REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Mohamed Seddik Ben Yahia – Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : Master

Spécialité : Mathématique Appliquées

Option : EDP et applications

Thème

Degrés topologiques

Présenté par :

Khiat Djihane

Soufane Amina

Devant le jury :

Président :	**Mme Daikh Yasmina**	**M.C.B. Université de Jijel**
Encadreur :	**Mme Boufenouche Razika**	**M.C.B. Université de Jijel**
Examinateur :	**Mme Menniche Linda**	**M.C.B. Université de Jijel**

Promotion 2016/2017

Table des matières

Introduction Générale

Soient $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application au moins continue, et soit l'équation :

$$f(x) = y \tag{1}$$

Est ce qu'on peut assurer qu'il existe une solution à (1) ?

Dans le cas où f est linéaire c'est simple, on calcule le déterminant, s'il est non nul, on conclut que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, il existe une solution et même une seule à (1).

Sinon, on peut rien dire, puisqu'il peut exister des solutions pour certaine y, mais ces solutions ne sont pas stables, c-à-d si on perturbe y ou f, la solution peut ne plus exister.

Mais dans le cas où f est non linéaire, c'est pas de la même simplicité, on estime développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle de déterminant pour les applications linéaires.

On appelle cet outil le degré topologique, qui assure par sa non nullité que (1) admet au moins une solution stable. Le degré dependra de f, y et de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1).

Ils existent plusieurs degrés topologiques, par exemple : on a le degré de Mawhin et pour les applications multivoques on a : le degré de Robert et J.M.Tasry, le degré de Cellina et Lasota, le degré d'Ortega, le degré de Hukuhara,...etc.

Mais les degrés topologiques les plus connus sont de Brouwer pour les espaces de dimension finie, et de Leray-Schauder pour les espaces de dimension infinie.

Cette thèse est composée de trois chapitres :

Le premier chapitre : Il nous a semblé utile de le consacré aux rappels et notions concernant l'homotopie, les espaces de Sobolev ainsi que les opérateurs compacts.

Le deuxième chapitre : Dans ce chapitre notre étude est dans les espaces de dimension finie, on va s'intéresser à la définition du degré de Brouwer, on donne quelques propriétés, sa construction et ses applications.

Le troisième chapitre : Ce chapitre est consacré au degré topologique dans les espaces de dimension infinie, on va voir le degré de Leray-Schauder : sa définition, quelques propriétés, sa construction, comment passer du degré de Brouwer au degré de Leray-Schauder et enfin son utilité via quelques applications.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on introduit les notions les plus utilisées dans ce travail.

1.1 Homotopie

L'homotopie est une notion de topologie algébrique elle formolise la notion de déformation continue d'un objet à un autre.

Définition 1.1.1 *(Application homotope)*

Soient X,Y deux espaces topologiques et f, $g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $H : X \times [0.1] \longrightarrow Y$ telle que :

$$\forall x \in X,\ \ H(x,0) = f(x) \ \ et\ H(x,1) = g(x).$$

On dit alors que H est une homotopie de f à g.

Définition 1.1.2 *(Applications homotopes relativement à un sous-espace)*

Soient X,Y deux espaces topologiques, A une partie de X et f, $g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.

On dit que f est homotope à g relativement à A s'il existe une application continue $H : X \times [0.1] \longrightarrow Y$ telle que :

$$\forall x \in X,\ H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$$

et

$$\forall \alpha \in A, \forall t \in [0, 1],\ H(\alpha, t) = f(\alpha) = g(\alpha).$$

On dit que H est une homotopie relative à A de f à g.

Remarque 1.1.3

***1**- Si $A = \phi$, la deuxième condition de la définition 1.1.2 est vide. Ainsi, être homotope relativement à l'ensemble vide signifie simplement être homotope.*

***2**- Si $A^{'} \subset A$ et f et g homotopes relativement à A, alors f et g sont homotopes relativement à $A^{'}$.*

***3**- Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, alors f est homotope à elle-même relativement à X.*

En effet :

Considérons l'application :

$$H : (x, t) \in X \times [0, 1] \longmapsto f(x) \in Y$$

elle est continue et pour $x \in X$ et $t \in [0, 1]$, on a :

$$H(x, 0) = H(x, 1) = f(x)$$

et

$$H(x, t) = f(x) = f(x)$$

Autrement dit, c'est une homotopie relative à X de f à f d'où la réflexivité de H.

Exemple 1.1.4 *Soit f, g deux fonctions numériques définies par $f(x) = 1$ et $g(x) = -1$, alors f et g sont homotopes dans $\mathbb{R}$ via la fonction continue :*

$$\begin{array}{rcl} H & : & \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & H(x, t) = 1 - 2t \end{array}$$

on a :

$$\begin{cases} H(x,0) = 1 = f(x) & \textit{pour } t = 0 \\ H(x,1) = -1 = g(x) & \textit{pour } t = 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.5 *Soient f et g deux fonctions continues définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par :*

$$f(x) = \exp\left(\frac{2x}{\pi}\right)$$

et

$$g(x) = 0.$$

f est le cercle d'origine $(0,0)$ et de rayon 1, g reste à l'origine, alors f et g sont homotopes via la fonction continue :

$$\begin{array}{rcl} H & : & [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & H(x,t) = (1-t)\exp\left(\dfrac{2x}{\pi}\right) \end{array}$$

on a :

$$\left\{ \begin{array}{cc} H(x,0) = \exp\left(\frac{2x}{\pi}\right) = f(x) & \textit{pour } t = 0 \\ H(x,1) = 0 = g(x) & \textit{pour } t = 1 \end{array} \right. , \forall x \in [0,1]$$

Exemple 1.1.6 *(Applications homotopes relativement à un sous espace)*

Soit :

$$\begin{array}{ccc} f & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & f(x) = 1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} g & : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & g(x) = -1 \end{array}$$

Elle ne sont pas homotopes dans $\mathbb{R}^*$, car il n'existe aucune fonction continue sur $\mathbb{R}$ reliant les points 1 et -1 et on a :

$$H(x,1) = 1 - 2t, \forall t \in [0,1], \forall x \in X,$$

et

$$\begin{cases} H(x,0) = f(x) & \text{pour } t = 0 \\ H(x,1) = g(x) & \text{pour } t = 1 \\ H\left(x, \frac{1}{2}\right) = 0 & \text{pour } t = \frac{1}{2} \end{cases},$$

donc $H\left(x, \frac{1}{2}\right) = 0 \in \mathbb{R}^*$, et n'est pas continue en tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.7 *Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X. La relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $\tau(X, Y)$.*

Preuve. • Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, d'après les remarques 1.1.3, f est homotope à f relativement à A, donc la relation est **réflexive**.

• Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et H une homotopie relative à A de f à g, l'application

$$\tilde{H} : (x,t) \in X \times [0,1] \mapsto H(x, 1-t) \in Y$$

est continue.

$\forall x \in X, \alpha \in A$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{cases} \tilde{H}(x,0) = H(x,1) = g(x), \\ \tilde{H}(x,1) = H(x,0) = f(x), \\ \tilde{H}(\alpha,t) = H(\alpha,1-t) = g(\alpha) = f(\alpha). \end{cases}.$$

Autrement dit : $\tilde{H}$ est une homotopie relative à A de g à f d'où **la symétrie.**

• Soient $f, g, h : X \longrightarrow Y$ trois applications continues, H est une homotopie relative à A de f à g et $H^{'}$ est une homotopie relative à A de g à h. L'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{H} & : & X \times [0,1] \longrightarrow Y \\ (x,t) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} H(x,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H^{'}(x,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{array} \right. \end{array},$$

est bien définie et continue. En effet :

En chacun des points $\left(x, \frac{1}{2}\right)$, l'application est définie de deux manières mais ces deux manières coïncident

$$\begin{aligned} \tilde{H}\left(x, \frac{1}{2}\right) &= H(x,1) = g(x) \\ &= H^{'}(x,0) = \tilde{H}\left(x, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

De plus, pour $x \in X$, on a

$$\tilde{H}(x,0) = H(x,0) = f(x)$$

et

$$\tilde{H}(x,1) = H^{'}(x,1) = h(x)$$

donc, pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $\alpha \in A$ on a :

$$\tilde{H}(\alpha,t) = H(\alpha,2t) = f(\alpha) = g(\alpha) = h(\alpha)$$

et

$$\tilde{H}(\alpha,u) = H^{'}(\alpha,2u-1) = h(\alpha) = g(\alpha) = f(\alpha).$$

Autrement dit $\tilde{H}$ est une homotopie relative à A de f à h, donc la relation est **transitive.** On conclut que la relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $\tau(X,Y)$. ∎

Classe d'équivalence :

Soient X,Y deux espaces topologiques, on note $[X, Y]_A$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\tau(X, Y)$, pour la relation être homotope relativement à A. Ainsi, $[X, Y]_A$ un quotient de $\tau(X, Y)$.

Définition 1.1.8 *(Chemins)*

• *Soit X un espace topologique. On dit que $C : [0, 1] \longrightarrow X$ est un chemin dans X si C est une application continue. Le point $C(0)$ s'appelle l'origine de C, $C(1)$ son extrémité de C.*

• *Soient C et C' deux chemins dans X, on dit que C et C' sont des chemins homotopes dans $\tau(X, Y)$ relativement à $\{0, 1\}$ s'il existe une application $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ telle que*

$$\forall s \in [0, 1], \; H(s, 0) = C(s), \; H(s, 1) = C'(s)$$

et $\forall t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} H(0, t) = C(0) = C'(0) \\ H(1, t) = C(1) = C'(1) \end{cases},$$

cette relation est une relation d'équivalence.

La Restriction :

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues. Si f et g sont homotopes relativement à A, alors les restrictions à A de f et g coïncide, ie :

$$R_{est}(f) = R_{est}(g)$$

Preuve. il suffit d'appliquer la remarque 1.1.3 et la proposition 1.1.7. ■

Proposition 1.1.9 *(Composition)*

Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X, B une partie de Y, f_1, $f_2 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et g_1, $g_2 : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues. Si f_1 et f_2 sont homotopes relativement à A, g_1 et g_2 sont homotopes relativement à B et $f_1(A) \subset B$, alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$ relativement à A.

Preuve. Soient H est une homotopie relative à A de f_1 à f_2 et $H^{'}$ est une homotopie relative à B de g_1 à g_2. On considère la fonction

$$\hat{H} : X \times [0,1] \longrightarrow Z$$

$$(x,t) \longmapsto H^{'}(H(x,t),t),$$

$\hat{H}$ est continue par composition des fonctions $H^{'}$ et $(x,t) \longmapsto (H(x,t),t)$, car $(x,t) \longmapsto t$ est continue et $(x,t) \longmapsto H(x,t)$ est continue.

De plus, pour tout $x \in X$, on a :

$$\hat{H}(x,0) = H^{'}(H(x,0),0) = g_1(H(x,0)) = (g_1 \circ f_1)(x),$$

et

$$\hat{H}(x,1) = H^{'}(H(x,1),1) = g_2(H(x,1)) = (g_2 \circ f_2)(x),$$

d'où, pour $\alpha \in A$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\hat{H}(\alpha,t) = H^{'}(H(\alpha,t),t) = H^{'}(f_1(\alpha),t) = H^{'}(f_2(\alpha),t),$$

or $f_1(\alpha) \in B$ et $H^{'}$ est une homotopie relativement à B, on a :

$$H^{'}(f_1(\alpha),t) = g_1(f_1(\alpha)) = g_2(f_1(\alpha)),$$

et

$$H^{'}(f_2(\alpha),t) = g_1(f_2(\alpha)) = g_2(f_2(\alpha)).$$

Donc :

$$\hat{H}(\alpha,t) = g_1(f_1(\alpha)) = g_2(f_2(\alpha))$$

Ainsi $\hat{H}$ est une homotopie relativement à A de $g_1 \circ f_1$ à $g_2 \circ f_2$. ■

Sous les hypothèses de la proposition précédente on a $f_1(A) \subset B$ puisque f_1 et f_2 coïncide sur A.

Exemple 1.1.10 *(chemin)*

Soient X un espace topologique et $C : [0,1] \longrightarrow X$ un chemin. On définit le chemin inverse par :

$$\overline{C} : t \longmapsto C(1-t)$$

Si C et C' sont deux chemins dans X homotopes en tout chemin, alors $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ sont deux chemins homotopes En effet :

L'application $t \in [0,1] \longmapsto 1-t \in [0,1]$ est continue et homotope à elle même relativement à $\{0,1\}$, par ailleurs elle transforme $A = \{0,1\}$ dans l'ensemble $B = \{0,1\}$, comme C et C' sont homotopes relativement à B, la proposition de composition donne le résultat.

