frac{-\sqrt{b}c_1(1-\sqrt{b})^n + \sqrt{b}c_2(1+\sqrt{b})^n}{c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n} \\
&= \frac{\sqrt{b}[-c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n]}{c_1(1-\sqrt{b})^n + c_2(1+\sqrt{b})^n} \\
&= \frac{\sqrt{b}[-(1-\sqrt{b})^n + c(1+\sqrt{b})^n]}{(1-\sqrt{b})^n + c(1+\sqrt{b})^n},
\end{aligned}$$

*avec* $c = \frac{c_2}{c_1}$.

**Type3 :** Équations aux différences homogènes de type

$$f\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0.$$

On pose

$$z(n) = \frac{x(n+1)}{x(n)}$$

Pour obtenir une équation linéaire en $z(n)$.

**Exemple 1.28.** *Résoudre l'équation aux différences*

$$(y(n+1))^2 - 2y(n+1)y(n) - 3(y(n))^2 = 0. \tag{1.22}$$

*En divisant par* $(y(n))^2$*, l'équation* (1.22) *revient*

$$\left(\frac{y(n+1)}{y(n)}\right)^2 - \left(\frac{y(n+1)}{y(n)}\right) - 3 = 0, \tag{1.23}$$

*qui est du type 3.*

*On pose*

$$z(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}$$

*dans l'équation* (1.23)*, on obtient*

$$z(n)^2 - 2z(n) - 3 = 0,$$

*i.e.,*

$$(z(n)+1)(z(n)-3) = 0,$$

*alors*

$$y(n+1) = -1y(n) \text{ ou } y(n+1) = 3y(n)$$

*i.e.,*

$$y(n+1) + y(n) = 0 \text{ ou } y(n+1) - 3y(n) = 0.$$

*Donc les solutions sont*

$$y(n) = c_1 \ \text{ ou } \ y(n) = c_2 3^n.$$

**Type4 :** Considérons l'équation suivante

$$(y(n+k))^{r_1}(y(n+k-1))^{r_2}...(y(n))^{r_{k-1}} = g(n),$$

avec $r_i$ et $g(n)$ sont des valeurs positives, $i = 1,\ 2, ..., k-1$.

Soit $z(n) = lny(n)$.

Alors

$$r_1 z(n+k) + r_2 z(n+k-1) + ... + r_{k+1} z(n) = lng(n).$$

**Exemple 1.29.** *Résoudre l'équation aux différences*

$$y(n+2) = \frac{(y(n+1))^3}{(y(n))^2}\ . \tag{1.24}$$

*Soit* $z(n) = ln(y(n))$.
*Alors* (1.24) *revient*

$$z(n+2) - 3z(n+1) + 2z(n) = 0.$$

*Le polynôme caractéristique est*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

*Donc le racines caractéristiques sont*

$$\lambda_1 = 1 \ et \ \lambda_2 = 2.$$

*Alors*

$$z(n) = c_1 + c_2 2^n.$$

*Donc*

$$y(n) = e^{z(n)} = e^{c_1 + c_2(2)^n}.$$

## 1.3 Notion de stabilité

**Définition 1.30.** *Un point* $\bar{x} \in \mathbb{G}$ *est dit point d'équilibre de l'équation* (1.13) *si*

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x}).$$

**Définition 1.31.** *Supposons que la fonction* $f$ *dans l'équation* (1.13) *est différentiable au voisinage du point* $\bar{x}$, *alors l'équation linéaire associée à l'équation* (1.13) *autour du point d'équilibre* $\bar{x}$ *est donnée par*

$$y(n+1) = c_0 y(n) + c_1 y(n-1) + ... + c_k y(n-k), \tag{1.25}$$

*avec*

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x}), \ i = 0, ..., k \ ,$$

*où* $u_0 = x(n), u_1 = x(n-1), ..., u_k = x(n-k)$.
*Le polynôme caractéristique associé à l'équation* (1.25) *est*

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_0 \lambda^k - ... - c_k. \tag{1.26}$$

**Définition 1.32.** *Soit* $\bar{x}$ *un point d'équilibre de l'équation* (1.13).

*i) On dit que $\bar{x}$ est localement stable si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x(-k), ..., x(0) \in \mathbb{G} : |x(-k) - \bar{x}| + ... + |x(0) - \bar{x}| < \delta$$

$$alors\ |x(n) - \bar{x}| < \varepsilon, \forall n \geq -k.$$

*ii) On dit que $\bar{x}$ est localement asymptotiquement stable si $\bar{x}$ est localement stable et*

$$\forall\delta > 0, \forall x(-k), ..., x(0) \in \mathbb{G} : |x(-k)-\bar{x}|+...+|x(0)-\bar{x}| < \delta \ alors \ \lim_{n\to+\infty} x(n) = \bar{x}.$$

*iii) On dit que $\bar{x}$ est globalement attractif si*

$$\forall x(-k), ..., x(0) \in \mathbb{G} : \lim_{n\to+\infty} x(n) = \bar{x}.$$

*iv) On dit que $\bar{x}$ est globalement asymptotiquement stable s'il est localement stable et globalement attractif.*

*v) Le point $\bar{x}$ est dit instable s'il n'est pas stable.*

**Théorème 1.33.** *(Stabilité par linéarisation)*

*i) Si toutes les racines du polynôme caractéristique sont de module inférieure à* 1 *alors point d'équilibre de l'équation* (1.13) *est localement asymptotiquement stable.*

*ii) S'il existe, au moins une racine du polynôme caractéristique de module supérieur à* 1 *alors le point d'équilibre $\bar{x}$ est instable.*

**Théorème 1.34.** *[3] Supposons que les coefficients de l'équation* (1.25) *$c_0$, $c_1$,..., $c_k$ sont des nombres réels vérifient*

$$|c_0| + |c_1| + ... + |c_k| < 1,$$

*alors toutes les racines du polynôme caractéristique* (1.26) *sont de module inférieur à 1.*

# CHAPITRE 2

# QUELQUES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre on étudie deux équations aux différences non linéaires d'ordre 3 et $k+1$. Les références utilisées sont [4] et [5].

## 2.1 L'équation $x(n+1) = \frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)(a+bx(n)x(n-2))}$

Considérons l'équation aux différences d'ordre 3 suivante

$$x(n+1) = \frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)(a+bx(n)x(n-2))}, \quad n = 0, 1, ... \tag{2.1}$$

avec les valeurs initiales $x(0)$, $x(-1)$ et $x(-2)$ sont des nombres réels strictement positifs, $x(-1) \neq 0$ et $bx(0)x(-2) \neq a$.

Dans les théorèmes suivants, on donne les solutions de l'équation (2.1) dans 3 cas différents.

