REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N° d'ordre :

Série :

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat L.M.D.

Spécialité Mathématiques et Applications

Thème

Contribution à l'étude des équations différentielles multivoques du second ordre

Par

WAFIYA BOUKROUK

Soutenue le : 24 / 06 /2015

Devant le Jury :

Président :	N. Touafek	Prof.	Université de Jijel
Directrice de thèse :	D. Azzam-Laouir	Prof.	Université de Jijel
Examinateurs :	S. Messaoudi	Prof.	Université de Dhahran
	M. Yarou	Prof.	Université de Jijel
	N. Abada	M.C.A.	ENS de Constantine

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES (LMPA)

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné pour terminer cette thèse.

Je remercie infiniment ma directrice de thèse Madame Dalila Azzam-Laouir, Professeur à l'université de Jijel, tout d'abord d'avoir accepté de m'encadrer pendant la durée de ce trvail, de m'accepter être l'une de ses thésards, ensuite d'avoir assurer le bon déroulement du parcours du doctorat depuis son choix du sujet de recherche. Je lui suis reconnaissante pour son sérieux au travail, sa clairvoyance mathématique, ses conseils, ses efforts, sa disponibilité et sa compréhension. Je la remercie de m'avoir assuré un bon encadrement au sens propre du mot.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude à Monsieur Nouressadat Touafek, Professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Salim Messaoudi, Professeur à l'université de Dhahran, Monsieur Mustapha Yarou, Professeur à l'université de Jijel et Madame Nadjet Abada, Maître de Conférences à l'université de Constantine qui ont bien voulu établir un rapport sur ma thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Par ailleurs, je remercie aussi tous mes collègues, toute la famille du laboratoire de recherche, et tous les enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction générale

La modélisation des phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation pour le développement des mathématiques aussi abstraites soient-elles. Aujourd'hui encore, elle est plus que jamais présente dans chacun de ces domaines. Mais tout d'abord, qu'est ce que modéliser signifie ?

En fait, modéliser consiste à décrire en termes mathématiques, souvent via des équations différentielles, décrire pour pouvoir ensuite prédire le comportement d'un système en fonction. Schématiquement, le modèle est une boîte noire qui fournit des valeurs de sortie en fonction de valeurs d'entrée. En effet, pour modéliser, on doit d'abord faire une hypothèse sur la loi mathématique qui régit le phénomène observé. Cependant, une telle loi met en jeu des variables et des paramètres dont les valeurs seront fixées grâce au données expérimentales recueillies sur le terrain, c'est pourquoi un modèle n'a jamais été parfait. Déjà, en réalité on ne peut connaitre qu'une partie d'informations concernant le système à modéliser, en plus des incertitudes qu'on peut rencontrer dans les paramètres utilisés dans le modèle. Prenons le simple exemple d'un problème de Cauchy

$$(Equa)\quad \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)); \quad t \in [t_0, b] \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

supposons que cette équation modélise un certain phénomène. Ici, la solution qui décrit le phénomène dépend de la valeur initiale u_0. Cependant, les valeurs initiales en général sont des valeurs approchées, car on les obtient à travers des mesures, ceci peut provoquer des erreurs. L'erreur peut provenir des instruments de mesures par exemple, d'un manque d'informations, ou d'une mal interprétation même du phénomaine, par conséquent, la solution obtenue décrivant la loi du phénomène ne peut que contenir une ou des erreurs, l'équation $(Equa)$ donc autant que modèle n'est pas parfaite.

Pour résoudre ce problème et améliorer un petit peu le modèle $(Equa)$, intuitivement, l'idée était simple : c'est d'utiliser ce qu'on appelle "des intervalles de tolérance", c'est à dire : au lieu de travailler avec u_0 qui n'est peut être pas la vraie valeur à l'instant t_0, il est préférable de chercher un intervalle $[u_0 - \epsilon_1, u_0 + \epsilon_2]$ dans lequel la valeur initiale exacte qui est inconnue doit être incluse. Dans ce cas, la solution cherchée $U(.) = [u_1(.), u_2(.)]$ doit être aussi une application dont les valeurs sont des intervalles. i.e. des éléments de $cc(\mathbb{R})$. Le second membre de l'équation f se transforme aussi en une application F : $[t_0, b] \times cc(\mathbb{R}) \to cc(\mathbb{R})$ dont les valeurs sont des intervalles, on obtient ce qu'on appelle une équation par intervalles.

Les mathématiciens regardaient les choses d'un aspet plus général. En fait, l'ensemble des intervalles $[a, b]$ ce n'est qu'un cas particulier de $cc(\mathbb{R}^d)$, la famille des parties non vides convexes compates de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$. Maintenant, le problème qui s'est posé mathématiquement est que $cc(\mathbb{R}^d)$ n'a pas la structure d'espace vectoriel, d'ailleur c'est un espace semi-vectoriel, pourquoi, car muni de l'addition classique de Minkowski, associative et commutative, l'élément neutre de $cc(\mathbb{R}^d)$ c'est bien le singleton $\{0_{\mathbb{R}^d}\}$, i.e. $0_{cc(\mathbb{R}^d)} = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, mais, le problème est que $A - A \neq 0_{cc(\mathbb{R}^d)}$ (sauf si A est un singleton), autrement dit, $(-A)$ n'est pas symétrique à A. En fait il n y a aucun symétrique pour $A \in cc(\mathbb{R}^d)$. Il en résulte immédiatement la perte de la structure vectorielle pour $cc(\mathbb{R}^d)$, et du coup on ne peut plus parler de dérivée, ni d'équations différentielles non plus dans cet espace là.

En revanche $cc(\mathbb{R}^d)$ muni de la distance de Haussdorff est un espace métrique qui possède beaucoups de propriétés, historiquement, ceci a motivé la recherche à résoudre les équations différentielles dans les espaces métriques, et là il falait développer "la théorie de l'analyse des intervalles" puisque c'était la clé de la solution.

Le premier monographe dans le champ de l'analyse des intervalles est celui de Moore ([46]) dont le but était de gérer l'incertitude qui apparaît dans de nombreux modèles surtout informatiques. Après cela, la recherche a continué dans cette direction où plusieurs concepts de l'analyse réelle ou bien vectorielle ont été étendus à l'analyse des intervalles, qui représente en fait un cas particulier de l'analyse dans les espaces métriques, ce qui a contribué à l'évolution des mathématiques en donnant naissance à d'autres notions. Aussi, il a été réalisé que beaucoup de résultats du calcul differentiel et d'analyse multivoque ne comptaient pas vraiment sur la structure linéaire et peuvent donc être adaptés au cas non linéaire des espaces métriques, jusqu'au point où le concept de l'équation différentielle régissant l'évolution dans les espaces métriques a été formulé de manière appropriée.

En effet, en 1967, le mathématicien M. Hukuhara a introduit une nouvelle opération de soustraction dans $cc(\mathbb{R}^d)$ qui remplace d'une certaine manière la soustraction classique de Minkowski, à partir de cette opération il a pu définir une notion de dérivation appropriée à cet espace métrique et qui porte aujourd'hui son nom ([31]). Il a aussi introduit une nouvelle approche d'intégration pour les multi-applications en relation avec. Ces notions sont apparues simultanément avec le développement de l'analyse multivoque, plusieurs auteurs s'y intéressent et en 1969, De Blasi et Iervolino ([16]) ont considéré pour la première fois une équation différentielle avec la dérivée de Hukuhara. La solution d'une telle équation est une multi-application, c'est à dire, une application à valeurs multivoques, c'est pourquoi on l'appelle "équation différentielle multivoque"(EDM) ou bien "ensembliste"(EDE).

Le papier d'Iervolino était le point de départ d'une nouvelle théorie si importante vue son impact sur toutes les mathématiques. Depuis, beaucoup de travail a été fait dans ce domaine, plusieurs problèmes ont été discutés et différents documents de recherche ont été publiés (voir [16],[18], [40], [41],[49], [50],[51] et [56]).

Quelques années plus tard, la dérivée de Hukuhara semble avoir un inconvénient majeur. En fait, une solution d'une EDM avec cette dérivée, telle qu'elle a été introduite dans le papier [31], possède la propriété suivante : le diamètre des valeurs de la solution est une fonction croissante par rapport au temps. Cela signifie en pratique, que l'incertitude contenue dans le modèle, l'incertitude qui est mesurée par le diamètre des valeurs de la solution, augmente à travers le temps, et cela peut être incommode. Dans le cas des équations différentielles par intervalles (EDIs), afin de surmonter ce problème, il a été introduit un nouveau concept de différentiabilité de Hukuhara généralisée (voir [57]). Le nouveau concept permet d'obtenir des solutions avec des valeurs de diamètre décroissant, cela signifie que l'incertitude représentée par le diamètre de ces valeurs devrait être en baisse dans le temps et ceci est le principal avantage de la nouvelle approche. Notons que l'article [57] a lancé l'étude des équations différentielles par intervalles (EDIs) avec les deux types des dérivées de Hukuhara (le nouveau est appelé dans [57] "the (ii)-gh type of Hukuhara derivative"). Cependant, dans [40], l'auteur présente de nouvelles études sur les EDIs en utilisant la nouvelle dérivée, il l'appelle "la dérivée de Hukuhara du second type". Fortement motivé par les résultats obtenus pour les EDMs avec la dérivée classique, le même auteur a exploité largement l'étude des problèmes de Cauchy par intervalles et les EDMs en général avec la dérivée de Hukuhara du deuxième type et a présenté de nombreux résultats, même dans le cadre stochastique (voir [41], [42], [43] et [44]).

Au-delà du côté appliqué des mathématiques et loin des problèmes de modélisation et d'incertitude, l'étude des équations différentielles multivoques en tant que discipline indépendante, présente certains avantages. Elles forment une sorte de généralisation des équations différentielles usuelles car si la multi-application est à valeurs univoques, il est clair que la dérivée de Hukuhara et l'intégrale multivoque se réduisent à la dérivée vectorielle et à l'intégrale ordinaire. Par conséquent, les résultats obtenus dans le cadre des EDMs deviennent ceux correspondants aux systèmes différentiels ordinaires si l'espace de base est $\mathbb{R}^d$, d'autre part, si l'espace de base est un Banach, nous obtenons à partir des EDMs les equations différentielles ordinaires correspondantes dans un espace de Banach. Par ailleurs, dans le cadre des EDMs on ne dispose que d'un espace métrique semi-linéaire pour y travailler, par rapport à l'espace vectoriel normé complet qu'on utilise dans l'étude habituelle d'un système différentiel ordinaire.

Notons aussi que certaines EDMs sont générées par des inclusions différentielles multivoques (IDMs) et elles sont utilisées comme outil pour prouver l'existence de solutions d'inclusions différentielles multivoques (voir [34] et [58]). On peut aussi exploiter les EDMs dans l'étude des equations différentielles de phase (voir [34]). Vu tous ces avantages, la théorie des EDMs a récemment été en croissance très rapide et est encore dans les premiers stades.

la monographie [34] fournit un compte systématique du développement plus ou moins récent dans cette théorie, les auteurs y décrivent l'état relativement courant de la théorie, ils montrent l'unité essentielle réalisée et initialisent plusieurs nouvelles extensions à d'autres types d'EDMs.

Notre but à travers cette thèse est de contribuer à la théorie des EDMs, à travers un nombre de travaux dans lesquels nous abordons l'étude des EDMs et IDMs du second ordre avec trois conditions aux limites. On s'intéresse particulièrement dans un premier temps, à l'équation du second ordre de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t, U(t), \dot{U}(t)), \quad t \in [0,1], \\ U(0) = 0_E;\ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,1[$ un paramètre, $E = cc(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des parties non vides convexes compactes de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, et $F : [0,1] \times E \times E \to E$ est une application. Et en deuxième lieu, à l'inclusion différentielle de la forme

$$(\mathcal{I}) \begin{cases} \ddot{U}(t) \in \Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big), \quad t \in [0,1], \\ U(0) = 0_E;\ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

où $\Phi : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application, et $E = cc(\mathbb{R}^d)$.

Gupta et Marano ([27], [38] et [39]) ont donné des résultats d'existence pour l'équation $(\mathcal{P})$ avec des conditions aux limites en trois points en dimension finie. Ces résultats ont été généralisés par Azzam-Laouir, Castaing et Thibault dans [8] au cas d'un espace de Banach séparable. On trouve aussi des résultats sur des problèmes aux limites pour des équations différentielles usuelles du second ordre dans [28]. En ce qui concerne l'inclusion $(\mathcal{I})$, elle a été étudiée par plusieurs auteurs sous différentes conditions sur la multi-application Φ, voir par exemple [1], [8] et [33]. Dans tous ces travaux elle a été considérée dans le cadre d'un espace vectoriel.

Notre travail est réparti en quatre chapitres.

Le premier comporte toutes les notions de bases nécessaires dans la réalisation de nos travaux. En plus des notions connues dans le domaine de l'analyse multivoque, on y trouve aussi une bonne introduction à la théorie de l'intégration de Hukuhara et sa relation avec les dérivées de Hukuhara que nous avons présenté avec détails. Notons que ce premier chapitre contient plusieurs résultats que nous avons construit, démontré et utilisé pour démontrer les résultats fandamantaux dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre, nous entammons l'étude de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$

avec les conditions aux limites en trois points dans le cadre de l'espace métrique $cc(\mathbb{R}^d)$ en utilisant deux types de dérivées de Hukuhara. Dans le but de mener une étude plus générale, nous considérons l'équation $(\mathcal{P})$ avec retard, c'est à dire de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_l) \begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t, U_t, \dot{U}(t)), \quad t \in [0,1], \\ U(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-l, 0], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}; \ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

avec $l \geq 0$ et U_t est définie par $U_t(s) := U(t+s)$ pour tout $s \in [-l, 0]$. En supposant que F soit golobalement continue et qu'elle vérifie une condition de lipschitzité par rapport à la deuxième et troisième variables, on arrive à prouver un résultat d'existence et d'unicité. La méthode de démonstration consiste à transformer le problème $(\mathcal{P}_l)$ en un problème de point fixe et ceci grâce à la fameuse fonction de Green. Cette étude élargie à l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$ certains résultats obtenus dans [8] dans le cadre d'un espace de Banach.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une variante et au même temps une application du résultat obtenu dans le chapitre précédent. Il s'agit aussi d'un résultat d'existence et d'unicité en supposant que F soit mesurable par rapport au temps et satisfait une condition de lipschitzité par rapport à la seconde et troisième variables, i.e.," de type Carathéodory ".

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous exposons l'étude de l'inclusion différentielle $(\mathcal{I})$ avec les dérivées de Hukuhara sous les trois conditions aux limites. On commence tout d'abord par donner un troisième résultat pour l'équation $(\mathcal{P})$, mais cette fois ci sans unicité et grâce à une méthode constructive. En suite, comme application à ce dernier résultat, on termine par donner un autre pour l'inclusion $(\mathcal{I})$ sous l'hypothèse de semi continuité-supérieure sur Φ.

Nous voulons à travers ces travaux élargir l'étude des EDMs du second ordre puisque beacoups de résultats existent déjà pour le premier ordre concernant les équations et les inclusions différentielles multivoques. Pour des problèmes différentiels récents du premier ordre avec les dérivées de Hukuhara, on peut se référer à [34], [40], [41], [42], [43], [49], [50], [56] et [57] pour les équations, et [18], [51] et [55] pour les inlusions. Dans [41] par exemple, l'auteur a considéré un problème de Cauchy avec retard, avec la dérivée de Hukuhara du second type, où l'existence et l'unicité de la solution ont été démontrées par une méthode constructive. Cependant dans [56], on y trouve un autre type d'équations du premier ordre avec la dérivée de Hukuhara classique, où l'existence et l'unicité de la solution ont été démontrées par une méthode du point fixe. Par contre, dans [50], l'auteur a considéré une équation différentielle multivoque du second ordre de la forme

$$\begin{cases} D^2\Phi(t,x) = \Phi(t,H_x), \\ D\Phi(t,x)|_{t=0} = \{0\}, \\ \Phi(0,x) = \Psi(x), \end{cases}$$

où $H, \Psi : K \to cc(K)$ sont des applications linéaires continues données, et $D\Phi(t,x)$ est la dérivée de Hukuhara classique de $\Phi(t,x)$ par rapport à t.

Dans [18], les auteurs ont considéré une inclusion différentielle du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in \Phi\big(t, X(t)\big), \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

où $\dot{X}(t)$ désigne la dérivée de Hukuhara classique de X au point t, $X_0 \in cc(\mathbb{R}^d)$ et $\Phi : [0,1] \times cc(\mathbb{R}^d) \rightrightarrows cc(\mathbb{R}^d)$ est une multi-application supposée semi-continue supérieurement. Dans le dernier chapitre de cette thèse nous avons adapté cette inclusion au second ordre.

Les résultats du Chapitre 2 ont fait l'objet d'une publication parue dans le journal "Numerical Functional Analysis and Optimization" [4], et le résultat du troisième chapitre a fait l'objet d'une publication à paraitre dans "Journal of fixed point theory and applications" [5].

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous résumons les notations et les concepts de base liés à l'étude des EDMs. Après avoir introduire dans la Section 1.1 les notations utilisées tout au long de ce manuscrit, à travers la deuxième et quatrième sections nous rappelons les notions famil-liaires du domaine, puis dans les Sections 1.5, 1.6 et 1.7, nous rappelons des définitions et quelques notions concernant l'analyse multivoque, à savoir la mesurabilité et la continuité des multi-applications. Par contre, dans la troisième section nous présentons la notion de dérivation typiquement appropriéé à l'étude des EDMs. Non seulement nous donnons les définitions et les propriétés élémentaires, nous détaillons les démonstrations de certains résultats, mais aussi nous présentons d'autres résultats qu'on a pu établir nous même avec démonstrations.

Dans la section 1.8, nous nous intéressons particulièrement à la théorie de l'intégration multivoque. Les notions de cette section ont été prise du papier de Hukuhara [31], mais nous les avons étudiées d'une manière approfondie et détaillée. la Section 1.9 contient des résultats qui montrent la relation entre les dérivées et l'intégrale au sens de Hukuhara.

Dans les Sections 1.10, 1.11, 1.12 et 1.13, nous présentons des outils adaptés au contexte des espaces métriques, et qui généralisent des outils analogues connus dans la théorie des espaces vectoriels, en commençant par la convexité abstraite, passant par un théorème du point fixe qui généralise celui de Banach pour les contractions.

En résumé, ce premier chapitre comporte tous les outils fandamentaux permettant de formaliser puis étudier les EDMs. Le lecteur peut se référer à [2], [13], [31] et [32] pour plus de détails.

Notons que toutes les démonstrations qui figurent dans ce chapitre, soit, c'est des démonstrations que nous avons détaillé, ou bien des démonstrations que nous avons nous même fourni.

1.1 Notations

Pour tout espace métrique (X, d_X), on note

- $B_X(x, r)$ (resp. $\overline{B}_X(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r.

- $S_X(x, r)$ la sphère de centre x et de rayon r.

- $P_f(X)$ l'ensemble des parties fermées de X.

- $Comp\ (X)$ la famille des parties non vides compactes de X.

- Si A est un sous ensemble de X alors $diam(A)$ est le diamètre de A.

- $\overline{A}$ est la fermeture de A.

- ∂A est la frontière de A.

- Si X est un espace vectoriel normé, $cc(X)$ désigne la famille de toutes les parties non vides convexes compactes de X, et 0_X l'élément neutre de X.

- Pour $X = \mathbb{R}^d$, l'addition (de Minkowski) et la multiplication par scalaires dans $cc(\mathbb{R}^d)$ sont définies comme suit : pour $A, B \in cc(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},\ \lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

- $Co(A)$ l'enveloppe convexe de A.

- Si $A \in Comp\ (X)$, $V(A, \delta)$ est le δ-voisinage de A, il est défini par

$$V(A, \delta) = \left\{ x \in X; d(x, A) = \inf_{y \in A} d_X(x, y) < \delta \right\}.$$

Notons que si A est un sous ensemble convexe d'un espace vectoriel normé, alors $V(A,\delta)$ l'est aussi.

- $d\mu(t)$ ou dt la mesure de Lebesgue.

- p.p. est l'abréviation de presque partout.

- resp. est l'abréviation de respectivement.

- EDO : équation différentielle ordinaire.

- EDE(M) : équation différentielle ensembliste (multivoque).

- IDM : inclusion différentielle multivoque.

- $C_X([a,b])$ l'espace de toutes les applications continues $U:[a,b]\to X$, muni de la distance de la convergence uniforme définie pour tous U,V par

$$d(U,V)=\sup_{t\in[a,b]} d_X(U(t),V(t)).$$

1.2 La distance de Hausdorff et l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.2.1 *Soient A,B deux sous ensembles d'un espace métrique (X,d_X), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A,B)=\sup_{a\in A} d(a,B),$$

avec

$$d(a,B)=\inf_{b\in B} d_X(a,b),$$

et la distance de Hausdorff entre A et B est définie par

$$\mathcal{H}(A,B)=\max\left\{e(A,B),\, e(B,A)\right\}=\max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d_X(a,b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d_X(b,a)\right\}.$$

Propriétés élémentaires

1. $e(A,\emptyset)=\infty$ si $A\neq\emptyset$,

2. $e(\emptyset,B)=0$,

3. $e(A,B)=0 \Leftrightarrow A\subset\overline{B}$,

4. $e(A,B)\leq e(A,C)+e(C,B)$, C un sous ensemble de X,

5. $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$,

6. $\mathcal{H}(A,B) \leq \mathcal{H}(A,C) + \mathcal{H}(C,B)$.

$P_f(X)$ muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$ est un espace métrique, et

• Si (X, d_X) est complet, alors $(P_f(X), \mathcal{H})$ et $(Comp\ (X), \mathcal{H})$ le sont aussi.

• Si X est séparable, alors $(Comp\ (X), \mathcal{H})$ l'est aussi.

De plus,

Proposition 1.2.1 *([32], Proposition 3.3) Si (X, d_X) est un espace métrique, alors une famille de compacts de X contenus dans un compact de X est une partie compacte de $Comp\ (X)$.*

Proposition 1.2.2 *([32], Proposition 5.2) Si $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, alors $cc(\mathcal{E})$ est fermé dans $Comp\ (\mathcal{E})$.*

Dans toute la suite, on pose $E := cc(\mathbb{R}^d)$. Pour $A \in E$, on note par $|||A|||$ la magnitude de A définie par

$$|||A||| := \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = \sup_{a \in A} \|a\|.$$

$(E, \mathcal{H})$ est un espace métrique complet car d'après la Proposition 1.2.2, il est fermé dans $Comp\ (\mathbb{R}^d)$ qui est complet. L'espace $(E, \mathcal{H})$ est aussi séparable puisque c'est un sous ensemble de l'espace métrique séparable $Comp\ (\mathbb{R}^d)$. De plus, il est localement compact car pour tout $r > 0$ et tout $A_0 \in E$, la boule femée $\overline{B}_E(A_0, r)$ est compacte. En effet, une boule fermée $\overline{B}_E(A_0, r)$ est une famille de compacts de $\mathbb{R}^d$, puisque E est la famille de tous les sous ensembles convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $\overline{B}_E(A_0, r)$ sont contenus dans $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r + |||A_0|||)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^d$, car

$$\begin{aligned} A \in \overline{B}_E(A_0, r) \Leftrightarrow \mathcal{H}(A, A_0) \leq r \quad &\Rightarrow \quad |||A||| = \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq \mathcal{H}(A, A_0) + |||A_0||| \leq r + |||A_0||| \\ &\Leftrightarrow \quad \max_{a \in A} \|a\| \leq r + |||A_0||| \\ &\Leftrightarrow \quad A \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r + |||A_0|||). \end{aligned}$$

Donc, grâce à la Proposition 1.2.1, $\overline{B}_E(A_0, r)$ est compact dans $(Comp\,(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$, et donc dans $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H}) = (E, \mathcal{H})$.

Il est bien connu que l'addition de Minkowski est associative et commutative avec l'élément neutre $0_E = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, mais, en général, $A - A \neq 0_E$ (sauf si A est un singleton), autrement dit, $(-A)$ n'est pas symétrique à A. Une première implication de ce fait est que la simplification additive n'est pas valable, i.e. $(A + B) - B \neq A$. Cela imlique aussi l'absence du symétrique dans E ce qui le prive d'être un espace vectoriel. En revanche, avec cette addition et la multiplication par scalaires positifs, E est un espace métrique semi-linéaire. Pour la distance $\mathcal{H}$ nous avons pour tous $A, B, C, D \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes

(P1) $\mathcal{H}(A + C, B + C) = \mathcal{H}(A, B)$;

(P2) $\mathcal{H}(A + B, C + D) \leq \mathcal{H}(A, C) + \mathcal{H}(B, D)$;

(P3) $\mathcal{H}(\lambda A, \lambda B) =\mid \lambda \mid \mathcal{H}(A, B)$.

1.3 Différence et dérivées de Hukuhara

En 1967, le mathématicien M. Hukuhara a introduit une opération de soustraction dans l'espace E pour laquelle la différence entre A et A est égale à 0_E. En effet, soient $A, B, C \in E$. L'ensemble C est appelé la différence de Hukuhara de A et B, si $A = B + C$. Alors, il est noté par $A \ominus B$.

Notons que $A \ominus B \neq A - B$.

Lemme 1.3.1 *([52]) (la règle de simplification de Radström) Soient A, B et C des parties d'un espace vectoriel topologique telles que*

$$A + C \subset B + C.$$

Si A est convexe, B est convexe fermé, et C est non vide et borné, alors

$$A \subset B.$$

Grâce au Lemme 1.3.1, nous avons

Lemme 1.3.2 *Soient A, B, C des éléments de E. Si $A + C = B + C$, alors $A = B$.*

Par ce Lemme, il est clair que si la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe, alors elle est unique.

Le problème d'existence de la différence de Hukuhara $A \ominus B$ est souvent un inconvenient malgré le résultat suivant

Proposition 1.3.1 *([31], Proposition 4.2) Soient $A, B \in E$. Alors, pour que la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante :*
Si $a \in \partial A$, il existe au moins un point c tel que

$$a \in B + c \subset A. \tag{1.1}$$

Démonstration.

Nécessité. En effet, si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in E$ tel que $A = B + C$. Soit $a \in \partial A = \overline{A} \bigcap \overline{C^A_{\mathbb{R}^d}} \subset \overline{A} = A = B + C$. D'où l'existence de $b \in B, c \in C$ tels que $a = b + c$. Puisque $b \in B$ nous avons $b + c \in B + c$, i.e. $a \in B + c$. Et puisque $c \in C$, nous avons $B + c \subset B + C = A$. Donc (1.1) est vérifiée.

Suffisance. Supposons que (1.1) est vérifiée pour A et B, et considérons l'ensemble

$$C := \{c \in \mathbb{R}^d; B + c \subset A\}.$$

Nous avons $C \in E$. En effet, on sait que $\partial D \neq \emptyset \Leftrightarrow$ D n'est pas ouvert et fermé à la fois. On sait aussi que $\mathbb{R}^d$ est convexe d'où, il est connexe par arcs et par suite il est connexe, par conséquent, les seules parties ouvertes et fermées à la fois dans $\mathbb{R}^d$ sont l'ensemble $\emptyset$ et $\mathbb{R}^d$ lui même. Mais, A est non vide, et il est compact donc différent de $\mathbb{R}^d$. On conclut que $\partial A \neq \emptyset$, donc, il existe $a \in \partial A$, et d'après (1.1), il existe $c \in \mathbb{R}^d$ tel que $a \in B + c \subset A$, donc $c \in C$, d'où la non vaguité de C.

Soient $c, c' \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors, $B + c \subset A$ et $B + c' \subset A$, d'où

$$\lambda(B + c) + (1 - \lambda)(B + c') \subset \lambda A + (1 - \lambda)A,$$

i.e.

$$\lambda B + (1-\lambda)B + \lambda c + (1-\lambda)c' \subset \lambda A + (1-\lambda)A,$$

puisque A et B sont convexes, $\lambda B + (1-\lambda)B = B$ et $\lambda A + (1-\lambda)A = A$, i.e.

$$B + (\lambda c + (1-\lambda)c') \subset A,$$

et donc $\lambda c + (1-\lambda)c' \in C$, d'où la convexité de C. L'ensemble C est aussi compact puisque il est fermé borné dans $\mathbb{R}^d$. En effet, soit $(c_n)_n \subset C$ une suite convergente vers $c \in \mathbb{R}^d$. Pour tout n, nous avons $B + c_n \subset A$. Soit $b \in B$, donc $(b + c_n)_n \subset A$, et puisque A est fermé, $\lim\limits_{n\to\infty}(b + c_n) = b + c \in A$. On conclut que $c \in C$, d'où la fermeture de C. Maintenant, puisque A et B sont bornés, il existe $M_1, M_2 > 0$ tels que

$$|||A||| = \max_{a\in A} \|a\| \leq M_1 \;\; et \;\; |||B||| = \max_{b\in B} \|b\| \leq M_2.$$

Soit $c \in C$. Pour $b \in B$, nous avons $b + c \in A$, d'où $\|c + b\| \leq M_1$,

donc

$$\|c\| = \|c + b - b\| \leq \|c + b\| + \|b\| \leq M_1 + M_2,$$

d'où la bornitude de C. Maintenant, il suffit de montrer que $B + C = A$. Nous avons pour tout $c \in C$, $B + c \subset A$ donc $B + C \subset A$. D'autre part, soit $a \in A$. Une droite passant par a rencontre ∂A en deux points a_1, a_2. (C'est à dire si $R = \{\beta a + (1-\beta)c/\beta \in \mathbb{R}\}$, avec $c \in \mathbb{R}^d$, alors il existe $a_1, a_2 \in R$ tels que $a_1, a_2 \in \partial A$).

Puisque $a_1, a_2 \in \partial A$, d'après (1.1), il existe c_1, c_2 tels que

$$a_1 \in B + c_1 \subset A \quad et \quad a_2 \in B + c_2 \subset A,$$

donc $c_1, c_2 \in C$, $a_1 \in B + c_1$ et $a_2 \in B + c_2$.

Nous avons, $a \in [a_1, a_2]$, donc on peut écrire $a = \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$, avec $\lambda \in]0,1[$ d'où,

$$a \in \lambda(B + c_1) + (1-\lambda)(B + c_2) = \lambda B + (1-\lambda)B + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2$$

mais $\lambda B + (1-\lambda)B = B$ car B est convexe, de même $\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in C$ car C est convexe, donc

$$a \in B + \lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \subset B + C.$$

$\blacksquare$

Proposition 1.3.2 *Pour $A, B \in E$, si la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe, alors $diam(A) \geq diam(B)$.*

Démonstration. Supposons que $A \ominus B$ existe. Soit $a \in \partial A$. D'après la Propositipon 1.3.1, il existe au moins un point c tel que $B + c \subset A$. Donc, $diam(B+c) \leq diam(A)$, or $diam(B+c) = diam(B)$ d'où,

$$diam(B) \leq diam(A).$$

$\blacksquare$

Pour tous $A, B, C, D \in E$, nous avons les propriétés suivantes

(P4) $A \ominus A = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $A \ominus \{0_{\mathbb{R}^d}\} = A$ car $A = A + \{0_{\mathbb{R}^d}\} = \{0_{\mathbb{R}^d}\} + A$;

(P5) si $A \ominus B$ existe alors

$$(A \ominus B) + C = C + (A \ominus B) = (C + A) \ominus B = (A + C) \ominus B;$$

(P6) si $A \ominus B$ existe, alors $\lambda A \ominus \lambda B$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et nous avons

$$\lambda(A \ominus B) = \lambda A \ominus \lambda B;$$

(P7) pour tous $\lambda, \beta \geq 0$, si $\lambda \geq \beta$, alors $\lambda A \ominus \beta A$ existe et $\lambda A \ominus \beta A = (\lambda - \beta)A$;

(P8) si $A \ominus B$ existent, alors $|||A \ominus B||| = \mathcal{H}(A, B)$;

(P9) si $A \ominus B$, $A \ominus C$ existent, alors $\mathcal{H}(A \ominus B, A \ominus C) = \mathcal{H}(B, C)$;

(P10) si $A \ominus B$, $C \ominus D$ existent, alors $\mathcal{H}(A \ominus B, C \ominus D) = \mathcal{H}(A + D, B + C)$;

(P11) si $(A + B) \ominus C$ et $B \ominus C$ existent, alors $(A + B) \ominus C = A + (B \ominus C)$, par contre, il suffit que $B \ominus C$ existe pour que $(A+B) \ominus C$ existe et que $(A+B) \ominus C = A + (B \ominus C)$;

(P12) si $A \ominus B$, $A \ominus C$ et $C \ominus B$ existent, alors $(A \ominus B) \ominus (A \ominus C)$ existe et

$$(A \ominus B) \ominus (A \ominus C) = C \ominus B;$$

(P13) si $A \ominus B$, $A \ominus C$ et $(A \ominus B) \ominus (A \ominus C)$ existent, alors $C \ominus B$ existe et

$$C \ominus B = (A \ominus B) \ominus (A \ominus C);$$

(P14) si $A \ominus C$, $D \ominus B$ et $(A+B) \ominus (C+D)$ existent, alors

$$(A+B) \ominus (C+D) = (A \ominus C) \ominus (D \ominus B);$$

(P15) si $A \ominus B$ et $B \ominus C$ existent, alors $A \ominus (B \ominus C)$ existe et

$$A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) + C;$$

(P16) si $B \ominus C$ et $A \ominus (B \ominus C)$ existent, alors $(A+C) \ominus B$ existe et

$$A \ominus (B \ominus C) = (A+C) \ominus B.$$

Démonstration.