De ce que précède on constate que si H est une homotopie de C à C', alors $\overline{H} : (s,t) \longmapsto H(1-s,t)$ est une homotopie de $\overline{C}$ à $\overline{C'}$ ce qui se vérifie bien sûr immédiatement.

Corollaire 1.1.11 *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X, B une partie de Y, $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et $g : Y \longrightarrow Z$ une application continue. Si f_1 et f_2 sont homotopes relativement à A, alors $g \circ f_1$ et $g \circ f_2$ le sont aussi.*

Preuve. L'application $(y, t \in Y \times [0,1]) \longmapsto g(y)$ est une homotopie de g à g relativement à Y, comme $f_1(A) \subset Y$, la proposition de composition permet de conclure. ■

Corollaire 1.1.12 *Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et $g_1, g_2 : Y \longrightarrow Z$ deux applications continues. Si f_1 et f_2 sont homotopes alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$.*

Preuve. comme $f_1(\phi) \in \phi$, c'est une conséquence de la composition et la remarque 1.1.3. ■

Définition 1.1.13 *(Equivalence d'homotopie)*

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : Y \longmapsto X$ telle que $g \circ f$ soit homotope à Id_X et $f \circ g$ soit homotope à Id_Y.

Exemple 1.1.14 *Homéomorphisme*

Soient X, Y *deux espaces topologiques et* $f : X \longrightarrow Y$ *un homéomorphisme, alors* f *est une équivalence d'homotopie. La réciproque est fausse.*

Définition 1.1.15 *(Type d'homotopie)*

Soient X, Y *deux espaces topologiques. On dit que* X *a le même type d'homotopie que* Y*, s'il existe une équivalence d'homotopie* $f : X \longrightarrow Y$*, la réciproque est fausse.*

1.2 Les espaces de sobolev :

1.2.1 Espace de sobolev :

Définition 1.2.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1, \infty[$, et m un entier naturel. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

où : α est un multi-indice ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$),

$\partial^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible(distribution).

On munit cet espace vectoriel de la norme suivante :

- *Si $1 \leq p < +\infty$:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Si $p = +\infty$:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Propriétés :

a) Pour $1 \leq p \leq +\infty$: L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

b) Pour $1 < p < +\infty$: L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

c) Pour $1 \leq p < +\infty$: L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

Proposition 1.2.2 *Soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p \leq +\infty$, les propriétés suivantes sont èquivalentes :*

***1**- $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

***2**- Il existe une constante c telle que :*

$$\left| \int_\Omega u\varphi' \right| \leq c\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

***3**-Il existe une constante c telle que pour tout ouvert $w \subset c\Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < dist(w, c\Omega)$ on a :*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(w)} \leq c\,|h|.$$

De plus, on peut choisir $c = \|u'\|_{L^p(\Omega)}$ dans (2) et (3).

Lorsque $p = 1$, les implications suivantes restes vraies (1)$\Longrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)

Dans le cas où $p = 2$, on pose $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Définition 1.2.3 *Pour un entier naturel $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est définie par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \;\; telle \; que \; \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\}$$

où α est un multi-indice et $\partial^\alpha v$ est la dérivée au sens faible.

L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \, \partial^\alpha v(x) \, dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(u,u)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.4 *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, et si $m > \frac{N}{2}$, alors $H^m(\Omega)$ est un sous espace de l'ensemble $C\left(\overline{\Omega}\right)$ des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.*

Définition 1.2.5 *(Dérivation faible)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, u localement intégrable sur Ω, et $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

On appelle dérivée faible du u d'ordre α, et on note $\partial^\alpha u$, toute fonction v localement intégrable sur Ω telle que :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi dx.$$

Corollaire 1.2.6 *Soient $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, alors $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ et :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \;\; \forall i = 1, ..., N$$

Corollaire 1.2.7 *Soit* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *telle que* $G(0) = 0$ *et* $|G'(s)| \leq M$, $\forall s \in \mathbb{R}$ *et soit* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *alors :*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Théorème 1.2.8 *(formule de changement de variables)*

Soient Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $G : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ *une application bijective c'est-à-dire* $x = G(y)$, *telle que :*

$$G \in C^1(\Omega_2), G^{-1} \in C^1(\Omega_1), J_G \in L^\infty(\Omega_2) \text{ et } J_{G^{-1}} \in L^\infty(\Omega_1).$$

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$, *alors :*

$$u \circ G \in W^{1,p}(\Omega_2),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ G)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(G(y))\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(y), \; j = 1, ..., N$$

1.2.2 L'espace $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

On note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$ ie :

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)},$$

plus précisement $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on a :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

car $C_0^1(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 1.2.9 *On suppose que* Ω *de classe* C^1, *et soit* $u \in L^p(\Omega)$ *avec* $1 < p < \infty$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

2) *Il existe une constante* C *telle que :*

$$\int_\Omega \left| u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}, \ \forall \varphi \in C_0^1\left(\mathbb{R}^N\right), \ i = 1, ..., N$$

3) *Si l'on considère la fonction*

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \ x \in \Omega, \\ 0 & si \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases}.$$

Alors la fonction $\overline{u} \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et dans ce cas :*

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Théorème 1.2.10 *(Inégalité de Poincaré)*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *borné dans une direction, alors il existe une constante* $c(\Omega) > 0$ *telle que :*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{0,\Omega} \leq c(\Omega) \left(\sum_{j=1}^N \|\partial_j u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.3 Les injections continues et compactes de Sobolev

Définition 1.2.11 *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach, on note* B_X *la boule unité fermée de* X.

On dit qu'un opérateur A *linéaire continue ie* $A \in \pounds(X)$ *est compact si* $A(B_X)$ *est un ensemble relativement compact pour la topologie forte de* Y.

On désigne par $\Bbbk(X, Y)$ *l'ensemble des opérateurs compacts et on pose* $\Bbbk(X) = \Bbbk(X, X)$.

Théorème 1.2.12 *Il existe une constante* c *dépendant de* $|\Omega| \leq \infty$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \ \ \forall \ 1 \leq p \leq \infty$$

Autrement dit, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *avec injection continue* $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

De plus, lorsque Ω *est borné, on a :*

Pour $\forall 1 < p \leq \infty$: *L'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$ *est compacte.*

Pour $\forall \ 1 \leq q < \infty$: *L'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *est compacte.*

Théorème 1.2.13 *Soit* $1 \leq p < N$, *alors :*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \subset L^{p*}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

où p^* *donner par :* $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, *et il existe une constante* $c = c(p, N)$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ \forall u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Corollaire 1.2.14 *Soit* $1 \leq p < N$, *alors :*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \ \forall q \in [p, p^*],$$

avec injection continue.

Corollaire 1.2.15 *(le cas limite p=N)*

on a :

$$W^{1,N}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \ \forall q \in [N, \infty[,$$

avec injection continue.

Théorème 1.2.16 *(Money)*

Soit $p > N$, *alors :*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

avec injection continue.

De plus, pour tout $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *on a :*

$$|u(x)) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}\,\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \ p.p\ x; y \in \mathbb{R}^N$$

avec $\alpha = 1 - N$ *et* C *est une constante (qui dépend seulement de* p *et* N*).*

Remarque 1.2.17 *On déduit de cette inclusion que si* $u \in W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *avec* $N < p < \infty$, *alors :*

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} u(x) = 0.$$

En effet, il existe une suite (u_n) *dans* $C_c^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ *telle que* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *d'après cette inclusion,* u *est aussi limite uniforme sur* $\mathbb{R}^N$ *des* (u_n).

Corollaire 1.2.18 *Soient $m \geq 1$, un entier et $\forall 1 \leq p < \infty$, on a les injections continues suivantes :*

si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$, *alors* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ *où* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$,

si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$, *alors* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ *où* $\forall q \in [p, \infty[$,

si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$, *alors* $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$.

De plus, si $m - \frac{N}{p} > 0$ *n'est pas entier, on pose*

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right]$$

et

$$\theta = m - \frac{N}{p} - k \ (0 < \theta < 1).$$

On a, pour tout $u \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right)$:

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k,$$

et

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq c\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} |x-y|^\alpha, \ p.p\ x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha, |\alpha| = k.$$

En particulier $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C^k\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Si on suppose que Ω est un ouvert borné de classe C^1, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.On a le corollaire suivante :

Corollaire 1.2.19 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

si $\forall 1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ *où* $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,

si $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, \infty[$,

si $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$,

avec injections continues.

De plus, si $p > N$, *on a pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$|u(x)) - u(y)| \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x-y|^\alpha \ \ p.p\ x, y \in \Omega,$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et c dépend seulement de* Ω, p *et* N.

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Corollaire 1.2.20 *La conclusion du corollaire (1.2.21) reste vraie si l'on remplace* $\mathbb{R}^N$ *par* Ω.

Théorème 1.2.21 *(Rellich-Koubachov)*

Si l'on suppose de Ω *est un ouvert borné de classe* C^1*, on a :*

si $p < N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *où* $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

si $p = N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, \infty[$.

si $p > N$*, alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$,

avec injections compactes.

Remarque 1.2.22

1- *Le théorème (1.2.24) est à peu près optimal au sens suivant :*

a- *Si* Ω *n'est pas borné, l'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *n'est pas compacte en général.*

b- *L'injection* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *n'est jamais compacte même si* Ω *est borné et régulier.*

2- *Soit* Ω *un ouvert borné de classe* C^1*. Alors la norme*

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$ *pour vu que :*

· $1 \leq q < p^*$ *si* $1 \leq p < N$.

· $1 \leq q < \infty$ *si* $p = N$.

· $1 \leq q \leq \infty$ *si* $p > N$.

3- *(cas limite p=N) : Soient* Ω *un ouvert borné de classe* C^1 *et* $u \in W^{1,N}(\Omega)$*. Alors en général* $u \notin L^\infty(\Omega)$ *par exemple si*

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N; |x| < \frac{1}{2}\right\},$$

la fonction $u(x) = \left(\log \frac{1}{|x|}\right)^\alpha$ *avec* $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}$ *appartient à* $W^{1,p}(\Omega)$*, mais elle n'est pas borné à cause de la singularité en* $x = 0$*. Néaumoins on à l'inégalité de Trudinger :*

$$\int_\Omega \exp\left(|u|\, N(N-1)\right) < \infty, \ \forall u \in W^{1,N}(\Omega).$$

1.3 Définitions :

1- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*}$, sgn $(\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha > 0 \\ -1 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$,

2- $J_f(x) = \det(f^{'}(x))$ le déterminant jacobien de la fonction f au point x,

3- Soit f une application de Ω dans $\mathbb{R}^N$ différentiable, un point $x \in \Omega$ est dit régulier si $J_f(x) \neq 0$,

4- Le support d'une fonction f continue sur Ω est définie par :

$$Supp(f) = \overline{\{x \in \Omega / \ f(x) \neq 0\}}$$

Chapitre 2

Degré topologique de Brouwer

2.1 Introduction :

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ une fonction continue, et $y \in \mathbb{R}^N$ tel que :

$$f(x) = y \tag{2.1}$$

Notre but est de trouver une quantité facilement calculable qui nous permet de déduir le nombre des solutions de (2.1) dans $\overline{\Omega}$.

Dans les cas simples, cette quantité devrait nous donner le nombre exact des solutions de (2.1) et devrait être invariante par des petites déformations continues de f.

Pour éviter que les solutions de (2.1) sortent du domaine, on s'impose que $y \notin f(\partial\Omega)$.

Si on prend des exemples simples dans $\mathbb{R}$, on remarque que le nombre des solutions n'est pas constant, or si on assigne à chaque solution une "orientation", qui n'est autre que le signe de $f'(x)$, et on définit :

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn(f'(x)).$$

On trouve que $d(f, \Omega, y)$ a des trés bonne propriétés.