$1^{er}$ **Cas :** si $a = b = 1$ .

Dans ce cas l'équation (2.1) revient

$$x(n+1) = \frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)(1+x(n)x(n-2))} \ . \tag{2.2}$$

**Théorème 2.1.** *Soit $x(n)$ une solution de l'équation (2.2) où les valeurs initiales $x(0)$, $x(-1)$ et $x(-2)$ sont des nombres réels strictement positifs. Alors la solution de l'équation (2.2) a la forme suivante*

$$x(4n-3) = \frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))} \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))} \right]. \tag{2.3}$$

$$x(4n-2) = x(-2) \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))} \right]. \tag{2.4}$$

$$x(4n-1) = x(-1) \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))} \right]. \tag{2.5}$$

$$x(4n) = x(0) \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))} \right]. \tag{2.6}$$

*où* $n = 1, 2...$

**Démonstration.** Montrons le résultat par récurrence.

Le résultat est vrai pour $n = 1$.

Supposons que $n > 0$ et le résultat est vrai pour $n = n - 1$, i.e.,

$$x(4n-7) = \frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))} \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))} \right] \tag{2.7}$$

$$x(4n-6) = x(-2) \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))} \right] \tag{2.8}$$

$$x(4n-5) = x(-1) \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))} \right] \tag{2.9}$$

$$x(4n-4) = x(0) \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))} \right] \tag{2.10}$$

et montrons qu'il est vrai pour n.

De (2.2), (2.8), (2.9) et (2.10) on trouve

$$x(4n-3) = \frac{x(4n-4)x(4n-6)}{x(4n-5)(1+x(4n-4)x(4n-6))}$$

$$x(4n-3)=\frac{\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\right\}\left\{x(-2)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right]\right\}}{\left\{x(-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}\right]\right\}}$$

$$\times\frac{1}{\left(1+\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\right\}\left\{x(-2)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right]\right\}\right)}$$

$$=\left(\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)}\right)\frac{1}{(1+(4n-4)x(0)x(-2))(1+x(0)+x(-2)/(1+(4n-4)x(0)x(-2))}$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]$$

$$=\left(\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)}\right)\frac{1}{(1+(4n-4)x(0)x(-2)+x(0)+x(-2))}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]$$

$$=\left(\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)}\right)\frac{1}{(1+(4n-3)x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]$$

$$x(4n-3)=\left(\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)}\right)\frac{1}{1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right].$$

De (2.2), (2.3), (2.9) et (2.10) nous avons

$$x(4n-2)=\frac{x(4n-3)x(4n-5)}{x(4n-4)(1+x(4n-3)x(4n-5))}$$

$$=\frac{\left\{\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]\right\}\left\{x(-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}\right]\right\}}{\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\right\}}$$

$$\times\frac{1}{\left[1+\left\{\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]\right\}\left\{x(-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}\right]\right\}\right]}$$

$$=\frac{\left\{\frac{x(0)x(-2)(1+(4n-5)x(0)x(-2))}{(1-x(0)x(-2))(1+(4n-3)x(0)x(-2))}\frac{(1-x(0)x(-2))}{(1+(4n-5)x(0)x(-2)}\right\}}{\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\right\}\left[1+\left\{\frac{x(0)x(-2)(1+(4n-5)x(0)x(-2))}{(1-x(0)x(-2))(1+(4n-3)x(0)x(-2))}\frac{(1-x(0)x(-2))}{(1+(4n-5)x(0)x(-2))}\right\}\right]}$$

$$=\frac{\left\{\frac{x(-2)}{(1+(4n-3)x(0)x(-2))}\right\}}{\left[1+\left\{\frac{x(0)x(-2)}{(1+(4n-3)x(0)x(-2))}\right\}\right]}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right]$$

$$=\frac{x(-2)}{[1+(4n-3)x(0)x(-2)+x(0)x(-2)]}\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{(1+(4i)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right]$$

$$x(4n-2)=x(-2)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right].$$

De (2.2), (2.3), (2.4) et (2.10) on trouve

$$\begin{aligned}
x(4n-1) &= \frac{x(4n-2)x(4n-4)}{x(4n-3)(1+x(4n-2)x(4n-3)} \\
&= \frac{\left\{x(-2)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i-2)x(0)x(-2)}\right]\right\}\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1+(4i-2)x(0)x(-2)}{1+(4i)x(0)x(-2)}\right]\right\}}{\left\{\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-5)x(0)x(-2)}{1+(4i-3)x(0)x(-2)}\right]\right\}} \\
&\quad\times\frac{1}{\left[1+\left\{x(-2)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i-2)x(0)x(-2)}\right]\right\}\left\{x(0)\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1+(4i-2)x(0)x(-2)}{1+(4i)x(0)x(-2)}\right]\right\}\right]} \\
&= \frac{x(-1)(1-x(0)x(-2))\left[\frac{1+(4n-4)x(0)x(-2)}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i)x(0)x(-2)}\right]\right\}}{\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-5)x(0)x(-2)}{1+(4i-3)x(0)x(-2)}\right]\right\}\left[1+x(0)x(-2)\left[\frac{1+(4n-4)x(0)x(-2)}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]\left\{\prod_{i=1}^{n-1}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i)x(0)x(-2)}\right]\right\}\right]} \\
&= \frac{x(-1)(1-x(0)x(-2))\left[\frac{1+(4n-4)x(0)x(-2)}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]\left\{\frac{1}{1+(4n-4)x(0)x(-2)}\right\}}{\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-5)x(0)x(-2)}{1+(4i-3)x(0)x(-2)}\right]\right\}\left[1+x(0)x(-2)\left[\frac{1+(4n-4)x(0)x(-2)}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]\left\{\frac{1}{1+(4n-4)x(0)x(-2)}\right\}\right]} \\
&= \frac{x(-1)(1-x(0)x(-2))\left[\frac{1}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]}{\left[1+x(0)x(-2)\left[\frac{1}{1+(4n-2)x(0)x(-2)}\right]\right]}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-3)x(0)x(-2)}{1+(4i-5)x(0)x(-2)}\right] \\
&= \frac{x(-1)(1-x(0)x(-2))}{[1+(4n-1)x(0)x(-2)]}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-3)x(0)x(-2)}{1+(4i-5)x(0)x(-2)}\right] \\
&= \frac{x(-1)(1-x(0)x(-2))}{(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-3)x(0)x(-2)}{1+(4i-1)x(0)x(-2)}\right]
\end{aligned}$$

$$x(4n-1) = x(-1)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-3)x(0)x(-2)}{1+(4i-1)x(0)x(-2)}\right].$$