(P6) Si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in E$ tel que $A = B + C$ avec $A \ominus B := C$, d'où $\lambda A = \lambda(B+C) = \lambda B + \lambda C$, on conclut que $\lambda A \ominus \lambda B$ existe et

$$\lambda A \ominus \lambda B = \lambda C = \lambda(A \ominus B).$$

(P7) Nous avons $\lambda A = (\lambda - \beta + \beta)A = (\lambda - \beta)A + \beta A = \beta A + (\lambda - \beta)A$. D'où $\lambda A \ominus \beta A$ existe et $\lambda A \ominus \beta A = (\lambda - \beta)A$.

(P8) Si $A \ominus B$ existe, alors il existe $C \in E$ tel que $A = B + C$ avec $A \ominus B := C$. Donc, $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B+C, B)$, et d'après (P1), $\mathcal{H}(B+C, B) = \mathcal{H}(C, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = |||C||| = |||A \ominus B|||$.

(P9) Si $A \ominus B$, $A \ominus C$ exisent, alors il existe $D_1, D_2 \in E$ tels que $A = B + D_1,\ A = C + D_2$ avec $A \ominus B := D_1,\ A \ominus C := D_2$. D'où,

$$B + D_1 = C + D_2.$$

D'après la propriété (P1) de la distance de Hausdorff et la dernière égalité,

$$\mathcal{H}(B, C) = \mathcal{H}(B+D_1, C+D_1) = \mathcal{H}(C+D_2, C+D_1) = \mathcal{H}(D_2, D_1) = \mathcal{H}(D_1, D_2) = \mathcal{H}(A \ominus B, A \ominus C).$$

(P10) Si $A \ominus B$ et $C \ominus D$ existent, alors il existe $K_1, K_2 \in E$ tels que

$$A = B + K_1, \ \ i.e.\ A \ominus B := K_1,$$

$$C = D + K_2, \ \ i.e.\ C \ominus D := K_2.$$

D'où, par(P1)

$$\mathcal{H}(A + D, B + C) = \mathcal{H}\big((B + K_1) + D, B + (D + K_2)\big) = \mathcal{H}(K_1, K_2) = \mathcal{H}(A \ominus B, C \ominus D).$$

(P11) Si $(A + B) \ominus C$ et $B \ominus C$ existent, alors il existe $D_1, D_2 \in E$ tels que

$$A + B = C + D_1, \ \ i.e.\ (A + B) \ominus C := D_1,$$

$$B = C + D_2, \ \ i.e.\ B \ominus C = D_2.$$

En remplaçant la deuxième égalité dans la première, on obtient

$$A + (C + D_2) = C + D_1.$$

D'où, $A + D_2 = D_1$, i.e. $D_1 = A + D_2$ ou bien $(A + B) \ominus C = A + (B \ominus C)$.

Par contre, si $B \ominus C$ alors il existe $D \in E$ tel que $B = C + D,\ et\ B \ominus C = D$. D'où $A + B = A + (C + D) = C + (A + D)$ donc, $(A + B) \ominus C$ existe et $(A + B) \ominus C = A + D = A + (B \ominus C)$.

(P12) Si $A \ominus B$, $A \ominus C$ et $C \ominus B$ existent, alors il existe $D_1, D_2, D_3 \in E$ tels que

$$A = B + D_1, \ \ i.e.\ A \ominus B := D_1,$$

$$A = C + D_2, \;\; i.e. \; A \ominus C := D_2,$$

$$C = B + D_3, \;\; i.e. \; C \ominus D := D_3.$$

En remplaçant la première et la troisième égalités dans la deuxième, on obtient

$$B + D_1 = (B + D_3) + D_2.$$

D'où, d'après le Lemme 1.3.2, $D_1 = D_3 + D_2$ ou bien $D_1 = D_2 + D_3$. Donc, $D_1 \ominus D_2$ existe et $D_1 \ominus D_2 = D_3$, i.e. $(A \ominus B) \ominus (A \ominus C)$ existe et $(A \ominus B) \ominus (A \ominus C) = C \ominus D$.

(P13) Si $A \ominus B$ et $A \ominus C$ existent, alors il existe $D_1, D_2 \in E$ tels que

$$A = B + D_1, \;\; i.e. \; A \ominus B := D_1,$$

$$A = C + D_2, \;\; i.e. \; A \ominus C := D_2.$$

D'après la deuxième égalité, $A \ominus D_2$ existe et $C = A \ominus D_2$. D'où, d'après la première égalité $C = (B + D_1) \ominus D_2$, et puisque $D_1 \ominus D_2$ existe, d'après la propriété (P11), on obtient

$$C = (B + D_1) \ominus D_2 = B + (D_1 \ominus D_2).$$

Par conséquent, $C \ominus B$ existe et

$$C \ominus B = D_1 \ominus D_2 = (A \ominus B) \ominus (A \ominus C).$$

(P14) Si $A \ominus C$, $D \ominus B$ et $(A + B) \ominus (C + D)$ existent, alors il existe $D_1, D_2, D_3 \in E$ tels que

$$A = C + D_1, \;\; i.e. \; A \ominus B := D_1,$$

$$D = B + D_2, \;\; i.e. \; A \ominus C := D_2,$$

$$A + B = (C + D) + D_3, \;\; i.e. \; C \ominus D := D_3.$$

En remplaçant la première et la deuxième égalités dans la troisième, on obtient

$$(C + D_1) + B = C + (B + D_2) + D_3.$$

D'où, d'après le Lemme 1.3.2, $D_1 = D_2 + D_3$ donc, $D_3 = D_1 \ominus D_2$, i.e. $(A+B) \ominus (C+D) = (A \ominus C) \ominus (D \ominus B)$.

(P15) Si $A \ominus B$ et $B \ominus C$ existent, alors il existe $D_1, D_2 \in E$ tels que

$$A = B + D_1, \quad i.e.\ A \ominus B := D_1,$$

$$B = C + D_2, \quad i.e.\ B \ominus C := D_2.$$

D'où, $A = (C + D_2) + D_1 = D_2 + (D_1 + C)$, on conclut que $A \ominus D_2$ existe et que $A \ominus D_2 = D_1 + C$,

autrement dit, $A \ominus (B \ominus C)$ existe et $A \ominus (B \ominus C) = (A \ominus B) + C$.

(P16) Si $B \ominus C$ et $A \ominus (B \ominus C)$ existent, alors il existe $D_1, D_2 \in E$ tels que

$$B = C + D_1, \quad i.e.\ B \ominus C := D_1,$$

$$A = (B \ominus C) + D_2, \quad i.e.\ A \ominus (B \ominus C) := D_2.$$

D'après ces deux égalités, $A = D_1 + D_2$ d'où, $A + C = (D_1 + D_2) + C = (C + D_1) + D_2 = B + D_2$. On conclut que $(A + C) \ominus B$ existe et que $(A + C) \ominus B = D_2 = A \ominus (B \ominus C)$. ■

Remarque 1.3.1 *Si $A \ominus B$ existe, alors $(A \ominus B) + B = B + (A \ominus B) = A$.*

Dans la suite, introduisons la notion de différentiabilité utilisée dans cette thèse.

Définition 1.3.1 *(Voir [50]) Soit $F : [a,b] \to E$ telle que les différences de Hukuhara $F(t) \ominus F(s)$ ($a \leq s \leq t \leq b$) existent. Alors, la dérivée de Hukuhara du premier type de F au point $t \in]a,b[$ est définie par la formule*

$$\dot{F}(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t) \ominus F(t-h)}{h}$$

quand ces deux limites existent par rapport à la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$. De plus,

$$\dot{F}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) \ominus F(a)}{h}, \quad \dot{F}(b) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(b) \ominus F(b-h)}{h}.$$

Définition 1.3.2 *(Voir [41]) Soit $F : [a, b] \to E$ telle que les différences de Hukuhara $F(t) \ominus F(s)$ $(a \leq t \leq s \leq b)$ existent. Alors, la dérivée de Hukuhara du second type de F au point $t \in]a, b[$ est définie par la formule*

$$\dot{F}(t) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{-1}{h} \right) (F(t-h) \ominus F(t)) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{-1}{h} \right) (F(t) \ominus F(t+h))$$

quand ces deux limites existent par rapport à la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$. De plus,

$$\dot{F}(a) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{-1}{h} \right) (F(a) \ominus F(a+h)), \quad \dot{F}(b) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{-1}{h} \right) (F(b-h) \ominus F(b)).$$

Bien évidemment, dans la Définitions 1.3.1 (resp. la Définition 1.3.2), il est implicite que pour $h > 0$ suffisamment petit, les différences de Hukuhara $F(t+h) \ominus F(t)$ et $F(t) \ominus F(t-h)$ (resp. $F(t) \ominus F(t+h)$ et $F(t-h) \ominus F(t)$) doivent exister.

Remarque 1.3.2 *Si une application $F : [a, b] \to E$ est dérivable au sens de Hukuhara du premier ou du second type sur $[a, b]$, alors elle est continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. On suppose que F est dérivable au sens de Hukuhara du premier type. Soit $t_0 \in]a, b[$ et soit $h > 0$ tel que $a \leq t_0 - h < t_0 < t_0 + h \leq b$. Pour h assez petit, nous avons

$$F(t_0 + h) = h \frac{(F(t_0 + h) \ominus F(t_0))}{h} + F(t_0),$$

et grâce à la différentiabilité de F au point t_0,

$$\lim_{h \to 0^+} F(t_0 + h) = \left(\lim_{h \to 0^+} h \right) \left(\lim_{h \to 0^+} \frac{(F(t_0 + h) \ominus F(t_0))}{h} \right) + \lim_{h \to 0^+} F(t_0) = 0 \dot{F}(t_0) + F(t_0) = F(t_0),$$

d'où la continuité de F à droite de t_0. D'autre part, nous avons

$$h \frac{(F(t_0) \ominus F(t_0 - h))}{h} + F(t_0 - h) = F(t_0),$$

et donc

$$F(t_0 - h) = F(t_0) \ominus \left(h \frac{(F(t_0) \ominus F(t_0 - h))}{h} \right),$$

on obotient alors,

$$\lim_{h\to 0^+} F(t_0-h) = \Big(\lim_{h\to 0^+} F(t_0)\Big)\ominus\Big(\big(\lim_{h\to 0^+} h\big)\big(\lim_{h\to 0^+} \frac{(F(t_0)\ominus F(t_0-h))}{h}\big)\Big) = F(t_0)\ominus 0\dot{F}(t_0) = F(t_0),$$

d'où la continuité de F à gauche de t_0. De la même manière, on peut montrer la continuité de F si elle est dérivable au sens de Hukuhara du second type. ■

Lemme 1.3.3 *([56], Lemme 5) Si $F, G : [a,b] \to E$ sont deux applications dérivables au sens de la Définition 1.3.1 telles que $\dot{F}(t) = \dot{G}(t)$ pour $t \in [a,b]$ et $F(a) = G(a)$, alors*

$$F(t) = G(t) \;\; \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Lemme 1.3.4 *([37]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $D_+f(x) \leq 0$ sauf au plus sur un sous ensemble dénombrable de $[a,b]$, alors la fonction f est décroissante.*

Ici,

$$D_+f(x_0) = \liminf_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est la dérivée de Dini supérieure à droite de f au point x_0.

Lemme 1.3.5 *Si $F, G : [a,b] \to E$ sont deux applications dérivables au sens de la Définition 1.3.2 telles que $\dot{F}(t) = \dot{G}(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ et $F(a) = G(a)$, alors*

$$F(t) = G(t) \;\; \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Démonstration. Définissons la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$f(t) := \mathcal{H}(F(t), G(t)).$$

$f(t) \geq 0$, pour tout $t \in [a,b]$ et $f(a) = \mathcal{H}(F(a), G(a)) = 0$. Alors, il suffit de montrer que f est décroissante sur $[a,b]$. f est continue. Soit $t \in [a,b[$. Soit $h > 0$ tel que $t < t+h \leq b$.

En utilisant les propriétés (P1) et (P2) de la distance de Hausdorff on obtient,

$$
\begin{aligned}
f(t+h) &= \mathcal{H}(F(t+h), G(t+h)) \\
&= \mathcal{H}\Big(F(t+h)+F(t)+G(t), G(t+h)+F(t)+G(t)\Big) \\
&= \mathcal{H}\Big(F(t)+\big(F(t+h)+G(t)\big), G(t)+\big(G(t+h)+F(t)\big)\Big) \\
&\leq \mathcal{H}(F(t), G(t)) + \mathcal{H}\Big(F(t+h)+G(t), G(t+h)+F(t)\Big) \\
&= f(t) + \mathcal{H}\Big(F(t+h)+G(t), G(t+h)+F(t)\Big),
\end{aligned}
$$

donc, en utilisant la propriété (P10)

$$
\begin{aligned}
f(t+h) - f(t) &\leq \mathcal{H}\big(F(t+h)+G(t), G(t+h)+F(t)\big) \\
&= \mathcal{H}\big(G(t+h)+F(t), F(t+h)+G(t)\big) \\
&= \mathcal{H}\big(F(t)+G(t+h), F(t+h)+G(t)\big) \\
&= \mathcal{H}\big(F(t)\ominus F(t+h), G(t)\ominus G(t+h)\big).
\end{aligned}
$$

D'où, par la propriété (P3)

$$
\begin{aligned}
\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &\leq \frac{1}{h}\,\mathcal{H}\big(F(t)\ominus F(t+h), G(t)\ominus G(t+h)\big) \\
&= \mathcal{H}\left(\left(\frac{-1}{h}\right)(F(t)\ominus F(t+h)), \left(\frac{-1}{h}\right)(G(t)\ominus G(t+h))\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &\leq \lim_{h\to 0^+}\mathcal{H}\left(\left(\frac{-1}{h}\right)(F(t)\ominus F(t+h)), \left(\frac{-1}{h}\right)(G(t)\ominus G(t+h))\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{-1}{h}\right)(F(t)\ominus F(t+h)), \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{-1}{h}\right)(G(t)\ominus G(t+h))\right) \\
&= \mathcal{H}(\dot{F}(t), \dot{G}(t)) = 0.
\end{aligned}
$$

En utilisant le Lemme 1.3.4, la fonction f est décroissante sur $[a,b]$. Ce qui entraine l'égalité désirée puisque $f(a)=0$. ■

Remarque 1.3.3 *Soient* $F_1, F_2 : [a, b] \to E$ *deux applications dérivables au sens de Hukuhara du second type sur* $[a, b]$*, alors l'application* $F : [a, b] \to E$ *définie par* $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$*, pour tout* $t \in [a, b]$*, est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur* $[a, b]$ *et*

$$\dot{F}(t) = \dot{F}_1(t) + \dot{F}_2(t), \ \forall t \in [a, b].$$

Remarque 1.3.4 *Toute application* $F : [a, b] \to E$ *constante sur* $[a, b]$ *est dérivable au sens de Hukuhara du premier et du second type sur* $[a, b]$ *et* $\dot{F}(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$*, pour tout* $t \in [a, b]$.

Remarque 1.3.5 *Si une application* $F : [a, b] \to E$ *est dérivable au sens de Hukuhara du premier ou bien du second type sur* $[a, b]$ *et si* $\dot{F}(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$*, pour tout* $t \in [a, b]$*, alors* F *est constante sur* $[a, b]$.

Démonstration. On suppose que F est dérivable au sens de Hukuhara du premier (resp. second) type sur $[a, b]$. Définissons l'application $G : [a, b] \to E$ par $G(t) = F(a)$ pour tout $t \in [a, b]$. Nous avons

$$G(a) = F(a). \tag{1.2}$$

D'autre part, puisque G est constante, alors d'après la Remarque 1.3.4, $\dot{G}(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, pour tout $t \in [a, b]$ d'où,

$$\dot{G}(t) = \dot{F}(t), \forall t \in [a, b]. \tag{1.3}$$

Par les relations (1.2) et (1.3), d'après le Lemme 1.3.3 (resp. le Lemme 1.3.5)

$$G(t) = F(t), \forall t \in [a, b],$$

donc $F(t) = F(a)$, pour tout $t \in [a, b]$, i.e. F est constante sur $[a, b]$. ∎

Proposition 1.3.3 *Soit* $F : [a, b] \to E$ *une application et* $A \in E$*. On suppose que l'application donnée par* $G(t) := (-1)\big(A \ominus F(t)\big)$*,* $t \in [a, b]$ *est bien définie. Alors,* G *est dérivable au sens de Hukuhara du premier type au point* $t_0 \in [a, b]$ *si et seulement si* F *est dérivable au sens de Hukuhara du second type au point* t_0 *et nous avons* $\dot{F}(t_0) = \dot{G}(t_0)$.

Démonstration. Soit $t_0 \in]a,b[$ et soit $h > 0$ tel que $a \leq t_0 - h < t_0 < t_0 + h \leq b$. Puisque G est dérivable au sens de Hukuhara du premier type en t_0, alors les deux limites

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)(G(t_0+h) \ominus G(t_0))$$

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)(G(t_0) \ominus G(t_0-h))$$

existent et sont égales. Or, d'après les propriétés de la différence de Hukuhara

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{-1}{h}\right)(F(t_0) \ominus F(t_0+h)) &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{-1}{h}\right)\Big(\big(A \ominus F(t_0+h)\big) \ominus \big(A \ominus F(t_0)\big)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)\Big((-1)\big(A \ominus F(t_0+h)\big) \ominus (-1)\big(A \ominus F(t_0)\big)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)(G(t_0+h) \ominus G(t_0)) = \dot{G}(t_0),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{-1}{h}\right)(F(t_0-h) \ominus F(t_0)) &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{-1}{h}\right)\Big(\big(A \ominus F(t_0)\big) \ominus \big(A \ominus F(t_0-h)\big)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)\Big((-1)\big(A \ominus F(t_0)\big) \ominus (-1)\big(A \ominus F(t_0-h)\big)\Big) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\right)(G(t_0) \ominus G(t_0-h)) = \dot{G}(t_0).
\end{aligned}$$

On conclut que F est dérivable au sens de Hukuhara du second type au point t_0 et nous avons $\dot{F}(t_0) = \dot{G}(t_0)$. ■

Le cas des intervalles

Notons par $\mathbb{I} := cc(\mathbb{R})$ la famille de toutes les parties non vides convexes compactes de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, i.e. la famille des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Pour $A, B \in \mathbb{I}$, $A = [a_1, a_2],\ B = [b_1, b_2]$, et $\lambda \geq 0$,

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \quad \lambda A = [\lambda a_1, \lambda a_2], \quad (-\lambda)A = [-\lambda a_2, -\lambda a_1].$$

Aussi, pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1\lambda_2 \geq 0$ nous avons

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A.$$

La distance de Hausdorff dans $\mathbb{I}$ est définie par

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\left\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\right\},$$

le diamètre et la magnitude de A sont définis par

$$diam(A) := a_2 - a_1 \quad et \quad |||A||| = \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

Proposition 1.3.4 *La différence de Hukuhara de deux intervalles $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$ existe si et seulement si $diam(A) \geq diam(B)$ et elle est égale à $[a_1 - b_1, a_2 - b_2]$.*

Démonstration. Si $diam(A) \geq diam(B)$ alors $a_2 - a_1 \geq b_2 - b_1$, donc $a_2 - b_2 \geq a_1 - b_1$. Prenons $c_1 := a_1 - b_1$ et $c_2 := a_2 - b_2$, alors $B + [c_1, c_2] = [a_1, a_2] = A$, donc $A \ominus B$ existe et $A \ominus B = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$.

La deuxième implication découle de la Proposition 1.3.2. ∎

Proposition 1.3.5 *([57]) Soit $F : [a,b] \to cc(\mathbb{R})$ une application et $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$. Si F est dérivable au sens de Hukuhara du premier (resp. second) type sur $[a,b]$, alors les fonctions réelles f_1 et f_2 sont dérivables, et pour tout $t \in [a,b]$ nous avons*

$$\dot{F}(t) = \left[f_1'(t),\ f_2'(t)\right].$$

$$\left(resp. \quad \dot{F}(t) = \left[f_2'(t),\ f_1'(t)\right]\right).$$

Démonstration. On suppose que F est dérivable au sens de Hukuhara du premier type. Soit $t \in]a,b[$. Pour h assez petit, $F(t+h) \ominus F(t)$ et $F(t) \ominus F(t-h)$ existent, et donc

$$diam(F(t+h)) = f_2(t+h) - f_1(t+h) \geq diam(F(t)) = f_2(t) - f_1(t) \geq diam(F(t-h)) = f_2(t-h) - f_1(t-h),$$

$$F(t+h) \ominus F(t) = [f_1(t+h) - f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t)],$$

et

$$F(t) \ominus F(t-h) = [f_1(t) - f_1(t-h), f_2(t) - f_2(t-h)].$$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)\ominus F(t)}{h}$ existe, alors les deux limites $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h}$ existent,

or

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)\ominus F(t)}{h} = \dot{F}(t), \ \lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(t+h)-f_1(t)}{h} = f_1'^{d}(t), \ \lim_{h\to 0^+} \frac{f_2(t+h)-f_2(t)}{h} = f_2'^{d}(t),$$

donc

$$\dot{F}(t) = [f_1'^{d}(t), f_2'^{d}(t)].$$

De la même manière, on trouve que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t)\ominus F(t-h)}{h} = \dot{F}(t) = [f_1'^{g}(t), f_2'^{g}(t)],$$

on conlut que $f_1'^{d}(t) = f_1'^{g}(t) = f_1'(t)$, $f_2'^{d}(t) = f_2'^{g}(t) = f_2'(t)$ et que

$$\dot{F}(t) = [f_1'(t), f_2'(t)].$$

On adopte la même démonstration dans le cas où F est dérivable au sens de Hukuhara du second type. ■

1.4 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.4.1 *Soient X un ensemble non vide et Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $A \in \Sigma \ \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$.
3. $A_n \in \Sigma, \ \forall n \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.

Si X est un espace topologique, la tribu de Borel sur X notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.4.2 *Soient* (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) *deux espaces mesurables et* g *une application définie sur* X_1 *à valeurs dans* X_2*, on dit que* g *est* (Σ_1, Σ_2)*-mesurable si pour tout* $A \in \Sigma$*,* $g^{-1}(A) \in \Sigma_1$*.*
Si X_2 *est un espace topologique, une fonction* $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$*-mesurable est dite fonction Borélienne.*

Définition 1.4.3 *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable et* M *un espace métrique. On dit que l'application* $f : X \to M$ *est* Σ*-étagée (resp. dénombrablement* Σ*-étagée) si* f *est* $(\Sigma, \mathcal{B}(M))$*-mesurable et* $f(X)$ *fini (resp. dénombrable).*

Définition 1.4.4 *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. Alors, l'application* $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *est une mesure sur* X *si*

1. $\nu(\emptyset) = 0$ *;*
2. $\nu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \nu(A_n)$*, pour toute suite dénombrable* (A_n) *d'éléments de* Σ *deux à deux disjoints.*

Le triplet (X, Σ, ν) *est appelé espace mesuré.*
Si $\nu(A) \geq 0$*, pour tout* $A \in \Sigma$*, on dit que* ν *est une mesure positive et on note* $\nu \geq 0$*, ou que l'espace* (X, Σ, ν) *est positif.*
Si $\nu(A) < \infty$*, pour tout* $A \in \Sigma$*, on dit que* ν *est une mesure finie ou que l'espace* (X, Σ, ν) *est fini.*
Si X *est un espace topologique, la mesure* $\nu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.4.5 *Soit* X *un espace topologique séparé et* ν *une mesure Borélienne. Alors,* ν *est dite régulière si pour tout* $A \in \mathcal{B}(X)$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ouvert* C *et un fermé* G *de* X*, tels que* $G \subset A \subset C$ *et* $\nu(C \setminus G) \leq \varepsilon$*.*

Une mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.

Définition 1.4.6 *Soit* (X, Σ, ν) *un espace mesuré avec* $\nu \geq 0$*. Soit* Z *un sous ensemble de* X*. On dit que* Z *est* ν*-négligeable ou négligeable (si il n'y a pas de risque de confusion), s'il existe* $A \in \Sigma$ *tel que* $Z \subset A$ *et* $\nu(A) = 0$*.*
On dit qu'une propriété sur X *est vraie* ν*-presque partout* $(\nu.p.p)$ *si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est* ν*-négligeable.*
La tribu ν*-complétée de* Σ *notée* Σ_ν *est la tribu engendrée par* Σ *et les ensembles* ν*-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\nu = \{A \cup Z /\, A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \nu\text{-négligeable}\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\nu$, c'est à dire, si tout ensemble ν-négligeable est mesurable.

Définition 1.4.7 *Soit (X, Σ, ν) un espace mesuré avec ν finie. Notons $\Sigma^* := \Sigma_\nu$ et soit $\nu^* : \Sigma^* \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\nu^*(A \cup Z) = \nu(A)$, pour tout $A \in \Sigma$ et tout Z ν-négligeable. Alors (X, Σ^*, ν^*) est un espace mesuré avec ν^* finie et complète et on a $\nu^* = \nu$ sur Σ.*
(X, Σ^*, ν^*) est appelé l'extension de Lebesgue de l'espace mesuré (X, Σ, ν).

Théorème 1.4.1 *Soient X un espace topologique compact, Σ une algèbre sur X et $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction additive, régulière et bornée. Soit $\widetilde{\Sigma}$ la plus petite tribu sur X contenant Σ. Alors, il existe une mesure unique $\widetilde{\nu} : \widetilde{\Sigma} \to \overline{\mathbb{R}}$ régulière, bornée et qui prolonge ν à $\widetilde{\Sigma}$.*

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soient t_0, t_1 deux nombres réels tels que $t_0 < t_1$, $J = [t_0, t_1]$ et Σ la famille des sous ensembles de J de la forme $\{t_0\} = [t_0, t_0]$, $]t', t'']$, pour $t_0 \leq t' \leq t'' \leq t_1$, et les unions finies de ces intervalles. Il est claie que Σ est une algèbre sur J.

Définissons $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ par

$$\nu(\{t_0\}) = 0, \quad \nu(\,]t', t'']\,) = t'' - t' \quad et \quad \nu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j),$$

avec $k \in \mathbb{N}$ et A_j des intervalles disjoints de la forme considérée.

La mesure ν est une mesure additive, régulière et bornée. Par le Théorème 1.4.1, elle admet une unique extension à $\widetilde{\Sigma}$ qui est la plus petite tribu sur J contenant Σ, et qui n'est autre que la tribu Borélienne $\mathcal{B}(J)$.

Cette extension notée $\widetilde{\nu}$ est appelée la mesure de Borel sur J.

Soit (J, Σ^*, ν^*) l'extension de Lebesgue de $(J, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\nu})$. Alors les éléments de Σ^* sont appelés ensembles Lebesgue-mesurables de J et ν^* est la mesure de Lebesgue sur J.

Définition 1.4.8 *([37]) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Un point τ est appelé point de densité de l'ensemble A si*

$$\lim_{diam(Q) \to 0,\ \tau \in Q} \frac{\mu(A \cap Q)}{|Q|} = 1,$$

où Q est un $n-$cube, $|Q|$ est le volume de Q, et μ est la mesure de Lebesgue extérieure sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.4.2 *([37]) Presque tout point d'un ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^n$ est un point de densité de A.*

Théorème 1.4.3 *(Lusin) Soit T un espace métrique compact et (T, Σ, μ) un espace mesuré positif de Radon. Alors, pour toute fonction $\varphi : T \to \mathbb{R}$ Σ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ et $\varphi_{|T_\varepsilon}$ est continue ($\varphi_{|T_\varepsilon}$ est la réstriction de φ à T_ε.)*

Le théorème de Lusin a été étendu par Pliś aux applications point à compact, à savoir les applications $F : [a, b] \to Comp\ (\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.4.4 *(Pliś, [31]) Soit $F : A \to Comp\ (\mathbb{R}^n)$ une application où A est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Pour que F soit mesurable sur A il faut et il suffit qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une partie fermée (donc compacte) A' de A telle que F soit continue sur A', et $\mu(A \setminus A') < \varepsilon$.*

1.5 Multi-applications et sélections

Définition 1.5.1 *Soient X et Y deux ensembles non vides. Une multi-application (ou fonction multivoque) F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note $F : X \rightrightarrows Y$.*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ sont donnés par

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X / F(x) \neq \emptyset\}.$$

$$\mathtt{gph}(F) = \{(x, y) \in X \times Y / x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x)$$

Définition 1.5.2 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Définition 1.5.3 *([20], Définition 2.2) Soit $\Phi : X \rightrightarrows Y$ une multi-application et $\varepsilon > 0$. On appelle sélection continue approximante de Φ toute application continue $F_\varepsilon : X \to Y$ vérifiant*

$$e\Big(gph(F_\varepsilon), gph(\Phi)\Big) < \varepsilon.$$

1.6 Mesurabilité des multi-applications

Notre but à travers cette section est d'exprimer la mesurabilité d'une application $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ que nous avons présentée sous forme de Proposition 1.6.2.

Définition 1.6.1 *Soit (J, Σ) un espace mesurable, Soient X un espace métrique et $F : J \rightrightarrows X$ une multi-application. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable ou tout simplement Σ-mesurable si pour tout ouvert V de X,*

$$F^{-1}(V) = \{t \in J / F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Théorème 1.6.1 *Soient (T, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini et complet et Y un espace métrique séparable. Soit également $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) F est Σ-mesurable ;
(ii) $gph(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$;
(iii) $F^{-1}(B) \in \Sigma$, pour tout Borélien B de Y;
(iv) $F^{-1}(C) \in \Sigma$, pour tout fermé C de Y.

Proposition 1.6.1 *([31], Proposition 1.1) Soit A une parite mesurable de $\mathbb{R}^m$, et $F : A \to Comp\,(\mathbb{R}^n)$ une application. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) L'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset C\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^n)$;
(ii) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset B\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^n$;
(iii)l'ensemble $\{x \in A; F(x) \subset U\}$ est mesurable pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$;
(iv) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \cap B = \emptyset\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^n$;
(v) $F^{-1}(B) = \{x \in A; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout fermé B de $\mathbb{R}^n$;
(vi) l'ensemble $\{x \in A; F(x) \cap B = \emptyset\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^n)$;
(vii)$F^{-1}(C) = \{x \in A; F(x) \cap B \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout $C \in Comp\,(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.6.2 *([31]) Soit $F : [a,b] \to E$ ($E = cc(\mathbb{R}^d)$). Si F satisfait l'une des conditions (i)-(vii), alors F est dite mesurable.*

Considérons une application $F : [a,b] \to E$ ($E = cc(\mathbb{R}^d)$). Alors, F peut être aussi vue comme une multi-application, i.e. $F : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ à valeurs non vides convexes compactes. Dans ce cas, la mesurabilité de F selon la Définition 1.6.2 n'est autre que sa mesurabilité autant qu'une multi-application, c'est à dire, selon la Définition 1.6.1. En effet, si F est mesurable selon la Définition 1.6.2, alors elle vérifie la condition (v), mais cette condition est équivalente à la condition (i) du Théorème 1.6.1, à savoir la mesurabilité de F comme multi-application.