2.2 Degré topologique de Brouwer :

Cas particulier : la dimention 1 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, ne s'annule pas sur le bord, et soit

$$d(f) = \frac{1}{2}(sgn(f(1)) - sgn(f(0)),$$

tel que :

d : degré qui signifie le nombre des solutions de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Si $d(f) \neq 0$, alors $f(1)$ et $f(0)$ ont des signes différents, donc par le théorème des valeurs intermédières,

$$\exists x \in [0,1] \text{ tel que } f(x) = 0. \tag{2.2}$$

Donc l'entier $d(f)$ permet d'assurer qu'il existe au moins une solution de (2.2) dans $[0,1]$. Ces solutions sont stables, mais si on perturbe f par des petites perturbations ou on modifie f continûement avec les valeurs au bord de $[0,1]$, alors l'éxistence des solutions reste vraie.

En décomposant Ω en des composantes connexes $\Omega = \underset{i\in I}{\cup}]a_i, b_i[$, donc on peut définir :

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{i\in I}\frac{1}{2}(sgn(f(b_i) - y) - sgn(f(a_i) - y)),$$

ce est adapté à $f(x) = y$ tel que $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$.

Théorème 2.2.1 *Soient $N \geq 1$, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continue tel que $y \notin f(\partial\Omega)$.*

Il existe une et une seule application $d : (f,\Omega,y) \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i) *(Normalisation) : Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \Omega$ alors :*

$$d(Id,\Omega,y) = 1.$$

ii) *(Additivité) : Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tel que $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$, alors :*

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y) + d(f,\Omega_2,y).$$

iii) *(Invariance par homotopie) : Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *et* $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *sont continue, et pour tout* $t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, *alors :*

$$d(h(0,\cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1,\cdot), \Omega, y(1)).$$

Cette application est appelé le degré topologique de Brouwer.

Pour démontrer ce théorème on a besoin des propositions suivantes :

Proposition 2.2.2 *(Stabilité) : Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$. *On suppose que* $f_1, f_2 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, *deux fonctions continues telles que* $y \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. *Si*

$$\|f_1 - f_2\|_\infty < \frac{1}{4} dist\left(y, f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)\right)$$

alors :

$$d(f_1, \Omega, y) = d(f_2, \Omega, y)$$

Proposition 2.2.3 *(Stabilité par rapport à y) : Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$, *on suppose que* $y, y_1 \in \mathbb{R}^N$ *sont dans la même composante connexe de* $f(\partial\Omega)^c$, *alors :*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_1).$$

Preuve. *: Si* $y_1 \in \mathbb{R}^N$ *est assez proche de* y, *alors le degré topologique est le même. Soit* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon < dist(y, f(\partial\Omega))$, *posons*

$$f_0(x) = f(x) - y$$

et

$$f_1(x) = f(x) - y_1.$$

On voit que si $dist(y_1, y) < \varepsilon$ *alors :*

$$\|f_1 - f_0\|_\infty < \varepsilon.$$

D'après la proposition de stabilité on trouve que

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= d(f_0, \Omega, 0) \\ &= d(f_1, \Omega, 0) \\ &= d(f, \Omega, y_1). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.4 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$, y un point tel que $y \notin f(\partial\Omega)$ et $(f_k)_k$ une suite de fonctions de $C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \cap C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$ telle que*

$$\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ sur } \overline{\Omega},$$

alors le degré topologique de f_k existe pour k assez grand et le degré topologique de f est :

$$d(f, \Omega, y) = \lim_{k\to\infty} d(f_k, \Omega, y).$$

Preuve. On a :

$$\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ sur } \overline{\Omega},$$

pour $k \geq k_0$ assez grand, $y \notin f_k(\partial\Omega)$ et par conséquant le degré topologique $d(f_k, \Omega, y)$ est bien défini.

De la proposition de stabilité on déduit que si k, j sont assez grands pour que :

$$\|f_k - f_j\|_\infty < \frac{1}{4} dist\left(y, f_k(\partial\Omega) \cup f_j(\partial\Omega)\right),$$

alors

$$d(f_k, \Omega, y) = d(f_j, \Omega, y).$$

On conclut que la suite $(d(f_k, \Omega, y))_k$ est stationnaire. ■

Preuve. (du théorème) :

ii) (Additivité) : Si on suppose de plus que la fonction f est de classe C^1, la preuve découle immédiatement de la définition. Pour le cas général, il suffit d'approcher f par des fonctions régulières.

iii) (Invariance par homotopie) : Tout d'abord, on vérifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $|t_1 - t_2| \leq \delta$, alors :

$$d(h(t_1, \cdot), \Omega, y) = d(h(t_2, \cdot), \Omega, y).$$

En effet, soit

$$\varepsilon = \frac{1}{4} dist\left(y, h([0,1] \times \partial\Omega)\right),$$

comme $h(\cdot, \cdot)$ est uniformément continue sur le compact $\overline{\Omega} \times [0,1]$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que si

$$|t_1 - t_2| \leq \delta,$$

et pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on a :

$$|h(1, x) - h(0, x)| < \varepsilon.$$

Par conséquant, d'après la proposition de stabilité on a :

$$d\left(h\left(1,\cdot\right),\Omega,y\right)=d\left(h\left(0,\cdot\right),\Omega,y\right)$$

Pour tout $t_1,t_2\in[0,1]$ tels que

$$|t_1-t_2|\leq\delta,$$

d'où on déduit le résultat d'invarance par homotopie en recouvrant le compact $[0,1]$ par des intervalles de longueur δ. ■

2.3 Quelques propriétés :

Proposition 2.3.1 *Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :*

1- *Si $d\left(f,\Omega,y\right)\neq0$ alors $\exists x\in\Omega$ tel que $f\left(x\right)=y$.*

2- *Pour tout $z\in\mathbb{R}^N$:*

$$d\left(f,\Omega,y\right)=d\left(f-z,\Omega,y-z\right).$$

3- *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $f:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^N$ est continue, $y\in\mathbb{R}^N$ et $r=dist\left(y,f\left(\partial\Omega\right)\right)>0$, si $g:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^N$ est continue, $z\in\mathbb{R}^N$ sont tel que*

$$\sup_{\partial\Omega}\left(|g-f|\right)+|y-z|<r,$$

alors :

$$d\left(f,\Omega,y\right)=d\left(g,\Omega,z\right).$$

4- *$d\left(f,\Omega,\cdot\right)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N\backslash f\left(\partial\Omega\right)$.*

5- *Pour tout $z\in\mathbb{R}^N$:*

$$d\left(f,\Omega,y\right)=d\left(f(\cdot-z),z+\Omega,y\right).$$

Preuve. 1- Montrons par l'absurde :

Supposons que x n'existe pas, alors $y\notin f\left(\Omega\right)$ et comme on a déja par hypothèse $y\notin f\left(\partial\Omega\right)$, donc $y\notin f\left(\overline{\Omega}\right)$.

Considérons alors les ouverts $\Omega_1=\Omega_2=\phi$, disjoints et inclus dans Ω.

On a :

$$y\notin f\left(\overline{\Omega}\backslash\left(\phi\cup\phi\right)\right),$$

donc, par la propriété d'additivité du degré topologique on obtient :

$$d(f,\Omega,y) = d(f,\phi,y) + d(f,\phi,y),$$

mais, comme

$$y \notin f\left(\overline{\phi}\backslash(\phi \cup \phi)\right),$$

cette même propriété d'additivité donne aussi :

$$d(f,\phi,y) = d(f,\phi,y) + d(f,\phi,y),$$

et donc

$$d(f,\phi,y) = 0.$$

On déduit alors que

$$d(f,\Omega,y) = 0.$$

2- Considérons l'homotopie naturelle entre (f,y) et $(f-z,y-z)$, c'est à dire :
il existe une application :

$$h(t,x) = (1-t)f(x) + t(f(x)-z) = f(x) - tz,$$

et on suppose

$$y(t) = (1-t)y + t(y-z) = y - tz,$$

et on applique l'invariance par homotopie on trouve :
Pour tout $t \in [0,1]$, il n'existe pas $x \in \partial\Omega$ tel que

$$f(x) - tz = y - tz,$$

c'est à dire

$$f(x) = y.$$

3- Soient

$$h(t,x) = tg(x) + (1-t)f(x),$$

l'homotopie entre f et g, et

$$y(t) = tz + (1-t)y.$$

S'il existe $t \in [0,1]$ et $x \in \partial\Omega$ tel que

$$tg(x) + (1-t)f(x) = tz + (1-t)y,$$

alors :

$$|y - f(x)| \leq t|g(x) - f(x)| + t|y - z| < r,$$

(puisque $|g(x) - f(x)| + |y - z| < r$), tel que $r > 0$, car on a Ω un ouvert borné, $\partial\Omega$ est compact, ce qui donne que $f(\partial\Omega)$ est fermé, et $y \notin f(\partial\Omega)$, alors la distance est strictement positive.

On applique l'invariance du degré par homotopie, on trouve :

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z).$$

4- L'application

$$y \longrightarrow d(f, \Omega, y),$$

est définie sur $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$ et par (3), elle est localement constante ; donc elle est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$.

5- Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue, $y, z \in \mathbb{R}^N$, on a $\partial(z + \Omega) = z + \partial\Omega$, alors

$$y \notin f(\partial(z + \Omega) - z),$$

donc

$$d(f(\cdot - z), z + \Omega, y),$$

est définie sur $\mathbb{R}^N$.

Soit Ω_s un ouvert inclus dans Ω tel que :

$$\Omega_s = \{x \in \Omega \backslash dist(x, \partial\Omega) > s\},$$

comme $y \notin f(\partial\Omega)$, il existe $s > 0$ tel que

$$y \notin f\left(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s}\right),$$

et on a $\Omega_{2s} \subset \Omega_s$, donc

$$y \notin f\left(\overline{\Omega} \backslash \Omega_s\right),$$

et par l'additivité du degré avec les ouverts Ω_s et ϕ disjoints inclus dans Ω, et puisque $d(f, \phi, y) = 0$, on déduit que :

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega_s, y). \tag{2.3}$$

D'autre part, on prend $z \in B(0,s)$, on a $\Omega_s \subset z+\Omega$ et $y \notin f\left((\overline{z+\Omega} \setminus \Omega_s) - z\right)$ (car $(\overline{z+\Omega} \setminus \Omega_s) - z = \overline{\Omega} \setminus (\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$ et $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}\right)$.

Depuis par l'additivité du degré on a :

$$d(f(\cdot - z), z+\Omega, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y) \text{ pour } |z| < 2s. \tag{2.4}$$

Finalement, on fixe $z \in B(0,s)$ et considérons l'homotopie

$$h(t,x) = f(x - tz) \text{ sur } \overline{\Omega}_s$$

entre f et $f(\cdot - z)$, comme $\overline{\Omega}_s - tz \subset \overline{\Omega},$ alors h est bien définie pour tout $t \in [0,1]$, et pour tout $x \in \partial\Omega_s$, ona :

$$dist(x, \partial\Omega) = s,$$

donc

$$dist(x - tz, \partial\Omega) \leq dist(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s,$$

on déduit que :

$$x - tz \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s},$$

et donc que :

$$y \neq f(x - tz)$$

c'est à dire

$$y \notin h(t, \partial\Omega_s),$$

pour tout $t \in [0,1]$, donc l'invariance par homotopie implique que :

$$d(f, \Omega_s, y) = d(f(\cdot - z), \Omega_s, y),$$

ceci pour tout $z \in B(0,s)$, ce qui permet de conclure grâce (2.3) et (2.4). ■

Lemme 2.3.2 *(Sard)*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$ et $S = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\}$, l'ensemble des points singuliers de f.

Alors $f(S)$ est de mesure nulle.

Preuve. On suppose que Ω un cube de coté a et $f \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right)$. On décompose Ω en K^n cube C_i $\left(i = \overline{1, K^n}\right)$ de coté $\frac{a}{K}$, d'où $\sqrt{N}\frac{a}{K}$ est le diamètre de chaque sous-cube C_i.

Si i telle que $S \cap C_i \neq \varnothing$ alors il existe un $x \in S \cap C_i$ et $y \in C_i$ et comme $J_f(x) = 0$ implique l'existence d'un hyperplan H_x de $\mathbb{R}^N$ contient $f'(x)\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Soit $x \longrightarrow f'(x)$ est uniformément continue i.e :

$$\forall x, y \in \Omega \ \|x-y\| < \delta \Longrightarrow \|f'(x) - f'(y)\| < \varepsilon.$$

En appliquant le théorème des accroissement finis, on trouve :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)| &\leq |y-x| \varepsilon(|y-x|) \\ &\leq \frac{a}{K}\sqrt{N}\varepsilon(|y-x|), \end{aligned}$$

on déduit que :

$$dist\left(f(y), f(x) + H_x\right) \leq \frac{a}{K}\sqrt{N}\varepsilon\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right).$$

D'autre part :

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\,dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |y-x| \sup |f'(x + t(y-x))| \\ &\leq L.\frac{a}{K}\sqrt{N}, \end{aligned}$$

telle que $L = \max_{x \in \overline{\Omega}} \|f'(x)\|$.