De (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5) on a

$$\begin{aligned}
x(4n) &= \frac{x(4n-1)x(4n-3)}{x(4n-2)(1+x(4n-1)x(4n-3))} \\
&= \frac{\frac{x(0)}{1-x(0)x(-2)}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-5)x(0)x(-2)}{1+(4i-1)x(0)x(-2)}\right]\right\}}{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i-2)x(0)x(-2)}\right]\left(1+\frac{x(0)}{1-x(0)x(-2)}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-5)x(0)x(-2)}{1+(4i-1)x(0)x(-2)}\right]\right\}\right)} \\
&= \frac{\frac{x(0)}{1+(4n-1)x(0)x(-2)}}{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-4)x(0)x(-2)}{1+(4i-2)x(0)x(-2)}\right]\left(1+\frac{x(0)}{1+(4n-1)x(0)x(-2)}\right)} \\
&= \frac{x(0)}{(1+(4n-1)x(0)x(-2)+x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-2)x(0)x(-2)}{1+(4i-4)x(0)x(-2)}\right] \\
&= \frac{x(0)}{1+(4n)x(0)x(-2)}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-2)x(0)x(-2)}{1+(4i-4)x(0)x(-2)}\right]
\end{aligned}$$

$$x(4n) = x(0)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1+(4i-2)x(0)x(-2)}{1+(4i)x(0)x(-2)}\right].$$

**Proposition 2.2.** *Soit* $p = x(0)x(-2)$.

*Nous avons les relations suivantes entre les terme de la solution de l'équations* (2.2).

*i)* $x(4n-3)x(4n-1) = \frac{p}{1+(4n-1)p}$

*ii)* $x(4n)x(4n-2) = \frac{p}{1+(4n)p}$

*iii)* $\frac{1}{x(4n)x(4n-2)} - \frac{1}{x(4n-3)x(4n-1)} = 1.$

**Démonstration.**

i) De l'équation (2.3) et l'équation (2.5) nous avons

$$\begin{aligned}
x(4n-3)x(4n-1) &= \left\{\frac{x(0)x(-2)}{x(-1)(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}\right]\right\} \\
&\quad \times \left\{x(-1)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-3)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}\right]\right\} \\
&= \left\{\frac{x(0)x(-2)}{(1-x(0)x(-2))}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)x(0)x(-2))}{(1+(4i-1)x(0)x(-2))}\right]\right\} \\
&= \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)(1+3p)...(1+(4n-5)p)}{(1-p)(1+3p)(1+7p)...(1+(4n-1)p)} \\
&= \frac{p}{(1-p)}\frac{(1-p)}{(1+(4n-1)p)} \\
x(4n-3)x(4n-1) &= \frac{p}{(1+(4n-1)p)}\ .
\end{aligned}$$

ii) De l'équation (2.4) et l'équation (2.6) nous avons

$$\begin{aligned}
x(4n)x(4n-2) &= x(0)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\left\{x(-2)\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i-2)x(0)x(-2))}\right]\right\} \\
&= x(0)x(-2)\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-4)x(0)x(-2))}{(1+(4i)x(0)x(-2))}\right]\right\} \\
&= p\frac{(1)(1+4p)...(1+(4n-4)p)}{(1+4p)(1+8p)...(1+(4n)p)} \\
x(4n)x(4n-2) &= \frac{p}{(1+(4n)p)}\ .
\end{aligned}$$

iii) On a de *i)* et *ii)*

$$\frac{1}{x(4n-3)x(4n-1)} = \frac{1+(4n-1)p}{p}$$

et

$$\frac{1}{x(4n)x(4n-2)} = \frac{1+(4n)p}{p}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(4n)x(4n-2)}-\frac{1}{x(4n-3)x(4n-1)}&=\frac{1+(4n)p}{p}-\frac{1+(4n-1)p}{p}\\&=\frac{p}{p}\\&=1.\end{aligned}$$

**Théorème 2.3.** *Toute solution de l'équation* (2.2) *est majorée.*

**Démonstration.** Nous avons

$$\begin{aligned}x(n+1)&=\frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)(1+x(n)x(n-2))}\\&=\frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)+x(n-1)x(n)x(n-2)}\leq\frac{1}{x(n-1)}.\end{aligned}$$

Alors

$$x(n)\leq\frac{1}{x(n-2)}\quad \textit{pour tout}\quad n\geq 0.$$

Donc chaque solution de l'équation (2.2) est majorée par

$$M=\max\left(\frac{1}{x(0)},\frac{1}{x(-1)},\frac{1}{x(-2)}\right).$$

$2^{\text{ème}}$**Cas :** $a=1$ et $b=-1$ .

Dans ce cas l'équation (2.1) revient

$$x(n+1)=\frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)(1-x(n)x(n-2))}. \tag{2.11}$$

**Théorème 2.4.** *Soit $x(n)$ une solution de l'équation* (2.11) *et $x(0)=h$, $x(-1)=k$ , $x(-2)=r$ et $p=x(0)x(-2)$.*

*Donc la solution de l'équation* (2.11) *a la forme suivante*

$$x(4n-3)=\frac{hr}{k(1-p)}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-5)p)}{(1-(4i-3)p)}\right]. \tag{2.12}$$

$$x(4n-2)=r\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-4)p)}{(1-(4i-2)p)}\right]. \tag{2.13}$$

$$x(4n-1)=k\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-3)p)}{(1-(4i-1)p)}\right]. \tag{2.14}$$

$$x(4n)=h\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+(4i-2)p)}{(1-(4i)p)}\right]. \tag{2.15}$$

*où $n=1,2...$*

$3^{\text{ème}}$**Cas :** si $a \neq 1$ .

**Théorème 2.5.** *Soit $x(n)$ une solution de l'équation (2.1) et $x(0) = h$, $x(-1) = k$ , $x(-2) = r$.*
*Alors la solution de l'équation (2.1) a la forme suivante*

$$x(1) = \frac{p}{k(a+bp)}, \qquad x(2) = \frac{r}{a^2+2abp} .$$

$$x(3) = \frac{k(a+b)}{a^3(a^2+1)bp}, \qquad x(4) = \frac{h(a^2+2ab)}{a^4+(2a^3+a+1)bp} .$$

$$x(4n-3) = \frac{p}{k(a+bp)} \prod_{i=2}^{n} \left[ \frac{a^{4i-5} + bp\{2a^{2i-6} + \frac{1-a^{4i-7}}{1-a}\}}{a^{4i-3} + bp\{2a^{4i-4} + \frac{1-a^{4i-5}}{1-a}\}} \right].$$

$$x(4n-2) = r\frac{\prod_{i=1}^{n-1} a^{4i} + bp\{2a^{4i-1} + \frac{1-a^{4i-2}}{1-a}\}}{\prod_{i=1}^{n} a^{4i-2} + bp\{2a^{4i-3} + \frac{1-a^{4i-4}}{1-a}\}}.$$

$$x(4n-1) = k\frac{\prod_{i=2}^{n} a^{4i-3} + bp\{2a^{4i-4} + \frac{1-a^{4i-5}}{1-a}\}}{\prod_{i=2}^{n+1} a^{4i-5} + bp\{2a^{4i-6} + \frac{1-a^{4i-7}}{1-a}\}}.$$

$$x(4n) = h \prod_{i=1}^{n} \left[ \frac{a^{4i-2} + bp\{2a^{2i-3} + \frac{1-a^{4i-4}}{1-a}\}}{a^{4i} + bp\{2a^{4i-1} + \frac{1-a^{4i-2}}{1-a}\}} \right].$$

*où $p = x(0)x(-2)$ et $n = 1, 2...$*

Maintenant revenons à l'équation (2.1) et cherchons ses points d'équilibre puis nous étudions la stabilité de ces points.