Proposition 1.6.2 *Soit $F : [a,b] \to E$. La mesurabilité de F autant qu'application est équivalente à sa mesurabilité autant que multi-application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^d$ à valeurs non vides convexes compactes.*

Démonstration. On suppose que $F : [a,b] \to (E, \mathcal{H})$ est mesurable comme application i.e.

$$\forall \mathcal{V} \in \mathcal{B}(E),\ l'image\ inverse\ F^{-1}(\mathcal{V}) = \{t \in [a,b]; F(t) \in \mathcal{V}\}\ est\ mesurable.$$

Montrons que F vérifie la condition (i) de la Proposition 1.6.1, et donc elle est mesurable comme multi-application. En effet, soit $C \in Comp\ (\mathbb{R}^d)$, et notons par $\mathcal{V} = \{A \in E; A \subset C\}$. $\mathcal{V}$ est une partie de compacts de $\mathbb{R}^d$ contenus dans le compact C donc, d'après la Proposition 1.2.1, $\mathcal{V}$ est une partie compacte de $Comp\ (\mathbb{R}^d)$. Mais $\mathcal{V} \subset E$, par conséquent $\mathcal{V}$ est compacte et par suite fermée dans $(E, \mathcal{H})$ d'où, $\mathcal{V} \in \mathcal{B}(E)$. On déduit que $F^{-1}(\mathcal{V})$ est mesurable, or $F^{-1}(\mathcal{V}) = \{t \in [a,b]; F(t) \in \mathcal{V}\} = \{t \in [a,b]; F(t) \subset C\}$, i.e. (i) est vérifiée.

Supposons maintenant que $F : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ est mesurable autant que multi-application. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $(E, \mathcal{H})$, nous avons (voir [9], p. 50)

$$\mathcal{V} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} B_{ij},$$

où J est dénombrable, I est fini et tel que pour tous i, j

$$B_{ij} = \{A \in E;\ A \subset V\}, \ \ \textit{ou bien} \ \ B_{ij} = \{A \in E;\ A \cap V \neq \emptyset\},$$

et V est ouvert dans $\mathbb{R}^d$. Donc, l'image inverse

$$F^{-1}(\mathcal{V}) = F^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I} B_{ij}\right) = \bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I} F^{-1}(B_{ij}),$$

or $F^{-1}(B_{ij}) = \{t \in [a,b];\ F(t) \in B_{ij}\}$, d'où

$$F^{-1}(B_{ij}) = \{t \in [a,b];\ F(t) \subset V\}, \ \ \textit{ou bien} \ \ F^{-1}(B_{ij}) = \{t \in [a,b];\ F(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Le premier ensemble est mesurable puisque F vérifie (iii) de la Proposition 1.6.1, et le second aussi est mesurable selon la Définition 1.6.1. On conclut que $F^{-1}(\mathcal{V})$ est mesurable, d'où la mesurabilité de F autant qu'application. ∎

Proposition 1.6.3 *([18], Proposition 2) Soit $W : [a,b] \to E$ une application et $\Phi : [a,b] \rightrightarrows E$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Si W et Φ sont mesurables alors la fonction réelle $t \mapsto d(W(t), \Phi(t))$ est mesurable.*

1.7 Concepts de continuité des multi-applications

Définition 1.7.1 *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$. On dit que F est s.c.s. sur X si elle est s.c.s. en tout point $x \in X$.*

Proposition 1.7.1 *Nous avons les propriétés suivantes*

- *La s.c.s. de F est équivalente à la condition suivante :*
$F^{-1}(U)$ est un fermé de X pour tout fermé U de Y.
- *Soient T, Z deux espaces métriques et $\Phi : T \rightrightarrows Z$ une multi-application s.c.s. au point $x_0 \in T$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $e(\Phi(x), \Phi(x_0)) < \varepsilon$, pour tout $x \in B_T(x_0, \delta)$.*
- *Si une multi-application $\Phi : [a,b] \rightrightarrows Y$ est s.c.s., à valeurs fermées avec Y un espace métrique séparable, alors elle est mesurable (Théorème 1.6.1).*

Définition 1.7.2 *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est continue (resp. Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$), si pour tout $x \in X$ nous avons*

$$\lim_{x' \to x} \mathcal{H}(F(x), F(x')) = 0.$$

(resp. pour tous $x, x' \in X$ nous avons

$$\mathcal{H}(F(x), F(x')) \leq \lambda \, d_X(x, x')).$$

$\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff et d_X la distance de X.

1.8 Intégrale multivoque

La théorie de l'intégration des multi-applications trouve ses origines dans les travaux d'Aumann ([2]). Elle a été étudiée et s'est développée relativement aux équations différenielles et à la théorie du contrôle optimal. Aumann a construit une théorie basée sur l'intégrale classique de Lebesgue. Il a considéré l'intégration des sélections de la multi-application au sens classique de Lebesgue ou Bochner, i.e. $F : [a, b] \to E$ est dite Aumann intégrable si l'ensemble $S(F)$ des sélections intégrables de F est non vide. Dans ce cas

$$\int_a^b F(t)\, dt := \left\{ \int_a^b f(t)\, dt / f \in S(F) \right\} \in E.$$

Notons que la théorie de l'intégration d'Aumann est l'une des plus célèbres. Pour plus de détails et aussi de propriétés on peut se référer à [47].

Après le travail d'Aumann et au fil des années, plusieurs approches sont apparues pour définir l'intégrale d'une multi-application s'inspirant toujours des théories classiques. Cette théorie si importante dans les mathématiques est aussi un outil important dans le côté pratique notament dans l'analyse économique.

Dans cette section, on s'intéresse particulièrement à la théorie de l'intégrale de Hukuhara introduite en 1967 ([31]). Son approche est basée sur les idées classiques de Riemann et Daniell. Il a translaté ces dernières à l'espace E des convexes compacts de $\mathbb{R}^d$.

En consultant le papier de Hukuhara ([31]), on trouve qu'il a aussi défini une intégrale multivoque analogue à celle de Lebesgue classique, pour se rendre compte en fin que les deux intégrales coincident et définissent celle qu'on appelle aujourd'hui l'intégrale de Hukuhara ou bien de Riemann multivoque. Dans la suite, nous présentons ces notions dans l'ordre présenté dans le papier [31] mais avec plus de détails. Notons que l'un des objectifs du travail de cette thèse était d'analyser une partie du papier [31], comprendre et détailler les démonstrations pour les présenter d'une manière claire au lecteur.

Intégrale multivoque de Riemann.

Soit $F : [a, b] \to E$ une application. On note par $\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n\}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$, i.e. une suite finie de nombres vérifiant $a = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n = b$. Le nombre $\delta(\Delta) = \max\{\alpha_i - \alpha_{i-1}, i \in \overline{1, n}\}$ est appelé le diamètre de Δ.

Notons par Φ la famille de tous les couples (Δ, τ) où $\tau = (\tau_1, \tau_2, .., \tau_n)$ est une suite de points telle que $\tau_i \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $\forall i = \overline{1, n}$.

Pour tout $(\Delta, \tau) \in \Phi$, $I(\Delta, \tau)$ est l'ensemble défini par

$$I(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) F(\tau_i).$$

Si $I(\Delta, \tau)$ converge vers un compact convexe I ($I \in E$) lorsque la partition Δ de l'intervalle $[a, b]$ devient infiniment petite ($\delta(\Delta) \to 0$) par rapport à la distance de Hausdorff, i.e.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall (\Delta, \tau) \in \Phi)(\delta(\Delta) < \eta \Rightarrow \mathcal{H}(I(\Delta, \tau), I) < \varepsilon,$$

alors, I est par définition l'intégrale de F étendue sur l'intervalle $[a, b]$, et on écrit

$$I = \int_a^b F(t) dt.$$

On dit que $F : [a, b] \to E$ est intégrable si I existe.

Voici quelques propriétés de cette intégrale.

Lemme 1.8.1 *Si $F, G : [a, b] \to E$ sont intégrables. Alors*

$$\mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)\, dt, \int_a^b G(t)\, dt \right) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))\, dt.$$

Démonstration. En utilisant les notations mentionnées plus haut, pour tout $(\Delta, \tau) \in \Phi$,

$$I(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, F(\tau_i);$$

$$J(\Delta, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, G(\tau_i).$$

Nous avons

$$\mathcal{H}(I(\Delta, \tau), J(\Delta, \tau)) = \mathcal{H}\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})F(\tau_i), \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})G(\tau_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\mathcal{H}(F(\tau_i), G(\tau_i)),$$

par passage à la limite,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(I(\Delta, \tau), J(\Delta, \tau)) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\mathcal{H}(F(\tau_i), G(\tau_i)) = \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))dt,$$

d'où

$$\mathcal{H}\left(\lim_{n\to\infty} I(\Delta, \tau), \lim_{n\to\infty} J(\Delta, \tau)\right) = \mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)\, dt, \int_a^b G(t)\, dt\right) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))dt.$$

■

Lemme 1.8.2 *Si $a < c < b$ et $F : [a, b] \to E$ est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors F est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt. \tag{1.4}$$

Lemme 1.8.3 *Si $F : [a, b] \to E$ est intégrable sur$[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$, F est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et la formule (1.4) est vérifiée.*

Lemme 1.8.4 *Si $F : \mathbb{R} \to E$ est continue, alors elle est intégrable sur chaque intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.*

Lemme 1.8.5 *Si $F : [a, b] \to E$ est intégrable, alors*

$$\left|\left|\left|\int_a^b F(t)dt\right|\right|\right| \leq \int_a^b |||F(t)|||dt.$$

Démonstration. Grâce au Lemme 1.8.1, nous avons

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\int_a^b F(t)dt\right|\right|\right| &= \mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)dt, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \mathcal{H}\left(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b \{0_{\mathbb{R}^d}\}dt\right) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\})dt \\ &= \int_a^b |||F(t)|||dt.\end{aligned}$$

■

Lemme 1.8.6 *([49]) Si $F : [a, b] \to E$ est continue, alors pour tout $t \in [a, b[$*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (t + h - u)F(u)du = \{0_{\mathbb{R}^d}\},$$

et pour tout $t \in]a, b]$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} (t - h - u)F(u)du = \{0_{\mathbb{R}^d}\}.$$

Démonstration. La première limite est démontrée dans ([31], p. 63). Montrons la deuxième. Comme F est continue sur $[a, b]$, elle est continue sur $[t - h, t]$ pour tout $t \in]a, b]$ et tout $h > 0$ tels que $a \leq t - h$. Donc, elle est bornée sur $[t - h, t]$, i.e. il existe un nombre réel positif M tel que $|||F(u)||| \leq M$ pour tout $u \in [t - h, t]$. D'après le Lemme 1.8.5

$$\left|\left|\left|\int_{t-h}^{t} (t - h - u)F(u)du\right|\right|\right| \leq \int_{t-h}^{t} |||(t-h-u)F(u)du||| \leq \int_{t-h}^{t} (-t+h+u)Mdu = \frac{Mh^2}{2}$$

d'où,

$$\left|\left|\left|\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} (t - h - u)F(u)du\right|\right|\right| \leq \frac{Mh}{2}$$

et donc,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} (t - h - u)F(u)du = \{0_{\mathbb{R}^d}\}, \forall t \in]a, b].$$

■

Lemme 1.8.7 *([49], Lemme 10) Soit $F : [a, b] \to E$ une application continue (ou bien mesurable et bornée). Posons pour tout $t \in [a, b]$*

$$L(t) = \int_a^t F(s)ds \;\; et \;\; S(t) = \int_t^b F(s)ds.$$

Alors, L et S sont continues.

Démonstration. Fixons $t \in [a,b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Puique F est continue sur le compact $[a,b]$, il existe un réel strictement positif M tel que $|||F(u)||| \leq M$, pour tout $u \in [a,b]$. Prenons $\delta = \varepsilon/M$. Soit $u \in [a,b]$ tel que $| u - t | < \delta$. Alors, $(u > t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(S(u), S(t)) &= \mathcal{H}\left(\int_u^b F(s)ds, \int_t^b F(s)ds\right) = \mathcal{H}\left(\int_u^b F(s)ds, \int_t^u F(s)ds + \int_u^b F(s)ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, \int_t^u F(s)ds\right) = \left|\left|\left|\int_t^u F(s)ds\right|\right|\right| \\
&\leq \int_t^u |||F(s)|||ds \leq \int_t^u Mds = M(u-t) < M\delta = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ceci montre que S est continue au point t pour tout $t \in [a,b]$. Pour la preuve de la continuité de L, elle est similaire à celle de S (voir [49], Lemme 10). ■

Lemme 1.8.8 *([49]) Si $F : [a,b] \to E$ est continue(ou seulement mesurable et bornée), alors pour tout $t \in [a,b]$*

$$\int_a^t \left(\int_a^s F(u)du\right) ds = \int_a^t (t-u)F(u)du.$$

Démonstration. Définissons la fonction réelle positive f par

$$f(t) := \mathcal{H}\left(\int_a^t \left(\int_a^s F(u)du\right) ds, \int_a^t (t-u)F(u)du\right) \quad \forall t \in [a,b].$$

Nous avons

$$f(a) = \mathcal{H}\left(\int_a^a \left(\int_a^s F(u)du\right) ds, \int_a^a (a-u)F(u)du\right) = \mathcal{H}(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = 0.$$

Alors, il suffit de montrer que f est décroissante sur $[a,b]$. f est continue en vertu du Lemme 1.8.7.

Soit $t \in [a,b[$ et soit $h > 0$. En utilisant les propriétés de l'intégrale et de la distance de

Hausdorff on obtient

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \mathcal{H}\left(\int_a^{t+h}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \int_a^{t+h}(t+h-u)F(u)du\right) \\ &\leq \mathcal{H}\left(\int_a^{t}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \int_a^{t}(t-u)F(u)du\right) \\ &+ \mathcal{H}\left(\int_t^{t+h}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \int_t^{t+h}(t+h-u)F(u)du + h\int_a^t F(u)du\right) \\ &= f(t) + \mathcal{H}\left(\int_t^{t+h}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \int_t^{t+h}(t+h-u)F(u)du + h\int_a^t F(u)du\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \leq \mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(t+h-u)F(u)du + \int_a^t F(u)du\right)$$

D'après les Lemmes 1.9.1 et 1.8.6, cela implique que

$$\begin{aligned} \liminf_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} &\leq \lim_{h\to 0^+}\mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\int_a^s F(u)du\right)ds, \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(t+h-u)F(u)du + \int_a^t F(u)du\right) \\ &= \mathcal{H}\left(\int_a^t F(u)du, \{0_{\mathbb{R}^d}\} + \int_a^t F(u)du\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3.4, la fonction f est décroissante sur $[a, b]$. Ceci entraine l'égalité désirée puisque $f(a) = 0$. ■

Dans la suite, on va étudier l'intégrale multivoque de Riemann lorsque l'application F est mesurable.

Intégrales des applications mesurables d'une variable réelle.

Soit $F : [a, b] \to E$ une application mesurable. Deux cas se présentent.

• Le cas où F est bornée. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème de Pliś multivoque (Théorème 1.4.4), il existe un compact I_ε de $[a, b]$ tel que F soit continue sur I_ε et $\mu([a, b] \setminus I_\varepsilon) < \varepsilon$. On définit l'application $G_\varepsilon : [a, b] \to E$ comme suit

$$G_\varepsilon(t) = \begin{cases} F(t) & si \;\; t \in I_\varepsilon, \\ \frac{\beta'-t}{\beta'-\beta}F(\beta) + \frac{t-\beta}{\beta'-\beta}F(\beta') & sinon \end{cases}$$

où $]\beta,\beta'[$ est un intervalle contigu à I_ε.

Ainsi, on obient une application continue et qui est donc intégrable au sens de Riemann multivoque, i.e. $\int_a^b G_\varepsilon(t)dt$ existe et c'est un élément de E. De plus, cette intégrale converge vers un élément S de E, qui est par définition l'intégrale de F étendue sur $[a,b]$ et est noté $\int_a^b F(t)dt$, i.e.

$$\int_a^b F(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b G_\varepsilon(t)dt.$$

En effet, prenons une autre application G'_ε qui satisfait la même condition que G_ε, i.e. si J_ε désigne un autre compact de $[a,b]$ sur lequel F est continue et $\mu([a,b]\setminus J_\varepsilon)<\varepsilon$, alors on définit G'_ε qui coincide avec F sur J_ε d'une manière similaire à la définition de G_ε. Dans ce cas G_ε et G'_ε coincident sur l'intersection $I_\varepsilon\cap J_\varepsilon$ de plus $\mu(C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}) = \mu(C_{[a,b]}^{I_\varepsilon}\cup C_{[a,b]}^{J_\varepsilon}) \leq \mu(C_{[a,b]}^{I_\varepsilon}) + \mu(C_{[a,b]}^{J_\varepsilon}) < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$. D'autre part, F étant bornée, il existe $A\in E$ tel que $F(t)\subset A$ pour tout $t\in[a,b]$, d'où $|||F(t)|||\leq |||A|||$ pour tout $t\in[a,b]$. On obtient alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\int_a^b G_\varepsilon(t)dt, \int_a^b G'_\varepsilon(t)dt\right) &= \mathcal{H}\left(\int_{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon} G_\varepsilon(t) + \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G_\varepsilon(t)dt, \int_{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon} G'_\varepsilon(t)dt + \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G'_\varepsilon(t)dt\right)\\
&= \mathcal{H}\left(\int_{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon} F(t)dt + \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G_\varepsilon(t)dt, \int_{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon} F(t)dt + \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G'_\varepsilon(t)\right)\\
&= \mathcal{H}\left(\int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G_\varepsilon(t)dt, \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} G'_\varepsilon(t)\right)\\
&\leq \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} \mathcal{H}(G_\varepsilon(t), G'_\varepsilon(t))dt\\
&\leq \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} (|||G_\varepsilon(t)||| + |||G'_\varepsilon(t)|||)dt\\
&\leq \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} (|||A||| + |||A|||)dt\\
&= \int_{C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon}} 2|||A|||dt = 2\mu(C_{[a,b]}^{I_\varepsilon\cap J_\varepsilon})|||A||| < 4\varepsilon|||A|||
\end{aligned}$$

donc,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{H}\left(\int_a^b G_\varepsilon(t)dt, \int_a^b G'_\varepsilon(t)dt\right) = 0,$$

d'où la convergence de $\int_a^b G_\varepsilon(t)dt$ vers un élément S de E.

Définition 1.8.1 *([31]) Soit $F : A \to E$ une application mesurable, où A est une partie de $[a,b]$. On pose $F(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ pour tout $t \in A' = C^A_{[a,b]}$. Alors, l'intégrale de F étendue sur A est définie par*

$$\int_A F(t)dt = \int_a^b F(t)dt.$$

• Le cas où F n'est pas bornée. F est dite intégrable sur $[a,b]$ si la fonction réelle positive $|||F||| : [a,b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout $t \in [a,b]$ par

$$|||F(t)|||(t) = |||F(t)|||,$$

est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$. Soit $r > 0$, on définit l'application $F_r : [a,b] \to E$ par

$$F_r(t) = \begin{cases} \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(t) & si \quad S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(t) \neq \emptyset, \\ \{0_{\mathbb{R}^d}\} & si \quad S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(t) = \emptyset, \end{cases}$$

où $S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r)$ et $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r)$ désignent respectivement la sphère et la boule fermée dans $\mathbb{R}^d$ de centre $0_{\mathbb{R}^d}$ et de rayon r. L'application F_r étant mesurable et bornée, d'après le cas précédent, elle est intégrable et son intégrale étendue $\int_{[a,b]} F_r(t)dt \in E$. Montrons que $\int_{[a,b]} F_r(t)dt$ converge vers un compact convexe lorsque $r \to \infty$. En effet, soit $r < r'$,

$$\mathcal{H}\left(\int_{[a,b]} F_r(t)dt, \int_{[a,b]} F_{r'}(t)dt\right) \leq \int_{[a,b]} \mathcal{H}(F_r(t), F_{r'}(t))dt \leq \int_{[a,b]} (|||F_r(t)||| + |||F_{r'}(t)|||)dt,$$

posons $I_r := \{t \in [a,b]; F(t) \not\subseteq \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, \frac{r}{2})\}$, alors $I_{r'} \subset I_r$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (|||F_r(t)||| + |||F_{r'}(t)|||)dt &= \int_{C^{I_r}_{[a,b]}} |||F_r(t)|||dt + \int_{I_r} |||F_r(t)|||dt + \int_{C^{I_{r'}}_{[a,b]}} |||F_{r'}(t)|||dt + \int_{I_{r'}} |||F_{r'}(t)|||dt \\ &= 0 + \int_{I_r} |||F_r(t)|||dt + 0 + \int_{I_{r'}} |||F_{r'}(t)|||dt \\ &= \int_{I_r} |||F(t)|||dt + \int_{I_{r'}} |||F(t)|||dt \\ &\leq \int_{I_r} |||F(t)|||dt + \int_{I_r} |||F(t)|||dt = 2\int_{I_r} |||F(t)|||dt, \end{aligned}$$

comme la suite $(I_r)_r$ est décroissante et $\underset{r>0}{\cap} I_r = \emptyset$, et grâce à l'intégrabilité de la fonction $|||F|||$, le dernier membre tend vers 0 lorsque $r \to \infty$. On conclut que $\left(\int_{[a,b]} F_r(t)dt\right)_r$ est une suite (généralisée) de Cauchy dans $(E,\mathcal{H})$ qui est complet et donc elle converge vers un compact convexe lorsque $r \to \infty$, qui est par définition l'intégrale de F étendue sur $[a,b]$ et qu'on note par $\int_{[a,b]} F(t)dt$, c'est à dire

$$\int_{[a,b]} F(t)dt = \lim_{r\to\infty} \int_{[a,b]} F_r(t)dt.$$

Les propriétés de l'intégrale établies dans le cas où F est bornée, s'étendent au cas où F est non bornée par passage à la limite. Il est même possible d'étendre la notion de l'intégrale étendue sur A au cas où A est non bornée.

Intégrale multivoque de Lebesgue.

Cette définition de l'intégrale est applicable non seulement aux applications à une seule variable réelle mais aussi à celles à plusieurs variables. Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^m$ et $F : A \to E$ une application mesurable.

1) Si F n'admet qu'un nombre fini de valeurs $B_1, ..., B_N$, on définit l'intégrale de Lebesgue multivoque de F sur A par

$$\int_A F(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \mu(D_i)B_i,$$

où

$$D_i = \{x \in A; F(x) = B_i\}.$$

De cette définition, il résulte immédiatement que l'ensemble C défini par

$$\int_A F(x)dx = \mu(A)C, \tag{1.5}$$

est un compact convexe tel que

$$\bigcap_{x\in A} F(x) \subset C \subset Co(F(A)).$$

En effet, il suffit de prendre $C = \frac{1}{\mu(A)}\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)B_i$. Si $y \in \bigcap_{x\in A} F(x)$ alors, $y \in F(x)$, pour tout $x \in A$, d'où $y \in B_i$ pour tout $i \in \overline{1,N}$ donc

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(D_i)y \in \sum_{i=1}^{N} \mu(D_i)B_i,$$

or

$$\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)y=\left(\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)\right)y=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N}D_i\right)y=\mu(A)y,$$

par suite $\mu(A)y\in\int_A F(x)dx$, d'où la première inclusion.

Maintenent, si $y\in C$, alors il existe $z\in\sum\limits_{i=1}^{N}\mu(D_i)B_i$ tel que $y=\frac{1}{\mu(A)}z$, d'où

$$y=\frac{1}{\mu(A)}\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)z_i,\ \ avec\ \ z_i\in B_i,\ \forall i\in\overline{1,N},$$

donc

$$y=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu(D_i)}{\mu(A)}z_i=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i z_i.$$

Nous avons pour tout $i\in\overline{1,N}$

$$z_i\in B_i\Rightarrow z_i\in\bigcup_{i=1}^{N}B_i=\bigcup_{x\in A}F(x):=F(A),$$

d'autre part,

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu(D_i)}{\mu(A)}=\frac{1}{\mu(A)}\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)=\frac{1}{\mu(A)}\mu(\bigcup_{i=1}^{N}D_i)=\frac{\mu(A)}{\mu(A)}=1,$$

on conclut que y est une combinaison convexe d'éléments de $F(A)$, donc $y\in Co(F(A))$, d'où la deuxième inclusion. ■

Nous avons aussi la propriété suivante

Si $F^{'}:A\rightarrow E$ est une autre application mesurable n'admettant qu'un nombre fini de valeurs, alors

$$\mathcal{H}\left(\int_A F(x)dx,\int_A F^{'}(x)dx\right)\leq\int_A\mathcal{H}(F(x),F^{'}(x))dx. \tag{1.6}$$

En effet, si on suppose que $F^{'}$ admet $N^{'}$ valeurs notées $B_j^{'}$, on aura

$$\int_A F(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)B_i\ \ et\ \ \int_A F^{'}(x)dx=\sum_{j=1}^{N^{'}}\mu(D_j^{'})B_j^{'},$$

avec

$$D_i=\{x\in A;F(x)=B_i\}\ \ et\ \ D_j^{'}=\{x\in A;F^{'}(x)=B_j^{'}\}.$$

Pour tout $t \in \overline{1,N}$ et tout $j \in \overline{1,N'}$ nous posons

$$D_{ij} = D_i \cap D_j^{'},$$

on obtient alors,

$$D_i = \bigcup_{j=1}^{N^{'}} D_{ij} \;\; et \;\; D_j^{'} = \bigcup_{i=1}^{N} D_{ij},$$

d'où

$$\int_A F(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \mu(\overset{N^{'}}{\underset{j=1}{\cup}} D_{ij})B_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(D_{ij})B_i,$$

et

$$\int_A F^{'}(x)dx = \sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(\overset{N}{\underset{i=1}{\cup}} D_{ij})B_j^{'} = \sum_{j=1}^{N^{'}}\sum_{i=1}^{N} \mu(D_{ij})B_j^{'} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(D_{ij})B_j^{'},$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\int_A F(x)dx, \int_A F^{'}(x)dx\right) &= \mathcal{H}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(D_{ij})B_i, \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(D_{ij})B_j^{'}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N^{'}} \mu(D_{ij})\mathcal{H}(B_i, B_j^{'}) \\ &= \int_A \mathcal{H}(F(x), F^{'}(x))dx, \end{aligned}$$

la dernière intégrale est celle d'une fonction étagée mesurable au sens classique de Lebesgue. ■

On conclut alors que

$$\left|\left|\left|\int_A F(x)dx\right|\right|\right| \leq \int_A |||F(x)|||dx.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left|\left|\left|\int_A F(x)dx\right|\right|\right| &= \mathcal{H}\left(\int_A F(x)dx, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \mathcal{H}\left(\int_A F(x)dx, \int_A \{0_{\mathbb{R}^d}\}dx\right) \leq \int_A \mathcal{H}(F(x), \{0_{\mathbb{R}^d}\})dx \\ &= \int_A |||F(x)|||dx. \end{aligned}$$

Pour traiter le cas général, on commence par établir le Lemme suivant

Lemme 1.8.9 *([31]) Soient donnés un compact $C \in E$ et un nombre $\delta > 0$. Alors, il existe une famille finie $\mathfrak{B} \subset E$ telle que si $C^{'}$ est une partie compacte convexe de C ($C^{'} \in E, C^{'} \subset C$), il existe dans $\mathfrak{B}$ le plus petit compact B tel que*

$$C^{'} \subset B \subset \overline{V}(C^{'}, \delta).$$

Démonstration. Considérons la famille $\mathcal{C} := \{C^{'} \in E; C^{'} \subset C\}$. $\mathcal{C}$ est une famille de compacts contenus dans le compact C d'où, par la Proposition 1.2.1, $\mathcal{C}$ est compacte dans $(E, \mathcal{H})$, et donc elle est précompacte.

Par la précompacité, pour $\frac{\delta}{2} > 0$, il existe une famille finie $\mathcal{B}^{'} \subset \mathcal{C}$, telle que pour tout $C^{'} \in \mathcal{C}$, $d(C^{'}, \mathcal{B}^{'}) = \inf\limits_{B^{'} \in \mathcal{B}^{'}} \mathcal{H}(C^{'}, B^{'}) < \frac{\delta}{2}$. Par la définition de la borne inférieure on conclut qu'il existe $B^{'} \in \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{H}(C^{'}, B^{'}) < \frac{\delta}{2}$, ce qui implique que $C^{'} \subset \overline{V}(B^{'}, \frac{\delta}{2})$, car $\mathcal{H}(C^{'}, B^{'}) < \frac{\delta}{2} \Rightarrow e(C^{'}, B^{'}) < \frac{\delta}{2}$. Par suite, pour tout $x \in C^{'}, d(x, B^{'}) < \frac{\delta}{2}$, i.e., $x \in V(B^{'}, \frac{\delta}{2})$.

Remarquons aussi que $\overline{V}(B^{'}, \frac{\delta}{2}) \subset V(C^{'}, \delta)$. En effet, pour tout $x \in \overline{V}(B^{'}, \frac{\delta}{2}), d(x, B^{'}) \leq \frac{\delta}{2}$, d'où $d(x, C^{'}) \leq d(x, B^{'}) + \mathcal{H}(B^{'}, C^{'}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Par conséquent, $x \in V(C^{'}, \delta)$. Donc, on peut prendre $B = \overline{V}(B^{'}, \frac{\delta}{2})$.

Maintenant, désignons par $\mathcal{B}''$ la famille

$$\mathcal{B}^{''} := \left\{ \overline{V}(B^{'}, \frac{\delta}{2}); B^{'} \in \mathcal{B}^{'} \right\}.$$

Il suffit de prendre pour $\mathcal{B}$ la famille formée de toutes les intersections finies non vides d'ensembles $B^{''} \in \mathcal{B}^{''}$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B} \quad &\Leftrightarrow \quad B = \bigcap_{j \in J} B_j^{''} \ \ /B_j^{''} \in \mathcal{B}^{''}, \forall j \in J \ et \ B \ est \ fini \\ &\Leftrightarrow \quad B = \bigcap_{j \in J} \overline{V}(B_j^{'}, \frac{\delta}{2}) \ \ /B_j^{'} \in \mathcal{B}^{'}, \forall j \in J \ et \ B \ est \ fini. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{B}$ est fini car $\mathcal{B}^{''}$ est fini et cela car $\mathcal{B}^{'}$ l'est. Il est aussi clair que les éléments de $\mathcal{B}$ sont des compacts convexes et que $\mathcal{B}$ contient B. ■

2) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^m$, et soit $F : A \to E$ une application mesurable et bornée, i.e., $\exists M > 0; \forall x \in A, |||F(x)||| = \mathcal{H}(F(x), 0_E) \leq M \Leftrightarrow F(x) \in \overline{B}_E(0_E, M) \Leftrightarrow F(x) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$. Alors, il existe un compact convexe C tel que $F(x) \subset C$, pour tout $x \in A$, (il suffit de prendre $C = \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$). Soit $\delta > 0$. On va correspondre à δ une application $G_\delta : A \to E$, mesurable qui prend un nombre fini de valeurs. Pour cela, pour $C = \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ et $\delta > 0$ prenant une famille finie $\mathcal{B} \subset E$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_{N_\delta}\}$ satisfaisant à la condition du Lemme 1.8.9. Pour tout $x \in A$, $F(x)$ est un compact convexe de C, donc on peut le prendre pour C' dans le Lemme 1.8.9, et d'après ce dernier, il existe dans $\mathcal{B}$ le plus petit compact $B(x)$ (c'est en fait un B_k) vérifiant

$$F(x) \subset B(x) \subset \overline{V}(F(x), \delta), \tag{1.7}$$

on le note par $G_\delta(x)$ (autrement dit, on désigne par $G_\delta(x)$ le plus petit des B_k qui contiennent $F(x)$). Il est clair que G_δ prend un nombre fini de valeurs qui est inférieur ou égale à N_δ. On peut écrire pour tout $x \in A, G_\delta(x) = \sum\limits_{k=1}^{N_\delta} 1_{D_k}(x) B_k$ où $D_k = \{x \in A; G_\delta(x) = B_k\}$. Pour tout k, D_k est mesurable, d'où la mesurabilité de G_δ. En effet, D_k est soit vide (donc mesurable), soit

$$\begin{aligned} D_k &= \Big\{x \in A; F(x) \subset B_k \textit{ et } F(x) \not\subseteq B_i \textit{ pour tous les } B_i \textit{ qui sont plus petits que } B_k\Big\} \\ &= \big\{x \in A; F(x) \subset B_k\big\} \cap \Bigg(\bigcap_{\substack{B_i \subset B_k \\ i \neq k}} \{x \in A; F(x) \not\subseteq B_i\}\Bigg). \end{aligned}$$

Le premier ensemble est mesurable car F est mesurable, le second l'est aussi car c'est une intersection finie d'ensembles mesurables $\Big($*l'ensemble* $\{x \in A; F(x) \not\subseteq B_i\}$ est le complémentaire dans A de l'ensmenble $\{x \in A; F(x) \subset B_i\}$ qui est mesurable$\Big)$.
On conclut que G_δ est Lebesgue intégrable. D'autre part, pour tout $x \in A$

$$\mathcal{H}(F(x), G_\delta(x)) < \delta. \tag{1.8}$$

En effet, par la relation (1.7), $F(x) \subset G_\delta(x)$ et donc $e(F(x), G_\delta(x)) = 0$. Aussi $G_\delta(x) \subset \overline{V}(F(x), \delta)$ d'où $e\left(G_\delta(x), F(x)\right) < \delta$. Donc

$$\mathcal{H}(F(x), G_\delta(x)) = max\left(e\Big(F(x), G_\delta(x)\Big), e\Big(G_\delta(x), F(x)\Big)\right) < \delta.$$

Dans la suite, on va montrer que l'intégrale $\int_A G_\delta(x)dx$ converge vers un compact convexe lorsque $\delta \to 0$. Considérons deux telles applications G_δ et G'_δ. Pour tout $x \in A$, nous avons grâce à la relation (1.8),

$$\mathcal{H}(G_\delta(x), G'_\delta(x)) \leq \mathcal{H}(G_\delta(x), F(x)) + \mathcal{H}(F(x), G'_\delta(x)) \leq \delta + \delta = 2\delta.$$

Donc,

$$\mathcal{H}\left(\int_A G_\delta(x)dx, \int_A G'_\delta(x)dx\right) \leq \int_A \mathcal{H}(G_\delta(x), G'_\delta(x))dx \leq \int_A 2\delta\ dx = 2\mu(A).\delta,$$

par conséquent,

$$\lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}\left(\int_A G_\delta(x)dx, \int_A G'_\delta(x)dx\right) = 0.$$

On conclut que l'intégrale $\int_A G_\delta(x)dx$ converge, lorsque $\delta \to 0$, vers un compact convexe qui est par définition l'intégrale de Lebesgue multivoque de F sur A.