A$'$ la fin, si $C_i \cap S \neq \varnothing$, alors $f(C_i)$ est contenus entre $2\varepsilon\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right)^2$ et la base a des cotés de longueur $2L\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right)$, on obtient :

$$mes\left(f(C_i)\right) \leq 2\varepsilon\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right)^2\left(2L\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right)\right)^{N-1},$$

et nous avons K^n cube C_i, donc pour tout $K \geq 1$:

$$mes\left(f(S)\right) \leq 2^N L^{N-1}\left(a\sqrt{N}\right)^N \varepsilon\left(\frac{a}{K}\sqrt{N}\right),$$

faisons tendre $K \longrightarrow \infty$, et le nombre de décomposition est quelconque, on déduit que :

$$mes\left(f(S)\right) = 0.$$

■

2.4 Construction du degré de Brouwer :

Lemme 2.4.1 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^N\right) \cap C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right)$.

On désigne par

$$S = \{x \in \Omega, J_f(x) = 0\},$$

l'ensemble des points singuliers de f *et on suppose que* $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$.

alors on a :

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn(J_f(x)) \in Z.$$

Preuve. (voir [7], page 111). ■

Lemme 2.4.2 *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(S)$, $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$ *et* $(\zeta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une approximation de l'unité (i.e*$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta_\varepsilon(|x|)\,dx = 1$*), vérifiant*

$$supp\,(\zeta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon),$$

il existe $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *:*

$$d(f, \Omega, y) = \int_\Omega \zeta_\varepsilon(f(x) - y)\, J_f(x) dx.$$

Preuve. Pour démontrer cet lemme ona deux cas :

1- Premier cas, si y n 'a pas d'antécédent, alors :

$$\varepsilon_0 = dist\left(y, f\left(\overline{\Omega}\right)\right) > 0,$$

est bien posé puisque :

$$\zeta_\varepsilon(f(x) - y) = 0$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

2- Deuxième cas, soit $x_1, ..., x_n$ les antécédents de y par f, pour tout $i = 1, ..., n$, $f'(x_i)$ est inversible donc par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V_i de x_i sur une boule ouvert $B(y, r_i)$ (on peut supposer deux à deux disjoints) sur V_i, J_f ne change pas de signe et on a donc, grâce au théorème de chengement de variables :

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \zeta_\varepsilon(f(x) - y)\, J_f(x) dx &= sgn\left(J_f(x_i)\right) \int_{V_i} \zeta_\varepsilon(f(x) - y)\, |J_f(x)|\, dx \qquad (2.5) \\ &= sgn\left(J_f(x_i)\right) \int_{B(y, r_i)} \zeta_\varepsilon(z - y)\, dz \\ &= sgn\left(J_f(x_i)\right) \int_{B(0, r_i)} \zeta_\varepsilon(u)\, du \\ &= sgn\left(J_f(x_i)\right), \end{aligned}$$

telle que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \inf(r_1, ..., r_n)$ puisque $supp\left(\zeta_\varepsilon\right) \subset B\left(0, r_i\right)$ pour tout $i = 1, ..., r_n$.

D'autre part : on a

$$y \notin f\left(\overline{\Omega}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)\right)$$

et $\overline{\Omega}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$ est un compact, on obtient :

$$\varepsilon_2 = dist\left(y, f\left(\overline{\Omega}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)\right)\right) > 0.$$

Si on suppose que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ on trouve :

$$\left|f\left(x\right) - y\right| \geq \varepsilon, \forall x \in \overline{\Omega}\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right),$$

dans ce cas :

$$\zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right) - y\right) = 0,$$

on déduit que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right) - y\right) J_f(x) dx &= \int_{\bigcup_{i=1}^{n} V_i} \zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right) - y\right) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} \zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right) - y\right) J_f(x) dx, \end{aligned} \tag{2.6}$$

puisque les V_i deux à deux disjoints.

De (2.5),(2.6) on conclut la preuve pour $\varepsilon_0 = \inf\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$. ■

Proposition 2.4.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$ et B une boule ouvert incluse dans $\mathbb{R}^N \backslash f\left(\partial\Omega\right)$.*

Si $(y^1, y^2) \in B$ sont des valeurs régulières de f alors :

$$d(f, \Omega, y^1) = d(f, \Omega, y^2).$$

Avant de donner la démonstration on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.4 *Soit $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)^N$, on note, pour $(i, j) \in [1, N]^2$ et $x \in \mathbb{R}^N$, $\Delta_{ij}\left(x\right)$ le cofacteur (i, j) de $f'\left(x\right)$, c'est à dire,*

$$\Delta_{ij}\left(x\right) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} \partial_1 f_1\left(x\right) & \cdots & \partial_{j-1} f_1\left(x\right) & \partial_{j+1} f_1\left(x\right) & \cdots & \partial_N f_1\left(x\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{i-1}\left(x\right) & \cdots & \partial_{j-1} f_{i-1}\left(x\right) & \partial_{j+1} f_{i-1}\left(x\right) & \cdots & \partial_N f_{i-1}\left(x\right) \\ \partial_1 f_{i+1}\left(x\right) & \cdots & \partial_{j-1} f_{i+1}\left(x\right) & \partial_{j+1} f_{i+1}\left(x\right) & \cdots & \partial_N f_{i+1}\left(x\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_N\left(x\right) & \cdots & \partial_{j-1} f_N\left(x\right) & \partial_{j+1} f_N\left(x\right) & \cdots & \partial_N f_N\left(x\right) \end{vmatrix},$$

on a alors, pour tout $(i,k) \in [1,N]^2$ *et* $x \in \mathbb{R}^N$:

i) $\sum_{j=1}^{N} \partial_j f_k(x) \Delta_{ij}(x) = \delta_{i,k} J_f(x)$ *(où* $\delta_{i,k}$ *est le symbole de Kröneker).*

ii) $\sum_{j=1}^{N} \partial_j \Delta_{ij}(x) = 0.$

Preuve. (de la proposition)

On a d'après le lemme (2.4.2) :

$$d(f,\Omega,y^1) - d(f,\Omega,y^2) = \int_\Omega \left(\zeta_\varepsilon\left(f(x)-y^1\right) - \zeta_\varepsilon\left(f(x)-y^2\right)\right) J_f(x)dx \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon\left(f(x)-y^1\right) - \zeta_\varepsilon\left(f(x)-y^2\right) &= \int_0^1 \nabla\zeta_\varepsilon\left(z-y^1+t\left(y^1-y^2\right)\right)(y^1-y^2)dt \\ &= \sum_{i=1}^{N}(y_i^1-y_i^2)\int_0^1 \partial_i\zeta_\varepsilon\left(z-y^1+t\left(y^1-y^2\right)\right)dt \\ &= \operatorname{div}(w_\varepsilon)(z), \end{aligned} \tag{2.8}$$

où

$$w_\varepsilon(z) = \left(y^1-y^2\right)\int_0^1 \zeta_\varepsilon\left(z-y^1+t\left(y^1-y^2\right)\right)dt,$$

et

$$y^1 = \left(\overset{1}{y}_1,...,\overset{1}{y}_N\right), y^2 = (\overset{2}{y}_1,...,\overset{2}{y}_N).$$

Voir que $w_\varepsilon(z) = 0$ lorsque z est à une distance supérieure à ε du segment $[y^1,y^2]$.

Soit $\Delta_{ij}(x)$ le cofacteur (i,j) de $f'(x)$, on note :

$$v_{i,\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{N} w_{i,\varepsilon}(f(x))\,\Delta_{ij}(x)$$

la fonction $v_\varepsilon = (v_{1,\varepsilon},...,v_{N,\varepsilon}) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$.

Pour ε assez petit, $v_\varepsilon = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$, en effet, on a $[y^1,y^2]$ un compact inclus dans $B \subsetneq f(\partial\Omega)$, alors il existe $\delta > 0$ tel que deux points quelconques de chacun de ces deux compact sont à distance au moins δ d'un l'autre.

D'autre part : par la continuité uniforme de f, il existe un voisinage V de $\partial\Omega$ dans $\overline{\Omega}$ tel que tout points de $f(V)$ est à distance au plus $\frac{\delta}{2}$ de $f(\partial\Omega)$, et donc à distance au moins $\frac{\delta}{2}$ de $[y^1,y^2]$; comme $w_\varepsilon = 0$ hors de $[y^1,y^2] + B(0,\varepsilon)$, et si on prend $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta}{2}$ on a $w_\varepsilon(f) = 0$ sur V.

Ceci permet donc de prolonger v_ε à $\mathbb{R}^N$ par 0 en dehors de $\overline{\Omega}$, d'après le lemme (2.4.4) et la relation (2.8) on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(v_\varepsilon)(x) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\partial_j\left(w_{i,\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\right)\Delta_{ij}\left(x\right)+\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}w_{i,\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\partial_j\Delta_{ij}\left(x\right) \qquad (2.9)\\
&= \sum_{i,j,k=1}^{N}\partial_k w_{i,\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)\partial_j f_k\left(x\right)\Delta_{ij}\left(x\right)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\partial_i w_{i,\varepsilon}\left(f\left(x\right)\right)J_f(x)\\
&= \operatorname{div}\left(w_\varepsilon\right)\left(f\left(x\right)\right)J_f(x)\\
&= \left(\zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right)-y^1\right)-\zeta_\varepsilon\left(f\left(x\right)-y^2\right)\right)J_f(x),
\end{aligned}$$

puisque v_ε est régulière à support compact dans Ω.

De (2.7),(2.9) et l'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned}
d(f,\Omega,y^1)-d(f,\Omega,y^2) &= \int_\Omega \operatorname{div}(v_\varepsilon)\left(x\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}(v_\varepsilon)\left(x\right)dx=0
\end{aligned}$$

car :

$$\left\{\begin{array}{c} v'=\partial_i(v_{i,\varepsilon})(x)\\ u=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} v=(v_{i,\varepsilon})(x)\\ u'=0\end{array}\right.,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^N}\operatorname{div}(v_\varepsilon)\left(x\right)dx=\left[(v_{i,\varepsilon})(x)\right]_{\partial\mathbb{R}^N}-\int_{\mathbb{R}^N}0dx=0.$$

Ce qui conclut la preuve ■

Proposition 2.4.5 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h\in C^\infty\left(\left[0,1\right],\overline{\Omega}\right)^N$ et $y\in C^\infty\left(\left[0,1\right]\right)$ tel que, pour tout $t\in\left[0,1\right]$, $y(t)\notin h\left(t,\partial\Omega\right)$, alors :*

$$d(h\left(t,.\right),\Omega,y(t)),$$

est indépendent de t.

Preuve. Soient $t_1\in\left[0,1\right]$ et $r=dist\left(y\left(t_1\right),h\left(t_1,\partial\Omega\right)\right)$, on note $h_t=h\left(t,.\right)$, prenons y^1 une valeur réguliére de $h\left(t_1,.\right)$ dans $B\left(y\left(t_1\right),r\right)$. Par définition, on a :

$$d(h\left(t_1,.\right),\Omega,y(t_1))=d(h\left(t_1,.\right),\Omega,y^1)=\sum_{i=1}^{N}sgn(Jh_{t_1}(x)), \qquad (2.10)$$

où $x_1, ..., x_n$ sont les antécédents de y^1 par $h(t_1, .)$.

Pour tout $i = 1, ..., n$, l'endomorphisme $\partial_x h(t_1, x_i)$ est inversible et par le théorème des fonctions implicites nous montre qu'il existe un voisinage ouvert V_i de x_i dans Ω, un voisinage ouvert U_i de t_1 dans $[0, 1]$ et une application $X_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tels que $X_i(t_1) = x_i$, et pour tout $t \in U_i$, $X_i(t)$ est l'unique $x \in V_i$ vérifiant

$$h(t, x) = y^1,$$

on déduit que les U_i sont tous égaux sur un intervalle U contenant t_1 et ouvert dans $[0, 1]$.

Puis on a : $\partial_x h(t, X_i(t))$ est continue en t et inversible en $t = t_1$, alors on peut aussi supposer que $\partial_x h(t, X_i(t))$ est inversible pour tout $t \in U$.