**Lemme 2.6.** *Les points d'équilibre de l'équation aux différences (2.1) sont $\pm\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ si $\{a \in ]-\infty, 1[$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$ ou $a \in ]1, +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}_-^*\}$.*

**Démonstration.** Pour trouver les points d'équilibre de (2.1), on résout l'équation $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$.

On a

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}(a+b\bar{x}^2)},$$

donc

$$\bar{x}^2(a+b\bar{x}^2) = \bar{x}^2,$$

i.e.,

$$\bar{x}^2(-1+a+b\bar{x}^2) = 0$$

alors

$$\bar{x}^2 = 0 \; (absurde \; car \; l'équation \; (2.1) \; n'est \; pas \; definien \; 0)$$

$$ou \quad -1 + a + b\bar{x}^2 = 0,$$

donc

$$\bar{x}^2 = \frac{1-a}{b} \; .$$

On distingue 2 cas différents.

Si $(a,b) \in (]-\infty,1]\times]-\infty,1]) \cup ([1,+\infty[\times]1,+\infty[)$, le seul point d'équilibre est 0.

Si $(a,b) \in (]-\infty,1[\times]0,+\infty[) \cup (]1,+\infty[\times]-\infty,0[)$, alors les points d'équilibre sont $\pm\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ .

**Théorème 2.7.** *Les points d'équilibre* $\pm\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ *sont instables.*

**Démonstration.** Soit $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ la fonction continue définie par

$$f(u,v,w) = \frac{uw}{v(a+buw)}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u} &= \frac{v(a+buw)w - uw(vbw)}{v^2(a+buw)^2} \\
&= \frac{aw}{v(a+buw)^2}, \\
\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v} &= \frac{-uw}{v^2(a+buw)},
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w} = \frac{au}{v(a+buw)^2}.$$

et

$$\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v} = 0.$$

Nous allons prouver le théorème au point d'équilibre $\bar{x} = +\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ .

En le point d'équilibre $\bar{x} = \sqrt{\frac{1-a}{b}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial u} &= \frac{a}{(a+b(\frac{1-a}{b}))^2} = a = p_1 \\
\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v} &= -1 = p_2,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial w} = a = p_3.$$

Alors l'équation linéaire associée à (2.1) en $\bar{x} = \sqrt{\frac{1-a}{b}}$ est

$$y(n+1) - p_1 y(n) - p_2 y(n-1) - p_3 y(n-2) = 0,$$

i.e.,

$$y(n+1) - ay(n) + y(n-1) - ay(n-2) = 0. \tag{2.16}$$

C'est l'équation caractéristique de (2.16) est

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda - a = 0.$$

Les racines de ce polynôme sont $i$, $-i$ et $a$.
On a $|a| > 1$ car $a \in ]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, donc d'après le théorème (1.33), le point $+\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ est instable.
De même pour le point $-\sqrt{\frac{1-a}{b}}$ .

## 2.2 L'équation $x(n+1) = \frac{\beta x(n)+\gamma x(n-k)}{Bx(n)+Cx(n-k)}$

Considérons l'équation aux différences d'ordre $k+1$

$$x(n+1) = \frac{\beta x(n) + \gamma x(n-k)}{Bx(n) + Cx(n-k)}, n = 0, 1, ... \tag{2.17}$$

avec les paramètres $\beta, \gamma$ et $B, C$ et les conditions initiales $x(-k), ..., x(-1), x(0)$ sont des nombres positifs, $k = 1, 2, ...$

En posant $x(n) = \frac{\gamma}{C} y(n)$ dans l'équation (2.17) on trouve

$$\frac{\gamma}{C} y(n+1) = \frac{\beta\frac{\gamma}{C} y(n) + \gamma\frac{\gamma}{C} y(n-k)}{B\frac{\gamma}{C} y(n) + C\frac{\gamma}{C} y(n-k)}$$

donc

$$\frac{\gamma}{C} y(n+1) = \frac{\frac{\gamma}{C}(\beta y(n) + \gamma y(n-k))}{\frac{\gamma}{C}(By(n) + Cy(n-k))}$$

i.e.,

$$\frac{\gamma}{C} y(n+1) = \frac{\gamma(\frac{\beta}{\gamma} y(n) + y(n-k))}{C(\frac{B}{C} y(n) + y(n-k))},$$

alors

$$y(n+1) = \frac{\frac{\beta}{\gamma} y(n) + y(n-k)}{\frac{B}{C} y(n) + y(n-k)},$$

on pose $p = \frac{\beta}{\gamma}$ et $q = \frac{B}{C}$, on obtient

$$y(n+1) = \frac{py(n) + y(n-k)}{qy(n) + y(n-k)}, n = 0, 1, ... \tag{2.18}$$

avec $p \neq q$.

**Lemme 2.8.** *L'équation* (2.18) *a un seul point d'équilibre qui est* $\bar{y} = \frac{p+1}{q+1}$ .

**Démonstration.** Soit $\bar{y}$ un point d'équilibre de l'équation (2.18) et $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ la fonction continue définie par

$$f(u, v) = \frac{pu + v}{qu + v}.$$

On a

$$\begin{aligned} \bar{y} &= f(\bar{y}, \bar{y}) \\ &= \frac{p\bar{y} + \bar{y}}{q\bar{y} + \bar{y}} \\ &= \frac{\bar{y}(p+1)}{\bar{y}(q+1)} \\ &= \frac{p+1}{q+1} . \end{aligned}$$

Donc l'équation (2.18) admet un seul point d'équilibre positif $\bar{y} = \frac{p+1}{q+1}$.

**Lemme 2.9.** *L'équation linéaire associée à l'équation* (2.17) *est*

$$z(n+1) - az(n) + az(n-k) = 0, \tag{2.19}$$

*où* $a = \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}$.