Le passage à la limite nous permet, dans ce cas aussi, de préserver la propriété (1.6) établie dans 1). En effet, si $F_1, F_2 : A \to E$ sont deux applications mesurables et bornées alors,

$$\int_A F_1(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_A G^1_\delta(x)dx \ \ et \ \ \int_A F_2(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_A G^2_\delta(x)dx,$$

grâce à (1.8) nous avons

$$\mathcal{H}(G^1_\delta(x), G^2_\delta(x)) \leq \mathcal{H}(G^1_\delta(x), F_1(x)) + \mathcal{H}(F_1(x), F_2(x)) + \mathcal{H}(F_2(x), G^2_\delta(x)) \leq 2\delta + \mathcal{H}(F_1(x), F_2(x)),$$

d'autre part, par la relation (1.6)

$$\mathcal{H}\left(\int_A G^1_\delta(x)dx, \int_A G^2_\delta(x)dx\right) \leq \int_A \mathcal{H}(G^1_\delta(x), G^2_\delta(x))dx,$$

on obtient alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\int_A F_1(x)dx, \int_A F_2(x)dx\right) &= \mathcal{H}\left(\lim_{\delta\to 0}\int_A G^1_\delta(x)dx, \lim_{\delta\to 0}\int_A G^2_\delta(x)dx\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}\left(\int_A G^1_\delta(x)dx, \int_A G^2_\delta(x)dx\right)\\
&\leq \lim_{\delta\to 0}\int_A \mathcal{H}(G^1_\delta(x), G^2_\delta(x))dx\\
&\leq \lim_{\delta\to 0}\int_A (2\delta + \mathcal{H}(F_1(x), F_2(x)))dx\\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(2\delta\mu(A) + \int_A \mathcal{H}(F_1(x), F_2(x))dx\right)\\
&= \int_A \mathcal{H}(F_1(x), F_2(x))dx.
\end{aligned}$$

■

3) Maintenant on considère le cas où F est non bornée. On suppose que la fonction (réelle positive) $|||F|||$ est intégrable. Soit $r > 0$, et soit $F_r : A \to E$ l'application définie par

$$F_r(x) = \begin{cases} \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(x); & si \quad S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(x) \neq \emptyset,\\ \{0_{\mathbb{R}^d}\}; & si \quad S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r) \cap F(x) = \emptyset, \end{cases}$$

où $S_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r)$ et $\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, r)$ désignent respectivement la sphère et la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre $0_{\mathbb{R}^d}$ et de rayon r. L'application F_r étant mesurable et bornée, d'après 2), elle est Lebesgue intégrable et son intégrale $\int_A F_r(x)dx \in E$. Montrons que cette intégrale converge vers un compact convexe lorsque $r \to \infty$. En effet, soit $r' > r$, nous avons

$$\mathcal{H}\left(\int_A F_r(x)dx, \int_A F_{r'}(x)dx\right) \leq \int_A \mathcal{H}\big(F_r(x), F_{r'}(x)\big)dx \leq \int_A \big(|||F_r(x)||| + |||F_{r'}(x)|||\big)dx.$$

Posons $A_r := \{x \in A; |||F(x)||| < r\}$, alors $A_r \subset A_{r'}$ d'où $C_A^{A_{r'}} \subset C_A^{A_r}$, donc

$$\begin{aligned}
\int_A (|||F_r(x)||| + |||F_{r'}(x)|||)dx &= \int_{C_A^{A_r}} |||F_r(x)|||dx + \int_{A_r} |||F_r(x)|||dx + \int_{C_A^{A_{r'}}} |||F_{r'}(x)|||dx + \int_{A_{r'}} |||F_{r'}(x)|||dx\\
&= \int_{C_A^{A_r}} |||F_r(x)|||dx + 0 + \int_{C_A^{A_{r'}}} |||F_{r'}(x)|||dx + 0\\
&= \int_{C_A^{A_r}} |||F(x)|||dx + \int_{C_A^{A_{r'}}} |||F(x)|||dx\\
&\leq \int_{C_A^{A_r}} |||F(x)|||dx + \int_{C_A^{A_r}} |||F(x)|||dx = 2\int_{C_A^{A_r}} |||F(x)|||dx,
\end{aligned}$$

grâce à l'intégrabilité de $|||F|||$, et puisque $\bigcap_{r>0} (C_A^{A_r}) = \emptyset$, le dernier membre tend vers 0 lorsque $r \to \infty$. On conclut que $\left(\int_A F_r(x)dx\right)_r$ est une suite (généralisée) de Cauchy dans $(E, \mathcal{H})$ qui est complet, et donc elle converge vers un compact convexe lorsque $r \to \infty$, qui est par définition l'intégrale de Lebesgue de F sur A :

$$\int_A F(x)dx = \lim_{r \to \infty} \int_A F_r(x)dx.$$

On peut définir l'intégrale de Lebesgue de F lorsque A est non borné, et dans ce cas les propriétés établies précédemment restent aussi vraies.

Dans la suite, $(L)\int_A F(x)dx$ désigne l'intégrale multivoque de Lebesgue de F sur A, et $(R)\int_A F(x)dx$ désigne l'intégrale multivoque de Riemann de F sur A.

Propriétés de l'intégrale multivoque de Lebesgue.

1) Soient A, A' deux ensembles mesurables disjoints. Si $\mu(A \cup A') < \infty$, et si F est une application Lebesgue intégrable sur $A \cup A'$, alors on a

$$(L)\int_{A \cup A'} F(x)dx = (L)\int_A F(x)dx + (L)\int_{A'} F(x)dx. \tag{1.9}$$

En effet, si F n'admet qu'un nombre fini de valeurs $B_1, ..., B_N$, posons pour tout $i = 1, ..., N$,

$$A_i = \{x \in A; F(x) = B_i\},$$

$$A'_i = \{x \in A'; F(x) = B_i\},$$

$$D_i = \{x \in A \cup A'; F(x) = B_i\}.$$

Par définition nous avons

$$(L)\int_{A \cup A'} F(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \mu(D_i)B_i$$

or,

$$D_i = A_i \cup A'_i,$$

d'où, $\mu(D_i) = \mu(A_i) + \mu(A_i^{'})$, par conséquent

$$\sum_{i=1}^{N}\mu(D_i)B_i = \sum_{i=1}^{N}(\mu(A_i)+\mu(A_i'))B_i = \sum_{i=1}^{N}\mu(A_i)B_i+\sum_{i=1}^{N}\mu(A_i')B_i = (L)\int_A F(x)dx+(L)\int_{A'} F(x)dx.$$

Dans le cas où $A \cup A'$ et F sont bornés, le passage à la limite assure l'égalité (1.9). De même dans le cas où $|||F|||$ est intégrable sur A. ■

2) Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles mesurables disjoints deux à deux. Si F est une application Lebesgue intégrable sur leur réunion A, alors on a

$$(L)\int_A F(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}(L)\int_{A_i} F(x)dx.$$

En effet, si l'on pose pour tout n, $B_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, et $B_n^{'} = C_A^{B_n}$. Les ensembles B_n et $B_n^{'}$ étant disjoints, d'après la propriété 1) on obtient pour tout n

$$(L)\int_A F(x)dx = (L)\int_{B_n} F(x)dx+(L)\int_{B_n^{'}} F(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(L)\int_{A_i} F(x)dx+(L)\int_{B_n^{'}} F(x)dx,$$

d'autre part,

$$\left|\left|\left|(L)\int_{B_n^{'}} F(x)dx\right|\right|\right| \leq (L)\int_{B_n^{'}} |||F(x)|||dx,$$

maintenant, puisque $|||F|||$ est intégrable sur $B_n^{'}$, et comme la suite $(B_n)_n$ est croissante et $\bigcup_n B_n = A$, alors la suite $(B_n^{'})_n$ est décroissante et $\cap_n B_n^{'} = \emptyset$, donc $\lim_{n\to\infty}\int_{B_n^{'}} |||F(x)|||dx = 0$, d'où,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n^{'}} F(x)dx = \{0_{\mathbb{R}^d}\},$$

on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_A F(x)dx = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{B_n} F(x)dx+\lim_{n\to\infty}(L)\int_{B_n^{'}} F(x)dx = \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(L)\int_{A_i} F(x)dx\right)+\{0_{\mathbb{R}^d}\},$$

d'où,

$$(L)\int_A F(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} F(x)dx.$$

■

3) Il s'agit du théorème de la convergence dominée de Lebesgue multivoque

Théorème 1.8.1 *Considérons une suite d'applications* (F_n), $F_n : T \to E$, $(T \subset \mathbb{R}^n)$, *qui converge presque partout sur* T *vers une application* F *et supposons que la suite* $(|||F_n|||)_n$ *est majorée par une fonction intégrable* M *sur* T*. Alors, nous avons*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T F_n(t)dt = \int_T F(t)dt.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que F est intégrable car pour tout $t \in T$, nous avons

$$|||F(t)||| = \mathcal{H}(F(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq \mathcal{H}(F(t), F_n(t)) + \mathcal{H}(F_n(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq \mathcal{H}(F(t), F_n(t)) + M(t),$$

d'où

$$|||F(t)||| \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(t), F_n(t)) + M(t) = M(t).$$

Maintenant, pour tout n, nous avons grâce aux propriétés de l'intégrale multivoque,

$$\mathcal{H}\left(\int_T F_n(t)dt, \int_T F(t)dt\right) \leq \int_T \mathcal{H}(F_n(t), F(t))dt,$$

on pose $g_n(t) = \mathcal{H}(F_n(t), F(t))$. La suite $(g_n)_n$ étant une suite de fonctions réelles, convergeant presque partout sur T vers la fonction nulle car $(F_n)_n$ converge presque partout sur T vers F, de plus, $(g_n)_n$ est majorée par une fonction intégrable sur T. En effet, pour tout $t \in T$,

$$|g_n(t)| = \mathcal{H}(F_n(t), F(t)) \leq |||F_n(t)||| + |||F(t)||| \leq M(t) + M(t) = 2M(t).$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue classique (univoque), on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_T g_n(t)dt = \int_T 0\ dt = 0$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\left(\int_T F_n(t)dt, \int_T F(t)dt\right) \leq \lim_{n\to\infty} \int_T \mathcal{H}(F_n(t), F(t))dt = \lim_{n\to\infty} \int_T g_n(t)dt = \int_T 0\ dt = 0,$$

donc,

$$\mathcal{H}\left(\lim_{n\to\infty} \int_T F_n(t)dt, \int_T F(t)dt\right) = 0,$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \int_T F_n(t)dt = \int_T F(t)dt.$$

∎

Equivalence des deux définitions de l'intégrale.

Dans la suite, on va montrer que lorsque $A = [a, b]$, l'intégrale de F au sens de Lebesgue n'est autre que celle au sens de Riemann, autrement dit, les deux intégrales coincident. En effet, soit $F : [a, b] \to E$ une application mesurable.

<u>*Le cas* 1</u>. Si F n'admet qu'un nombre fini de valeurs $B_1, ..., B_N$. Posons pour tout $i = \overline{1, N}, T_i = \{t \in [a, b]; F(t) = B_i\}$. Selon la définition de l'intégrale de Lebesgue,

$$(L) \int_a^b F(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i)B_i.$$

Remarquons que F est bornée (pour tout $t \in [a, b], |||F(t)||| \leq M = \max_{1 \leq i \leq N} |||B_i|||$). Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \overline{1, N}$, puisque T_i est mesurable, on peut trouver une partie compacte T_i' de T_i telle que $\mu(T_i \setminus T_i') < \frac{\varepsilon}{N}$. Posons $T' = \bigcup_{i=1}^{N} T_i'$, et désignons par G_ε l'application continue qui coincide avec F sur T' et est linéaire sur chaque intervalle contigu à T'. D'après la définition de l'intégrale de Riemann,

$$(R) \int_a^b F(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} (R) \int_a^b G_\varepsilon(t)dt,$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left((R)\int_a^b G_\varepsilon(t)dt, (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt\right) &= \mathcal{H}\left((R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt + (R)\int_{C_{[a,b]}^{T'}} G_\varepsilon(t)dt, (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt\right) \\ &= \left|\left|\left|(R)\int_{C_{[a,b]}^{T'}} G_\varepsilon(t)dt\right|\right|\right| \leq \int_{C_{[a,b]}^{T'}} |||G_\varepsilon(t)|||dt, \end{aligned}$$

et comme nous avons pour tout $t \in C_{[a,b]}^{T'}$, tel que $t \in]\beta, \beta'[$,

$$|||G_\varepsilon(t)||| \leq \frac{\beta' - t}{\beta' - \beta}|||F(\beta)||| + \frac{t - \beta}{\beta' - \beta}|||F(\beta')||| \leq \frac{\beta' - t}{\beta' - \beta}M + \frac{t - \beta}{\beta' - \beta}M = M,$$

on déduit que

$$\mathcal{H}\left((R)\int_a^b G_\varepsilon(t)dt, (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt\right) \leq \int_{C_{[a,b]}^{T'}} Mdt = \mu(C_{[a,b]}^{T'})M \leq \varepsilon M,$$

d'où,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}\left((R)\int_a^b G_\varepsilon(t)dt, (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt \right) = 0,$$

par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (R)\int_a^b G_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt,$$

or,

$$(R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt = (R)\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{N} T_i'} F(t)dt = \sum_{i=1}^{N} (R)\int_{T_i'} F(t)dt = \sum_{i=1}^{N} (R)\int_{T_i'} B_i = \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i')B_i,$$

et d'autre part, comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\sum_{i=1}^{N} \mu(T_i')B_i, \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i)B_i \right) &\leq \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}\left(\mu(T_i')B_i, \mu(T_i)B_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\mu(T_i) - \mu(T_i')) \,|||Bi||| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i \setminus T_i') \,|||Bi||| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} M = N\frac{\varepsilon}{N} M = \varepsilon M,
\end{aligned}$$

en faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(T_i')B_i = \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i)B_i,$$

On conclut que

$$\begin{aligned}
(R)\int_a^b F(t)dt &= \lim_{\varepsilon \to 0} (R)\int_a^b G_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} (R)\int_{T'} G_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i')B_i = \sum_{i=1}^{N} \mu(T_i)B_i \\
&= (L)\int_a^b F(t)dt.
\end{aligned}$$

<u>*Le cas 2*</u>. Si F est continue sur $[a, b]$. Soit $\delta > 0$. On décompose l'intervalle $[a, b]$ en un nombre fini d'intervalles partiels assez petits $T_1, T_2, ..., T_N$ de sorte que l'on ait

$$\mathcal{H}(F(t), F(t')) < \delta, \tag{1.10}$$

pour t, t' appartenant à un même intervalle partiel T_i. On définit une application $G_\delta : [a, b] \to E$ comme suit : on prend une suite $(t_i)_{i=\overline{1,N}}$ telle que $t_i \in T_i$ pour tout $i \in \overline{1, N}$.

On pose $G_\delta(t) = F(t_i)$, $\forall\, t \in\ T_i$. On obtient une application qui prend N valeurs et qui est mesurable (car les T_i sont mesurables). Selon la Définition de l'intégrale de Riemann,

$$(R)\int_a^b F(t)dt = \lim_{\delta\to 0}(R)\int_a^b G_\delta(t)dt,$$

et puisque G_δ prend un nombre fini de valeurs, d'après le cas 1,

$$(R)\int_a^b G_\delta(t)dt = (L)\int_a^b G_\delta(t)dt,$$

d'où,

$$(R)\int_a^b F(t)dt = \lim_{\delta\to 0}(L)\int_a^b G_\delta(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\delta = \frac{1}{n}$, on obtient ainsi une suite d'applications $(G_n)_n$ bornée et qui converge simplement ver F sur $[a, b]$. En effet, puisque F est continue sur le compact $[a, b]$ alors elle est bornée par une constante $M > 0$. Pour tout $t \in [a, b]$, si $t \in T_i$ nous avons $G_n(t) = F(t_i)$. Donc, d'une part,

$$|||G_\delta(t)||| = |||F(t_i)||| \leq M,$$

et d'autre part, d'après (1.10),

$$\mathcal{H}(F(t), F(t_i)) < \frac{1}{n},$$

d'où,

$$\mathcal{H}(G_n(t), F(t)) = \mathcal{H}(F(t_i), F(t)) < \frac{1}{n},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t) = F(t).$$

D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue multivoque (Théorème 1.8.1), on conclut que

$$\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b G_n(t)dt = (L)\int_a^b F(t)dt,$$

d'où l'égalité

$$(R)\int_a^b F(t)dt = (L)\int_a^b F(t)dt.$$

<u>*le cas* 3</u>. Si F est bornée (c'est à dire, il existe $M > 0$ tel que $|||F(t)||| \leq M$, pour tout $t \in [a,b]$). Soit $\delta > 0$, F étant mesurable, d'après la théorème de Pliś (Théorème 1.4.4), il existe un compact I_δ de $[a,b]$ tel que F est continue sur I_δ et $\mu(I_\delta) > b - a - \delta$. On désigne par G_δ l'application continue qui coincide avec F sur I_δ et qui est linéaire sur chaque intervalle contigu à I_δ. Par la définition de l'intégrale de Riemann,

$$(R)\int_a^b F(t)dt = \lim_{\delta\to 0}(R)\int_a^b G_\delta(t)dt,$$

mais d'après le cas 2, puisque G_δ est continue,

$$(R)\int_a^b G_\delta(t)dt = (L)\int_a^b G_\delta(t)dt,$$

d'où,

$$(R)\int_a^b F(t)dt = \lim_{\delta\to 0}(L)\int_a^b G_\delta(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\delta = \frac{1}{n}$, alors la suite $(G_n)_n$ est bornée et converge presque partout sur $[a,b]$ vers F. En effet, pour tout $t \in [a,b]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $t \in I_n$, alors $|||G_n(t)||| = |||F(t)||| \leq M$, et si $t \in]\beta, \beta'[$, alors

$$|||G_n(t)||| \leq \frac{\beta' - t}{\beta' - \beta}M + \frac{t - \beta}{\beta' - \beta}M = (\frac{\beta' - t + t - \beta}{\beta' - \beta})M = M.$$

Maintenant choisisons une suite $(I_n)_n$ croissante. Soit $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$, si $t \in I$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $t \in I_{n_0}$, d'où, $t \in I_n$, pour tout $n \geq n_0$, et donc $G_n(t) = F(t)$, pour tout $n \geq n_0$, et $\lim_{n\to\infty} G_n(t) = F(t)$. I étant négligeable on conclut que $(G_n)_n$ converge vers F presque partout sur $[a,b]$. D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.8.1),

$$\lim_{\delta\to 0}(L)\int_a^b G_\delta(t)dt = (L)\int_a^b F(t)dt,$$

par conséquent,

$$(R)\int_a^b F(t)dt = (L)\int_a^b F(t)dt.$$

On peut montrer aussi que même dans le cas où F est non bornée ou dans le cas où A est non borné, par passage à la limite, la valeur de l'intégrale $\int_a^b F(t)dt$ est la même quelque soit la définition que l'on adopte. En résumé, l'intégrale de Hukuhara (Riemann multivoque) d'une application $F : [a,b] \to E$ existe, si F est mesurable et l'application réelle $t \mapsto |||F(t)|||$ est intégrable sur $[a,b]$, sauf que celle ci n'est pas indépendante de l'intégrale d'Aumann, puisque nous avons

Corollaire 1.8.1 *([48], Corollaire 1) Soit X un espace de Banach réel. Si une multi-application bornée $F : [a,b] \to cc(X)$ est continue p.p. sur $[a,b]$, alors l'ensemble de toutes les sélections Bochner intégrables de F est non vide et*

$$(R)\int_a^b F(t)dt \;=\; (A)\int_a^b F(t)dt.$$

Ici, (A) est l'intégrale d'Aumann et (R) est celle de Riemann multivoque.

Plus généralement, si on note par $\mathcal{X}_H$ l'ensemble des applications $F : [a,b] \to E$ qui sont intégrables au sens de Hukuhara, alors la réstriction de l'intégrale d'Aumann sur $\mathcal{X}_H$ coincide avec celle de Hukuhara grâce au théorème suivant

Théorème 1.8.2 *([19]) Sur l'espace $\mathcal{X}_H$ l'intégrale d'Aumann est égale à celle de Hukuhara, i.e.*

$$(A)\int_a^b F(t)dt \;=\; (R)\int_a^b F(t)dt, \quad \forall\, F \in \mathcal{X}_H.$$

1.9 Propriétés lians Intégrales et dérivées

Les lemmes suivants sont d'une importance majeure, ils seront utilisés dans les démonstrations de nos résultats.

Lemme 1.9.1 *([49]) Si $F : [a,b] \to E$ est continue, alors pour tout $t \in [a,b[$*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(u)du = F(t),$$

et pour tout $t \in]a, b]$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} F(u)du = F(t).$$

Démonstration. Fixons $t \in [a, b[$ et soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de F au point t,

$$\exists \delta > 0, \forall s \in [a, b]; 0 <| s - t |< \delta \Rightarrow \mathcal{H}(F(s), F(t)) < \varepsilon.$$

Soit $h \in]0, \delta[$. Alors, d'après les propriétés de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} F(s)ds, F(t)\right) &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} F(s)ds, \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} F(t)ds\right) \\
&\leq \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} \mathcal{H}(F(s), F(t))ds \\
&\leq \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} \varepsilon ds \\
&= \frac{1}{h} h\varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre le résultat désiré. D'une manière similaire, on peut montrer que pour tout $t \in]a, b]$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} F(u)du = F(t).$$

■

Lemme 1.9.2 *([31]) Si* $F : [a, b] \to E$ *est continue et* $M(t) = \int_a^t F(s)ds$. *Alors,* M *est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur* $[a, b]$ *et* $\dot{M}(t) = F(t)$, *pour tout* $t \in [a, b]$.

Lemme 1.9.3 *([31]) Si* $F : [a, b] \to E$ *est mesurable et bornée, et* $M(t) = \int_a^t F(s)ds$. *Alors,* M *est dérivable au sens de Hukuhara du premier type presque partout sur* $[a, b]$ *et* $\dot{M}(t) = F(t)$, *p.p.* $t \in [a, b]$.

Lemme 1.9.4 *Si* $F : [a, b] \to E$ *est continue et* $M(t) = \int_t^b F(s)ds$. *Alors,* M *est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur* $[a, b]$ *et* $\dot{M}(t) = F(t)$, *pour tout* $t \in [a, b]$.

Démonstration. D'après la Définition 1.3.2

$$\dot{M}(t) = (-1)F(t) \ sur \ [a,b] \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \left(-\frac{1}{h}\right)(M(t) \ominus M(t+h)) = (-1)F(t), \ \ \forall t \in [a,b[\\ et \\ \lim\limits_{h\to 0^+} \left(-\frac{1}{h}\right)(M(t-h) \ominus M(t)) = (-1)F(t), \ \ \forall t \in]a,b]. \end{cases}$$

Fixons $t \in [a,b[$.

Soit $h > 0$ tel que $a \leq t < t+h < b$. Nous avons

$$M(t+h) = \int_{t+h}^{b} F(s)ds,$$

et

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_t^b F(s)ds \\ &= \int_t^{t+h} F(s)\,ds + \int_{t+h}^b F(s)ds \\ &= \int_t^{t+h} F(s)\,ds + M(t+h), \end{aligned}$$

d'où,

$$M(t) \ominus M(t+h) = \int_t^{t+h} F(s)ds.$$

Donc, d'après le Lemme 1.9.1

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{-1}{h}\right)(M(t) \ominus M(t+h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (-1)F(s)ds = (-1)F(t).$$

Maintenant, soit $t \in]a,b]$ et $h > 0$ tel que $a \leq t-h < t \leq b$.

$$\begin{aligned} M(t-h) &= \int_{t-h}^b F(s)ds \\ &= \int_{t-h}^t F(s)\,ds + \int_t^b F(s)ds \\ &= \int_{t-h}^t F(s)\,ds + M(t), \end{aligned}$$

d'où,

$$M(t-h) \ominus M(t) = \int_{t-h}^t F(s)ds.$$

Donc, d'après le Lemme 1.9.1

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{-1}{h}\right)(M(t-h)\ominus M(t)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}(-1)F(s)ds=(-1)F(t).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 1.9.1 *([57]) Si une application $F:[a,b]\to E$ est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[a,b]$ et $\dot{F}$ est continue, alors pour tout $s\in[a,b]$*

$$F(s)=F(a)+\int_a^s \dot{F}(t)\,dt.$$

Démonstration. Posons

$$M(s):=F(a)+\int_a^s \dot{F}(t)\,dt,\ \forall s\in[a,b].$$

Nous avons $M(a)=F(a)+\int_a^a \dot{F}(t)\,dt=F(a)+\{0_{\mathbb{R}^d}\}=F(a)$. D'autre part, d'après les Remarques 1.3.3 et 1.3.4 et le Lemme 1.9.2,

$$\dot{M}(s):=\frac{d}{ds}\left(F(a)+\int_a^s \dot{F}(t)\,dt\right)=\frac{d}{ds}\left(\int_a^s \dot{F}(t)\,dt\right)=\dot{F}(s),\ \forall s\in[a,b].$$

D'où, d'après le Lemme 1.3.3, $M(s)=F(s),\ \forall s\in[a,b]$. ■

Remarque 1.9.2 *Si une application $F:[a,b]\to E$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur $[a,b]$ et $\dot{F}$ est continue, alors pour tout $s\in[a,b]$*

$$F(a)=F(s)+(-1)\int_a^s \dot{F}(t)\,dt.$$

Démonstration. Définissons la fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ par

$$f(s):=\mathcal{H}\left(F(a),F(s)+(-1)\int_a^s \dot{F}(t)\,dt\right).$$

Nous allons montrer que $f(s)=0$, pour tout $s\in[a,b]$. Nous avons $f(s)\geq 0$, pour tout $s\in[a,b]$, et

$$f(a)=\mathcal{H}\left(F(a),F(a)+(-1)\int_a^a \dot{F}(t)\,dt\right)=\mathcal{H}\big(F(a),F(a)+\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)=0.$$

Alors, il suffit de montrer que f est décroissante sur $[a,b]$. f est continue. Soit $s \in [a,b[$. Soit $h>0$ tel que $s<s+h\leq b$. En utilisant les propriétés (P1) et (P2) de la distance de Hausdorff on obtient,

$$\begin{aligned}
f(s+h) &= \mathcal{H}\left(F(a), F(s+h)+(-1)\int_a^{s+h} \dot{F}(t)\,dt\right) \\
&= \mathcal{H}\left(F(a)+F(s), F(s+h)+F(s)+(-1)\int_a^{s+h} \dot{F}(t)\,dt\right) \\
&\leq \mathcal{H}\left(F(a), F(s)+(-1)\int_a^{s} \dot{F}(t)\,dt\right)+\mathcal{H}\left(F(s), F(s+h)+(-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right) \\
&= f(s)+\mathcal{H}\left(F(s), F(s+h)+(-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right),
\end{aligned}$$

donc, en utilisant la propriété (P10)

$$\begin{aligned}
f(s+h)-f(s) &\leq \mathcal{H}\left(F(s)+\{0_{\mathbb{R}^d}\}, F(s+h)+(-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right) \\
&= \mathcal{H}\left(F(s)\ominus F(s+h), (-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\ominus\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) \\
&= \mathcal{H}\left(F(s)\ominus F(s+h), (-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right).
\end{aligned}$$

D'où, par la propriété (P3)

$$\begin{aligned}
\frac{f(s+h)-f(s)}{h} &\leq \frac{1}{h}\,\mathcal{H}\left(F(s)\ominus F(s+h), (-1)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\left(\frac{-1}{h}\right)(F(s)\ominus F(s+h)), \frac{1}{h}\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0^+}\frac{f(s+h)-f(s)}{h} &\leq \lim_{h\to 0^+}\mathcal{H}\left(\left(\frac{-1}{h}\right)(F(s)\ominus F(s+h)), \left(\frac{1}{h}\right)\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{-1}{h}\right)(F(s)\ominus F(s+h)), \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_s^{s+h} \dot{F}(t)\right) \\
&= \mathcal{H}\big(\dot{F}(s), \dot{F}(s)\big)=0.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.3.4, la fonction f est décroissante sur $[a,b]$. Ceci entraine l'égalité désirée puisque $f(a)=0$. ■

Définition 1.9.1 *Une application $F : [a,b] \to E$ est absolument continue, s'il existe une application mesurable et bornée $W : [a,b] \to E$ telle que pour tout $t \in [a,b]$*

$$F(a) = F(t) + (-1)\int_a^t W(s)ds.$$

Dans ce cas, d'après la Remarque 1.3.3 et le lemme 1.9.3, F est dérivable au sens de Hukuhara du second type presque partout sur $[a,b]$ et nous avons

$$\dot{F}(t) = W(t), \quad p.p.\ t \in [a,b].$$

Dans tout le manuscrit, $C^1_E([a,b])$ désigne l'espace des applications continues F de $[a,b]$ dans E qui sont dérivables au sens de Hukuhara du premier type sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées $\dot{F}$ sont continues. $\mathcal{W}^{2,1}_E([a,b])$ désigne l'espace des applications continues F de $[a,b]$ dans E qui sont dérivables au sens de Hukuhara du premier type sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées $\dot{F}$ sont dérivables au sens de Hukuhara du second type sur $[a,b]$ et leurs drivées $\ddot{F}$ sont continues. Cependant, $\mathcal{X}^{2,1}_E([a,b])$ désigne l'espace des applications continues F de $[a,b]$ dans E qui sont dérivables au sens de Hukuhara du premier type sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées $\dot{F}$ sont absolument continues. Par exemple, les applications $U_1 : [0,1] \to E,\ U_2 : [0,1] \to cc(\mathbb{R})$, définies par

$$U_1(t) = Ln(t+1)A, \ \ t \in [0,1];$$

$$U_2(t) = \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3,\ \frac{1}{3}t^3 + 2t + 3\right],\ t \in [0,1]$$

appartiennent à $\mathcal{W}^{2,1}_E([0,1])$, $\mathcal{W}^{2,1}_{cc(\mathbb{R})}([0,1])$ respectivement, où $A \in E$ est fixé. En effet,

$$\dot{U}_1(t) = \frac{1}{t+1}A; \qquad \ddot{U}_1(t) = \frac{-1}{(t+1)^2}A,\ \ \forall t \in [0,1];$$

et

$$\dot{U}_2(t) = \left[t^2 + 2t,\ t^2 + 2\right], \qquad \ddot{U}_2(t) = [2t,\ 2t+2],\ \forall t \in [0,1].$$

Par contre l'application $V : [-1,1] \to cc(\mathbb{R})$ définie par

$$V(t) = \left[\int_{-1}^t x\ dx\ ,\ \int_{-1}^t |x|\ dx\right],\ t \in [-1,1]$$

appartientt à $\mathcal{X}^{2,1}_{cc(\mathbb{R})}([-1,1])$, car

$$\dot{V}(t) = [t,\ |t|\ ],\ \forall t \in [-1,1].$$

Remarque 1.9.3 *Soit $U : [a,b] \to E$ une application. Si $U \in \mathcal{X}^{2,1}_{E}([a,b])$, alors*

$$\frac{d}{ds}\left(s\dot{U}(s)\right) = \dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s),$$

où la dérivation est au sens de Hukuhara du premier type.