D'autre part : comme

$$dist\left(y^1, h\left(t_1, \overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)\right)\right) > 0,$$

et $\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)$ est compact, alors

$$dist\left(y^1, h\left(t, \overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)\right)\right) > 0,$$

pour tout t dans un voisinage de t_1.

Donc les seuls antécédents possibles de y^1 par h_t lorsque $t \in U$ sont dans $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$, et sont donc les $X_i(t)$ précédemment trouvés.

D'où y^1 reste une valeur réguliére de h_t lorsque $t \in U$ (tous les $h_t'(X_i(t)) = \partial_x h(t, X_i(t))$ sont inversibles) et donc, pour tout t :

$$d(h(t, .), \Omega, y^1) = \sum_{i=1}^{N} sgn(Jh_t(X_i(t))).$$

Depuis, on prend U tel que $\partial_x h(t, X_i(t))$ reste inversible pour tout $t \in U$ et le signe du déterminant de cette application ne peut pas changer lorsque t varié dans U et $i = 1, ..., n$.

De (2.10) on a :

$$d(h(t, .), \Omega, y^1) = \sum_{i=1}^{N} sgn(Jh_{t_1}(X_i(t_1))) = d(h(t_1, .), \Omega, y(t_1)). \tag{2.11}$$

Comme

$$\left|y^1 - y(t_1)\right| < dist(y(t_1), h(t_1, \partial\Omega)),$$

et $\partial\Omega$ est un compact, pour tout t dans un voisinage de t_1 on a :

$$\left|y^1 - y(t)\right| < dist\left(y(t), h(t, \partial\Omega)\right).$$

Par la définition de d et puisque y^1 est une valeur réguliére de h_t pour tout $t \in U$, on a :

$$d(h(t,.), \Omega, y(t)) = d(h(t,.), \Omega, y^1),$$

de (2.11), on conclut que $t \longmapsto d(h(t,.), \Omega, y(t))$ est constant au voisinage de t_1. D'où d est invariant par homotopie. ■

2.5 Unicité du degré de Brouwer :

Réduction au cas linéaire :

Pour démontrer l'unicité du degré, il suffit de déterminer le degré sur les applications linéaires et avec $y = 0$.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(C_f)$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N \subset C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$. Comme y est une valeur régulière de f et si on prend x un antécédent de y par f alors x est forcément dans Ω (et non sur $\partial\Omega$) et $f'(x)$ est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local d'un voisinage de x sur un voisinage de y.

D'où, au voisinage de x, il ne peut exister d'autre antécédent de y (f est injective au voisinage de x), donc ces antécédents sont isolés et comme Ω est borné, alors ils sont en nombre fini (sinon, ils auraient un point d'accumulation qui serait lui même un antécédent mais non isolé).

Si on suppose δ assez petit, alors les boules centrées sur les antécédents de y et de rayon δ sont deux à deux disjoint. Comme y n'a pas d'antécédent par f en dehors de ces boules, donc d'après les propriétés (2) et (5) de la proposition (2.3.1) on démontre que :

Soit z un antécédent de y :

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f, B(z, \delta), y) \qquad (2.12) \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f - y, B(z, \delta), 0) \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f(z + \cdot) - y, B(0, \delta), 0), \end{aligned}$$

pour tout δ assez petit.

Comme f' est uniformément continue sur Ω (car $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$), donc le théorème des accroissements finis donne :

$$\begin{aligned} |f(z+x) - y - f'(z)x| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|f'(z+tx) - f'(z)\| \, |x| \\ &\leq w(|x|) \, |x| , \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $\|.\|$ est la norme d'endomorphisme induite par $|.|$ et $w(r) = 0$ lorsque $r \longrightarrow 0$ (module d'uniforme continuité de f').

Considérons l'homotopie :

$$h(t,x) = t(f(z+x) - y) + (1-t)f'(z)x,$$

et prenons $\delta > 0$, s'il existe $x \in \partial B(0,\delta)$ et $t \in [0,1]$ tel que $h(t,x) = 0$, alors

$$t(f(z+x) - y - f'(z)x) = -f'(z)x,$$

D'après (2.13) on a :

$$|f'(z)x| \leq w(\delta)\delta.$$

Mais comme $f'(z)$ est inversible, on peut trouver $C_z > 0$ indépendant de δ et x tel que :

$$|f'(z)x| \geq C_z \, |x| = C_z\delta,$$

alors :

$$C_z \leq w(\delta),$$

ce qui n'est pas posssible lorsque δ est assez petit, donc on peut appliquer l'invariance par homotopie du degré pour trouver :

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f'(z), B(0,\delta), 0). \tag{2.14}$$

Pour chaque antécédent, la seule solution de $f'(z)x = 0$ est $x = 0$ (car $f'(z)$ est inversible). Alors par l'additivité du degré topologique, cette formule est valable pour tout $\delta > 0$.

Finalement, (2.14) montre que le degré est entièrement déterminé par les valeurs qu'il prend sur les applications linéaires inversibles.

2.6 Applications de degré du Brouwer :

2.6.1 Théorème de point fixe :

Théorème 2.6.1 *Soit $\overline{B}(0,1)$ la boule d'unité fermé de $\mathbb{R}^N$ et $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ une application continue, alors f admet un point fixe dans $\overline{B}(0,1)$, i.e : $\exists x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Supposons que pour tout $x \in \partial B$ on a :

$$f(x) \neq x,$$

c'est-à-dire, f n'a pas de point fixe sur le bord $\partial B(0,1)$. On a $B(0,1)$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $0 \in B(0,1)$ et l'application.

$$Id - f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$$

est continue tel que $0 \notin (Id - f)(\partial B(0,1))$, donc on peut montrer que $Id - f$ admet des solutions ou non dans $B(0,1)$. On calculons $d(Id - f, B(0,1), 0)$ pour cela on considère l'homotopie

$$h : [0,1] \times \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$$

$$(t,x) \longmapsto tf(x).$$

S'il existe un $x \in \partial B(0,1)$ et un $t \in [0,1]$ tel que $x - h(t,x) = 0$, alors

$$tf(x) = x,$$

comme $x \in \partial B(0,1)$, donc $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$ d'où $t = 1$, et par conséquent $x = f(x)$. Ce qui prouve l'existence d'un point fixe sur $\partial B(0,1)$.

On utilisant la normalisation et l'invariance par homotopie de degré du Brouwer on obtient :

$$d(Id - f, B(0,1), 0) = d(Id, B(0,1), 0) - d(f, B(0,1), 0),$$

et on a :

$$\begin{aligned} d(h(1,.), B(0,1), 0) &= d(h(0,.), B(0,1), 0) \\ &\Longleftrightarrow \\ d(f, B(0,1), 0) &= d(0, B(0,1), 0) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$d(Id - f, B(0,1), 0) = 1,$$

donc $Id - f$ admet au moins une solution dans B. ■

2.6.2 La surjectivité de fonctions :

Proposition 2.6.2 *Soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction telle que $\frac{f(x)x}{|x|} \longrightarrow 0$ lorsque $|x| \longrightarrow \infty$. Alors f est surjective sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve. Soit $y \in \mathbb{R}^N$ et l'homotopie

$$h(t,x) = tf(x) + (1-t)x,$$

(entre f et Id), on prend $R > |y|$ assez grand et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$h(t,x) = y,$$

n'a pas de solution sur le bord $\partial B(0,R)$.

Mais grâce à l'invariance par homotopie on a :

$$d(h(0,.), B(0,R), y) = d(h(1,.), B(0,R), y),$$

i.e :

$$d(x, B(0,R), y) = d(f, B(0,R), y),$$

donc

$$d(Id, B(0,R), y) = d(f, B(0,R), y).$$

Et grâce à la normalisation du degré on obtient :

$$d(f, B(0,R), y) = 1,$$

d'où l'existence d'une solution $x \in B(0,R)$ tel que $f(x) = y$ et par conséquent, la surjectivité de f.

On suppose que $x \in \partial B(0,R)$ et $t \in [0,1]$ tel que $h(t,x) = y$, donc on a :

$$x.y = x.h(t,x) = x.tf(x) + (1-t)|x|^2,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} |y| &= (\frac{tf(x)x}{|x|} + (1-t)|x|) \\ &= (t\frac{f(x)x}{|x|} + (1-t)R). \end{aligned}$$

Pour $R > |y| + 1$ assez grand de sorte que :

$$\frac{f(x)x}{|x|} > |y| + 1,$$

et si $|x| \geq R$ on déduit que :

$$\begin{aligned} |y| &\geq t(|y|+1) + (1-t)(|y|+1) \\ &\geq |y| + 1, \end{aligned}$$

contradiction avec ce choix de R. $h(t,x) = y$ ne peut avoir une solution x sur $\partial B(0,R)$ et ceci pour tout $t \in [0,1]$. ■

2.6.3 Degré topologique des fonctions holomorphes :

Lemme 2.6.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, qui ne s'annule pas sur $\partial\Omega$, alors $d(f,\Omega,0)$ est égal au nombre de zéros de f dans Ω, comptés avec leur multiplicité.*

Preuve. Dans le cas où f est constante non-nulle, on a :

$$d(f,\Omega,0) = 0,$$

(car on a pas de zéro dans Ω) même chose dans le cas où f est non-constante mais n'admet pas de zéro dans Ω.

Maintenant, on suppose que f est une fonction non-constante et a un nombre fini de zéro dans Ω.

Soit$(z_1, ..., z_k)$ les zéros de f et $(x_1, ..., x_k)$ leur multiplicités, choisissons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que les boules $B(z_i, \varepsilon)_{i \in [1,k]}$ sont disjointes et incluses dans Ω, comme f n'a aucun zéro en dehors de l'union de ces boules, d'après la propriété d'additivité du degré on a :

$$d(f,\Omega,0) = \sum_{i=1}^{k} d(f, B(z_i,\varepsilon), 0),$$

ce qui nous reste à démontrer est que pour $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$d(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = \eta_i.$$

On va étudier le degré sur $B(0, \varepsilon)$ pour cela on suppose que $z_i = 0$ et notons $\eta = \eta_i$, donc on peut écrire f sous la forme

$$f(z) = az^n (1 + w(z)),$$

tel que $a \neq 0$ et $w(z) \longrightarrow 0$ lorsque $z \longrightarrow 0$.

Pour $|z| = \varepsilon$ on a $|w(z)| < 1$ et si on considère l'homotopie

$$h(t, z) = az^n (1 + tw(z)),$$

qui n'a pas de solutions sur $[0, 1] \times \partial B(0, \varepsilon)$.

L'invariance par homotopie nous donne :

$$d(f, B(0, \varepsilon), 0) = d(az^n, B(0, \varepsilon), 0),$$

on veut calculer le degré $d(az^n, B(0, \varepsilon), 0)$, pour cela on considère une homotopie entre az^n et z^n :

$$h(t, z) = taz^n + (1 - t)z^n.$$

Par la propriété d'invariance on obtient :

$$d(az^n, B(0, \varepsilon), 0) = d(z^n, B(0, \varepsilon), 0),$$

et on a par additivité du degré :

$$d(z^n, B(0, \varepsilon), 0) = d(z^n, B(0, 1), 0) = \eta,$$

d'où

$$d(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = \eta_i.$$

■

Théorème 2.6.4 *(Rouché)*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, f et g deux holomorphes sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, on suppose que f n'a aucun zéro sur $\partial\Omega$. Si :

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{pour tout } z \in \partial\Omega,$$

alors f et g ont même nombre de zéros dans Ω avec leur multiplicités.

Preuve. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que :

$$d(f, \Omega, 0) = d(g, \Omega, 0).$$

On désigne une homotopie h entre f et g à condition qu'elle ne s'annule pas sur $\partial\Omega$, l'homotopie est :

$$\begin{aligned} h(t, z) &= (1-t) f(z) + tg(z) \\ &= f(z) + t(g(z) - f(z)). \end{aligned}$$

On a pour $z \in \partial\Omega$:

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|,$$

donc :

$$h(t, z) \neq 0,$$

on conclut que :

$$d(f, \Omega, 0) = d(g, \Omega, 0).$$

■

Théorème 2.6.5 *(Borsuk)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné symétrique par rapport à l'origine avec $0 \in \Omega$, soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application continue impaire sur $\partial\Omega$ et telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors $d(f, \Omega, 0)$ est un entier impair.