**Démonstration.** Soit $f : ((0, \infty) \to (0, \infty)$ la fonction continue définie par

$$f(u, v) = \frac{pu + v}{qu + v}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{p(qu+v) - q(pu+v)}{(qu+v)^2} \\ &= \frac{v(p-q)}{(qu+v)^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u(q-p)}{(qu+v)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{y},\bar{y}) &= \frac{\bar{y}(p-q)}{(q\bar{y}+\bar{y})^2}\\ &= \frac{\bar{y}(p-q)}{[\bar{y}(q+1)]^2}\\ &= \frac{\frac{p+1}{q+1}(p-q)}{[\frac{p+1}{q+1}(p+1)]^2}\\ &= \frac{(p+1)(p-q)}{(q+1)(p+1)^2}\\ &= \frac{p-q}{(q+1)(p+1)}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{y},\bar{y}) &= \frac{\bar{y}(q-p)}{(q\bar{y}+\bar{y})^2}\\ &= \frac{\bar{y}(q-p)}{[\bar{y}(q+1)]^2}\\ &= \frac{\frac{p+1}{q+1}(q-p)}{[\frac{p+1}{q+1}(q+1)]^2}\\ &= \frac{(p+1)(q-p)}{(q+1)(p+1)^2}\\ &= \frac{q-p}{(q+1)(p+1)}.\end{aligned}$$

Alors

$$z(n+1) = \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}z(n) + \frac{q-p}{(q+1)(p+1)}z(n-k).$$

On pose $a = \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}$, on trouve

$$z(n+1) = az(n) - az(n-k),$$

i.e.,

$$z(n+1) - az(n) + az(n-k) = 0.$$

**Théorème 2.10.** *Le point d'équilibre $\bar{y} = \frac{p+1}{q+1}$ de l'équation* (2.18) *est localement asymptotiquement stable si la condition suivante est vérifiée,*

$$-\frac{1}{3}(p(q-1)+1) < q < pq + 3p + 1. \tag{2.20}$$

**Démonstration.** Le polynôme caractéristique de l'équation (2.19) est

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - a\lambda^k + a.$$

La première inégalité de la relation (2.20) i.e.,

$$-\frac{1}{3}(p(q-1)+1) < q,$$

nous donne

$$pq - p + 1 > -3q$$

i.e.,

$$(p+1)(q+1) > 2(p-q),$$

donc

$$\frac{1}{2} > \frac{p-q}{(p+1)(q+1)}. \tag{2.21}$$

De la deuxième inégalité i.e.,

$$q < pq + 3p + 1,$$

on obtient

$$-q > -(pq + 3p + 1),$$

i.e.,

$$2(p-q) < -(p+1)(q+1),$$

alors

$$\frac{p-q}{(p+1)(q+1)} > -\frac{1}{2}. \tag{2.22}$$

De (2.21) et (2.22) on trouve

$$-\frac{1}{2} < \frac{p-q}{(p+1)(q+1)} < \frac{1}{2}$$

i.e.,

$$|a| < \frac{1}{2},$$

alors

$$2|a| < 1.$$

D'après le Théorème (1.34), le point d'équilibre de l'équation (2.18) est localement asymptotiquement stable.

# CHAPITRE 3

# SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES NON LINÉAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes sur les systèmes et on étudie la stabilité des points d'équilibre de deux système d'équations aux différences non linéaires. Les références utilisées sont [1] et [7].
Considérons le système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n), ..., x(n-k), y(n), ..., y(n-r)) \\ y(n+1) = g(x(n), ..., x(n-k), y(n), ..., y(n-r)) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $n = 0, 1, ...$ *et* $f : I^{k+1} \times J^{r+1} \rightarrow I$ et $g : I^{k+1} \times J^{r+1} \rightarrow J$ sont des fonctions continues différentiables et $I, J$ sont des intervalles de nombres réels, et $x(-k), ..., x(0) \in I$, $y(-r), ..., y(0) \in J$ sont les valeurs initiales.

Pour étudier la stabilité des points d'équilibres du système (3.1) on le ramené à une équation aux différences non linéaire d'ordre 1.
Posons

$$X(n) = (x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r))^t \ .$$

Alors le système (3.1) s'écrit

$$X(n+1) = F(X(n)) \quad n = 0, 1, ... \tag{3.2}$$

Avec
$X(n+1) = (x(n+1), x(n), ..., x(n-k+1), y(n+1), y(n), ..., y(n-r+1))^t$
et

$$F(X(n)) = \begin{pmatrix} f_0(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ f_1(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ . \\ . \\ . \\ f_k(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ g_0(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ g_1(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ . \\ . \\ . \\ g_r(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ x(n) \\ . \\ . \\ . \\ x(n-k+1) \\ g(x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-k), y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-r)) \\ y(n) \\ . \\ . \\ . \\ y(n-r+1) \end{pmatrix}.$$

**Définition 3.1.** *Un point* $(\bar{x}, \bar{y}) \in I \times J$ *est dit point d'équilibre du système* (3.1) *si*

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, ..., \bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{y}) \\ \bar{y} = f(\bar{x}, ..., \bar{x}, \bar{y}, ..., \bar{y}) \end{cases} . \tag{3.3}$$

**Définition 3.2.** *Un point d'équilibre de l'équation*(3.2) *est un vecteur*
$\bar{X} \in I^{k+1} \times J^{r+1}$

$$\bar{X} = F(\bar{X}).$$

**Définition 3.3.** *Soit* $\bar{X}$ *un point d'équilibre du système* (3.2) *.*

*i) Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit stable(localement stable) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall X(0) \in I^{k+1} \times J^{r+1} : \|X(0) - \bar{X}\| < \delta \Rightarrow \|X(n) - \bar{X}\| < \varepsilon, \ \forall n \geq 0.$$

*Sinon* $\bar{X}$ *est dit instable.*

*ii) Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit asymptotiquement stable(localement asymptotiquement stable) s'il est stable et*

$$\exists \gamma > 0, \forall X(0) \in I^{k+1} \times J^{r+1} : \|X(0) - \bar{X}\| < \gamma \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|X(n) - \bar{X}\| = 0.$$

*iii) Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit globalement attractif si*

$$\forall X(0) \in I^{k+1} \times J^{r+1} \quad on \ a \lim_{n \to +\infty} X(n) = \bar{X}.$$

*iv) Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit globalement asymptotiquement stable(globalement stable) s'il est stable et globalement attractif.*