Démonstration. On pose $M(s) := s\dot{U}(s)$, avec $M : [a,b] \to E$. Soit $s \in]a,b[$, et soit $h > 0$ tel que $a \leq s-h < s < s+h \leq b$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
M(s+h) \ominus M(s) &= \left((s+h)\dot{U}(s+h)\right) \ominus \left(s\dot{U}(s)\right) \\
&= \left((s+h)\dot{U}(s+h)\right) \ominus \left(\left(s\dot{U}(s) \ominus s\dot{U}(s+h)\right) + s\dot{U}(s+h)\right) \\
&= \left((s+h)\dot{U}(s+h)\right) \ominus \left(s\left(\dot{U}(s) \ominus \dot{U}(s+h)\right) + s\dot{U}(s+h)\right) \\
&= \left(\left((s+h)\dot{U}(s+h)\right) \ominus s\dot{U}(s+h)\right) \ominus \left(s\left(\dot{U}(s) \ominus \dot{U}(s+h)\right)\right) \\
&= \left(h\dot{U}(s+h)\right) \ominus \left(s\left(\dot{U}(s) \ominus \dot{U}(s+h)\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc, par la Définition 1.3.2

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\right)(M(s+h) \ominus M(s)) &= \left(\lim_{h\to 0^+}\dot{U}(s+h)\right) \ominus (-1)s\left(\lim_{h\to 0^+}(\frac{-1}{h})\left(\dot{U}(s) \ominus \dot{U}(s+h)\right)\right) \\
&= \dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s).
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\right)(M(s) \ominus M(s-h)) = \dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s),$$

de même pour les bornes de l'intervalle. Par conséquent, par la Définition 1.3.1

$$\dot{M}(s) = \dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s),\quad s \in [a,b].$$

■

Lemme 1.9.5 *Si $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([a,b])$, alors pour tout $t \in [a,b]$*

$$\int_a^t -s\ddot{U}(s)\ ds = [U(s)]_a^t \ominus [s\dot{U}(s)]_a^t = \big(U(t) \ominus U(a)\big) \ominus \Big(t\dot{U}(t) \ominus a\dot{U}(a)\Big).$$

Démonstration. D'après la Remarque 1.9.1, puisque $\dot{U}$ est continue, $[U(s)]_a^t = \int_a^t \dot{U}(s)ds$, pour tout $t \in [a,b]$. D'autre part, d'après la Remarque 1.9.3, $(s\dot{U}(s))' = \dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s)$. Donc,

$$\begin{aligned} [U(s)]_a^t \ominus \int_a^t -s\ddot{U}(s)ds &= \int_a^t \dot{U}(s)ds \ominus \int_a^t -s\ddot{U}(s)ds = \int_a^t (\dot{U}(s) \ominus -s\ddot{U}(s))ds \\ &= \int_a^t (s\dot{U}(s))' ds = [s\dot{U}(s)]_a^t, \end{aligned}$$

d'où,

$$[U(s)]_a^t = \int_a^t -s\ddot{U}(s)\ ds + [s\dot{U}(s)]_a^t = [s\dot{U}(s)]_a^t + \int_a^t -s\ddot{U}(s)\ ds.$$

Par conséquent,

$$[U(s)]_a^t \ominus [s\dot{U}(s)]_a^t = \int_a^t -s\ddot{U}(s)\ ds.$$

■

1.10 Convexité abstraite

Les définitions que nous allons donner dans cette section sont prises des références [30] et [36]. Nous allons présenter quelques notions de convexité abstraite particulières qui sont apparues dans la litérature, en relation avec le problème d'existence de sélections continues et de points fixes. Nous définissons tout d'abord la notion générale de la structure de convexité abstraite.

Définition 1.10.1 *([36], Définition 1) Une famille $\mathcal{C}$ de sous ensembles d'un ensemble X est une structure de convexité abstraite pour X si l'ensemble vide et X appartiennent à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est stable par intersection quelconque.*

Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés sous ensembles $\mathcal{C}$-convexes (ou simplement convexes abstraits) de X et le couple $(X, \mathcal{C})$ est appelé espace convexe. De plus, la notion de convexité abstraite nous permet de définir la notion de l'opérateur de l'enveloppe convexe de A, qui est pareille à celle de l'opérateur de fermeture en topologie.

Définition 1.10.2 *([36], Définition 2) Si $(X, \mathcal{C})$ est un espace convexe et A est un sous ensemble de X, alors l'opérateur de l'enveloppe convexe engendré par la structure de convexité $\mathcal{C}$, qu'on va noter $Co_{\mathcal{C}}$ est appelé enveloppe $\mathcal{C}$-convexe, et est défini par*

$$Co_{\mathcal{C}}(A) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{C} \\ A \subseteq B}} B.$$

Cet opérateur possède certaines propriétés analogues à celles de convexité usuelle, en effet, $Co_{\mathcal{C}}(A)$ est le plus petit ensemble $\mathcal{C}$-convexe conenant A.

Dans la suite, nous allons nous restreindre à certaines convexités abstraites qui sont les plus intuitives et nous allons munir l'espace E de l'une d'entre elles. On peut se référer à [36] et aussi [28] et [29] pour plus de détails sur cette section.

Définition 1.10.3 *([36], Définition 3) Une structure K-convexe sur un ensemble Y est donnée par une application $K : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$. Le couple (Y, K) sera appelé un espace K-convexe et la fonction K une fonction K-convexe.*

Dans ce cas, on peut définir une convexité abstraite sur Y en considérant une famille $\mathcal{C}$ de parties de Y comme suit :

$$C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall x, y \in C,\ \forall t \in [0, 1], K(x, y, t) \in C.$$

Les éléments de $\mathcal{C}$ seront appelés ensembles K-convexes, Autrement dit, un sous ensemble C de Y est K-convexe si $K(x, y, t) \in C,\ \forall x, y \in C,\ \forall t \in [0, 1]$. Et l'opérateur d'enveloppe K-convexe associé à cette famille sera noté Co_K.

En imposant différentes conditions sur la fonction K, on obtient différentes structures de convexité abstraites.

Définition 1.10.4 *([36], Définition 4) Si Y est un espace topologique, une structure K-convexe continue sur Y est définie par une application continue $K : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$, telle que $K(x, y, 0) = x$, et $K(x, y, 1) = y$, pour tout $(x, y) \in Y \times Y$.*

Définition 1.10.5 *([35], Définition I.4) Un espace topologique X est contractible s'il existe un point x_0 dans X et une application continue $h : X \times [0,1] \to X$ telle que pour tout $x \in X$ nous avons $h(x,1) = x_0$ et $h(x,0) = x$.*

Définition 1.10.6 *([30]) Si Y est un espace topologique, et $\prec Y \succ$ désigne la famille des parties non vides et finies de Y, alors une structure-c sur Y est donnée par une multi-application $\Gamma : \prec Y \succ \rightrightarrows Y$ qui satisfait :*
1. pour tout $A \in \prec Y \succ, \Gamma(A)$ est non vide et contractible ;
2. pour tous $A, B \in \prec Y \succ, A \subseteq B \ \Rightarrow \ \Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$.

Le couple (Y, Γ) est appelé espace-c, et un sous ensembe $Z \subseteq Y$ est appelé un Γ-ensemble si et seulement si il vérifie $\Gamma(A) \subseteq Z$, pour tout $A \in \prec Z \succ$.

Définition 1.10.7 *([30]) Soit (Y, d) un espace métrique. On dit que $(Y, d; \Gamma)$ est un espace-l.c. si les boules ouvertes sont des Γ-ensembles et si tout voisinage $\{y \in Y ; d(y, Z) < r\}$ de tout Γ-ensemble $Z \subseteq Y$ est aussi un Γ-ensemble.*

Définition 1.10.8 *([30]) Un espace-c (Y, Γ) est appelé espace-m.c. si pour tout espace métrique (X, d) et toute application continue $f : X \to Y$ nous avons :*
pour tout $x \in X$ et tout voisinage W de $f(x)$, il existe un voisinage V de x et un Γ-ensemble $Z \subseteq Y$ tels que $f(V) \subseteq Z \subseteq W$.

Tout espace métrique-l.c est évidement un espace-m.c. En effet, considérons un espace métrique-l.c $(Y, d; \Gamma)$. Soit (X, d_X) un espace métrique et $f : X \to Y$ une application continue. Fixons $x \in X$, et soit W un voisinage de $f(x)$ dans (Y, d). Alors, il existe un ouvert R de (Y, d) tel que $f(x) \in R \subset W$. Puisque R est un ouvert et $f(x) \in R$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_Y(f(x), r) \subset R$. Donc

$$f(x) \in B_Y(f(x), r) \subset R \subset W.$$

Comme $B_Y(f(x), r)$ est un voisinage de $f(x)$, et f est continue au point x alors, il existe un voisinage V de x dans (X, d_X) tel que $f(V) \subset B_Y(f(x), r)$. On conclut que

$$f(V) \subset B_Y(f(x), r) \subset R \subset W.$$

Puisque $(Y, d; \Gamma)$ est un espace métrique-l.c, par défnition, les boules ouvertes sont des Γ-ensembles, donc $B_Y(f(x), r)$ est un Γ-ensemble, on peut alors prendre $Z := B_Y(f(x), r)$.■

Dans [36], l'auteur a fait une étude sur ces convexités abstraites et aussi d'autres et les relations entre elles. Nous présentons la proposition suivante

Proposition 1.10.1 *([36], Proposition 1) Si (Y, K) est un espace K-convexe continu alors, il existe une multi-application à valeurs non vides $\Gamma :\prec Y \succ \rightrightarrows Y$ telle que (Y, Γ) est un espace-c et les ensembles K-convexes de Y sont des Γ-ensembles.*

Démonstration. Il suffit de définir la multi-application $\Gamma :\prec Y \succ \rightrightarrows Y$ par $\Gamma(A) = Co_K(A)$. Si $A \in \prec Z \succ$ alors $A \neq \emptyset$ d'où, $\Gamma(A) = Co_K(A) \neq \emptyset$ puisque $A \subseteq Co_K(A)$. D'autre part, $\Gamma(A) = Co_K(A)$ est K-convexe par conséquent, c'est un ensemble contractible ([35], Proposition I.1). Il est aussi facile de vérifier que pour tous $A, B \in \prec Y \succ$, si $A \subseteq B$ alors $Co_K(A) \subseteq Co_K(B)$, i.e. $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$. Maintenant, soit Z un sous ensemble K-convexe de Y, et soit $A \in \prec Z \succ$, donc $A \subseteq Z$ donc Z est un ensemble K-convexe contenant A, mais $Co_K(A)$ est le plus petit K-convexe contenant A donc $Co_K(A) \subseteq Z$, i.e. $\Gamma(A) \subseteq Z$. ■

Théorème 1.10.1 *([20], Proposition 5.1) Soit T un espace métrique, Y un espace métrique K-convexe et C un sous-ensemble K-convexe de Y. Soit $\Phi : T \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs K-convexes fermées bornées. On suppose que Φ est s.c.s. et satisfait $\Phi(x) \subset C$, pour tout $x \in T$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application continue $F_\varepsilon : T \to C$ telle que*

$$e\Big(gph(F_\varepsilon), gph(\Phi)\Big) < \varepsilon.$$

1.11 Théorème du point fixe

Théorème 1.11.1 *([15], Théorème 1.2.1) Soit $(\mathcal{X}, d_\mathcal{X})$ un espace métrique complet. Soit K un sous ensemble fermé de $\mathcal{X}$ et $f : K \to \mathcal{X}$ une contraction de rapport γ. On suppose qu'il existe $x_0 \in K$ et $r > 0$ tels que*

$$\overline{B}_\mathcal{X}(x_0, r) \subset K \ \text{ et } \ d_\mathcal{X}(x_0, f(x_0)) < (1-\gamma)r.$$

Alors, f admet un point fixe unique $z \in B_\mathcal{X}(x_0, r)$.

1.12 Quelques résultats de convergence

Les résultats suivants sont pris des références [18], [22] et [31].

Théorème 1.12.1 *([18], Proposition 1) Soit* $(W_n)_n$ *une suite d'applications mesurables définies sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* E *satisfaisant* $W_n(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$, *pour tout* $t \in [0,1]$ $(M > 0)$, *on suppose que la suite* $(U_n)_n$ *définie par*

$$U_n(t) = \int_0^t W_n(s)ds,\ \forall t \in [0,1],$$

converge uniformément vers une application $U : [0,1] \to E$. *Alors, il existe une application mesurable* $W : [0,1] \to E$, *avec* $W(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *telle que*

$$U(t) = \int_0^t W(s)ds,\ \forall t \in [0,1].$$

Théorème 1.12.2 *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue classique)*
Soit (T, Σ, μ) *un espace mesuré. Si la suite* $(f_n)_n$ *de fonctions définies* μ*-p.p. sur* T *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *converge* μ*-p.p. vers une fonction* f *et si de plus les* f_n *supposées* μ*-intégrables vérifient* μ*-p.p. et pour tout* n *la condition*

$$|f_n(t| \leq g(t),$$

où g *est une fonction réelle positive* μ*-intégrable indépendante de* n. *Alors,* f *est* μ*-intégrable et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f_n(t)dt = \int_T f(t)dt.$$

Théorème 1.12.3 *(Théorème d'Ascoli-Arzelà) Soient* J *un espace métrique compact,* Y *un espace métrique complet, et* H *un sous ensemble de* $C(J, Y)$, *l'espace des applications continues définies sur* J *à valeurs dans* Y, *muni de la distance de la convergence uniforme. Alors,* H *est relativement compact si et seulement si* H *est équicontinu et* $H(x)$ *est relativement compact, avec*

$$H(x) = \{f(x)/f \in H\}.$$

1.13 Théorème de Scorza-Dragoni et théorème de Dugundji généralisés

Définition 1.13.1 *Soient* (T, Σ) *un espace mesurable,* X, Y *deux espaces topologiques et* $f : T \times X \to Y$. *On dit que* f *est une application de Carathéodory si* $f(.,x)$ *est* Σ*-mesurable pour tout* $x \in X$, *fixé et* $f(t,.)$ *est continue pour tout* $t \in T$, *fixé.*

Théorème 1.13.1 *([26], Théorème 7) On suppose que T est un espace topologique mesuré avec une mesure régulière σ-finie μ, X est un espace métrizable séparable localement compact, Y est un espace métrizable séparable, et $f : T \times X \to Y$ est une application de Carathéodory. Alors, f possède la propriété de Scorza-Dragoni, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $T_\varepsilon \subseteq T$ tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la réstriction $f\mid_{T_\varepsilon \times X}$ est continue par raport à la collection des variables.*

Le théorème suivant est une géneralization du théorème classique du prolongement de Dugundji.

Théorème 1.13.2 *([30], Théorème 2) Soit (X, d_X) un espace métrique, A un sous-ensemble fermé de X, (Y, Γ) un espace-m.c, et $f : A \to Y$ une application continue. Alors, il existe une application continue $\widetilde{f} : X \to Y$ qui prolonge f et telle que $\widetilde{f}(X) \subseteq Z$ pour tout Γ-ensemble $Z \subseteq Y$ contenant $\Gamma(A)$.*

Démonstration. Nous présentons juste quelques grandes lignes de la démonstration (voir [30] pour plus de détails). Nous allons construire $\widetilde{f} : X \to Y$, pour cela, il suffit de définir $\widetilde{f}(x)$ pour tout $x \in C_X^A$. Remarquons d'abord que pour tout $x \in C_X^A$, il existe un réel $r(x)$ tel que

$$0 < r(x) < \frac{1}{3} d(x, A),$$

Nous avons alors,

$$\bigcup_{x \in C_X^A} B_X(x, r(x)) = C_X^A,$$

i.e., $\big(B_X(x, r(x))\big)_{x \in C_X^A}$ est un recouvrement ouvert de C_X^A. Mais C_X^A est paracompact puisque il est métrique, par conséquent, du recouvrement $\big(B_X(x, r(x))\big)_{x \in C_X^A}$ on peut extraire un rafinement localement fini $\big(U_\lambda\big)_{\lambda \in \Omega}$. Considérons les applications $\Psi_\lambda : C_X^A \to \mathbb{R}$ définies par

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{d(x, C_X^{U_\lambda})}{\sum\limits_{\lambda \in \Omega} d(x, C_X^{U_\lambda})}.$$

Maintenant, pour chaque $\lambda \in \Omega$, on choisit $a_\lambda \in A$ et $u_\lambda \in U_\lambda$ de sorte que

$$d_X(a_\lambda, u_\lambda) < 2d(u_\lambda, A).$$

Définissons donc l'application $\widetilde{f} : X \to Y$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A, \\ \sum\limits_{\lambda \in \Omega} \Psi_\lambda(x)\, f(a_\lambda) & si\ x \in C_X^A. \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{f}$ est un prolongement de f, il suffit de vérifier qu'elle est continue et qu'elle vérifie $\widetilde{f}(X) \subseteq Z$ pour tout Γ-ensemble $Z \subseteq Y$ contenant $\Gamma(A)$. ■

Chapitre 2

Un problème avec des conditions aux limites en trois points pour une équation différentielle multivoque

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions pour un problème avec des conditions aux limites en trois points, pour une équation differentielle du second ordre de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t, U(t), \dot{U}(t)), \quad t \in [0,1], \\ U(0) = 0_E; \ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,1[$ un paramètre et $F : [0,1] \times E \times E \to E$ une application.

Notons que les problèmes aux limites ont été discutés largement dans la litérature, ainsi la première étude a été faite par Hartman dans [28], pour un problème avec deux conditions aux limites pour une équation différentielle ordinaire du second ordre. Concernant les problèmes avec trois conditions aux limites, on peut trouver des résultats dans les références [27], [38] et [39] et ce dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie, cependant, certains résultats ont été généralisés dans [8] au contexte d'un espace de Banach séparable.

Ici, on se place dans un cadre encore plus général, il s'agit du cas où $E = cc(\mathbb{R}^d)$, l'espace des parties non vides convexes compactes de $\mathbb{R}^d$, $0_E = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, $\dot{U}(.)$ désigne la dérivée de $U(.)$ au sens de la Définition 1.3.1, et $\ddot{U}(.)$ est la dérivée de $\dot{U}(.)$ au sens de la Définition 1.3.2, i.e., c'est des dérivées au sens de Hukuhara. Dans ce cas, $(\mathcal{P})$ est appelé une équation différentielle ensembliste ou multivoque. Notons qu'un problème de Cauchy du premier ordre dans ce contexte a été étudié dans [41], où l'existence et l'unicité de la solution étaient montrées par une méthode constructive. Cependant, dans [50], on trouve un autre type de problèmes différentiels multivoques du premier ordre avec la dérivée de Hukuhara, où un théorème du point fixe est appliqué pour montrer toujours l'existence et l'unicité de la solution. Dans [56], un problème similaire a été étudié dans le cas du second ordre.

Dans l'objectif d'étudier le cas le plus général, notre problème $(\mathcal{P})$ a été considéré avec retard, c'est à dire de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_l) \begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t, U_t, \dot{U}(t)), \quad t \in [0,1], \\ U(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-l, 0], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}; \; U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

avec $l \geq 0$ et φ une application continue définie sur $[-l, 0]$. Les problèmes avec retard quand à eux, modélisent souvant les phénomènes dans lesquels il y a un décalage de temps entre la cause et l'effet. Pour des résultats classiques concernant les problèmes avec retard, on peut se référer à [7] et [25].

Notre chapitre comporte deux parties. Dans la première, nous donnons un résultat préliminaire où nous démontrons quelques propriétés d'une fonction de Green dans le cas multivoque, c.à.d. en utilisant les dérivées de Hukuhara. Notons que cette fonction a été utilisée par plusieurs auteurs pour l'étude des équations et inluscions différentielles du second ordre (voir [8], [28], [33], [38], [39]). Tout d'abord, elle a été introduite par Hartman dans [28] pour l'étude d'une équation différentielle ordinaire du second ordre avec deux conditions aux limites. Ensuite, elle a été généralisée par Marano ([38], [39]) dans le but d'étudier une équation du même type avec des conditions aux limites en trois points.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de solution pour le problème $(\mathcal{P}_l)$ avec une condition de Lipschitz sur le second membre F supposé globalement continu, en transformant $(\mathcal{P}_l)$ en un problème de point fixe.

2.1 Lemme de Green généralisé

La proposition suivante résume quelques propriétés qui lient la fonction de Green et la notion des dérivées de Hukuhara. Elles seront utilisées dans la résolution de nos théorèmes d'existence. La proposition originale a été démontrée dans [8], ici nous prouvons que ces propertiétés restent vraies dans le cadre multivoque, et ceci en utilisant d'autres techniques.

Proposition 2.1.1 *Soit $\theta \in]0,1[$ et soit $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s \leq t, \\ -t & si \quad t \leq s \leq \theta, \\ t(s-1)/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s \leq 1 \end{cases}$$

si $0 \leq t \leq \theta$ et

$$G(t,s) = \begin{cases} -s & si \quad 0 \leq s \leq \theta, \\ (\theta(s-t) + s(t-1))/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s \leq t, \\ t(s-1)/(1-\theta) & si \quad t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

si $\theta \leq t \leq 1$.

Alors, nous avons les résultats suivants.

1) Si $U \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ (ou bien $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$) avec $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $U(\theta) = U(1)$, alors,

$$U(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

2) $G(.,s)$ est dérivable sur $[0,1]$ pour tout $s \in [0,1]$ sauf sur la diagonale, et sa dérivée est donnée par

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s < t, \\ -1 & si \quad t < s \leq \theta, \\ (s-1)/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s \leq 1 \end{cases}$$

si $0 \leq t \leq \theta$ et

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq s \leq \theta, \\ (s-\theta)/(1-\theta) & si \quad \theta \leq s < t, \\ (s-1)/(1-\theta) & si \quad t < s \leq 1 \end{cases}$$

si $\theta \leq t \leq 1$.
3) $G(.,.)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(.,.)$ vérifient

$$\sup_{t,s\in[0,1]} |G(t,s)| \leq 1, \quad \sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ t\neq s}} |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| \leq 1.$$

4) Soit $F : [0,1] \to E$ une application continue et soit $U_F : [0,1] \to E$ l'application définie par

$$U_F(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Alors, on a

$$U_F(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}, \;\; U_F(\theta) = U_F(1).$$

De plus, l'application U_F est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0,1]$, et sa dérivativée $\dot{U}_F$ vérifie

$$\dot{U}_F(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

5) L'application $\dot{U}_F$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur $[0,1]$, et sa dérivée $\ddot{U}_F$ est égale à F, i.e.

$$\ddot{U}_F(t) = F(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent, $\dot{U}_F$ est une application continue de $[0,1]$ dans E, et $U_F \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$.

Démonstration. La démonstration des propriétés 2) et 3) est la même que celle dans le Lemme 1 dans [8]. Nous commençons par démontrer 4) et 5) pour ensuite les utiliser dans la preuve de 1) dans le cas où $U \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$.

Démonstration de 4).

Soit $F : [0,1] \to E$ une application continue et soit $U_F : [0,1] \to E$ définie par

$$U_F(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

D'après la définition de G,

$$U_F(0) = \int_0^1 G(0,s)F(s)\,ds = \int_0^1 0\,F(s)\,ds = \int_0^1 \{0_{\mathbb{R}^d}\}\,ds = \{0_{\mathbb{R}^d}\},$$

et

$$U_F(1) = \int_0^1 G(1,s)F(s)\,ds = \int_0^1 G(\theta,s)F(s)\,ds = U_F(\theta).$$

Maintenant, par la Définition 1.3.1, pour montrer que

$$\dot{U}_F(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds, \;\; \forall t \in [0,1],$$

on doit montrer que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t+h) \ominus U_F(t)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds, \;\; \forall t \in [0,1[, \tag{2.1}$$

et que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t) \ominus U_F(t-h)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds, \;\; \forall t \in]0,1]. \tag{2.2}$$

On commence par démontrer la formule (2.1). Soit $0 \le t < \theta$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds &= \int_0^t 0F(s)\,ds + \int_t^\theta (-1)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_t^\theta (-1)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.
\end{aligned}$$

Soit $h > 0$ tel que $0 \leq t < t+h \leq \theta$.

$$\begin{aligned}
U_F(t+h) &= \int_0^1 G(t+h,s)F(s)ds \\
&= \int_0^{t+h} -sF(s)ds + \int_{t+h}^{\theta} -(t+h)F(s)\,ds + \int_{\theta}^{1} \frac{(t+h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \left(\int_0^{t} -sF(s)ds + \int_{t}^{t+h} -sF(s)\,ds\right) + \left(\int_{t+h}^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_{t+h}^{\theta} -hF(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{\theta}^{1} \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&= \left(\int_0^{t} -sF(s)ds + \int_{t}^{t+h} (-t+t-s)F(s)\,ds\right) + \left(\int_{t+h}^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_{t+h}^{\theta} -hF(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{\theta}^{1} \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&= \int_0^{t} -sF(s)ds + \left(\int_{t}^{t+h} -tF(s)\,ds + \int_{t}^{t+h} (t-s)F(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_{t+h}^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_{t+h}^{\theta} -hF(s)\,ds\right) + \left(\int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{\theta}^{1} \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right),
\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}
U_F(t) &= \int_0^1 G(t,s)F(s)ds \\
&= \int_0^{t} -sF(s)\,ds + \int_{t}^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_0^{t} -sF(s)\,ds + \left(\int_{t}^{t+h} -tF(s)\,ds + \int_{t+h}^{\theta} -tF(s)\,ds\right) + \int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds,
\end{aligned}$$

on obtient

$$U_F(t+h) = U_F(t) + \int_{t}^{t+h} (t-s)F(s)ds + \int_{t+h}^{\theta} -hF(s)ds + \int_{\theta}^{1} \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

D'où,

$$\frac{U_F(t+h) \ominus U_F(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} (t-s)F(s)ds + \int_{t+h}^{\theta} (-1)F(s)ds + \int_{\theta}^{1} \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Par suite,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t+h) \ominus U_F(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} (t-s)F(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\int_{t+h}^{\theta} (-1)F(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\int_{\theta}^{1} \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Grâce aux Lemme 1.9.1, Lemme 1.8.7, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h} &= (t-t)F(t)+\int_t^\theta (-1)F(s)ds+\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \{0_{\mathbb{R}^d}\}+\int_t^\theta (-1)F(s)ds+\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \int_t^\theta (-1)F(s)ds+\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds=\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h}=\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds,\ \forall t\in[0,\theta[. \tag{2.3}$$

Maintenant, soit $t\in[\theta,1[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds &= \int_0^\theta 0F(s)\,ds+\int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds+\int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds+\int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.
\end{aligned}$$

Soit $h>0$ tel que $\theta\le t<t+h\le 1$.

$$\begin{aligned}
U_F(t) &= \int_0^1 G(t,s)F(s)ds\\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds+\int_\theta^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds+\int_t^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \int_0^\theta -sF(s)ds+\int_\theta^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)ds+\left(\int_t^{t+h} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds+\int_{t+h}^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
U_F(t+h) &= \int_0^1 G(t+h,s)F(s)ds \\
&= \int_0^\theta -sF(s)ds + \int_\theta^{t+h} \frac{\theta(s-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t+h}^1 \frac{(t+h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_0^\theta -sF(s)ds \\
&+ \left(\int_\theta^t \frac{\theta(s-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^{t+h} \frac{\theta(s-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_{t+h}^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{t+h}^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&= \int_0^\theta -sF(s)ds + \left(\int_\theta^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_\theta^t \frac{h(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&+ \int_t^{t+h} \frac{(\theta+t-t)(s-1+1-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&+ \left(\int_{t+h}^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{t+h}^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&= \int_0^\theta -sF(s)ds + \int_\theta^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_\theta^t \frac{h(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&+ \left(\int_t^{t+h} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_t^{t+h} \frac{t(1-t-h)+(\theta-t)(s-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&+ \left(\int_{t+h}^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{t+h}^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right),
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h} = \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + \frac{1}{h}I_h + \int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds,$$

avec

$$I_h = \int_t^{t+h} \frac{t(1-t-h)+(\theta-t)(s-t-h)+s(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds.$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}I_h + \lim_{h\to 0^+}\int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Nous avons d'après le Lemme 1.8.7,

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{t+h}^{1}\frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds=\int_{t}^{1}\frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.8.6,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}\frac{(t-\theta)(t+h-s)}{(1-\theta)}F(s)\;ds=\{0_{\mathbb{R}^d}\},$$

et comme F est continue sur le compact $[t,t+h]$, il existe un nombre réel positif M tel que $|||F(s)|||\leq M$ pour tout $s\in[t,t+h]$. Par le Lemme 1.8.5

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\int_{t}^{t+h}\frac{(s-t)(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right|\right|\right| &\leq \int_{t}^{t+h}|||\frac{(s-t)(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)ds|||\leq\int_{t}^{t+h}\frac{(s-t)(t+h-1)M}{(1-\theta)}ds\\ &= \frac{(t+h-1)Mh^2}{2(1-\theta)}\end{aligned}$$

d'où,

$$\left|\left|\left|\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}\frac{(s-t)(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right|\right|\right|\leq\frac{(t+h-1)Mh}{2(1-\theta)},$$

et donc

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}\frac{(s-t)(t+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\;ds=\{0_{\mathbb{R}^d}\}.$$

On conclut que $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}I_h=\{0_{\mathbb{R}^d}\}$. Par suite,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h}=\int_{\theta}^{t}\frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds+\int_{t}^{1}\frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds=\int_{0}^{1}\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds.$$

D'où,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t+h)\ominus U_F(t)}{h}=\int_{0}^{1}\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds,\;\forall t\in[\theta,1[. \tag{2.4}$$

Par (2.3) et (2.4), la formule (2.1) est alors vérifiée.

Dans la suite, on va montrer la formule (2.2).

Soit $0 < t \leq \theta$ et soit $h > 0$ tel que $0 \leq t - h < t \leq \theta$. Nous avons

$$\begin{aligned}
U_F(t-h) &= \int_0^1 G(t-h,s)F(s)\,ds \\
&= \int_0^{t-h} -sF(s)\,ds + \int_{t-h}^{\theta} -(t-h)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \int_0^{t-h} -sF(s)\,ds + \left(\int_{t-h}^{t} -(t-h)F(s)\,ds + \int_t^{\theta} -(t-h)F(s)\,ds\right) + \int_\theta^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
U_F(t) &= \int_0^1 G(t,s)F(s)ds \\
&= \int_0^{t} -sF(s)\,ds + \int_t^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \left(\int_0^{t-h} -sF(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} -sF(s)\,ds\right) + \int_t^{\theta} -tF(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \left(\int_0^{t-h} -sF(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} [-(t-h)+(t-h)-s]F(s)\,ds\right) + \\
&+ \int_t^{\theta} (-t+h-h)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(t-h+h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_0^{t-h} -sF(s)\,ds + \left(\int_{t-h}^{t} -(t-h)F(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} (t-h-s)F(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_t^{\theta} -(t-h)F(s)\,ds + \int_t^{\theta} -hF(s)\,ds\right) + \left(\int_\theta^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_\theta^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right).
\end{aligned}$$

On obtient

$$U_F(t) = U_F(t-h) + \int_{t-h}^{t} (t-h-s)F(s)ds + \int_t^{\theta} -hF(s)ds + \int_\theta^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Donc,

$$\frac{U_F(t) \ominus U_F(t-h)}{h} = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} (t-h-s)F(s)ds + \int_t^{\theta} (-1)F(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds,$$

il en résulte que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t) \ominus U_F(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} (t-h-s)F(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\int_t^{\theta} (-1)F(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Grâce au Lemme 1.8.6,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t)\ominus U_F(t-h)}{h} &= \{0_{\mathbb{R}^d}\}+\int_t^\theta (-1)F(s)ds+\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \int_t^\theta (-1)F(s)ds+\int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds=\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{U_F(t)\ominus U_F(t-h)}{h}=\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds,\quad \forall t\in]0,\theta]. \tag{2.5}$$

Maintenant, soit $t\in]\theta,1]$. Rappelons que dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds \;=\; \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds+\int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.$$

Soit $h>0$ tel que $\theta\le t-h<t\le 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
U_F(t-h) &= \int_0^1 G(t-h,s)F(s)\,ds\\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds+\int_\theta^{t-h}\frac{\theta(s-t+h)+s(t-h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\\
&+ \int_{t-h}^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds+\int_\theta^{t-h}\frac{\theta(s-t+h)+s(t-h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\\
&+ \left(\int_{t-h}^t \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds+\int_t^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right),
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
U_F(t) &= \int_0^1 G(t,s)F(s)ds \\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds + \int_\theta^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds \\
&+ \left(\int_\theta^{t-h} \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^t \frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&+ \int_t^1 \frac{(t-h+h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds \\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds + \int_\theta^{t-h} \frac{\theta(s-t+h-h)+s(t-h+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&+ \int_{t-h}^t \frac{\theta(s-t)+(s-1+1)(t-h+h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds) \\
&+ \left(\int_t^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_t^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right) \\
&= \int_0^\theta -sF(s)\,ds \\
&+ \left(\int_\theta^{t-h} \frac{\theta(s-t+h)+s(t-h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_\theta^{t-h} \frac{h(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_{t-h}^t \frac{(s-1)(t-h)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^t \frac{\theta(s-t)+(t-1)+(s-1)(h-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&+ \left(\int_t^1 \frac{(t-h)(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_t^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\right).
\end{aligned}
$$

On obtient

$$
U_F(t) = U_F(t-h) + \int_\theta^{t-h} \frac{h(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_{t-h}^t \frac{(t-s)(1-\theta)+h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_t^1 \frac{h(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds,
$$

il s'en suit que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t)\ominus U_F(t-h)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \int_\theta^{t-h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t-h}^t (t-s)F(s)ds \\
&+ \lim_{h\to 0^+} \int_{t-h}^t \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds + \lim_{h\to 0^+} \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds.
\end{aligned}
$$

Grâce au Lemme 1.8.7 et au Lemme 1.9.1,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t)\ominus U_F(t-h)}{h} &= \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + (t-t)F(t) + \{0_{\mathbb{R}^d}\} + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds,\\
&= \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)ds\\
&= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{U_F(t)\ominus U_F(t-h)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds, \quad \forall t \in]\theta,1]. \tag{2.6}$$

Par (2.5) et (2.6), la formule (2.2) est alors vérifiée.