Preuve. Supposons que f est réguliére et impaire et supposons que 0 est une valeur régulière de f et comme 0 est un antécédent évident de 0 par f (puisque f est impaire), d'après le lemme (2.4.1) du degré pour les fonctions et valeurs régulières on a :

$$d(f, \Omega, 0) = sgn(J_f(0)) + \sum_{x \in f^{-1}(\{0\}), x \neq 0} sgn(J(f(x)),$$

les antécédents non-nuls de 0 sont par couple $(x, -x)$.

Si $f(x) = 0$ alors :

$$f(-x) = -f(x) = 0,$$

de sorte qu'en formant une famille non vide, $(x_1, ..., x_l)$ ayant un seul représentant de chacun de ces couples, f' est paire ce qui donne :

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, 0) &= sgn(J_f(0)) + \sum_{i=1}^{l} sgn(J(f(x_i)) + sgn(J(f(-x_i)) \\ &= sgn(J(f(0)) + 2\sum_{i=1}^{l} sgn(J(f(x_i)). \end{aligned}$$

(car $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$) ■

Corollaire 2.6.6 *Soit $N > p$ deux entiers et $f : S^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue telle que (S^{N-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^N$). Alors il existe $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} g &: \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x &\in S^{N-1} \longmapsto f(x) - f(-x) \end{aligned}$$

une extension et impaire, en identifiant $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ où l'ensemble $\{0\}$ représente $N - p$ coordonnées.

On peut supposer que g est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Si $0 \notin g(S^{N-1})$, alors le fait que g est impaire, d'après le théorème de Borsuk on a que le degré est impaire et

$$d(g, B(0,1), 0) \neq 0,$$

donc d'après les propriétés (1) et (3) de la proposition (2.3.1) :

$$\exists x \in B(0,1) \text{ t.q} : g(x) = 0$$

i.e : que tout un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$ est dans l'image de g, ce qui est une condradiction car l'image de g est contenue dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ qui ne peut contenir un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^N$, donc on a que $0 \in g(S^{N-1})$, c'est -à-dire l'existence de x telle que :

$$g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = f(-x).$$

■

Chapitre 3

Degré topologique de Leray-Schauder

3.1 Introduction :

Maintenant, on vas présenter un autre degré topologique ayant le même rôle que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permet d'assurer qu'une équation $f(x) = y$, où f est continue d'un espace de Banach E dans lui-même, a au moins une solution x.

L'exemple suivant permet de comprendre qu'il n'est pas possible en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue.

Soient $l^2(N)$ l'espace des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de carré sommable et K la boule unité fermé de $l^2(N)$. On désigne par $|x|$ la norme de x :

$$|x|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2,$$

si $x \in K$, on définit Tx par :

$$Tx = \left(\sqrt{1-|x|^2}, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ...\right),$$

il est clair que T est continue, et que $Tx \in K$ et que plus précisement $|Tx| = 1$.

T ne possède aucun point fixe dans K, car si $Tx = x$, on doit avoir pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n,$$

et

$$x_0 = \sqrt{1-|x|^2},$$

or

$$|x| = |Tx| = 1,$$

et par conséquence $x_0 = 0$, d'où $x = 0$ ce qui contradit avec $|x| = 1$.

Donc en dimension infinie, et pour des applications continues d'un Banach E dans lui-même, on peut pas définir un degré topologique, mais il existe plusieurs degré en dimension infinie qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique, le degré qu'on va voir appelé degré de Leray-Schauder qui est construit sur les applications compactes.

On va définir un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité du type $Id - f$ où f est compact et Id désigne l'application identité des X.

3.2 Degré de Leray-Schauder

Lemme 3.2.1 *Soient E et F des espaces de Banach et A un fermé de F. Si $f : A \longrightarrow E$ est compacte et si X est un fermé borné dans A, alors $(Id - f)(X)$ est fermé.*

Preuve. Soit $y_n = x_n - f(x_n)$ est une suite de $(Id - f)(X)$ qui converge vers un y, alors comme $(x_n)_{n\geq 1} \in X$ est borné on peut extraire de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ une suite qui converge, cela montre que

$$x_n = y_n + f(x_n),$$

converge elle-même vers un $x \in X$ (car X est fermé) et, par continuité on conclut que

$$y = x - f(x) \in (Id - f)(X).$$

■

Théorème 3.2.2 *Soit E un espace de Banach, Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est compacte, telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Il existe une application d : $(Id - f, \Omega, y) \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que :*

i) *(normalisation) : si Ω est un ouvert borné de E et $y \in \Omega$, alors :*

$$d(Id, \Omega, y) = 1.$$

ii) *(additivité) : si Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est compacte et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors :*

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y).$$

iii) *(invariance par homotopie) : si Ω est un ouvert borné de E, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est compacte, $y : [0,1] \longrightarrow E$ est continue et pour tout $t \in [0,1]\,, y(t) \notin (Id - h(t,.))(\partial\Omega)$, alors :*

$$d(Id - h(0,.), \Omega, y(0)) = d(Id - h(1,.), \Omega, y(1)),$$

d est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.

Preuve. ii) L'additivité : si f est compacte et $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ avec Ω_1 et Ω_2 des ouverts inclus dans Ω alors d'après le lemme (3.2.1) l'ensemble $(Id - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ est fermé et $r = dist(y, (Id - f)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)))$ est strictement positif.

Soit g de rang fini telle que

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r$$

et F un sous-espace de dimension finie qui contient y et l'image de g.

On a alors :

$$\sup_{\overline{w}} \|g - f\| < dist(y, (Id - f)(\partial w)).$$

Pour $w = \Omega, \Omega_1$ et Ω_2, on peut utiliser g et f pour calculer $d(Id - f, w, y)$ pour tout ces w, de plus on a :

$$y \notin (Id - g)(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

donc

$$y \in F \backslash (Id - g_{\backslash \overline{\Omega \cap F}})(\overline{\Omega \cap F} \backslash ((\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F))),$$

car :

$$(\overline{\Omega \cap F} \backslash ((\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F))) \subset (\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

D'où on conclure la preuve de l'additivité comme suit :

$$\begin{aligned} d(Id - f, \Omega, y) &= d_F(Id - g_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y) \\ &= d_F(Id - g_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega_1 \cap F, y) + d_F(Id - g_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega_2 \cap F, y) \\ &= d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y). \end{aligned}$$

iii) L'invariance par homotopie :

On a les degrés en dimension finie vérifient la propriété (2) de la proposition (2.3.1), il est clair par sa définition que le degré de Leray-Schauder tout juste construit vérifie la propriété similaire ii) de la proposition (3.3.1), il suffit donc de prouver l'invariance par homotopie lorsque la valeur y est prise égale à 0.

Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est une homotopie compacte telle que $0 \notin (Id - h(t,.))(\partial\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors comme $[0,1]$ est un compact, par l'absurde on conclure que $r = \inf_{t \in [0,1]} dist(0, (Id - h(t,.))(\partial\Omega))$ est strictement positif, on prend l'homotopie

$$\tilde{h} : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$$

de rang fini et à distance de h strictement inférieure à r, donc si F est un espace de dimension finie qui contient l'image de $\tilde{h}$, on a par définition, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} d(Id - \tilde{h}(t,.), \Omega, 0) &= d_F(Id - \tilde{h}(t,.)_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, 0) \\ &= d_F(Id - \tilde{h}(t,.)_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \overline{\Omega \cap F}, 1) \\ &= d(Id - h(t,.), \Omega, 1). \end{aligned}$$

Donc l'invariance par homotopie de d_F. ■

3.3 Quelques propriétés :

Proposition 3.3.1 *Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes :*

i) *Si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$, alors il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.*

ii) *Pour tout $z \in E$, $d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f - z, \Omega, y - z)$.*

iii) *Soit Ω un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est compacte, telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$ et $r = dist(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ compacte et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup\limits_{\partial\Omega}(\|g - f\|) + \|y - z\| < r$, alors :*

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - g, \Omega, z).$$

iv) *$d(Id - f, \Omega, .)$ est constant sur les composantes connexes de $E \backslash (Id - f)(\partial\Omega)$.*

v) *Pour tout $z \in E$, $d(Id - f, \Omega, y) = d((Id - f)(. - z), z + \Omega, y)$.*

Preuve. On vue que cette proposition est similaire à la proposition (2.3.1) donc, il suffit de vérifier que les homotopies que l'on a utilisées dans la preuve de la proposition (2.3.1) sont des perturbations compactes de l'identité, lorsque les fonctions considérées sont elle-même des perturbations compactes de l'identité.

Mais on a deux points ne prend pas comme la dimension finie qui lié à la compacité de $\overline{\Omega}$, et qui sont :

• $f(\partial\Omega)$ est fermé (tout points qui n'est pas dans $f(\partial\Omega)$ est à distance strictement positive de cet ensemble) ce qui revient à dire que $(Id - f)(\partial\Omega)$ est fermé. c'est une conséquence du lemme (3.2.1).

• $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$ pour s assez petit, dans notre cas : $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega} \backslash \Omega_{2s})$ pour s assez petit, on prouve par l'absurde, exactement comme dans la preuve de la proposition (2.3.1), en utilisant le même arguement que dans la preuve du lemme (3.2.1). ■

3.4 Construction du degré de Leray-Schauder :

3.4.1 Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie :

Pour chaque espace vectoriel normé F de dimension finie, on a besoin de d_F, le degré topologique sur F.

On supose que $\dim F = n$, alors il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow F$.

Soit $A_F = \{(f, \Omega, y) / \Omega$ un ouvert borné de F, $y \in F$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est une application continue et $y \notin f(\partial\Omega)\}$. Il est clair que $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in A$(triplet de Brouwer), on pose

$$d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)),$$

tel que d est le degré topologique de Brouwer dans $\mathbb{R}^N$.

On sait que le degré est unique donc si d_F est un tel degré et $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors :

$$\tilde{d}(g, \Omega, z) = d_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi^{-1}(U), \varphi^{-1}(z)), \tag{3.1}$$

est un degré topologique sur $\mathbb{R}^N$ qui est égal au degré topologique de Brouwer d, cela prouve que cette définition ne dépond pas de l'isomorphisme φ choisi, puisque on peut construire un degré sur F à l'aide d'un autre isomorphisme.

Dans la proposition suivante, on compare les degrés topologiques des différents espaces :

Soient $F \subset G$ deux espaces vectoriels de dimension finie et Ω un ouvert borné de G, si $f : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ est continue et $y \in F \backslash f(\partial\Omega)$, alors on peut parler de $d_G(f, \Omega, y)$.

Proposition 3.4.1 *Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous espace de G, soit Ω un ouvert borné de G, $y \in F$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ une application continue telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Alors :*

$$d_G(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - f_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y).$$

Pour démontrer cette proposition en a besoin de la proposition suivant :

Proposition 3.4.2 *Si K est un compact de $\mathbb{R}^N$, alors $\left\{f_{\backslash K}, f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$ est dense dans $C(K)$.*

Preuve. On remarque d'abord que $\partial_F(\Omega \cap F)$ est inclus dans $\partial\Omega$, alors

$$y \notin (Id - f_{\backslash \overline{\Omega \cap F}})(\partial_F(\Omega \cap F)),$$

et

$$d_F(Id - f_{\backslash \overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y),$$

est bien défini. Pour suit en utilisant la définition du degré consernant les fonctions à valeurs régulières, on prend un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow G$ telle que $\varphi(\mathbb{R}^n \times \{0\}) = F$ et d'après la relation (3.1) au cas $G = \mathbb{R}^m$ et $F = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Il est clair que dans cette situation, le degré sur F est calculé comme celui sur $\mathbb{R}^n$ (car : $\mathbb{R}^n \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^n$).

Comme f est continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, d'après la proposition (3.4.2), il existe une application $\tilde{f} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ régulière et aussi uniformément proche de f, on sait alors que :

$$d_{\mathbb{R}^m}(Id - f, \Omega, y) = d_{\mathbb{R}^m}\left(Id - \tilde{f}, \Omega, y\right),$$

et que :

$$d_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}(Id - f_{\backslash \overline{\Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y) = d_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}(Id - \tilde{f}_{\backslash \overline{\Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y).$$

Soit $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ une valeur régulière de $Id - \tilde{f}_{\backslash \Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}$ suffisamment proche de y. Par construction de degré, on a :

$$d_{\mathbb{R}^n\times\{0\}}(Id - \tilde{f}_{\backslash \overline{\Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y) = \sum_{\substack{x \in \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ \text{t.q } x - \tilde{f}(x) = \tilde{y}}} sgn(J_n(Id - \tilde{f}_{\backslash \Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})})(x)),$$

où J_n le déterminant jacobien dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ identifié à $\mathbb{R}^n$.