**Définition 3.4.** *Soit* $\bar{X}$ *un point d'équilibre de* (3.2) *.*

*Supposons* $F \in C^1(I^{k+1} \times J^{r+1})$*, alors le système linéaire associé à l'équation* (3.2) *est*

$$Y(n+1) = AY(n), \quad n = 0, 1, ...$$

*avec*

$$Y(n) \in \mathbb{R}^{k+r+2},$$

*et*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_0}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial f_0}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_0}{\partial V_r}(\bar{X}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial f_1}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial V_r}(\bar{X}) \\ . & . & & & . & . & . & & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & & . & . & . & & & . & . \\ \frac{\partial f_k}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_k}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial f_k}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial f_k}{\partial V_r}(\bar{X}) \\ \frac{\partial g_0}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_0}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial g_0}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_0}{\partial V_r}(\bar{X}) \\ \frac{\partial g_1}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_1}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial g_1}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_1}{\partial V_r}(\bar{X}) \\ . & . & & & . & . & . & & & . \\ . & & . & & . & . & & . & & . \\ . & & & . & . & . & & & . & . \\ \frac{\partial g_r}{\partial U_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_r}{\partial U_k}(\bar{X}) & \frac{\partial g_r}{\partial V_0}(\bar{X}) & . & . & . & \frac{\partial g_r}{\partial V_r}(\bar{X}) \end{pmatrix},$$

*la matrice jacobienne associée au système* (3.1) *autour du point d'équilibre* $\bar{X}$.

**Théorème 3.5.** *(Stabilité par linéarisation)*
*Soit* $\bar{X}$ *un point d'équilibre de* (3.2). *Alors*

*i) Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $A$ sont de module strictement inférieur à* 1*, donc le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est localement asymptotiquement stable.*

*ii) S'il existe une valeur propre de la matrice $A$ sont de module supérieur à* 1 *donc le point d'équilibre est instable.*

## 3.1 Le système

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n-3)}{\beta+\gamma y(n)y(n-1)y(n-2)y(n-3)},\ y(n+1) = \frac{\alpha_1 y(n-3)}{\beta_1+\gamma_1 x(n)x(n-1)x(n-2)x(n-3)}$$

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{\alpha x(n-3)}{\beta+\gamma y(n)y(n-1)y(n-2)y(n-3)} \\ y(n+1) = \frac{\alpha_1 y(n-3)}{\beta_1+\gamma_1 x(n)x(n-1)x(n-2)x(n-3)} \quad n = 0, 1, ... \end{cases} \tag{3.4}$$

où les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et le conditions initiales $x(0), x(-1), x(-2), x(-3), y(0), y(-1)$, $y(-2), y(-3)$ sont des nombres positifs.

**Lemme 3.6.** *Les points d'équilibre du système* (3.4) *sont*

$p_0 = (0,0)$

*et si* $\alpha > \beta$ *et* $\alpha_1 > \beta_1$ *on a* $p_1 = (A,B), p_2 = (-A,B), p_3 = (A,-B)$ *et* $p_4 = (-A,-B)$, *avec* $A = (\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_1})^{\frac{1}{4}}$ *et* $B = (\frac{\alpha-\beta}{\gamma})^{\frac{1}{4}}$.

**Démonstration.** Nous avons

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x},\bar{x},\bar{x},\bar{x},\bar{y},\bar{y},\bar{y},\bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x},\bar{x},\bar{x},\bar{x},\bar{y},\bar{y},\bar{y},\bar{y}) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\alpha\bar{x}}{\beta+\gamma\bar{y}^4} \\ \bar{y} = \frac{\alpha_1\bar{y}}{\beta_1+\gamma_1\bar{x}^4} \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} \bar{x}(\beta+\gamma\bar{y}^4) = \alpha\bar{x} \\ \bar{y}(\beta_1+\gamma_1\bar{x}^4) = \alpha_1\bar{y}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \bar{x}(\beta-\alpha+\gamma\bar{y}^4) = 0 \\ \bar{y}(\beta_1-\alpha_1+\gamma_1\bar{x}^4) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \ \ ou \ \ \beta-\alpha+\gamma\bar{y}^4 = 0 \\ \bar{y} = 0 \ \ ou \ \ \beta_1-\alpha_1+\gamma_1\bar{x}^4 = 0. \end{cases}$$

Alors les points d'équilibre du système (3.4) sont

$p_0 = (0,0),\ p_1 = (A,B),\ p_2 = (-A,B),\ p_3 = (A,-B)$ *et* $p_4 = (-A,-B)$ avec $A = (\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_1})^{\frac{1}{4}}$ et $B = (\frac{\alpha-\beta}{\gamma})^{\frac{1}{4}}$.

**Théorème 3.7.** *Soit* $(x(n),y(n))$ *une solution positive du système* (3.4), *alors pour tout* $m \geq 0$, *on a*

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m+1} x(-3), \quad si\ n = 4m+1$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m+1} x(-2), \quad si \ n = 4m+2$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m+1} x(-1), \quad si \ n = 4m+3$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{m+1} x(0), \quad si \ n = 4m+4$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{m+1} y(-3), \quad si \ n = 4m+1$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{m+1} y(-2), \quad si \ n = 4m+2$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{m+1} y(-1), \quad si \ n = 4m+3$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{m+1} y(0), \quad si \ n = 4m+4$$

**Démonstration.** Montrons le résultat par récurrence.

Le résultat est vrai pour $m = 0$.

Supposons que le résultat est vrai pour $m = k \geq 1$, i.e.,

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+1} x(-3), \quad si \ n = 4k+1$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+1} x(-2), \quad si \ n = 4k+2$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+1} x(-1), \quad si \ n = 4k+3$$

$$0 \leq x(n) \leq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+1} x(0), \quad si \ n = 4k+4$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+1} y(-3), \quad si \ n = 4k+1$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+1} y(-2), \quad si \ n = 4k+2$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+1} y(-1), \quad si \ n = 4k+3$$

$$0 \leq y(n) \leq \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+1} y(0), \quad si \ n = 4k+4$$

et montrons qu'il est vrai pour $k+1$.