<u>Démonstration de 5)</u>.

D'après la Définition 1.3.2, on doit montrer que

$$\lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\dot{U}_F(t)\ominus \dot{U}_F(t+h)\right) = F(t), \ \ \forall t\in [0,1[, \tag{2.7}$$

et que

$$\lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\dot{U}_F(t-h)\ominus \dot{U}_F(t)\right) = F(t), \ \ \forall t\in]0,1]. \tag{2.8}$$

Soit $t\in[0,\theta[$ et soit $h>0$ tel que $0\le t<t+h\le\theta$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds\\
&= \int_0^t 0F(s)\,ds + \int_t^\theta (-1)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\\
&= \left(\int_t^{t+h} (-1)F(s)\,ds + \int_{t+h}^\theta (-1)F(s)\,ds\right) + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t+h) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t+h,s)F(s)ds\\
&= \int_0^{t+h} 0.F(s)\,ds + \int_{t+h}^\theta (-1)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\\
&= \int_{t+h}^\theta (-1)F(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\dot{U}_F(t) \ominus \dot{U}_F(t+h) = (-1)\int_t^{t+h} F(s)ds,$$

et donc, d'après le Lemme 1.9.1,

$$\lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\dot{U}_F(t)\ominus \dot{U}_F(t+h)\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s)ds = F(t),\ \forall t\in[0,\theta[. \tag{2.9}$$

Maintenant, soit $t \in [\theta, 1[$ et soit $h > 0$ tel que $\theta \leq t < t+h \leq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t+h) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t+h,s)F(s)ds \\
&= \int_0^\theta 0.F(s)\,ds + \int_\theta^{t+h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \left(\int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^{t+h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) + \int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F(s)ds \\
&= \int_0^\theta 0F(s)\,ds + \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \left(\int_t^{t+h} \frac{(s-\theta+\theta-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&= \int_\theta^t \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^{t+h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^{t+h}(-1)F(s)\,ds + \int_{t+h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds.
\end{aligned}$$

i.e.

$$\dot{U}_F(t) \ominus \dot{U}_F(t+h) = \int_t^{t+h}(-1).F(s)ds,$$

et donc, par le Lemme 1.9.1,

$$\lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\dot{U}_F(t)\ominus \dot{U}_F(t+h)\right) = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} F(s)ds = F(t),\ \forall t\in[\theta,1[. \tag{2.10}$$

D'après (2.9) et (2.10), la formule (2.7) a lieu.

Soit $t \in]0,\theta]$ et soit $h > 0$ tel que $0 \leq t-h < t \leq \theta$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t-h) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t-h,s)F(s)ds \\
&= \int_0^{t-h} 0F(s)\,ds + \int_{t-h}^{\theta} (-1)F(s)\,ds + \int_{\theta}^1 \frac{s-1}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \int_{t-h}^{t} (-1)F(s)\,ds + \int_{t}^{\theta} (-1)F(s)\,ds + \int_{\theta}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\dot{U}_F(t) = \int_t^{\theta} (-1)F(s)\,ds + \int_{\theta}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds.$$

Alors,

$$\dot{U}_F(t-h) \ominus \dot{U}_F(t) = (-1)\int_{t-h}^{t} F(s)ds,$$

et donc, par le lemme 1.9.1,

$$\lim_{h\to 0^+} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\dot{U}_F(t-h) \ominus \dot{U}_F(t)\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} F(s)ds = F(t),\ \forall t \in]0,\theta]. \tag{2.11}$$

Maintenant, soit $t \in]\theta,1]$ et soit $h > 0$ tel que $\theta \leq t-h < t \leq 1$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\dot{U}_F(t-h) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t-h,s)F(s)ds \\
&= \int_0^{\theta} 0F(s)\,ds + \int_{\theta}^{t-h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \int_{\theta}^{t-h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \left(\int_{t-h}^{t} \frac{(s-\theta+\theta-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds\right) \\
&= \int_{\theta}^{t-h} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} \frac{(\theta-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds \\
&= \int_{\theta}^{t} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} (-1)F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et

$$\dot{U}_F(t) = \int_{\theta}^{t} \frac{(s-\theta)}{(1-\theta)}F(s)\,ds + \int_t^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}F(s)\,ds.$$

Alors,

$$\dot{U}_F(t-h) = \dot{U}_F(t) + \int_{t-h}^{t} (-1)F(s)ds,$$

et donc, par le Lemme 1.9.1,

$$\lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{h}\right)(\dot{U}_F(t-h)\ominus\dot{U}_F(t))=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{t-h}^{t}F(s)ds=F(t),\ \forall t\in]\theta,1]. \tag{2.12}$$

D'après (2.11) et (2.12), la formule (2.8) a lieu.

La continuité de $\dot{U}(.)$ découle de la Remarque 1.3.2.

Démonstration de 1).

• Si $U\in\mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$. Soit $M(t):=\displaystyle\int_0^1 G(t,s)\,\ddot{U}(s)\,ds$, pour tout $t\in[0,1]$. On doit montrer que $M(t)=U(t)$, pour tout $t\in[0,1]$. Pour ce but, par le Lemme 1.3.3, il suffit de montrer que

$$M(0)=U(0),$$

et que pour tout $t\in[0,1]$

$$\dot{M}(t)=\dot{U}(t),$$

où $\dot{M}$ et $\dot{U}$ sont les dérivées au sens de Hukuhara du premier type de M et U respectivement.

D'après la définition de la fonction G nous avons,

$$M(0)=\int_0^1 G(0,s)\,\ddot{U}(s)\,ds=\int_0^1 0.\ddot{U}(s)\,ds=\int_0^1\{0_{\mathbb{R}^d}\}\,ds=\{0_{\mathbb{R}^d}\}=U(0).$$

Maintenant, pour montrer que pour tout $t\in[0,1]$

$$\dot{M}(t)=\dot{U}(t),$$

on peut utiliser le Lemme 1.3.5, c'est à dire, il suffit de montrer que

$$\dot{M}(0)=\dot{U}(0),$$

et que pour tout $t\in[0,1]$

$$\ddot{M}(t)=\ddot{U}(t),$$

où $\ddot{M}$ et $\ddot{U}$ sont les dérivées au sens de Hukuhara du second type de $\dot{M}$ et $\dot{U}$ respectivement.

En revenant aux notations dans 4) de la Proposition 2.1.1, remarquons que

$$M(t) = U_{\ddot{U}}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

Puisque $\ddot{U}$ est continue sur $[0, 1]$, d'après 5)

$$\ddot{M}(t) = \ddot{U}_{\ddot{U}}(t) = \ddot{U}(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

D'autre part, d'après 4)

$$\dot{M}(t) = \dot{U}_{\ddot{U}}(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t, s)\ddot{U}(s)ds, \quad \forall t \in [0, 1],$$

d'où,

$$\begin{aligned} \dot{M}(0) &= \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(0, s)\ddot{U}(s)ds = \int_0^\theta (-1)\ddot{U}(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds \\ &= (-1)\int_0^\theta \ddot{U}(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds. \end{aligned}$$

Par la Remarque 1.9.2, on obtient

$$(-1)\int_0^\theta \ddot{U}(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds = \left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\right) + \left(\frac{(-1)}{1-\theta}\int_\theta^1 (1-s)\ddot{U}(s)ds\right).$$

Maintenant, par le Lemme 1.8.8, et la Remarque 1.9.2 encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} (-1)\int_0^\theta \ddot{U}(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds &= \left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\right) + \frac{(-1)}{1-\theta}\left(\int_\theta^1 \left(\int_\theta^s \ddot{U}(u)du\right) ds\right) \\ &= \left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\right) + \frac{1}{1-\theta}\left(\int_\theta^1 \left((-1)\int_\theta^s \ddot{U}(u)du\right) ds\right) \\ &= \left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\right) + \frac{1}{1-\theta}\left(\int_\theta^1 \dot{U}(\theta) \ominus \dot{U}(s)ds\right). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la différence de Hukuhara, la Remarque 1.9.1 et le fait que $U(1) = U(\theta)$ on obtient

$$\begin{aligned}
(-1)\int_0^\theta \ddot{U}(s)ds + \int_\theta^1 \frac{(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds &= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \left(\frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 \dot{U}(\theta)ds \ominus \frac{1}{1-\theta}\int_\theta^1 \dot{U}(s)ds\right) \\
&= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \left(\frac{1}{1-\theta}(1-\theta)\dot{U}(\theta) \ominus \frac{1}{1-\theta}\left(U(1) \ominus U(\theta)\right)\right) \\
&= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \left(\dot{U}(\theta) \ominus \frac{1}{1-\theta}\left(U(1) \ominus U(\theta)\right)\right) \\
&= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \left(\dot{U}(\theta) \ominus \frac{1}{1-\theta}\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) \\
&= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \Big(\dot{U}(\theta) \ominus \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \\
&= \Big(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(\theta)\Big) + \dot{U}(\theta) = \dot{U}(0).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\dot{M}(0) = \dot{U}(0).$$

• Dans le cas où $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$. Si $0 \leq t \leq \theta$

$$\int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds = \int_0^t -s\ddot{U}(s)\,ds + \int_t^\theta -t\ddot{U}(s)\,ds + \int_\theta^1 \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds,$$

d'après le Lemme 1.9.5,

$$\int_0^t -s\ddot{U}(s)\,ds = \big(U(t) \ominus U(0)\big) \ominus \Big(t\dot{U}(t) \ominus 0\dot{U}(0)\Big) = \big(U(t) \ominus 0_E\big) \ominus \Big(t\dot{U}(t) \ominus 0_E\Big) = U(t) \ominus t\dot{U}(t),$$

et puisque $\dot{U}$ est absolument continue,

$$\int_t^\theta -t\ddot{U}(s)\,ds = t(-1)\int_t^\theta \ddot{U}(s)\,ds = t\left(\dot{U}(t) \ominus \dot{U}(\theta)\right) = t\dot{U}(t) \ominus t\dot{U}(\theta).$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.8.8,

$$\begin{aligned}
\int_{\theta}^{1} \frac{t(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds = \frac{-t}{1-\theta}\int_{\theta}^{1}(1-s)\ddot{U}(s)ds &= \frac{t}{1-\theta}\left(\int_{\theta}^{1}\left((-1)\int_{\theta}^{s}\ddot{U}(u)du\right)ds\right)\\
&= \frac{t}{1-\theta}\left(\int_{\theta}^{1}\dot{U}(\theta)\ominus\dot{U}(s)ds\right)\\
&= \left(\frac{t}{1-\theta}\int_{\theta}^{1}\dot{U}(\theta)ds\ominus\frac{t}{1-\theta}\int_{\theta}^{1}\dot{U}(s)ds\right)\\
&= \left(\frac{t}{1-\theta}\,(1-\theta)\dot{U}(\theta)\ominus\frac{t}{1-\theta}\,(U(1)\ominus U(\theta))\right)\\
&= \left(t\dot{U}(\theta)\ominus\frac{1}{1-\theta}\,(U(1)\ominus U(\theta))\right)\\
&= \left(t\dot{U}(\theta)\ominus\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = t\dot{U}(\theta),
\end{aligned}$$

par conséquent, grâce à la propriété de la différence de Hukuhara

$$\int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds = (U(t)\ominus t\dot{U}(t)) + (t\dot{U}(t)\ominus t\dot{U}(\theta)) + t\dot{U}(\theta) = U(t).$$

Maintenant, si $\theta \leq t \leq 1$,

$$\int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds = \int_0^{\theta} -s\ddot{U}(s)\,ds + \int_{\theta}^{t}\frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)\,ds + \int_t^1\frac{t(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds,$$

on pose

$$I_1 := \int_0^{\theta} -s\ddot{U}(s)\,ds,\quad I_2 := \int_{\theta}^{t}\frac{\theta(s-t)+s(t-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)\,ds \;\; et \;\; I_3 := \int_t^1\frac{t(s-1)}{(1-\theta)}\ddot{U}(s)ds.$$

D'après le Lemme 1.9.5,

$$I_1 = \left(U(\theta)\ominus U(0)\right)\ominus\left(\theta\dot{U}(\theta)\ominus 0\dot{U}(0)\right) = \left(U(\theta)\ominus 0_E\right)\ominus\left(\theta\dot{U}(\theta)\ominus 0_E\right) = U(\theta)\ominus\theta\dot{U}(\theta),$$

En utilisant le Lemme 1.8.8, le Lemme 1.9.5 et le fait que $\dot{U}$ est absolument continue aussi,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{-\theta}{1-\theta}\int_\theta^t (t-s)\ddot{U}(s)ds + \frac{1-t}{1-\theta}\int_\theta^t -s\ddot{U}(s)\,ds \\
&= \frac{\theta}{1-\theta}\left(\int_\theta^t \left((-1)\int_\theta^s \ddot{U}(u)du\right)ds\right) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}[U(s)]_\theta^t \ominus [s\dot{U}(s)]_\theta^t\right) \\
&= \frac{\theta}{1-\theta}\left(\int_\theta^t \dot{U}(\theta)\ominus\dot{U}(s)ds\right) + \frac{1-t}{1-\theta}\Big(\big(U(t)\ominus U(\theta)\big)\ominus\big(t\dot{U}(t)\ominus\theta\dot{U}(\theta)\big)\Big) \\
&= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\int_\theta^t \dot{U}(\theta)ds \ominus \frac{\theta}{1-\theta}\int_\theta^t \dot{U}(s)ds\right) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}\big(U(t)\ominus U(\theta)\big)\ominus\frac{1-t}{1-\theta}\big(t\dot{U}(t)\ominus\theta\dot{U}(\theta)\big)\right) \\
&= \left(\frac{\theta(t-\theta)}{1-\theta}\dot{U}(\theta)\ominus\frac{\theta}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\ominus\left(\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t)\ominus\frac{(1-t)\theta}{1-\theta}\dot{U}(\theta)\right)\right)
\end{aligned}$$

et grâce aux propriétés de la différence de Hukuhara,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{\theta(t-\theta)}{1-\theta}\dot{U}(\theta)\ominus\frac{\theta}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right) + \left(\left(\frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta)) + \frac{(1-t)\theta}{1-\theta}\dot{U}(\theta)\right)\ominus\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t)\right) \\
&= \left(\frac{\theta(t-\theta)}{1-\theta}\,\dot{U}(\theta)\ominus\frac{\theta}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta)) + \frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta)) + \frac{(1-t)\theta}{1-\theta}\dot{U}(\theta)\right)\ominus\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t) \\
&= \left(\left(\frac{(1-t)\theta}{1-\theta}\dot{U}(\theta) + \frac{\theta(t-\theta)}{1-\theta}\,\dot{U}(\theta) + \frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right)\ominus\frac{\theta}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right)\ominus\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t) \\
&= \left(\left(\theta\dot{U}(\theta) + \frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right)\ominus\frac{\theta}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\right)\ominus\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t) \\
&= \left(\theta\dot{U}(\theta) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}(U(t)\ominus U(\theta))\ominus\frac{\theta}{1-\theta}\,(U(t)\ominus U(\theta))\right)\right)\ominus\frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le Lemme 1.8.8, et en utilisant les propriétés de la différence de Hukuhara, sachant que $U(\theta) = U(1)$,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{-t}{1-\theta}\int_t^1 (1-s)\ddot{U}(s)ds \\
&= \frac{t}{1-\theta}\left(\int_t^1 \left((-1)\int_t^s \ddot{U}(u)du\right) ds\right) \\
&= \frac{t}{1-\theta}\left(\int_t^1 \dot{U}(t) \ominus \dot{U}(s)ds\right) \\
&= \frac{t}{1-\theta}\int_t^1 \dot{U}(t)ds \ominus \frac{t}{1-\theta}\int_t^1 \dot{U}(s)ds \\
&= \frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) \ominus \left(\frac{t}{1-\theta}(U(1) \ominus U(t))\right) \\
&= \frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) \ominus \left(\frac{t}{1-\theta}U(1) \ominus \frac{t}{1-\theta}U(t)\right) \\
&= \left(\frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) + \frac{t}{1-\theta}U(t)\right) \ominus \frac{t}{1-\theta}U(1) \\
&= \left(\frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) + \frac{t}{1-\theta}U(t)\right) \ominus \frac{t}{1-\theta}U(\theta) \\
&= \frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) + \left(\frac{t}{1-\theta}U(t) \ominus \frac{t}{1-\theta}U(\theta)\right) \\
&= \frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) + \frac{t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)),
\end{aligned}$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= U(\theta) \ominus \theta\dot{U}(\theta) + \left(\theta\dot{U}(\theta) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \ominus \frac{\theta}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta))\right)\right) \\
&\ominus \frac{(1-t)t}{1-\theta}\dot{U}(t) + \frac{t(1-t)}{1-\theta}\dot{U}(t) + \frac{t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \\
&= U(\theta) + \left(\frac{1-t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \ominus \frac{\theta}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta))\right) + \frac{t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta) \\
&= \left(U(\theta) + \frac{t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta) + \frac{1-t}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta))\right) \ominus \frac{\theta}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \\
&= \left(U(\theta) + \frac{1}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta))\right) \ominus \frac{\theta}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \\
&= U(\theta) + \left(\frac{1}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta)) \ominus \frac{\theta}{1-\theta}(U(t) \ominus U(\theta))\right) \\
&= U(\theta) + (U(t) \ominus U(\theta)) = U(t).
\end{aligned}$$

La démonstration de 1) est alors achevée. Ceci termine la démonstration de notre Proposition. ■

Nous donnons une conséquence de la Proposition 2.1.1.

Proposition 2.1.2 *Soit $F : [0,1] \to E$ une application continue. Alors, l'application $U_F : [0,1] \to E$ définie par*

$$U_F(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)\,ds,$$

est la solution unique dans $\mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ du problème

$$(P_F)\begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t), \ \forall t \in [0,1], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1). \end{cases}$$

Démonstration.

Par 4) de la Proposition 2.1.1, nous avons $U_F(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $U_F(\theta) = U_F(1)$. Et d'après 5) de la même Proposition, $\ddot{U}_F(t) = F(t)$, pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent, U_F est une solution de (P_F).

Unicité de la solution.

Soit V une solution de (P_F). Alors, $V \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ et elle vérifie $V(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ V(\theta) = V(1)$, d'où, d'après 1) de la Proposition 2.1.1

$$V(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{V}(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

par conséquent,

$$V(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

donc

$$V(t) = U_F(t),\ \ \forall t \in [0,1],$$

i.e., $V = U_F$, ce qui assure l'unicité de la solution. ■

2.2 Résultat d'existence et d'unicité pour l'équation $(\mathcal{P}_l)$ avec une perturbation continue

Nous sommes maintenant en mesure de donner notre résultat principal de ce chapitre. Soient $l \geq 0,\ E = cc(\mathbb{R}^d)$. $C_l := C_E([-l, 0])$ désigne l'espace des applications $\mathcal{H}$-continues de $[-l, 0]$ dans E, muni de la distance de la convergence uniforme D_l définie pour tous $\varphi, \psi \in C_l$ par

$$D_l(\varphi, \psi) := \sup_{s \in [-l,0]} \mathcal{H}(\varphi(s), \psi(s)).$$

Soit $X \in C_E([-l, 1])$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note par X_t l'élément de C_l défini par $X_t(s) := X(t + s)$ pour tout $s \in [-l, 0]$. Soit $F : [0, 1] \times C_l \times E \to E$ une application continue, $\varphi \in C_l$ avec $\varphi(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $\theta \in]0, 1[$. Considérons le problème différentiel $(\mathcal{P}_l)$, où $\dot{U}(.)$ désigne la dérivée de $U(.)$ au sens de la Définition 1.3.1, et $\ddot{U}(.)$ est la dérivée de $\dot{U}(.)$ au sens de la Définition 1.3.2.

Théorème 2.2.1 *Soit $F : [0, 1] \times C_l \times E \to E$ une application satisfaisant les conditions suivantes :*
(i) il existe deux constantes positives λ_1, λ_2 satisfaisant $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, telles que pour tout $t \in [0, 1]$ et tous $(\psi_1, B_1), (\psi_2, B_2) \in C_l \times E$,

$$\mathcal{H}\Big(F(t, \psi_1, B_1), F(t, \psi_2, B_2)\Big) \leq \lambda_1 D_l(\psi_1, \psi_2) + \lambda_2 \mathcal{H}(B_1, B_2);$$

(ii) F est continue.
Soit $\varphi \in C_l$ telle que $\varphi(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$. Alors, le problème multivoque $(\mathcal{P}_l)$ admet une solution unique U dans $C_E([-l, 1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0, 1])$.

Démonstration.

Notons par $\mathcal{X} := C_E([-l, 1]) \cap C_E^1([0, 1])$, où $C_E^1([0, 1])$ désigne l'espace des applications continues F de $[0, 1]$ dans E qui sont dérivables au sens de Hukuhara du premier type sur $[0, 1]$ et telles que leurs dérivées $\dot{F}$ sont continues. Définissons l'application $\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, par

$$\mathcal{A}(H)(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)F\big(s, H_s, \dot{H}(s)\big)\, ds \quad si\ t \in [0,1], \\ \\ \varphi(t) \quad si\ t \in [-l, 0]. \end{cases}$$

Alors, une application $U \in C_E([-l,1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ est une solution pour $(\mathcal{P}_l)$ si et seulement si U est un point fixe de $\mathcal{A}$. En effet, si U est une solution pour $(\mathcal{P}_l)$, alors elle vérifie

$$\ddot{U}(s) = F\big(s, U_s, \dot{U}(s)\big), \ \ \forall s \in [0,1],$$

d'où, pour tout $t \in [0,1]$

$$\int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds = \int_0^1 G(t,s)F\big(s, U_s, \dot{U}(s)\big)ds,$$

donc, pour tout $t \in [0,1]$

$$\int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds = \mathcal{A}(U)(t).$$

Or, d'après 1) de la Proposition 2.1.1, puisque $U \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$, $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$ et $U(\theta) = U(1)$, alors

$$U(t) = \int_0^1 G(t,s)\ddot{U}(s)ds, \ \ \forall t \in [0,1].$$

On conclut que

$$U(t) = \mathcal{A}(U)(t), \ \ \forall t \in [0,1],$$

d'où $U(t) = \mathcal{A}(U)(t), \ \forall t \in [-l,1]$, i.e. U est un point fixe pour $\mathcal{A}$. Maintenant, si U est un point fixe pour $\mathcal{A}$, alors $U(t) = \mathcal{A}(U)(t), \ \forall t \in [-l,1]$. Par la définition de $\mathcal{A}$, on obtient

$$U(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)F\big(s, U_s, \dot{U}(s)\big)\, ds, \ \ \forall t \in [0,1], \\ \varphi(t), \ \ \forall t \in [-l, 0]. \end{cases}$$

Grâce à la première égalité, d'après 4) et 5) de la Proposition 2.1.1, $U \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ avec

$$\begin{cases} U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}; \ U(\theta) = U(1), \\ \ddot{U}(t) = F\big(t, U_t, \dot{U}(t)\big), \ \ \forall t \in [0,1], \end{cases}$$

on conclut que $U \in C_E([-l,1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ avec

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) = F\big(t, U_t, \dot{U}(t)\big), \quad \forall t \in [0,1], \\ U(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-l,0], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

i.e. U est une solution pour $(\mathcal{P}_l)$.

Remarquons aussi que l'espace $\mathcal{X}$ muni de la distance

$$D_{\mathcal{X}}(Y,Z) = \max\left(\sup_{t\in[-l,1]} \mathcal{H}(Y(t), Z(t)),\ \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{Y}(t), \dot{Z}(t)) \right)$$

est un espace métrique complet. Montrons que $\mathcal{A}$ est une contraction. En effet, soient $Y, Z \in \mathcal{X}$, alors

$$\sup_{t\in[-l,1]} \mathcal{H}\big(\mathcal{A}(Y)(t), \mathcal{A}(Z)(t)\big) = \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\big(\mathcal{A}(Y)(t), \mathcal{A}(Z)(t)\big).$$

Soit $t \in [0,1]$, en utilisant les propriétés de l'intégrale, de la distance de Hausdorff, de la fonction de Green, et grâce à l'hypothèse (i), nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\big(\mathcal{A}(Y)(t), \mathcal{A}(Z)(t)\big) &= \mathcal{H}\left(\int_0^1 G(t,s) F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big)\, ds, \int_0^1 G(t,s) F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big)\, ds \right) \\ &\leq \int_0^1 \mathcal{H}\left(G(t,s) F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), G(t,s) F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big) \right) ds \\ &= \int_0^1 \mid G(t,s) \mid \mathcal{H}\left(F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big) \right) ds \\ &\leq \int_0^1 \mathcal{H}\left(F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big) \right) ds \\ &\leq \int_0^1 \left(\lambda_1 D_l(Y_s, Z_s) + \lambda_2 \mathcal{H}(\dot{Y}(s), \dot{Z}(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} D_l(Y_s, Z_s) &= \sup_{v\in[-l,0]} \mathcal{H}(Y_s(v), Z_s(v)) = \sup_{s+v\in[s-l,s]} \mathcal{H}(Y(s+v), Z(s+v)) \\ &= \sup_{w\in[s-l,s]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)) \leq \sup_{w\in[-l,s]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)) \leq \sup_{w\in[-l,1]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)), \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}(\dot{Y}(s), \dot{Z}(s)) \leq \sup_{w\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{Y}(w), \dot{Z}(w)).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\big(\mathcal{A}(Y)(t), \mathcal{A}(Z)(t)\big) &\leq \int_0^1 \left(\lambda_1 \sup_{w\in[-l,1]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)) + \lambda_2 \sup_{w\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{Y}(w), \dot{Z}(w))\right) ds \\
&= \lambda_1 \sup_{w\in[-l,1]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)) + \lambda_2 \sup_{w\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{Y}(w), \dot{Z}(w)) \\
&\leq (\lambda_1+\lambda_2)\, max \left(\sup_{w\in[-l,1]} \mathcal{H}(Y(w), Z(w)), \sup_{w\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{Y}(w), \dot{Z}(w))\right) \\
&= (\lambda_1+\lambda_2) D_{\mathcal{X}}(Y,Z) = \gamma\, D_{\mathcal{X}}(Y,Z),
\end{aligned}$$

où $\gamma = (\lambda_1+\lambda_2) < 1$. Par conséquent

$$\sup_{t\in[-l,1]} \mathcal{H}\big(\mathcal{A}(Y)(t), \mathcal{A}(Z)(t)\big) \leq \gamma\, D_{\mathcal{X}}(Y,Z). \tag{2.13}$$

Par la même manière, en notant la dérivée de $\mathcal{A}(Y)(.)$ au point t par $(\mathcal{A}(Y))'(t)$, on montre que

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\left((\mathcal{A}(Y))'(t), (\mathcal{A}(Z))'(t)\right) \leq \gamma\, D_{\mathcal{X}}(Y,Z). \tag{2.14}$$

En effet, pour tout $t \in [0,1]$, en utilisant 4) de la Proposition 2.1.1, les propriétés de l'intégrale, de la distance de Hausdorff, de la fonction de Green, et grâce à l'hypothèse (i), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left((\mathcal{A}(Y)'(t), (\mathcal{A}(Z))'(t)\right) &= \mathcal{H}\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big)\, ds, \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big)\, ds\right) \\
&\leq \int_0^1 \mathcal{H}\left(\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big)\right) ds \\
&= \int_0^1 \mid \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \mid \mathcal{H}\left(F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big)\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \mathcal{H}\left(F\big(s, Y_s, \dot{Y}(s)\big), F\big(s, Z_s, \dot{Z}(s)\big)\right) ds \\
&\leq \int_0^1 \left(\lambda_1 D_l(Y_s, Z_s) + \lambda_2 \mathcal{H}(\dot{Y}(s), \dot{Z}(s))\right) ds, \\
&\leq \gamma\, D_{\mathcal{X}}(Y,Z),
\end{aligned}$$

d'où,

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\left((\mathcal{A}(Y))^{'}(t),(\mathcal{A}(Z))^{'}(t)\right) \leq \gamma\ D_{\mathcal{X}}(Y,Z).$$

Par (2.13) et (2.14) on conclut que

$$D_{\mathcal{X}}\big(\mathcal{A}(Y),\mathcal{A}(Z)\big) \leq \gamma\ D_{\mathcal{X}}(Y,Z),$$

avec $0<\gamma<1$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est bien une contraction.

Maintenant, définissons l'application $X:[-l,1]\to E$ par

$$X(t)=\begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^d}\} & si\ t\in[0,1],\\ \varphi(t) & si\ t\in[-l,0]. \end{cases}$$

Il est clair que $X\in\mathcal{X}$. Posons

$$m_1=\sup_{t\in[-l,1]}\mathcal{H}\big(X(t),\mathcal{A}(X)(t)\big),\ \ m_2=\sup_{t\in[0,1]}\mathcal{H}\left(\dot{X}(t),(\mathcal{A}(X))^{'}(t)\right).$$

Nous avons

$$D_{\mathcal{X}}(X,\mathcal{A}(X))=max(m_1,m_2). \tag{2.15}$$

Posons

$$m:=\sup_{v\in[0,1]}|||\ F\big(v,X_v,\dot{X}(v)\big)\ |||=\sup_{v\in[0,1]}\mathcal{H}\Big(F\big(v,X_v,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big),\{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big).$$

Une telle borne existe grâce à la continuité de l'application $t\mapsto F(t,X_t,\dot{X}(t))$ sur le compact $[0,1]$ puisque $F,\ \dot{X}$ et l'application $t\mapsto X_t$ sont continues.