Si x un antécédent dans Ω de $\tilde{y}$ par $Id - \tilde{f}$; alors :

$$x = \tilde{f}(x) + \tilde{y} \in \mathbb{R}^n \times \{0\},$$

et x est donc un antécédent dans $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ de $\tilde{y}$ par $Id - \tilde{f}_{\backslash \Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}$. Comme $\tilde{f}$ est à valeur dans $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, la matrice de $\tilde{f}'(x)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \partial_1\tilde{f}_1(x) & \cdots & \partial_m\tilde{f}_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1\tilde{f}_n(x) & \cdots & \partial_m\tilde{f}_n(x) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\tilde{f}_{\backslash \Omega\cap(\mathbb{R}^n\times\{0\})}\right)'(x) & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $n \times (m-n)$.

La matrice de $Id - \tilde{f}'(x)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} Id - \left(\tilde{f}_{\setminus \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}\right)'(x) & A \\ 0 & Id \end{pmatrix}.$$

D'où

$$J_m(Id - \tilde{f})(x) = J_n(Id - \tilde{f}_{\setminus \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})(x).$$

On déduit que tous les antécédents dans Ω de $\tilde{y}$ par $Id - \tilde{f}$, qui sont même les antécédents dans $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ de $\tilde{y}$ par $Id - \tilde{f}_{\setminus \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}$, sont des points réguliers de $Id - \tilde{f}$ et que :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^m}\left(Id - \tilde{f}, \Omega, y\right) &= \sum_{x \in \Omega / x - \tilde{f}(x) = \tilde{y}} sgn(J_m(Id - \tilde{f})(x)) \\ &= \sum_{\substack{x \in \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \\ \text{t.q } x - \tilde{f}(x) = \tilde{y}}} sgn(J_n(Id - \tilde{f}_{\setminus \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})})(x)) \\ &= d_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}(Id - \tilde{f}_{\setminus \overline{\Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})}}, \Omega \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}), y), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

3.4.2 Du degré de Brouwer au degré de Leray-Schauder :

Définition 3.4.3 *Soient F et E des espaces de Banach et A un fermé de F. Une application $f : A \longrightarrow E$ est de rang fini si elle est continue et si $f(A)$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.*

Proposition 3.4.4 *Soient F et E des espaces de Banach et A un fermé borné dans F. Si $f : A \longrightarrow E$ est une application compacte, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : A \longrightarrow E$ de rang fini tel que $\sup\limits_A \|g - f\| \leq \varepsilon$.*

Preuve. On a :

$$f(A) \subset \bigcup_{y \in f(A)} B(y, \varepsilon),$$

et puisque $f(A)$ est relativement compact (car A est borné), $f(A)$ est précompact, alors il existe $y_1, ..., y_n$ tels que : $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$. Soit

$$\vartheta_i(y) = \max(0, 1 - \frac{dist(y, y_i)}{\varepsilon}).$$

La fonction ϑ_i est positive continue sur E et strictement positive sur $B(y_i, \varepsilon)$, on déduit que :

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i,$$

est continue sur E et strictement positive sur $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$. Donc on pose

$$\lambda_i = \frac{\vartheta_i}{\theta},$$

une fonction continue positive sur $f(A)$ à support dans $B(y_i, \varepsilon)$ et qui vérifie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, sur $f(A)$ (λ_i une partition de l'unité).

Alors, on considère

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f(x))y_i,$$

cette fonction est continue de $A \longrightarrow E$ et de rang fini.

D'autre part, si on prend $x \in A$, comme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i((f(x)) = 1,$$

on a :

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f(x))(y_i - f(x)),$$

mais

$$\lambda_i(f(x)) = 0 \text{ si } f(x) \notin B(y_i, \varepsilon),$$

ce qui implique

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f(x)) = \varepsilon.$$

D'où la conclusion de la preuve. ∎

Conclusion :

Maintenant, on peut construire le degré de Leray-Schauder à partir de degré de Brouwer.

Soient Ω un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est compacte et telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$, par le lemme (3.2.1), $r = dist(y, (Id - f)(\partial\Omega))$ est strictement positif, on considère $g : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ une application de rang fini telle que :

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r.$$

Il est clair que $y \notin (Id-g)(\partial\Omega)$(car $\sup\limits_{\partial\Omega}\|Id-g-(Id-f)\| < dist(y,(Id-f)(\partial\Omega))$).

On prend F un espace de dimension finie qui contient l'image de g et y, la restriction $(Id-g)_{/\overline{\Omega\cap F}}$ de $Id-g$ à $\overline{\Omega\cap F}$ est à valeur dans F et comme $\partial_F(\Omega\cap F)\subset\partial\Omega$, on a :

$$((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y)\in A_F,$$

alors

$$d_F((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y),$$

est bien définie, et on peut définir le degré de Leray-Schauder de $(Id-f,\Omega,y)$ à partir de celle, pour obtenir une définition bien proposée, on montre qu'elle ne dépend pas des choix de g et F.

Soit $g_1$une autre application de rang fini définie sur $\overline{\Omega}$ et à distance de f strictement à $r = dist(y,(Id-f)(\partial\Omega))$, et on prend un autre espace F_1 de dimension finie qui contient y et l'image de g_1. En notant $G = F+F_1$, d'après la proposition (3.3.1) on obtient :

$$d_F((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y) = d_G((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap G}},\Omega\cap G,y),$$

et

$$d_{F_1}((Id-g_1)_{/\overline{\Omega\cap F_1}},\Omega\cap F_1,y) = d_G((Id-g_1)_{/\overline{\Omega\cap G}},\Omega\cap G,y),$$

D'autre part, on construit une homotopie

$$h(t,x) = t((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap G}})(x)+(1-t)((Id-g_1)_{/\overline{\Omega\cap G}})(x),$$

entre $(Id-g)_{/\overline{\Omega\cap G}}$ et $(Id-g_1)_{/\overline{\Omega\cap G}}$, on remarque que $(Id-h(t,.)$ est sur $\partial_G(\Omega\cap G)$, à distance de $Id-f$ strictement inférieure à r, en particulier, $Id-h$ ne prend jamais y comme valeur sur $[0,1]\times\partial_G(\Omega\cap G)$ donc d'après l'invariance par homotopie de d_G on a :

$$d_G((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap G}},\Omega\cap G,y) = d_G((Id-g_1)_{/\overline{\Omega\cap G}},\Omega\cap G,y).$$

Finalement, le degré de Leray-Schauder est défini comme suit :

$$d((Id-f),\Omega,y) = d_F((Id-g)_{/\overline{\Omega\cap G}},\Omega\cap F,y),$$

où $g:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ est n'importe quelle application de rang fini telle que

$$\sup_{\overline{\Omega}}\|g-f\| < r.$$

avec

$$r = dist(y,(Id-f)(\partial\Omega))$$

et F est un sous espace de E de dimension finie qui contient y et l'image de g.

3.5 Applications de degré du Leray-Schauder :

3.5.1 Théorème de point fixe :

Théorème 3.5.1 *Soit* $\overline{B}(0,1)$ *la boule d'unité fermé d'un espace de Banach* E *et* $f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ *une application compacte, alors* f *admet un point fixe dans* $\overline{B}(0,1)$, *i.e :* $\exists x \in \overline{B}(0,1)$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve. Soit E un espace de Banach, supposons que pour tout $x \in \partial B$ on a :

$$f(x) \neq x,$$

c. à.d : f n'a pas de point fixe sur le bord $\partial B(0,1)$.

On a $B(0,1)$ est un ouvert borné de E, $0 \in B(0,1)$ et l'application

$$Id - f : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$$

est compacte tel que $0 \notin (Id - f)(\partial B)$ donc on peut montrer que $Id - f$ admet des solutions ou non dans $B(0,1)$. On calculons $d(Id - f, B(0,1), 0)$ pour cela on considère l'homotopie

$$\begin{array}{rcl} h & : & [0,1] \times \overline{B} \longrightarrow \overline{B} \\ (t,x) & \longmapsto & tf(x), \end{array}$$

s'il existe un $x \in \partial B$ et un $t \in [0,1]$ tel que :

$$x - h(t,x) = 0,$$

alors :

$$tf(x) = x.$$

Comme $x \in \partial B$ donc $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$ d'où $t = 1$, et par conséquent $x = f(x)$. Ce qui prouve l'existence d'un point fixe sur $\partial B(0,1)$.

De plus, en utilisant la normalisation et l'invariance par homotopie de degré de Schauder on obtient :

$$d(Id - f, B(0,1), 0) = d(Id, B(0,1), 0) - d(f, B(0,1), 0),$$

et on a :

$$\begin{array}{rcl} d(h(1,.), B(0,1), 0) & = & d(h(0,.), B(0,1), 0) \\ & \Longleftrightarrow & \\ d(f, B(0,1), 0) & = & d(0, B(0,1), 0) = 0, \end{array}$$

d'où

$$d(Id - f, B\,(0,1)\,, 0) = 1.$$

Donc $Id - f$ admet au moins une solution dans $B(0,1)$. ∎

3.5.2 Equations différentielles ordinaires :

Théorème 3.5.2 *(Cauchy_Peano)*

Soit E un espace de Banach et $f : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ compacte. Considèrons le problème aux valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), t \in I \\ x(0) = a \end{cases}. \tag{3.2}$$

Alors, pour tout $a \in E$, il existe $T > 0$ tel que (3.2) a au moins une solution sur l'intervalle $I = [-T, T]$.

Avant de donner la démonstration de (3.2), on a besoin du théorème d'Arzela-Ascoli :

• Rappellons que dans un espace métrique, un sous-ensemble est relativement compact si sont adhérence est un ensemble compact.

Théorème 3.5.3 *(Arzelà-Ascoli) : Soit (K, d) un espace métrique compact, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset C\,(K, E)$, alors A est relativement compact dans $\left(C\,(K, E)\,, \|\cdot\|_{\infty, K}\right)$ si et seulement si les deux conditions ci-dessous sont satisfaites :*

***a**) A est équicontinu, c'est à dire, pour tout $x \in K$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V \subset K$ de x tel que :*

$$\|f\,(x) - f\,(y)\| < \varepsilon. \forall y \in V, \forall f \in A$$

***b**) $A\,(x) = \{f\,(x)\,, f \in A\}$ est relativement compact dans E.*

Preuve. (voir [1], page 57) ∎

Preuve. (Cauchy_Peano) : On intègré l'équation (3.2) sur $[0, t]\,$, on obtient :

$$x(t) = a + \int_0^t f((s), x(s))ds.$$

Notre but est de chercher $T > 0$ et $x \in C\,([-T, T]\,, E)$ qui vérifie l'équation précédente pour tout $t \in [-T, T]\,.$

L'intégrale qui apparaisse dans cette équation est à valeurs dans un Banach, mais comme les fonctions considèrées sont continues il n'y a pas de difficulté à manipuler ce genre d'intégrale.

On considère $\Phi_T : C([-T,T], E) \longrightarrow C([-T,T], E)$ telle que :

$$\Phi_T = \int_0^t f((s), x(s))ds,$$

il suffit de monter qu'il existe $T > 0$ tel que Φ_T a un point fixe.

Tout d'abord on a si $x_n \longrightarrow x$ dans $C([-T,T], E)$, alors

$$\{x_n(t); n \geq 1, t \in [-T,T]\},$$

est borné, disons par M, et la fonction compacte f qui tronsforme $[-T,T] \times \overline{B}(0, M)$ sur un ensemble borné de E, on a :

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x)(t)\| \leq \int_{-T}^{T} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| ds,$$

et comme f est continue, on obtient :

$$\|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty,$$

cette quantité reste uniformément borné, d'après le théorème de convergence dominé, on peut voir que

$$\Phi_T(x_n) \longrightarrow \Phi_T(x) \text{ dans } C([-T,T], E),$$

d'après cela en remarque que Φ_T est continue.

En suite, il faut prouver que Φ_T envoie les bornés de $C([-T,T], E)$ sur des ensembles relativement compacts dans cet espace, pour cela on doit appliquer le théorème d'Arzela -Ascoli.