De (3.4) on a

$$
\begin{aligned}
0 \le x(4k+5) &= \frac{\alpha x(4k+1)}{\beta+\gamma y(4k+4)y(4k+3)y(4k+2)y(4k+1)} \\
&\le \frac{\alpha x(4k+1)}{\beta} \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+2} x(-3), \\
0 \le x(4k+6) &= \frac{\alpha x(4k+2)}{\beta+\gamma y(4k+5)y(4k+4)y(4k+3)y(4k+2)} \\
&\le \frac{\alpha x(4k+2)}{\beta} \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+2} x(-2), \\
0 \le x(4k+7) &= \frac{\alpha x(4k+3)}{\beta+\gamma y(4k+6)y(4k+5)y(4k+4)y(4k+3)} \\
&\le \frac{\alpha x(4k+3)}{\beta} \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+2} x(-1), \\
0 \le x(4k+8) &= \frac{\alpha x(4k+4)}{\beta+\gamma y(4k+7)y(4k+6)y(4k+5)y(4k+4)} \\
&\le \frac{\alpha x(4k+4)}{\beta} \le \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k+2} x(0), \\
0 \le y(4k+5) &= \frac{\alpha_1 y(4k+1)}{\beta_1+\gamma_1 x(4k+4)x(4k+3)x(4k+2)x(4k+1)} \\
&\le \frac{\alpha_1 y(4k+1)}{\beta_1} \le \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+2} y(-3), \\
0 \le y(4k+6) &= \frac{\alpha_1 y(4k+2)}{\beta_1+\gamma_1 x(4k+5)x(4k+4)x(4k+3)x(4k+2)} \\
&\le \frac{\alpha_1 y(4k+2)}{\beta_1} \le \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+2} y(-2), \\
0 \le y(4k+7) &= \frac{\alpha_1 y(4k+3)}{\beta_1+\gamma_1 x(4k+6)x(4k+5)x(4k+4)x(4k+3)} \\
&\le \frac{\alpha_1 y(4k+3)}{\beta_1} \le \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+2} y(-1), \\
0 \le y(4k+8) &= \frac{\alpha_1 y(4k+4)}{\beta_1+\gamma_1 x(4k+7)x(4k+6)x(4k+5)x(4k+4)} \\
&\le \frac{\alpha_1 y(4k+4)}{\beta_1} \le \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{k+2} y(0).
\end{aligned}
$$

**Théorème 3.8.**

*i) Si $\alpha < \beta$ et $\alpha_1 < \beta_1$ alors le point d'équilibre $p_0 = (0,0)$ du système (3.4) est localement asymptotiquement stable.*

*ii) Si $\alpha > \beta$ ou $\alpha_1 > \beta_1$ donc le point d'équilibre $p_0 = (0,0)$ du système (3.4) est instable.*

**Démonstration.**

i) On a

$$X(n+1) = F_J(0,0)X(n),$$

avec

$$X(n) = (x(n), x(n-1), x(n-2), x(n-3), y(n), y(n-1), y(n-2), y(n-3))^t$$

et

$$F_J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $F_J(0,0)$ est

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(F_J(0,0) - \lambda I_8) \\ &= \lambda^8 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\lambda 4 + \frac{\alpha\alpha_1}{\beta\beta_1}. \end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ sont

$$\lambda = \pm\frac{\alpha}{\beta},\ \lambda = \pm\frac{\alpha_1}{\beta_1},\ \lambda = \pm\frac{\alpha}{\beta}\ et\ \lambda = \pm i\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Si $\alpha < \beta$ et $\alpha_1 < \beta_1$ alors toutes les racines du polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne $F_J(0,0)$ sont de module inférieure à 1.

Donc le point d'équilibre $(0,0)$ est localement asymptotiquement stable.

ii) Si $\alpha > \beta$ ou $\alpha_1 > \beta_1$ alors il existe au moins une racine du polynôme caractéristique de module supérieur à 1, donc le point d'équilibre $(0,0)$ est instable.

**Théorème 3.9.** *Si $\alpha < \beta$ et $\alpha_1 < \beta_1$, alors le point d'équilibre $p_0 = (0,0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration.** Pour montrer que le point $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable on montre qu'il est localement asymptotiquement stable et globalement attractif.

Supposons $\alpha < \beta$ et $\alpha_1 < \beta_1$, alors le point $(0,0)$ est localement asymptotiquement stable(d'après le Théorème (3.8)).

Du Théorème (3.7), chaque solution positive $(x(n), y(n))$ est bornée, i.e., $0 \leq x(n) \leq \mu$ et $0 \leq y(n) \leq \nu$ pour tout $n = 0, 1, 2, ...$, où $\mu = max(x(-3), x(-2), x(-1), x(0))$ et $\nu = max(y(-3), y(-2), y(-1), y(0))$.

Il suffit de prouver que $(x(n), y(n))$ est décroissante.

Du système (3.4), on a

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \frac{\alpha x(n-3)}{\beta + \gamma y(n)y(n-1)y(n-2)y(n-3)} \\ &\leq \frac{\alpha x(n-3)}{\beta} < x(n-3). \end{aligned}$$

Donc

$$x(4n+1) < x(4n-3) \quad et \; x(4n+5) < x(4n+1).$$

Par conséquent, les suites $x(4n+1)$, $x(4n+2)$, $x(4n+3)$, et $x(4n+4)$ sont décroissantes, i.e., la suite $x(n)$ est décroissante.

De même, on a

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{\alpha_1 y(n-3)}{\beta_1 + \gamma_1 x(n)x(n-1)x(n-2)x(n-3)} \\ &\leq \frac{\alpha_1 y(n-3)}{\beta_1} < y(n-3). \end{aligned}$$

Donc

$$y(4n+1) < y(4n-3) \quad et \quad y(4n+5) < y(4n+1).$$

Par conséquent, les sous suites $y(4n+1)$, $y(4n+2)$, $y(4n+3)$, et $y(4n+4)$ sont décroissantes, i.e., la suite $y(n)$ est décroissante.

D'où

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{n\to\infty} y(n) = 0.$$

Donc le point d'équilibre $(0,0)$ est globalement attractif.

Ainsi $(0,0)$ est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 3.10.** *Si $\alpha > \beta$ et $\alpha_1 > \beta_1$ alors le point d'équilibre positif $p_1 = ((\frac{\alpha_1-\beta_1}{\gamma_1})^{\frac{1}{4}}, (\frac{\alpha-\beta}{\gamma})^{\frac{1}{4}})$ du système* (3.4) *est instable.*

**Démonstration.** Le système linéaire associé au système (3.4) autour du point d'équilibre $p_1$ est

$$x(n+1) = F_J(p_1)x(n),$$

avec

$$X(n) = (x(n), x(n-1), x(n-2), x(n-3), y(n), y(n-1), y(n-2), y(n-3))^t$$

et

$$F_J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & L & L & L & L \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & M & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Où

$$L = -(\frac{\gamma}{\gamma_1})^{\frac{1}{4}} \frac{(\alpha_1 - \beta_1)^{\frac{1}{4}}}{\alpha}$$

et

$$M = -(\frac{\gamma_1}{\gamma})^{\frac{1}{4}} \frac{(\alpha - \beta)^{\frac{1}{4}}}{\alpha_1}.$$

Le polynôme caractéristique de $F_J(p_1)$ est

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(F_J(p_1) - \lambda I_8) \\ &= \lambda^8 - \lambda^7 - LM\lambda^6 - LM\lambda^5 - (1+LM)\lambda^4 + \lambda^3 + LM\lambda^2 + LM\lambda + LM. \end{aligned}$$

Les racines du polynôme caractéristique $P$ sont

$$\lambda = 1,\ \lambda = \pm i \text{ } et \text{ } 1 \pm \sqrt{L}\sqrt{M}.$$

Il suffit de prouver que l'un de ces racines est de module supérieur à 1.