D'une part, nous avons

$$m_1=\sup_{t\in[0,1]}\mathcal{H}\left(\int_0^1 G(t,s)F\big(s,X_s,\dot{X}(s)\big)\,ds,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right).$$

D'après les propriétés de l'intégrale et de la fonction de Green G, on obtient pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\int_0^1 G(t,s)F\big(s,X_s,\dot{X}(s)\big)\,ds,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) &= \left|\left|\left|\int_0^1 G(t,s)F\big(s,X_s,\dot{X}(s)\big)\,ds\right|\right|\right| \\
&\le \int_0^1 |||G(t,s)F\big(s,X_s,\dot{X}(s)\big)|||\,ds \\
&= \int_0^1 \mid G(t,s)\mid |||F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&\le \int_0^1 |||F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&\le \int_0^1 \sup_{v\in[0,1]} |||F\big(v,X_v,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&= \int_0^1 m\,ds = m.
\end{aligned}$$

D'où,

$$m_1 \le m. \tag{2.16}$$

De l'autre part,

$$m_2 = \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)\,ds,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right).$$

Nous avons pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)\,ds,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) &= \left|\left|\left|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)\,ds\right|\right|\right| \\
&\le \int_0^1 \left|\left|\left|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)\right|\right|\right|\,ds \\
&= \int_0^1 \mid \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\mid |||F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&\le \int_0^1 |||F\big(s,X_s,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&\le \int_0^1 \sup_{v\in[0,1]} |||F\big(v,X_v,\{0_{\mathbb{R}^d}\}\big)|||\,ds \\
&= \int_0^1 m\,ds = m,
\end{aligned}$$

i.e.

$$m_2 \le m. \tag{2.17}$$

Par conséquent, les inégalités (2.16) et (2.17) avec la relation (2.15) nous donnent

$$D_{\mathcal{X}}(X, \mathcal{A}(X)) \leq m.$$

Soit $r > 0$, satisfaisant

$$m < (1-\gamma)r.$$

Soit $\overline{B}_{\mathcal{X}}(X, r)$ la boule fermée de $\mathcal{X}$ de centre X et de rayon r. D'après le Théorème 1.11.1, l'application $\mathcal{A}$ admet un unique point fixe $U \in B_{\mathcal{X}}(X, r)$, donc le problème multivoque $(\mathcal{P}_l)$ admet une solution unique U dans $C_E([-l, 1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0, 1])$, et puisque $U \in B_{\mathcal{X}}(X, r)$, on obtient les inégalités

$$\max_{t\in[0,1]} |||U(t)||| < r \quad et \quad \max_{t\in[0,1]} |||\dot{U}(t)||| < r.$$

La démonstration de notre théorème est alors achevée. ■

Chapitre 3

Résultat d'existence et d'unicité pour l'équation $(\mathcal{P})$ avec une perturbation de type Carathéodory

Introduction

Dans ce chapitre, en appliquant le résultat obtenu dans le chapitre précédent, nous présentons un autre théorème d'existence et d'unicité de solution pour le problème $(\mathcal{P})$ en affaiblissant l'hypothèse (ii) du Théorème 2.2.1, i.e., en prenant F mesurable par rapport à t et Lipschitzienne par rapport à la deuxième et troisième variables, i.e. F de type Carathéodory. Un résultat analogue est donné dans [8] dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie. l'idée de notre démonstration est inspirée de celle dans [8], avec certains changements et addaptation au context multivoque avec les dérivées de Hukuhara, où la notion de convexité abstraite joue un rôle fondamental.

Notons que le problème $(\mathcal{P})$ n'est autre que le problème $(\mathcal{P}_l)$ considéré sans retard, c'est à dire dans le cas particulier où $l = 0$.

3.1 Résultat d'existence et d'unicité

Proposition 3.1.1 *L'espace $E = cc(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrique-m.c.*

Démonstration. Remarquons que E, muni de l'application de convexité $K : E \times E \times [0,1] \to E$, définie pour tout $(A,B,t) \in E \times E \times [0,1]$ par, $K(A,B,t) = (1-t)A + tB$, est un espace K-convexe continu et que toute boule $B_E(A,r)$ est un sous ensemble K-convexe de E. En effet, pour tout $(A,B,t) \in E \times E \times [0,1]$, $(1-t)A+tB \in E$, i.e. $K(A,B,t) \in E$. K est continue, de plus

$$K(A,B,0) = 1A + 0B = A + 0_E = A, \quad K(A,B,1) = 0A + 1B = B.$$

Soient $A \in E$ et $r > 0$. Montrons que la boule ouverte $B_E(A,r) = \{B \in E; \mathcal{H}(B,A) < r\}$ est K-convexe. Soient $B_1, B_2 \in B_E(A,r)$, et $t \in [0,1]$ et montrons que $K(B_1,B_2,t) \in B_E(A,r)$.

• Si $t = 0$, alors $K(B_1,B_2,t) = K(B_1,B_2,0) = B_1 \in B_E(A,r)$.

• Si $t = 1$, alors $K(B_1,B_2,t) = K(B_1,B_2,1) = B_2 \in B_E(A,r)$.

• Si $t \in]0,1[$, en utilisant la convexité de A $\Big((1-t)A + tA = (1-t+t)A = A \Big)$, et par les propriétés (P2) et (P3) de la distance de Hausdorff, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Big(K(B_1,B_2,t),A\Big) &= \mathcal{H}\Big((1-t)B_1 + tB_2, (1-t)A + tA\Big) \leq (1-t)\mathcal{H}(B_1,A) + t\mathcal{H}(B_2,A) \\ &< (1-t)r + tr = r, \end{aligned}$$

i.e. $K(B_1,B_2,t) \in B_E(A,r)$, d'où la K-convexité de cette boule. On conclut que $(E,\mathcal{H};K)$ est un espace K-convexe continu où les boules ouvertes sont des ensembles K-convexes. Par conséquent, d'après la Proposition 1.10.1, on déduit que $(E,\mathcal{H})$ est un espace-c (en prenant $\Gamma(\mathcal{A}) = Co_K(\mathcal{A})$) où les boules ouvertes sont des Γ-ensembles puisqu'elles sont K-convexes.

Montrons que E est un espace-l.c. Nous avons déjà vu que les boules ouvertes sont des Γ-ensembles. Maintenant, soient $\mathcal{A} \subset E$ un Γ-ensemble de E, $r > 0$. On va montrer que le voisinage $\mathcal{V} = \{B \in E; d(B,\mathcal{A}) < r\}$ est un Γ-ensemble, pour cela il suffit de montrer que c'est un ensemble K-convexe.

Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{V}$ et $t \in [0,1]$. Montrons que $K(B_1, B_2, t) \in \mathcal{V}$.

$$B_1 \in \mathcal{V} \Rightarrow d(B_1, \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(B_1, A) < r \Rightarrow \exists A_1 \in \mathcal{A};\ \mathcal{H}(B_1, A_1) < r,$$

$$B_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow d(B_2, \mathcal{A}) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{H}(B_2, A) < r \Rightarrow \exists A_2 \in \mathcal{A};\ \mathcal{H}(B_2, A_2) < r.$$

Prenons $A := K(A_1, A_2, t) = (1-t)A_1 + tA_2$, et remarquons que $A \in \mathcal{A}$ car $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, et donc $\{A_1, A_2\}$ qui est non vide et fini est inclu dans $\mathcal{A}$, i.e. $\{A_1 A_2\} \in \prec \mathcal{A} \succ$, mais $\mathcal{A}$ est un Γ-ensemble, donc par définition $\Gamma(\{A_1 A_2\}) \subset \mathcal{A}$.

Sachant que $Co_K(\{A_1, A_2\})$ contient par définition $\{A_1, A_2\}$, i.e. $A_1, A_2 \in Co_K(\{A_1, A_2\})$, qui est K-convexe, alors $K(A_1, A_2, t) \in Co_K(\{A_1, A_2\})$ or, $Co_K(\{A_1, A_2\}) = \Gamma(\{A_1 A_2\}) \subset \mathcal{A}$, d'où $K(A_1, A_2, t) = A \in \mathcal{A}$. Alors,

$$\begin{aligned}
d\Big(K(B_1, B_2, t), \mathcal{A}\Big) = \inf_{C \in \mathcal{A}} \mathcal{H}\big(K(B_1, B_2, t), C\big) \quad &\leq \quad \mathcal{H}\Big((1-t)B_1 + tB_2, A\Big) \\
&= \quad \mathcal{H}\Big((1-t)B_1 + tB_2, (1-t)A_1 + tA_2\Big) \\
&\leq \quad (1-t)\mathcal{H}(B_1, A_1) + t\mathcal{H}(B_2, A_2) \\
&< \quad (1-t)r + tr = r,
\end{aligned}$$

d'où, $K(B_1, B_2, t) \in \mathcal{V}$ et par suite la K-convexité de $\mathcal{V}$.

En conclusion $(E, \mathcal{H}; \Gamma)$ est un espace métrique-l.c et donc un espace métrique-m.c. $\blacksquare$

Théorème 3.1.1 *Soit $F : [0,1] \times E \times E \to E$ une application satisfaisant les conditions suivantes :*

(j) pour tout $(A, B) \in E \times E$, fixé $F(., A, B)$ est measurable sur $[0,1]$;

(jj) il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(t, A, B) \in [0,1] \times E \times E$

$$|||F(t, A, B)||| \leq c(1 + |||A||| + |||B|||);$$

(jjj) il existe deux constantes positives λ_1, λ_2 satisfaisant $\lambda_1 + \lambda_2 < 1$, telles que pour tout $t \in [0,1]$ et tous $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in E \times E$

$$\mathcal{H}\Big(F(t, A_1, B_1), F(t, A_2, B_2)\Big) \leq \lambda_1 \mathcal{H}(A_1, A_2) + \lambda_2 \mathcal{H}(B_1, B_2).$$

Alors, le problème multivoque $(\mathcal{P})$ admet une solution unique $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$. De plus, pour une certaine constante $m > 0$ qui dépend seulement de c, λ_1 et λ_2, nous avons

$$|||\ddot{U}(t)||| \leq m, \quad p.p.\ t \in [0,1].$$

Démonstration.

<u>Existence de la solution.</u>

<u>Etape 1.</u>

D'après le théorème de Scorza-Dragoni généralisé (Théorème 1.13.1), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $J_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que la mesure de Lebesgue de $C_{[0,1]}^{J_\varepsilon}$ est inférieure à ε et la réstriction de F à $J_\varepsilon \times E \times E$ est continue. Donc, il existe une suite croissante $(J_n)_n$ d'ensembles compacts dans $[0,1]$ telle que la mesure de Lebesgue de $C_{[0,1]}^{J_n}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ et la réstriction de F à $J_n \times E \times E$ est continue. D'autre part, E est un espace-m.c. (Proposition 3.1.1). D'après la version généralisée du théorème de prolongement de Dugundji (Théorème 1.13.2), soit $\widetilde{F}_n$ le prolongement continu de $F\backslash_{J_n \times E \times E}$ à $[0,1] \times E \times E$. Par la définition de $\widetilde{F}_n$ (voir la démonstration du Théorème 1.13.2), il est clair que $\widetilde{F}_n$ hérite les propriétés de $F\backslash_{J_n \times E \times E}$, on en déduit donc que l'application $\widetilde{F}_n$ satisfait (jj) et (jjj), à savoir

$$|||\widetilde{F}_n(t, A, B)||| \leq c(1 + |||A||| + |||B|||), \ \ \forall (t, A, B) \in [0,1] \times E \times E, \tag{3.1}$$

et

$$\mathcal{H}\left(\widetilde{F}_n(t, A_1, B_1), \widetilde{F}_n(t, A_2, B_2)\right) \leq \lambda_1 \mathcal{H}(A_1, A_2) + \lambda_2 \mathcal{H}(B_1, B_2), \tag{3.2}$$

pour tous $(t, A_1, B_1), (t, A_2, B_2) \in [0,1] \times E \times E$.

Il est donc clair que chaque $\widetilde{F}_n$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $m_n := \sup\limits_{t \in [0,1]} |||\widetilde{F}_n(t, \{0_{\mathbb{R}^d}\}, \{0_{\mathbb{R}^d}\})|||$. Alors, par la relation (3.1) nous avons $m_n \leq c$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Choisisons $r > 0$ tel que

$$c < \big(1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\big) r.$$

En appliquant les arguments de la démonstration du Théorème 2.2.1 à chaque $\widetilde{F}_n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, une solution unique $U_n \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$ du problème multivoque

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} \ddot{U}(t) = \widetilde{F}_n(t, U(t), \dot{U}(t)), \quad \forall t \in [0,1], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

avec

$$\max_{t\in[0,1]} |||U_n(t)||| < r \quad et \quad \max_{t\in[0,1]} |||\dot{U}_n(t)||| < r. \tag{3.3}$$

D'après l'équation précédente et les relations (3.1), (3.3), nous avons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1]$,

$$|||\ddot{U}_n(t)||| = |||\widetilde{F}_n(t, U_n(t), \dot{U}_n(t)||| \leq c(1 + |||U_n(t)||| + |||\dot{U}_n(t)|||) < c(1+2r) := m. \tag{3.4}$$

<u>Etape 2.</u>

Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $U_n \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$, alors d'après la Remarque 1.9.1 et la Remarque 1.9.2, on peut écrire

$$U_n(t) = U_n(0) + \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds,\ \forall t \in [0,1], \tag{3.5}$$

et

$$\dot{U}_n(0) = \dot{U}_n(t) + (-1) \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \forall t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Dans la suite, on va montrer que les suites $(U_n)_n, (\dot{U}_n)_n$ sont relativement compactes dans l'espace $C_E([0,1])$. En effet, en utilisant la relation (3.5), les propriétés de la distance de Hausdorff, de l'intégrale, et la relation (3.3), nous avons pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tous

$t, \tau \in [0,1],\ t > \tau$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(U_n(t), U_n(\tau)) &= \mathcal{H}\left(U_n(0) + \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds, U_n(0) + \int_0^\tau \dot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds, \int_0^\tau \dot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^\tau \dot{U}_n(s)\, ds + \int_\tau^t \dot{U}_n(s)\, ds, \int_0^\tau \dot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_\tau^t \dot{U}_n(s)\, ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \left|\left|\left|\int_\tau^t \dot{U}_n(s)\, ds\right|\right|\right| \leq \int_\tau^t |||\dot{U}_n(s)|||\, ds \\
&\leq \int_\tau^t r\, ds = r(t-\tau),
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{H}(U_n(t), U_n(\tau)) \leq r|t-\tau|.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$,

$$|||U_n(t)||| \leq r \Leftrightarrow \mathcal{H}(U_n(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq r \Leftrightarrow U_n(t) \in \overline{B}_E(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, r),$$

comme cette boule est compacte dans $(E, \mathcal{H})$, on conclut que $(U_n(t))_n$ est relativement compacte dans $(E, \mathcal{H})$. Similairement, par la relation (3.6), la propriété (P9) de la différence de Hukuhara, la propriété (P3) de la distance de Hausdorff, le Lemme 1.8.5 et la relation (3.4), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\dot{U}_n(t), \dot{U}_n(\tau)) &= \mathcal{H}\left(\dot{U}_n(0) \ominus (-1)\int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \dot{U}_n(0) \ominus (-1)\int_0^\tau \ddot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left((-1)\int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, (-1)\int_0^\tau \ddot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \int_0^\tau \ddot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_0^\tau \ddot{U}_n(s)\, ds + \int_\tau^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \int_0^\tau \ddot{U}_n(s)\, ds\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\int_\tau^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \left|\left|\left|\int_\tau^t \ddot{U}_n(s)\, ds\right|\right|\right| \leq \int_\tau^t |||\ddot{U}_n(s)|||\, ds \\
&\leq m|t-\tau|.
\end{aligned}$$

De plus, la suite $(\dot{U}_n(t))_n$ est relativement compacte dans $(E, \mathcal{H})$ selon (3.3). Alors, par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $(U_n)_n$ et $(\dot{U}_n)_n$ sont relativement compactes. Par extraction de sous suites, notées aussi $(U_n)_n$ et $(\dot{U}_n)_n$ respectivement, on conclut que $(U_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $U : [0,1] \to E$ satisfaisant $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$; $U(\theta) = U(1)$ et que $(\dot{U}_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $V : [0,1] \to E$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}(U_n(t), U(t)) = 0, \ \ et \ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}(\dot{U}_n(t), V(t)) = 0.$$

Fixons $t \in [0,1]$. Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n(t) = U_n(0) + \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds = \{0_{\mathbb{R}^d}\} + \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds = \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds,$$

d'où,

$$\lim_{n\to\infty} U_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds,$$

et donc

$$U(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds.$$

Comme $(\dot{U}_n)_n$ converge simplement vers $V(.)$ sur $[0,t]$, et $|||\dot{U}_n(s)||| \leq r$, pour tout $s \in [0,t]$, d'après le Théorème 1.8.1, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds = \int_0^t V(s)\, ds,$$

et par suite,

$$U(t) = \int_0^t V(s)\, ds, \ \ \forall t \in [0,1].$$

On conclut par le Lemme 1.9.2 que U est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0,1]$ et que $\dot{U}(t) = V(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Par (3.3) nous avons

$$|||U(t)||| \leq r, \quad |||\dot{U}(t)||| \leq r, \ \ \forall t \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Maintenant, on montre que $\dot{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type presque partout sur $[0,1]$ et que $\ddot{U}(t) = F(t, U(t), \dot{U}(t))$, $p.p.$ $t \in [0,1]$. Fixons $t \in [0,1]$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\dot{U}_n(0) = \dot{U}_n(t) + (-1) \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds,$$

i.e.

$$(-1)\left(\dot{U}_n(0) \ominus \dot{U}_n(t)\right) = \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} (-1)\left(\dot{U}_n(0) \ominus \dot{U}_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Par la relation (3.4), $|||\ddot{U}_n(s)||| \leq m$, pour tout $s \in [0,t]$. D'autre part, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ddot{U}_n(t) = F(t, U_n(t), \dot{U}_n(t))$, pour tout $t \in J_n$. Posons $N_0 := C_{[0,1]}^{\bigcup_n J_n}$, cet ensemble est négligeable, de plus, on peut voir que si on fixe $t \notin N_0$, alors il existe un entier $p := p(t)$ tel que $\ddot{U}_n(t) = F(t, U_n(t), \dot{U}_n(t))$, pour tout $n \geq p$, d'où,

$$\lim_{n\to\infty} \ddot{U}_n(t) = \lim_{n\to\infty} F(t, U_n(t), \dot{U}_n(t)) = F(t, U(t), \dot{U}(t))$$

grâce à la continuité de $F(t, ., .)$.

c'est à dire, $(\ddot{U}_n)_n$ converge presque partout sur $[0,1]$ vers $F(., U(.), \dot{U}(.))$, et donc $(\ddot{U}_n)_n$ converge presque partout sur $[0,t]$ vers $F(., U(.), \dot{U}(.))$, pour tout t fixé dans $[0,1]$. D'après le Théorème 1.8.1 encore une fois, on voit bien que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds = \int_0^t F(s, U(s), \dot{U}(s))\, ds. \tag{3.9}$$

Comme la suite $(\dot{U}_n(t))_n$ converge vers $\dot{U}(t)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} (-1)\left(\dot{U}_n(0) \ominus \dot{U}_n(t)\right) = (-1)\left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(t)\right). \tag{3.10}$$

Par (3.8), (3.9) et (3.10), on conclut que

$$(-1)\left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(t)\right) = \int_0^t F(s, U(s), \dot{U}(s))\, ds.$$

Posons pour tout $t \in [0,1]$

$$(-1)\left(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(t)\right) := M(t) := \int_0^t F(s, U(s), \dot{U}(s))\, ds.$$

Comme $F(., U(.), \dot{U}(.))$ est mesurable et bornée (par (3.7) et l'hypothèse (jj)), alors, d'après le Lemme 1.9.3, M est dérivable au sens de Hukuhara du premier type presque partout sur $[0,1]$ et nous avons

$$\dot{M}(t) = F(t, U(t), \dot{U}(t)), \;\; p.p.\; t \in [0,1],$$

d'où, d'après la Proposition 1.3.3, $\dot{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type presque partout sur $[0,1]$ avec

$$\ddot{U}(t) = \dot{M}(t), \;\; p.p.\; t \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$\ddot{U}(t) = F(t, U(t), \dot{U}(t)), \;\; p.p.\; t \in [0,1].$$

On conclut que U est une solution pour notre problème $(\mathcal{P})$, et par la relation (3.7) et l'hypothèse (jj)

$$|||\ddot{U}(t)||| \leq c(1+2r) = m, \;\; p.p.\; t \in [0,1].$$

<u>Unicité de la solution.</u>

Soient U_1, U_2 deux solutions dans $\mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$, du problème $(\mathcal{P})$. Grâce à l'hypothèse (jjj), en utilisant 1) et 4) de la Proposition 2.1.1, les propriétés de l'intégrale, de la distance de

Hausdorff et de la fonction de Green, on obtient pour presque tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t)) &= \mathcal{H}\Big(F\big(t, U_1(t), \dot{U}_1(t)\big), F\big(t, U_2(t), \dot{U}_2(t)\big)\Big) \\
&\leq \lambda_1 \mathcal{H}\big(U_1(t), U_2(t)\big) + \lambda_2 \mathcal{H}\big(\dot{U}_1(t), \dot{U}_2(t)\big) \\
&= \lambda_1 \mathcal{H}\left(\int_0^1 G(t,s)\, \ddot{U}_1(s) ds, \int_0^1 G(t,s)\, \ddot{U}_2(s) ds\right) \\
&+ \lambda_2 \mathcal{H}\left(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \ddot{U}_1(s) ds, \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \ddot{U}_2(s) ds\right) \\
&\leq \lambda_1 \int_0^1 \mathcal{H}\Big(G(t,s)\, \ddot{U}_1(s),\ G(t,s)\, \ddot{U}_2(s)\Big)\, ds \\
&+ \lambda_2 \int_0^1 \mathcal{H}\Big(\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \ddot{U}_1(s), \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \ddot{U}_2(s)\Big)\, ds \\
&\leq \lambda_1 \int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(s), \ddot{U}_2(s))\, ds + \lambda_2 \int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(s), \ddot{U}_2(s))\, ds \\
&= (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(s), \ddot{U}_2(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t))\, dt \leq (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t))\, dt,$$

donc,

$$\big(1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\big) \int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t))\, dt \leq 0,$$

d'où,

$$\int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t))\, dt \leq 0,$$

et donc,

$$\int_0^1 \mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t))\, dt = 0,$$

par conséquent, $\mathcal{H}(\ddot{U}_1(t), \ddot{U}_2(t)) = 0$ presque pour tout $t \in [0,1]$, i.e. $\ddot{U}_1(t) = \ddot{U}_2(t)$ presque pour tout $t \in [0,1]$,

on conclut que

$$\int_0^1 G(t,s) \ddot{U}_1(s)\, ds = \int_0^1 G(t,s) \ddot{U}_2(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1],$$

d'où,

$$U_1(t) = U_2(t), \quad \forall t \in [0,1],$$

i.e.,

$$U_1 = U_2.$$

Notre démonstration est ainsi terminée. $\blacksquare$

Exemple illustratif

Dans la suite, exposons par un exemple numérique une situation où on peut utiliser les derivées de Hukuhara. Supposons que l'équation suivante a été proposée comme modèle pour un certain problème physique,

$$(\mathcal{P}_{1l}) \begin{cases} \ddot{u}(t) = -\frac{1}{5}u(t-1), \quad t \in [0,1], \\ u(t) = t, \quad \forall t \in [-1,0], \\ u(0) = 0; \; u(\frac{1}{2}) = u(1), \end{cases}$$

avec $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Tout d'abord, notons que les problèmes aux limites avec retard modélisent des phénomènes dans lesquels il y a un décalage de temps entre la cause et la conséquence, entre l'observation et l'action.

Dans ce cas simple, grâce à la fonction de Green, on peut avoir une solution unique

$$u(t) = -\frac{1}{30}t^3 + \frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{120}t, \quad \forall t \in [0,1].$$

En effet, $t \in [0,1] \Leftrightarrow t-1 \in [-1,0] \Leftrightarrow u(t-1) = t-1$, donc $\ddot{u}(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}$, pour tout $t \in [0,1]$. On obtient alors, le problème aux limites ordinaire sans retard suivant

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = -\frac{1}{5}t + \frac{1}{5}, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = 0; \; u(\frac{1}{2}) = u(1). \end{cases}$$

Par la Proposition 1 dans [8], cette équation admet une solution unique $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)(-\frac{1}{5}s + \frac{1}{5}) \, ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Supposons maintenant que nos informations concernant l'historique de u sur $[-1, 0]$ sont imprécises et contiennent une incertitude. Par conséquent, le modèle $(\mathcal{P}_{1l})$ n'est pas parfait et contient aussi une incertitude. Pour le rendre parfait, plus réaliste, l'incertitude doit être prise en compte et introduite dans le modèle. Pour cette fin, on peut considérer des intervalles de tolérances $U(t)$ pour chaque instant t de l'historique initial au lieu de la valeur ponctuelle $u(t)$. En effet, supposons qu'à travers d'autres mesures ou informations on a pu déterminer pour chaque instant t dans l'historique $[-1, 0]$ un intervalle $[\varphi_1(t), \varphi_2(t)] = [\frac{11}{10}t, \frac{9}{10}t]$ qui couvre la valeur exacte inconnue $\varphi(t)$. Dans ce cas, une application dont les valeurs sont des intervalles apparait, les dérivées deviennent celles de Hukuhara, et le problème $(\mathcal{P}_{1l})$ se transforme en un problème différentiel multivoque avec retard :

$$(\mathcal{P}_{2l}) \begin{cases} \ddot{U}(t) = -\frac{1}{5}U(t-1), \quad t \in [0, 1], \\ U(t) = [\frac{11}{10}t, \frac{9}{10}t], \quad \forall t \in [-1, 0], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}}\};\ U(\frac{1}{2}) = U(1). \end{cases}$$

Pour $t \in [0, 1]$, posons $U(t) = [f_1(t), f_2(t)]$. Alors, d'après la Remarque 1.3.5, on obtient $\ddot{U}(t) = [\ddot{f}_2(t), \ddot{f}_1(t)]$, pour tout $t \in [0, 1]$. Le problème devient le suivant :

$$\begin{cases} [\ddot{f}_2(t), \ddot{f}_1(t)] = \frac{1}{5}[-f_2(t-1), -f_1(t-1)], \quad t \in [0, 1], \\ [f_1(t), f_2(t)] = [\frac{11}{10}t, \frac{9}{10}t], \quad \forall t \in [-1, 0], \\ [f_1(0), f_2(0)] = [0, 0];\ [f_1(\frac{1}{2}), f_2(\frac{1}{2})] = [f_1(1), f_2(1)]. \end{cases}$$

Ce problème est équivalent au système des problèmes aux limites classiques suivants

$$\begin{cases} \ddot{f}_1(t) = -\frac{1}{5}f_1(t-1), \quad t \in [0, 1], \\ f_1(t) = \frac{11}{10}t, \quad \forall t \in [-1, 0], \\ f_1(0) = 0;\ f_1(\frac{1}{2}) = f_1(1), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \ddot{f}_2(t) = -\frac{1}{5} f_2(t-1), \quad t \in [0,1], \\ f_2(t) = \frac{9}{10} t, \qquad \forall t \in [-1,0], \\ f_2(0) = 0;\ f_2(\frac{1}{2}) = f_2(1). \end{cases}$$

On obient donc une solution unique U de $(\mathcal{P}_{2l})$ qui est une application dont les valeurs sont des intervalles, elle est de la forme

$$U(t) = \left[-\frac{121}{1200} t + \frac{11}{100} t^2 - \frac{11}{300} t^3, -\frac{33}{400} t + \frac{9}{100} t^2 - \frac{3}{100} t^3 \right], \quad \forall t \in [0,1].$$

La solution obtenue, U est meilleure que u puisqu'elle a été calculée en prenant l'incertitude en compte.

Chapitre 4

Résultat d'existence pour une inclusion différentielle multivoque du second ordre

Introduction

Ce dernier chapitre comporte deux sections. Dans la première, nous reconsidérons le problème du premier chapitre, à savoir l'équation différentielle multivoque

$$(\mathcal{P}_l)\begin{cases} \ddot{U}(t) = F(t, U_t, \dot{U}(t)), \quad t \in [0,1], \\ U(t) = \varphi(t), \quad \forall t \in [-l, 0], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

où $E = cc(\mathbb{R}^d)$. En éliminant la condition de Lipshitzité supposée sur F, on montre l'existence d'au moins une solution U pour le problème $(\mathcal{P}_l)$ (l'unicité n'est plus assurée), et ce en utilisant la méthode des approximations successives. Dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie, un résultat d'existence était montré dans [3] par la méthode du point fixe.

Comme application au résultat de la première section, dans la deuxième section, nous donnons un théorème d'existence pour l'inclusion différentielle multivoque

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\ddot{U}(t)\in\Phi\big(t,U(t),\dot{U}(t)\big),\ \ t\in[0,1],\\ U(0)=\{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta)=U(1),\end{cases}$$

où $\theta\in]0,1[$, $E=cc(\mathbb{R}^d)$, $\Phi:[0,1]\times E\times E\rightrightarrows E$ est une multi-application. Les inclusions différentielles avec les dérivées de Hukuhara rentrent dans le cadre de recherche sur les problèmes différentiels multivoques ou ensemblistes dont la théorie est en voie de développement. Pour des problèmes pareils du premier ordre le lecteur peut se référer à [18], [51] et [55].

Concernant l'idée de notre démonstration, elle a été inspirée de celle dans [18]. Notons que cette approche trouve ses origines dans la méthode classique de Severini ([53]) pour résoudre les équations différentielles ordinaires. La même approche a été adoptée par Cellina ([14]) pour la résolution d'inclusions différentielles ordinaires dans la dimension finie, en utilisant un théorème de sélections approximatives comme outil approprié.
Dans [18], les auteurs ont utilisé un outil analogue valable pour les espaces métriques K-convexes, en particulier l'espace $E=cc(\mathbb{R}^d)$, ils ont construit une suite d'EDMs du premier ordre approximatives. Il ont constaté que chacune de ces dernières admet une solution d'apès un résultat déja existant. Alors, ils ont montré la convergence des solutions correspondantes, mais contrairement à Cellina, la preuve que la limite résoud l'inclusion principale été plus délicate, c'est pourquoi ils avaient recours à une technique effectuée par eux même.

Dans notre cas, en exploitant le même outil adéquat pour les espaces métriques K-convexes, on arrive à construire à partir de l'inclusion $(\mathcal{I})$, une suite approximative d'EDMs du second ordre, chacune d'entre elles de la forme $(\mathcal{P}_l)$. En appliquant le résultat obtenu dans la première section de ce chapitre, on obient une suite de solutions correspondantes. En fin, nous démontrons que cette suite converge vers une application limite et que cette dernière est une solution pour notre inclusion $(\mathcal{I})$, et ceci en adaptant la technique utilisée dans [18] au cas du second ordre.

Pour des résultats d'existence dans la théorie classique des inclusions différentielles, voir [3], [12] et [58].

4.1 Résultat d'existence pour une équation différentielle multivoque du second ordre avec une perturbation continue

Théorème 4.1.1 *Soit $F : [0,1] \times C_l \times E \to E$ une application continue, telle qu'il existe $m > 0$ satisfaisant $|||F(t,\psi,A)||| \leq m$, pour tout $(t,\psi,A) \in [0,1] \times C_l \times E$. Soit $\varphi \in C_l$ vérifiant $\varphi(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$. Alors, le problème multivoque $(\mathcal{P}_l)$ admet au moins une solution $\widetilde{U} \in C_E([-l,1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$*

$$|||\widetilde{U}(t)||| \leq m, \quad |||\dot{\widetilde{U}}(t)||| \leq m.$$

Démonstration.