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée dans $C([-T,T], E)$, on a :

$$\|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')\| \leq \left| \int_{-t'}^{t} \|f(s, x_n(s))\| ds \right|.$$

Si on note :

$$Y = \{f(s, x_n(s)); n \geq 1, s \in [-T,T]\},$$

d'après ce qui précède Y est borné, disons par K, ce qui montre que :

$$\|\Phi_T(x_n)(t) - \Phi_T(x_n)(t')\| \leq K |t - t'|,$$

ce qui donne donc l'équicontinuité de $\{\Phi_T(x_n); n \geq 1\}$.

Par ailleurs, d'après la compacité de f, on a Y est relativement compact dans E, cela permet de voir que l'enveloppe convexe $Co(Y)$ de Y est aussi relativement compact dans E, et on a pour tout $n \geq 1$ et $s \in [-T, T]$:

$$f(s, x_n(s)) \in Y,$$

il est facile de montrer que :

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(s, x_n(s))ds \in \overline{Co(Y)}.$$

Anssi :

$$\int_0^t f(s, x_n(s))ds \in t\overline{Co(Y)},$$

qui est compact.

Cela montre donc que

$$(\Phi_T(x_n)(t))_{n\geq 1},$$

reste dans un compact de E, d'où on conclut que Φ_T envoie les bornes de $C([-T, T], E)$ sur des ensembles relativement compacts.

Si on arrive à bien choisir un $T > 0$ et un $R > 0$ tel que Φ_T envoie $\overline{B}(0, R)$ dans elle -même, on peut démontrer le Théorème de Cauchy-Peano à partir de point fixe de Schauder, en effet :

Si on prend $R = \|a\| + 1$ et M un majorant de f sur $[-1, 1] \times \overline{B}(0, R)$, on a alors si $T \leq 1$ et $x \in C([-T, T], E)$ est bornée par R,

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|\Phi_T(x)\| \leq \|a\| + \int_{-T}^{T} \|f(s, x(s))\|ds \leq \|a\| + 2TM,$$

il suffit que $T < \inf(1, \frac{1}{2M})$ pour que $\Phi_T(x)$ reste borné par R sur $[-T, T]$. ■

3.5.3 Résolution d'EDP :

Équation linéaire modèle :

Nous allons considérer des équations basées sur l'équation linéaire modèle :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.3}$$

tels que Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^2(\Omega)$. La solution est prise au sens faible : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega fv.$$

D'après l'inégalité de Poincaré on déduit que :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme sur l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Et d'après le théorème de Riesz on déduit qu'il existe une solution à (3.3) au sens faible. Et on peut voir que cette solution est continue par rapport à f, si $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ alors la solution u_n correspondante à f_n converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

À partir des théorèmes d'injection de Sobolev et de Rellich on obtient que : pour tout $p < \frac{2N}{N-2}$, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continuement et compactement dans $L^2(\Omega)$.

Équations linéaires non-coercives :

Le principe est de trouver les solutions d'un problème et prouver l'existence d'une solution à ce problème, grâce au degré topologique, à la base de la résolution d'EDP elliptiques lineaires "non coercives" de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathrm{div}(Vu) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.4}$$

où $V \in (L^\infty(\Omega))^N (V$ c'est la convection). Ces équations sont non–coercives car si l'on essaie d'écrire la formulation variationelle sous la forme :

$$a(u, v) = \int_\Omega fv$$

(pour appliquer le théorème de Lax-Milgram), la forme bilinéaire :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega uV.\nabla v$$

n'est pas coercive($a(u; v) \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ pour $\alpha > 0$, n'est pas valable), donc le théorème de Lax-Milgram ne peut pas s'appliquer, mais on peut cependant prouver l'existence et l'unicité d'une solution de (3.4).

L'idée est de "geler" le terme $div(Vu)$ en fixant $\overline{u} \in L^2(\Omega)$, et on note

$$u = F(\overline{u}),$$

la solution de

$$-\Delta u = f - \mathrm{div}(\overline{u}V),$$

(la solution existe car le second membre est dans le dual de $H_0^1(\Omega)$).

Il est clair que

$$F : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

est compacte, mais on peut pas prouver que F envoie une boule dans elle même et il faut donc employer une technique de degré topologique pour montrer que F a une point fixe.

Cela se fait en estimant a priori les solutions de

$$u = tF(u).$$

C'est bien sur dans ces estimations que la difficulté réside et tout le raisonnement éffectué étant assez simple et direct.

Non-linéaire bornée :

On peut facilement résoudre :

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.5}$$

cette équation est non-linéaire, mais sa non-linéarité est assez limitée et son opérateur différenciel principal reste linéaire.

L'idée est de "geler" le terme, de non-linéarité ; on se donne $\overline{u} \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u = -\sin(\overline{u}) + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{3.6}$$

ceci définit une application

$$F : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

qui a $\overline{u}$ associé la solution $F(\overline{u}) = u$ de (3.6) et pour résoudre (3.5) il suffit de trouver u tel que $\overline{u} = u$, ie montrer que F a un point fixe on commence par voir que

$$F : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

est continue car si $\overline{u}_n \longrightarrow \overline{u}$ dans $L^2(\Omega)$ alors

$$\sin(\overline{u}_n) \longrightarrow \sin(\overline{u}) \text{ dans } L^2(\Omega),$$

(sin est globalement lipschitzienne), de sorte que la continuité de la solution (3.3) par rapport au second membre montre que

$$F(\overline{u}_n) \longrightarrow F(\overline{u}) \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

donc en particulier dans $L^2(\Omega)$.

Par ailleurs, F envoie $L^2(\Omega)$ en entier sur un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$. En effet, pour tout $\overline{u} \in L^2(\Omega)$ on a :

$$\|\sin(\overline{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq mes(\Omega)^{\frac{1}{2}},$$

et le second membre $-\sin(\overline{u}) + f$ de (3.6) reste borné dans $L^2(\Omega)$, indépendamment de $\overline{u}$. Mais l'application qui à ce second membre dans $L^2(\Omega)$ associé la solution de (3.6) dans $H_0^1(\Omega)$ est linéaire continue, donc envoie les bornés de $L^2(\Omega)$ sur des bornés de $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, l'image de F incluse dans un borné de $H_0^1(\Omega)$, donc un ensemble relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Donc, la fonction

$$F : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

est compacte et comme on vient de le voir a son image incluse dans un ensemble relativement compact (donc borné) de $L^2(\Omega)$.

Pour R assez grand, F envoie donc la boule dans $L^2(\Omega)$ centrée en 0 et de rayon R dans elle-même, et le théorème de point fixe de Schauder permet d'affirmer que F a un point fixe c'est-à-dire qu'il existe une solution (au sens faible) de (3.5).

Non-linéarité surlinéaire :

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{3.7}$$

Et on considère $F : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ qui à $\overline{u}$ associé la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\overline{u}^3 + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} , \tag{3.8}$$

on n'est pas sûr que, lorsque $\overline{u} \in L^2(\Omega)$, cette équation est soluble (car $\overline{u}^3$ n'est pas dans $L^2(\Omega)$ en général), on va montrer qu'une boule de $L^2(\Omega)$ est stable par F.

Comme $\overline{u}^3$ est une non-linéarité surlinéaire, elle va exploser les normes.

Autrement dit : si prend $f = 0$ un instant, on se rend compte que pour $\lambda > 0$:

$$F(\lambda\overline{u}) = \lambda^3 F(\overline{u}),$$

ce qui montre que F a élever au cube le rayon des boules et ne va donc pas stabiliser une boule se rayon assez grand, on peut donc avoir l'idée de raisonner sur des boules de rayon petit, mais f n'est pas nul et ces boules de rayon petit ne seront pas non plus stables par F ($F(0)$ n'est pas petit).

Il faut donc appliquer une autre méthode qui est le degré topologique, et on va supposer $N = 2$.

D'abord, on ne définit pas F de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ mais de $L^6(\Omega)$ dans $L^6(\Omega)$(de sorte que $\overline{u}^3 \in L^2(\Omega)$ lorsque $\overline{u} \in L^6(\Omega)$) en dimension $N = 2$, $H_0^1(\Omega)$ s'injecte bien dans $L^6(\Omega)$ car $6 < \frac{2N}{N-2}, N = 2$ et la solution de (3.8) est dans $L^6(\Omega)$ lorsque $\overline{u} \in L^6(\Omega)$.

On a F est continue car $\overline{u}_n \longrightarrow \overline{u}$ dans $L^6(\Omega)$, et comme :

$$\left|\overline{u}_n^3 - \overline{u}\right| \leq |\overline{u}_n - \overline{u}| \left(|\overline{u}_n|^2 + |\overline{u}_n| |\overline{u}| + |\overline{u}|^2\right).$$

Et on utilisons l'inégalité de Holder on obtient :

$$\overline{u}_n^3 \longrightarrow \overline{u}^3 \text{ dans } L^2(\Omega),$$

et la continuité de la solution de (3.3) par rapport au second membre montre que :

$$F(\overline{u}_n) \longrightarrow F(\overline{u}) \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

donc dans $L^6(\Omega)$.

Si $(\overline{u}_n)_{n\geq 1}$ est borné dans $L^6(\Omega)$, alors $(\overline{u}_n^3)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et comme pour (3.5) on en déduit que $(F(\overline{u}_n))_{n\geq 1}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc relativement compact dans $L^6(\Omega)$(vu l'injection compact de Sobolev). Donc on trouve que F transforme les bornés de $L^6(\Omega)$ sur des ensembles relativement compacts dans $L^6(\Omega)$.

Pour trouver un point fixe à F à l'aide d'un degré topologique, nous allons montrer que, pour R assez grand :

$$d(Id - F, B(0, R), 0) = 1.$$

On utilisons l'invariance par homotopie du degré on prouve que

$$u = tF(u),$$

n'a pas de solution sur $[0,1] \times \partial B(0,R)$.

Par l'absurde, si on suppose qu'une solution existe, il est évident que $t = 0$.

Donc

$$F(u) = u/t$$

montre que u/t vérifie

$$-\Delta(u/t) = -u^3 + f$$

au sens de distribution, d'où pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + t\int_\Omega u^3 v = t\int_\Omega fv.$$

En prenant $v = u$ et en négligeant le terme $\int_\Omega u^4$ qui est positif, on trouve que :

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \left|\int_\Omega fu\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}, \text{ (Cauchy-Schwartz)}$$

sur $H_0^1(\Omega)$, et d'après l'inégalité de Poincaré on a :

$$\|.\|_{L^2(\Omega)} \leq \|.\|_{H_0^1(\Omega)},$$

donc on a :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continuement dans $L^6(\Omega)$, on en déduit l'existence d'une constante K indépendant de u tel que :

$$\|u\|_{L^6(\Omega)} \leq KC\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En posant $R = KC\|f\|_{L^2(\Omega)} + 1$, on a $u \notin \partial B(0,R)$, ce qui conclut la preuve.

Bibliographie

[1] G. Allaire, Aalyse numérique et optimisation-M1. https ://Books.google.dz /books ?isbn=2730212558.

[2] V. Beck , (un tout petit peu d'homotopie). www.Univ.orleans.fr/mapmo/membres/beck/pdf /homotopie.pdf.

[3] Nadjet Bouchair-Bouchebtoule Warda, Le groupe fondamental de Poincaré, mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de licence en maths. 2008-2009.

[4] H. Brézis, (Analyse fonctionnelle Théorie et applications). Masson, Paris,1983.

[5] M. Cuesta, Analyse fonctionnelle non linéaire et applications en équations différentielles, Master 2 Maths Pures. Cours 2009-2010. Semestre 4.

[6] J. Droniou, (Degrés Topologiques et Applications (20/06/2006)). https ://Users.monash.edu.au/~jdroniou/docs/degré.pdf.

[7] O. Kavian, Introduction à la théorie des points crétiques et Applications aux problèmes élliptiques. www.ljll.math.upmc.fr/~smets/ULM/Kavian.pdf.

[8] D. E.Medjadi, (Analyse mathématique 1ère année d'université, Fonctions de plusieurs variables réelles, Volume 2 (réimprèssion 1996).

[9] P. A-Raviant, Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, (1983).

[10] M-Thérèse et Lacroix Sonier, Distributions espaces de Sobolev Applications, Ellipses, Marketing, S.A, Paris, (1998).

[11] Thesis. Univ. biskra.dz/45/1/math_m1.pdf.