Nous avons

$$\left|1-\sqrt{L}\sqrt{M}\right| = \left|1+\sqrt{\left(\frac{(\alpha-\beta)^{1/4}}{\alpha}\right)\left(\frac{(\alpha_1-\beta_1)^{1/4}}{\alpha_1}\right)}\right| > 1.$$

Donc d'après le Théorème (1.33) si $\alpha > \beta$ et $\alpha_1 > \beta_1$ alors $p_1$ sont instables.

**Théorème 3.11.** *Si $\alpha > \beta$ et $\alpha_1 > \beta_1$ alors les points d'équilibre positifs $p_2, p_3,$ et $p_4$ du système* (3.4) *est instable.*

**Démonstration.** La même preuve celle du Théorème (3.10).

## 3.2 Le système $x(n+1) = \frac{Ax(n)}{1+y^p(n)}, \quad y(n+1) = \frac{By(n)}{1+x^p(n)}$

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = \frac{Ax(n)}{1+y^p(n)} \\ y(n+1) = \frac{By(n)}{1+x^p(n)} \end{cases} \tag{3.5}$$

avec $A, B \in (0, \infty)$ et la condition initiale $x(0), y(0) \in (0, \infty)$, p est un entière.

**Lemme 3.12.** *Le système* (3.5) *admet un point d'équilibre qui est* $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ *et si* $A > 1,\ B > 1$ $(\bar{x}(2), \bar{y}(2)) = ((B-1)^{\frac{1}{p}}, (A-1)^{\frac{1}{p}})$.

**Démonstration.** Nous avons

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases},$$

i.e.,

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{A\bar{x}}{1+\bar{y}^P} \\ \bar{y} = \frac{B\bar{y}}{1+\bar{x}^p} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} \bar{x}(1+\bar{y}^P) = A\bar{x} \\ \bar{y}(1+\bar{x}^p) = B\bar{y}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \bar{x}(1 - A + \bar{y}^P) = 0 \\ \bar{y}(1 - B + \bar{x}^p) = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \bar{x} = 0 \ \ ou \ \ 1 - A + \bar{y}^P = 0 \\ \bar{y} = 0 \ \ ou \ \ 1 - B + \bar{x}^p = 0. \end{cases}$$

Alors le point d'équilibre du système (3.5) est $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ et si $A > 1$, $B > 1$ $(\bar{x}(2), \bar{y}(2)) = ((B-1)^{\frac{1}{p}}, (A-1)^{\frac{1}{p}})$.

**Théorème 3.13.** *Les affirmations suivantes sont vraies*

*i) Si $A < 1$ et $B < 1$ alors le point d'équilibre $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ du système (3.5) est localement asymptotiquement stable.*

*ii) Si $A > 1$ ou $B > 1$ alors le point d'équilibre $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ est instable.*

*iii) Si $A > 1$ et $B > 1$ alors le point d'équilibre positif $(\bar{x}(2), \bar{y}(2)) = ((B-1)^{\frac{1}{p}}, (A-1)^{\frac{1}{p}})$ est instable.*

**Démonstration.**

i) Le système linéaire associé au système (3.5) autour de point d'équilibre $(0, 0)$ est

$$X(n+1) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} \quad , \quad n = 0, 1, ...$$

$$X(n+1) = \begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix}.$$

Donc le polynôme caractéristique en $(0, 0)$ est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (A+B)\lambda + AB, \tag{3.6}$$

Les racine de polynôme (3.6) sont $\lambda_1 = B$ et $\lambda_2 = A$.

Si $A < 1$ et $B < 1$ donc le point $(0, 0)$ est localement asymptotiquement stable(Théorème (3.5)).

ii) Si $A > 1$ ou $B > 1$ donc le point $(0, 0)$ est instable.

iii) Supposons que $A > 1$ et $B > 1$.

Le système linéaire associe le système (3.5) en $(\bar{x}(2), \bar{y}(2)) = ((B-1)^{\frac{1}{p}}, (A-1)^{\frac{1}{p}})$ on trouve

$$F(n+1) = DF(n), \quad n = 0, 1, ...$$

où

$$F(n) = \begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p}{A}(A-1)^{\frac{p-1}{p}}(B-1)^{\frac{1}{p}} \\ -\frac{p}{B}(B-1)^{\frac{p-1}{p}}(A-1)^{\frac{1}{p}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice D est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \frac{p^2}{AB}(A-1)(B-1). \tag{3.7}$$

Les racines de polynôme (3.7) sont

$$\lambda_1 = \frac{AB + \sqrt{ABp^2(-A - B + AB + 1)}}{AB}$$

et

$$\lambda_2 = -\frac{-AB + \sqrt{ABp^2(-A - B + AB + 1}}{AB}.$$

Il est clair que $\lambda_1 \in (1, +\infty)$, alors $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ est instable.

**Théorème 3.14.** *Supposons que $A < 1$ et $B < 1$ alors le point d'équilibre $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.*

**Démonstration.** Nous avons, par le Théorème (3.13), le point d'équilibre $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.

Il reste à montrer que $(0, 0)$ est globalement attractif.

Soit $(x(n), y(n))$ une solution du système (3.5). On va montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = 0 \ \ et \ \ \lim_{n \to +\infty} y(n) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq x(n+1) = \frac{Ax(n)}{1+y^p(n)} &\leq Ax(n) \\ &\leq x(n). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \leq y(n+1) = \frac{Bx(n)}{1+x^p(n)} &\leq By(n) \\ &\leq y(n). \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y(n) = 0.$$

D'où le point $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] **M. N. Qureshi and A. Qadeer khan**, *Dynamics of a fourth-order system of rational difference equations*, Advances in Difference Equations 2012, 2012 :215.

[2] **S. Elaydi**, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed, Springer,New York 2005.

[3] **E. A. Grove, G. Ladas**, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Advances in Discrete, Mathematics and Applications , Volume 4, Chapman and Hall, CRS Press, 2005.

[4] **T. F. Ibrahim**, *On the Third Order Rational Difference Equation*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 4, 2009, no. 27, 1321 - 1334.

[5] **M. Saleh, S. Abu-Baha**, *Dynamics of a higher order rational difference equation*, App, Mathe, Compt.181 (2006)84-102.

[6] **N. Touafek**, *Cours de Master*, 2016.

[7] **L. Yang, J. Yang**, *Dynamics of a System of Two Nonlinear Difference Equations*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 6, 2011, no. 5, 209 - 214.