Définissons la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : $U^n : [-l,1] \to E$ avec

$$U^0(t) := \begin{cases} \varphi(t), & \forall t \in [-l,0], \\ \{0_{\mathbb{R}^d}\}, & \forall t \in [0,1], \end{cases}$$

et pour $n \geq 1$

$$U^n(t) := \begin{cases} \varphi(t), \quad \forall t \in [-l,0], \\ \displaystyle\int_0^1 G(t,s)F\left(s, U_s^{n-1}, \dot{U}^{n-1}(s)\right)\, ds, \ \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

Par récurence, puisque F est continue, d'après 4) et 5) de la Proposition 2.1.1, on peut montrer que pour tout $n \geq 1$, $U^n(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}, U^n(\theta) = U^n(1)$,

$$\dot{U}^n(t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\left(s, U_s^{n-1}, \dot{U}^{n-1}(s)\right)\, ds, \ \forall t \in [0,1], \tag{4.1}$$

$$\ddot{U}^n(t) = F\left(t, U_t^{n-1}, \dot{U}^{n-1}(t)\right), \ \forall t \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Donc, $U^n(.) \in C_E([-l,1]) \cap \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, d'après la définition de $U^n(.)$, et en utilisant 3) de la Proposition 2.1.1 et les relations (4.1), (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} |||U^n(t)||| &= \left|\left|\left|\int_0^1 G(t,s)F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)\,ds\right|\right|\right| \leq \int_0^1 \left|\left|\left|G(t,s)F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)\right|\right|\right|\,ds \\ &\leq \int_0^1 \left|\left|\left|F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)\right|\right|\right|\,ds \leq \int_0^1 m\,ds = m,\ \ \forall t \in [0,1]; \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} |||\dot{U}^n(t)||| &= \left|\left|\left|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)ds\right|\right|\right| \leq \int_0^1 \left|\left|\left|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)\right|\right|\right|ds \\ &\leq \int_0^1 \left|\left|\left|F\left(s,U_s^{n-1},\dot{U}^{n-1}(s)\right)\right|\right|\right|\,ds \leq \int_0^1 m\,ds = m,\ \ \forall t \in [0,1]; \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$|||\ddot{U}^n(t)||| = \left|\left|\left|F\left(t,U_t^{n-1},\dot{U}^{n-1}(t)\right)\right|\right|\right| \leq m,\ \ \forall t \in [0,1]. \tag{4.5}$$

Dans la suite, on va montrer que les suites $(U^n)_n, (\dot{U}^n)_n$ sont relativement compactes dans $C_E([0,1])$. En effet, puisque $\dot{U}^n$ est continue sur $[0,1]$, d'après la Remarque 1.9.1, on peut écrire

$$U^n(t) = U^n(0) + \int_0^t \dot{U}^n(s)\,ds,\ \ \forall t \in [0,1].$$

Par conséquent, en utilisant les propriétés de la distance de Hausdorff, les propriétés de l'intégrale multivoque et la relation (4.4), nous avons pour tous $t, \tau \in [0,1],\ t > \tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(U^n(t),U^n(\tau)) &= \mathcal{H}\left(U^n(0) + \int_0^t \dot{U}^n(s)\,ds, U^n(0) + \int_0^\tau \dot{U}^n(s)\,ds\right) \\ &= \mathcal{H}\left(\int_0^t \dot{U}^n(s)\,ds, \int_0^\tau \dot{U}^n(s)\,ds\right) \\ &= \mathcal{H}\left(\int_0^\tau \dot{U}^n(s)\,ds + \int_\tau^t \dot{U}^n(s)\,ds, \int_0^\tau \dot{U}^n(s)\,ds\right) \\ &= \mathcal{H}\left(\int_\tau^t \dot{U}^n(s)\,ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \left|\left|\left|\int_\tau^t \dot{U}^n(s)\,ds\right|\right|\right| \leq \int_\tau^t |||\dot{U}^n(s)|||\,ds \\ &\leq \int_\tau^t m\,ds = m(t-\tau), \end{aligned}$$

i.e., pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}(U^n(t),U^n(\tau)) \leq m|t-\tau|.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|||U^n(t)||| \leq m \Leftrightarrow \mathcal{H}(U^n(t), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq m \Leftrightarrow U^n(t) \in \overline{B}_E(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, m),$$

et comme cette boule est compacte dans E, on conclut que $(U^n(t))_n$ est relativement compacte dans $(E, \mathcal{H})$. Maintenant, puisque $\dot{U}^n$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur $[0,1]$ et sa dérivée $\ddot{U}^n$ est continue, d'après la Remarque 1.9.2, on peut écrire

$$\dot{U}^n(0) = \dot{U}^n(t) + (-1)\int_0^t \ddot{U}^n(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Par la même méthode on montre que $(\dot{U}^n)_n$ est équicontinue, car avec les propriétés de la différence de Hukuhara et de la distance de Haudorff $\mathcal{H}$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(\dot{U}^n(t), \dot{U}^n(\tau)) & = & \mathcal{H}\left(\dot{U}^n(0) \ominus (-1)\displaystyle\int_0^t \ddot{U}^n(s)\, ds, \dot{U}^n(0) \ominus (-1)\displaystyle\int_0^\tau \ddot{U}^n(s)\, ds\right) \\
& = & \mathcal{H}\left((-1)\displaystyle\int_0^t \ddot{U}^n(s)\, ds, (-1)\displaystyle\int_0^\tau \ddot{U}^n(s)\, ds\right) \\
& = & \mathcal{H}\left(\displaystyle\int_0^t \ddot{U}^n(s)\, ds, \displaystyle\int_0^\tau \ddot{U}^n(s)\, ds\right) \\
& = & \mathcal{H}\left(\displaystyle\int_0^\tau \ddot{U}^n(s)\, ds + \displaystyle\int_\tau^t \ddot{U}^n(s)\, ds, \displaystyle\int_0^\tau \ddot{U}^n(s)\, ds\right) \\
& = & \mathcal{H}\left(\displaystyle\int_\tau^t \ddot{U}^n(s)\, ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\right) = \left|\left|\left|\displaystyle\int_\tau^t \ddot{U}^n(s)\, ds\right|\right|\right| \leq \displaystyle\int_\tau^t |||\ddot{U}^n(s)|||\, ds \\
& \leq & \displaystyle\int_\tau^t m\, ds = m|t-\tau|.
\end{array}$$

La dernière inégalité est due à la relation (4.5). La suite $(\dot{U}^n(t))_n$ est relativement compacte dans $(E, \mathcal{H})$ puisque $|||\dot{U}^n(t)||| \leq m$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà, $(U^n)_n$ et $(\dot{U}^n)_n$ sont relativement compactes, par extraction de sous suites, on peut supposer que $(U^n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $U : [0,1] \to E$ satisfaisant $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$; $U(\theta) = U(1)$, et que $(\dot{U}^n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $V : [0,1] \to E$, i.e.,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\big(U^n(t), U(t)\big) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\big(\dot{U}^n(t), V(t)\big) = 0.$$

Définissons l'application $\widetilde{U} : [-l, 1] \to E$ par

$$\widetilde{U}(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-l, 0], \\ U(t), & t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{U} \in C_E([-l, 1])$ et que $(U^n)_n$ converge uniformément sur $[-l, 1]$ vers $\widetilde{U}$, car

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[-l,1]} \mathcal{H}\big(U^n(t), \widetilde{U}(t)\big) = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \mathcal{H}\big(U^n(t), U(t)\big) = 0.$$

On va montrer que $\widetilde{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0, 1]$ et que $\dot{\widetilde{U}}(t) = V(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Fixons $t \in [0, 1]$. Nous avons

$$U^n(t) = U^n(0) + \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds = \{0_{\mathbb{R}^d}\} + \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds = \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds, \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} U^n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds,$$

d'où,

$$U(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds.$$

Puisque $(\dot{U}^n)_n$ converge uniformément (donc simplement) sur $[0, 1]$ vers V et puisque $|||\dot{U}^n(s)||| \leq m$, pour tout $s \in [0, t]$, alors, d'après le Théorème 1.8.1,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{U}^n(s)\, ds = \int_0^t V(s)\, ds,$$

par conséquent,

$$U(t) = \int_0^t V(s)\, ds.$$

On obtient alors

$$\widetilde{U}(t) = \int_0^t V(s)\, ds, \ \ \forall t \in [0, 1].$$

On conclut, par le Lemme 1.9.2, que $\widetilde{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0, 1]$ et que $\dot{\widetilde{U}}(t) = V(t)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Montrons que $\dot{\widetilde{U}}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur $[0,1]$ et que $\ddot{\widetilde{U}}(t) = F(t, \widetilde{U}_t, \dot{\widetilde{U}}(t))$, pour tout $t \in [0,1]$. Fixons $t \in [0,1]$. Nous avons

$$\dot{U}^n(0) = \dot{U}^n(t) + (-1)\int_0^t \ddot{U}^n(s)\,ds, \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

i.e.

$$(-1)\big(\dot{U}^n(0) \ominus \dot{U}^n(t)\big) = \int_0^t \ddot{U}^n(s)\,ds, \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}(-1)\big(\dot{U}^n(0) \ominus \dot{U}^n(t)\big) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \ddot{U}^n(s)\,ds. \tag{4.6}$$

D'après la relation (4.5), $|||\ddot{U}^n(s)||| \leq m$, pour tout $s \in [0,t]$, d'autre part, d'après la relation (4.2), pour tout $s \in [0,t]$,

$$\ddot{U}^n(s) = F(s, U_s^{n-1}, \dot{U}^{n-1}(s)), \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

et donc,

$$\lim_{n\to\infty}\ddot{U}^n(s) = \lim_{n\to\infty}F(s, U_s^{n-1}, \dot{U}^{n-1}(s)) = F(s, \widetilde{U}_s, \dot{\widetilde{U}}(s)),$$

grâce à la continuité de F, d'où, $(\ddot{U}^n)_n$ converge simplement vers $F(., \widetilde{U}_., \dot{\widetilde{U}}(.))$ sur $[0,t]$. D'après le Théorème 1.8.1 encore une fois,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \ddot{U}^n(s)\,ds = \int_0^t F(s, \widetilde{U}_s, \dot{\widetilde{U}}(s))\,ds. \tag{4.7}$$

Comme la suite $(\dot{U}^n(t))_n$ converge vers $\dot{\widetilde{U}}(t)$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}(-1)\big(\dot{U}^n(0) \ominus \dot{U}^n(t)\big) = (-1)\big(\dot{\widetilde{U}}(0) \ominus \dot{\widetilde{U}}(t)\big), \tag{4.8}$$

d'après (4.6), (4.7) et (4.8), on conclut que

$$(-1)\big(\dot{\widetilde{U}}(0) \ominus \dot{\widetilde{U}}(t)\big) = \int_0^t F(s, \widetilde{U}_s, \dot{\widetilde{U}}(s))\,ds.$$

Notons, pour tout $t \in [0,1]$

$$(-1)\big(\dot{\widetilde{U}}(0) \ominus \dot{\widetilde{U}}(t)\big) := M(t) = \int_0^t F(s, \widetilde{U}_s, \dot{\widetilde{U}}(s))\,ds.$$

Puisque $F(., \widetilde{U}_., \dot{\widetilde{U}}(.))$ est continue, d'après le Lemme 1.9.2, M est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0,1]$ et nous avons

$$\dot{M}(t) = F(t, \widetilde{U}_t, \dot{\widetilde{U}}(t)), \quad \forall t \in [0,1],$$

par conséquent, d'après la Proposition 1.3.3, $\dot{\widetilde{U}}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type sur $[0,1]$ avec

$$\ddot{\widetilde{U}}(t) = \dot{M}(t), \quad \forall t \in [0,1].$$

On conclut que

$$\ddot{\widetilde{U}}(t) = F(t, \widetilde{U}_t, \dot{\widetilde{U}}(t)), \quad \forall t \in [0,1].$$

i.e. $\widetilde{U}$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_l)$, et par (4.3) et (4.4),

$$|||\widetilde{U}(t)||| \leq m, \quad |||\dot{\widetilde{U}}(t)||| \leq m, \quad \forall t \in [0,1].$$

La démonstration de notre théorème est alors terminée. ■

4.2 Application à la résolution d'une inclusion différentielle multivoque du second ordre

Considérons l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{I}) \begin{cases} \ddot{U}(t) \in \Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big), \quad t \in [0,1], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}; \; U(\theta) = U(1), \end{cases}$$

où $\theta \in]0,1[$, $\Phi : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ est une multi-application, $E = cc(\mathbb{R}^d)$, $\dot{U}(.)$ désigne la dérivée de $U(.)$ au sens de la Définition 1.3.1, et $\ddot{U}(.)$ désigne la dérivée de $\dot{U}(.)$ au sens de la Définition 1.3.2.

Théorème 4.2.1 *Soit* $\Phi : [0,1] \times E \times E \rightrightarrows E$ *une multi-application à valeurs non vides, K-convexes, et compactes satisfaisant les conditions suivantes :*
(i) Φ *est s.c.s.*

(ii) il existe $M > 0$ tel que $\Phi(t, A, B) \subset \overline{B}_E\big(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, M\big)$ pour tout $(t, A, B) \in [0,1] \times E \times E$.
Alors, l'inclusion différentielle multivoque $(\mathcal{I})$ admet au moins une solution $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$.

Démonstration.

Une application $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$ vérifiant $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1)$ est une solution pour l'inclusion $(\mathcal{I})$ s'il existe une application mesurable $W : [0,1] \to E$ telle que :

$$\begin{cases} W(t) \in \Phi\big(t, U(t), \dot{U}(t)\big),\ p.p.\ t \in [0,1], \\ \ddot{U}(t) = W(t), \quad p.p.\ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Puisque Φ satisfait (i) et (ii), par le Théorème 1.10.1, il existe une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'applications continues (sélections approximantes continues) $F_n : [0,1] \times E \times E \to E$ vérifiant :

(a_1) $\mathcal{H}(F_n(t, A, B), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) \leq M$, pour tout $(t, A, B) \in [0,1] \times E \times E$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a_2) $e\Bigg(gph(F_n), gph(\Phi)\Bigg) < \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation différentielle multivoque suivante

$$(\mathcal{P}_n) \begin{cases} \ddot{U}(t) = F_n(t, U(t), \dot{U}(t)), \quad \forall t \in [0,1], \\ U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\};\ U(\theta) = U(1). \end{cases}$$

D'après le Théorème 4.1.1 (considéré sans retard), cette equation admet au moins une solution $U_n \in \mathcal{W}_E^{2,1}([0,1])$, de plus, pour tout $t \in [0,1]$

$$|||U_n(t)\| \leq M, \quad |||\dot{U}_n(t)||| \leq M, \quad |||\ddot{U}_n(t)||| \leq M. \tag{4.9}$$

Considérons les deux suites $(U_n)_n$ et $(\dot{U}_n)_n$. D'après les Remarques 1.9.1 et 1.9.2 succesivement, on peut écrire pour tout $t \in [0,1]$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n(t) = U_n(0) + \int_0^t \dot{U}_n(s)\, ds,$$

et

$$\dot{U}_n(0) = \dot{U}_n(t) + (-1) \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \tag{4.10}$$

i.e.

$$\dot{U}_n(t) = \dot{U}_n(0) \ominus (-1) \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds. \tag{4.11}$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 4.1.1, on peut montrer facilement que les suites $(U_n)_n$, $(\dot{U}_n)_n$ sont relativement compactes dans $C_E([0,1])$, par conséquent, par extraction de sous suites, on peut supposer que $(U_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $U : [0,1] \to E$ satisfaisant $U(0) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$; $U(\theta) = U(1)$, que $(\dot{U}_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une application continue $V : [0,1] \to E$, et on peut montrer que U est dérivable au sens de Hukuhara du premier type sur $[0,1]$ avec $V = \dot{U}$. Maintenant, montrons que $\dot{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type presque partout sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons par la relation (4.10)

$$\dot{U}_n(0) = \dot{U}_n(t) + (-1) \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1]$$

i.e.

$$(-1)\big(\dot{U}_n(0) \ominus \dot{U}_n(t)\big) = \int_0^t \ddot{U}_n(s)\, ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

Puisque $\ddot{U}_n(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ pour tout $t \in [0,1]$, et puisque la suite $\Big((-1)\big(\dot{U}_n(0) \ominus \dot{U}_n(.)\big)\Big)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $(-1)(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(.))$, alors, par le Théorème 1.12.1, il existe une application mesurable $W : [0,1] \to E$, avec $W(t) \subset \overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0_{\mathbb{R}^d}, M)$ pour tout $t \in [0,1]$, telle que

$$(-1)(\dot{U}(0) \ominus \dot{U}(t)) = \int_0^t W(s)\, ds, \;\; \forall\, t \in [0,1], \tag{4.12}$$

ou d'une manière équivalente,

$$\dot{U}(t) = \dot{U}(0) \ominus (-1) \int_0^t W(s)\, ds, \;\; \forall\, t \in [0,1], \tag{4.13}$$

par conséquent, d'après la Proposition 1.3.3 et le Lemme 1.9.3, $\dot{U}$ est dérivable au sens de Hukuhara du second type presque partout sur $[0,1]$ où $\ddot{U}(t) = W(t)$ *p.p.* $t \in [0,1]$, i.e. $U \in \mathcal{X}_E^{2,1}([0,1])$.

Dans la suite, on va montrer que l'application U est une solution pour l'inclusion différentielle multivoque $(\mathcal{I})$. Pour cette fin, puisque Φ est à valeurs fermées, il suffit de montrer que

$$d\Big(W(t),\Phi\big(t,U(t),\dot{U}(t)\big)\Big) := \inf_{A\in\Phi\big(t,U(t),\dot{U}(t)\big)} \mathcal{H}(W(t),A) \;\; = 0, \quad p.p.\ t\in[0,1]. \qquad (4.14)$$

Définissons l'application $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\lambda(t) = d\Big(W(t),\Phi\big(t,U(t),\dot{U}(t)\big)\Big).$$

Puisque W est mesurable, et la multi-application $t \mapsto \Phi\big(t,U(t),\dot{U}(t)\big)$ est mesurable en étant s.c.s. (Proposition 1.7.1), alors, par la Proposition 1.6.3, λ est mesurable. La relation (4.14) est équivalente à

$$\mu\Big(\{t\in[0,1]/\lambda(t)\neq 0\} = \{t\in[0,1]/\lambda(t)>0\}\Big) = 0. \qquad (4.15)$$

Dans le reste de la démonstration, nous allons montrer la relation (4.15) par contradiction. Supposons que (4.15) n'est pas vraie, i.e. supposons que

$$\mu\Big(\{t\in[0,1]/\lambda(t)>0\}\Big) \neq 0.$$

Alors, il existe $0<\varepsilon<1$ tel que $\mu\Big(J' := \{t\in[0,1]/\lambda(t)\geq\varepsilon\}\Big) > 0$. En effet, si on suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mu\left(\{t\in[0,1]/\lambda(t)\geq\frac{1}{n}\}\right) = 0,$$

alors,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{t\in[0,1]/\lambda(t)\geq\frac{1}{n}\}\right) = 0,$$

or

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{t\in[0,1]/\lambda(t)\geq\frac{1}{n}\} = \{t\in[0,1]/\lambda(t)>0\},$$

donc

$$\mu\Big(\{t \in [0,1]/\lambda(t) > 0\}\Big) = 0,$$

d'où la contradiction. On en déduit qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mu\left(\{t \in [0,1]/\lambda(t) \geq \frac{1}{n}\}\right) > 0.$$

Il suffit alors de prendre $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. D'après le Théorème de Pliś multivoque (Théorème 1.4.4), il existe un fermé $J \subset J^{'}$ avec $\mu(J) > 0$ tel que la restriction de W à J est continue. Soit $\tau \in J$, $0 < \tau < 1$, un point de densité de J, i.e.

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mu(I_{\tau,\rho} \cap J)}{2\rho} = 1,$$

où, $I_{\tau,\rho} = [\tau - \rho, \tau + \rho]$. Soit $0 < \alpha < \frac{\varepsilon}{4}$. Tant que $\lambda(\tau) \geq \varepsilon$ (car $\tau \in J \subset J^{'}$), nous avons

$$\overline{B}_E\Big(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \alpha\Big) \bigcap \overline{V}\Big(\Phi(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)), \frac{\varepsilon}{4}\Big) = \emptyset. \tag{4.16}$$

En effet, si $A \in \overline{V}\Big(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\Big)$, alors $d\Big(A, \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\Big) \leq \frac{\varepsilon}{4}$,

et donc,

$$\lambda(\tau) = d\Big(W(\tau), \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\Big) \leq \mathcal{H}(W(\tau), A) + d\Big(A, \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\Big) \leq \mathcal{H}(W(\tau), A) + \frac{\varepsilon}{4},$$

et puisque $\lambda(\tau) \geq \varepsilon$ alors,

$$\mathcal{H}(A, W(\tau)) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha + \frac{\varepsilon}{2} > \alpha + \frac{\varepsilon}{4},$$

par conséquent,

$$A \notin \overline{B}_E\Big(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4} + \alpha\Big).$$

Maintenant, puisque la restriction de W à J est continue et τ est un point de densité de J on peut trouver $\rho_0 > 0$, avec $I_{\tau,\rho_0} \subset [0,1]$, suffisamment petit, de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

$$W(t) \in \overline{B}_E\left(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad \forall t \in I_{\tau,\rho_0} \cap J; \tag{4.17}$$

$$\frac{\mu(I_{\tau,\rho} \setminus J)}{2\rho} < \frac{\alpha}{2M}, \quad \forall \rho \in]0, \rho_0[. \tag{4.18}$$

Par la s.c.s. de Φ au point $(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau))$, il existe $0 < \sigma < \rho_0$ tel que pour tout $(t, A, B) \in I_{\tau,\sigma} \times \overline{B}_E\big(U(\tau), \sigma\big) \times \overline{B}_E\big(\dot{U}(\tau), \sigma\big)$

$$e\bigg(\Phi\big(t, A, B\big), \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\bigg) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{4.19}$$

Par la continuité de U et $\dot{U}$ au point τ, il existe $0 < \delta < \frac{\sigma}{2}$ tel que

$$\mathcal{H}\bigg(U(t), U(\tau)\bigg) < \frac{\sigma}{4}, \ \ \forall t \in I_{\tau,\delta}; \tag{4.20}$$

$$\mathcal{H}\bigg(\dot{U}(t), \dot{U}(\tau)\bigg) < \frac{\sigma}{4}, \ \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \tag{4.21}$$

et puisque $(U_n)_n$ et $(\dot{U}_n)_n$ convergent uniformément vers U et $\dot{U}$ respectivement, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathcal{H}\bigg(U_n(t), U(t)\bigg) < \frac{\sigma}{4}, \ \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \ \forall n \geq m_0; \tag{4.22}$$

$$\mathcal{H}\bigg(\dot{U}_n(t), \dot{U}(t)\bigg) < \frac{\sigma}{4}, \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \ \forall n \geq m_0. \tag{4.23}$$

En combinant (4.20) et (4.22), puis (4.21) et (4.23) respectivement, on obtient

$$\mathcal{H}\bigg(U_n(t), U(\tau)\bigg) < \frac{\sigma}{2}, \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \ \forall n \geq m_0; \tag{4.24}$$

$$\mathcal{H}\bigg(\dot{U}_n(t), \dot{U}(\tau)\bigg) < \frac{\sigma}{2}, \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \ \forall n \geq m_0. \tag{4.25}$$

Fixons $n_0 \geq m_0$ tel que $\frac{1}{n_0} < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\}$. Dans la suite on va montrer que

$$\ddot{U}_n(t) \in \overline{V}\bigg(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\bigg), \ \forall t \in I_{\tau,\delta}, \ \forall n \geq n_0.$$

Soit $n \geq n_0$ et soit $t \in I_{\tau,\delta}$.

L'application F_n vérifie (a_2), à savoir

$$e\bigg(gph(F_n), gph(\Phi)\bigg) = \sup_{(t,A,B,C) \in gph(F_n)} d\bigg((t, A, B, C), gph(\Phi)\bigg) \ < \frac{1}{n},$$

avec

$$gph(F_n) = \{(t, A, B, F_n(t, A, B));\ (t, A, B) \in [0, 1] \times E \times E\},$$

$$gph(\Phi) = \{(t, A, B, C);\ (t, A, B) \in [0, 1] \times E \times E, C \in \Phi(t, A, B)\}.$$

Puisque le point $\big(t, U_n(t), \dot{U}_n(t), \ddot{U}_n(t)\big) \in gph(F_n)$ (car $\ddot{U}_n(t) = F_n(t, U_n(t), \dot{U}_n(t))$, alors

$$d\bigg(\big(t, U_n(t), \dot{U}_n(t), \ddot{U}_n(t)\big), gph(\Phi)\bigg) < \frac{1}{n},$$

par la définition de la borne inférieure, on conclut qu'il existe un point $(t', A', B', C') \in gph(\Phi)$ tel que $d\bigg((t, U_n(t), \dot{U}_n(t), \ddot{U}_n(t)), (t', A', B', C')\bigg) < \frac{1}{n}$, c'est à dire, il existe un point $(t', A', B') \in [0, 1] \times E \times E$ et $C' \in \Phi(t', A', B')$ tels que

$$|t' - t| < \frac{1}{n},\ \mathcal{H}\big(A', U_n(t)\big) < \frac{1}{n},\ \mathcal{H}\big(B', \dot{U}_n(t)\big) < \frac{1}{n},\ \mathcal{H}\big(C', \ddot{U}_n(t)\big) < \frac{1}{n}. \tag{4.26}$$

On peut appliquer (4.19) tant que $t' \in I_{\tau,\sigma}$, $A' \in \overline{B}_E\big(U(\tau), \sigma\big)$, et $B' \in \overline{B}_E\big(\dot{U}(\tau), \sigma\big)$. En effet, par la relation (4.26) et puisque $t \in I_{\tau,\delta}$,

$$|t' - \tau| \le |t' - t| + |t - \tau| < \frac{1}{n} + \delta \le \frac{1}{n_0} + \delta < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\} + \delta \le \delta + \delta = 2\delta < 2\frac{\sigma}{2} = \sigma,$$

et par les relations (4.26) et (4.24)

$$\mathcal{H}\big(A', U(\tau)\big) \le \mathcal{H}\big(A', U_n(t)\big) + \mathcal{H}\big(U_n(t), U(\tau)\big) < \frac{1}{n} + \frac{\sigma}{2} \le \frac{1}{n_0} + \frac{\sigma}{2} < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{8}\} + \frac{\sigma}{2} \le \delta + \frac{\sigma}{2} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

De même, par les relations (4.26) et (4.25)

$$\mathcal{H}\left(B', \dot{U}(\tau)\right) \le \mathcal{H}\left(B', \dot{U}_n(t)\right) + \mathcal{H}\left(\dot{U}_n(t), \dot{U}(\tau)\right) < \frac{1}{n} + \frac{\sigma}{2} < \sigma.$$

Alors, par(4.19)

$$e\bigg(\Phi\big(t', A', B'\big), \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\bigg) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{4.27}$$

En utilisant (4.26) et (4.27) et le fait que $C' \in \Phi\big(t', A', B'\big)$, on obtient

$$\begin{aligned} d\bigg(\ddot{U}_n(t), \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\bigg) &\le \mathcal{H}\big(\ddot{U}_n(t), C'\big) + d\bigg(C', \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\bigg) \\ &\le \mathcal{H}\big(\ddot{U}_n(t), C'\big) + e\bigg(\Phi\big(t', A', B'\big), \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\bigg) \\ &< \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{8} \le \frac{1}{n_0} + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\ddot{U}_n(t) \in V\Big(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\Big), \quad \forall t \in I_{\tau,\delta},\ \forall n \geq n_0. \tag{4.28}$$

Par la relation (4.11) et les propriétés (P12), (P6) de la différence de Hukuhara, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)\left(\dot{U}_n(\tau-\delta) \ominus \dot{U}_n(\tau+\delta)\right)}{2\delta} &= \frac{(-1)}{2\delta}\bigg(\Big(\dot{U}_n(0) \ominus (-1)\int_0^{\tau-\delta} \ddot{U}_n(s)ds\Big) \ominus \Big(\dot{U}_n(0) \ominus (-1)\int_0^{\tau+\delta} \ddot{U}_n(s)ds\Big)\bigg) \\
&= \frac{(-1)}{2\delta}\Big((-1)\int_0^{\tau+\delta} \ddot{U}_n(s)ds \ominus (-1)\int_0^{\tau-\delta} \ddot{U}_n(s)\, ds\Big) \\
&= \frac{1}{2\delta}\Big(\int_0^{\tau+\delta} \ddot{U}_n(s)\, ds \ominus \int_0^{\tau-\delta} \ddot{U}_n(s)\, ds\Big) \\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \ddot{U}_n(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \ddot{U}_n(s)\, ds,
\end{aligned}$$

donc, pour tout $A \in \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)$ et grâce à (4.28)

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{(-1)\left(\dot{U}_n(\tau-\delta) \ominus \dot{U}_n(\tau+\delta)\right)}{2\delta}, \Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big)\right) &\leq \mathcal{H}\left(\frac{(-1)\left(\dot{U}_n(\tau-\delta) \ominus \dot{U}_n(\tau+\delta)\right)}{2\delta}, A\right) \\
&= \mathcal{H}\left(\frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \ddot{U}_n(s)\, ds, \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} A\, ds\right) \\
&\leq \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \mathcal{H}(\ddot{U}_n(s), A)\, ds \\
&< \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} \frac{\varepsilon}{4}\, ds = \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{(-1)\left(\dot{U}_n(\tau-\delta) \ominus \dot{U}_n(\tau+\delta)\right)}{2\delta} \in V\Big(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\Big), \quad \forall n \geq n_0,$$

i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)\left(\dot{U}_n(\tau-\delta) \ominus \dot{U}_n(\tau+\delta)\right)}{2\delta} = \frac{(-1)\left(\dot{U}(\tau-\delta) \ominus \dot{U}(\tau+\delta)\right)}{2\delta} \in \overline{V}\Big(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\Big). \tag{4.29}$$

D'autre part, $\delta < \rho_0$, d'où $I_{\tau,\delta} \subset I_{\tau,\rho_0}$, et donc par la relation (4.17) on obtient

$$W(t) \in \overline{B}_E\left(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4}\right), \quad \forall t \in I_{\tau,\delta} \cap J. \tag{4.30}$$

Maintenant, par (4.13) et les propriétés (P6), (P12) de la différence de Hukuhara,

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)\left(\dot{U}(\tau-\delta) \ominus \dot{U}(\tau+\delta)\right)}{2\delta} &= \frac{(-1)}{2\delta}\left(\left(\dot{U}(0) \ominus (-1)\int_0^{\tau-\delta} W(s)\,ds\right) \ominus \left(\dot{U}(0) \ominus (-1)\int_0^{\tau+\delta} W(s)\,ds\right)\right)\\
&= \frac{(-1)}{2\delta}\left((-1)\int_0^{\tau+\delta} W(s)\,ds \ominus (-1)\int_0^{\tau-\delta} W(s)\,ds\right)\\
&= \frac{1}{2\delta}\left(\int_0^{\tau+\delta} W(s)\,ds \ominus \int_0^{\tau-\delta} W(s)\,ds\right)\\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} W(s)\,ds\\
&= \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}} W(s)\,ds\\
&= w_1(\delta) + w_2(\delta),
\end{aligned}$$

avec,

$$w_1(\delta) = \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\,ds, \quad et \quad w_2(\delta) = \frac{1}{2\delta}\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} W(s)\,ds.$$

Nous avons,

$$w_1(\delta) \;=\; \frac{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}{2\delta}\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\,ds$$

Posons $\eta(\delta) = \frac{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}{2\delta}$. Alors,

$$w_1(\delta) = \eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\,ds,$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\big(w_1(\delta),\eta(\delta)W(\tau)\big) &= \mathcal{H}\left(\eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\;ds, \eta(\delta)W(\tau)\right)\\
&= \eta(\delta)\mathcal{H}\left(\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\;ds, W(\tau)\right)\\
&= \eta(\delta)\mathcal{H}\left(\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\;ds, \frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(\tau)\;ds\right)\\
&= \eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\mathcal{H}\left(\int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(s)\;ds, \int_{I_{\tau,\delta}\cap J} W(\tau)\;ds\right)\\
&\leq \eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}\mathcal{H}(W(s),W(\tau))\;ds,
\end{aligned}$$

et grâce à la relation (4.30)

$$\eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}\mathcal{H}(W(s),W(\tau))ds \leq \eta(\delta)\frac{1}{\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)}\int_{I_{\tau,\delta}\cap J}\frac{\varepsilon}{4}ds = \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4},$$

on conclut que

$$w_1(\delta)\in\overline{B}_E\left(\eta(\delta)W(\tau),\eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Mais $\overline{B}_E\left(\eta(\delta)W(\tau),\eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\right)\subset\overline{B}_E\left(W(\tau),\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$. En effet, soit $A\in\overline{B}_E\left(\eta(\delta)W(\tau),\eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}\right)$, alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(A,W(\tau)) &\leq \mathcal{H}(A,\eta(\delta)W(\tau))+\mathcal{H}(\eta(\delta)W(\tau),W(\tau)) &(4.31)\\
&\leq \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4}+|1-\eta(\delta)|\;|||W(\tau)|||. &(4.32)
\end{aligned}$$

Puisque $2\delta=\mu(I_{\tau,\delta})=\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)+\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J)$, alors

$$2\delta-\mu(I_{\tau,\delta}\cap J)=\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J),$$

c'est à dire,

$$1-\eta(\delta)=\frac{\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J)}{2\delta},$$

donc, $1-\eta(\delta)\geq 0$, i.e. $\eta(\delta)\leq 1$.

D'autre part, d'après la relation (4.18) tant que $\delta<\rho_0$, on obtient

$$1-\eta(\delta)=\frac{\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J)}{2\delta}<\frac{\alpha}{2M},$$

on revient à (4.32)

$$\mathcal{H}(A, W(\tau)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \big(1-\eta(\delta)\big)\ M \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

On conclut que

$$w_1(\delta) \in \overline{B}_E\bigg(W(\tau), \eta(\delta)\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\alpha}{2}\bigg). \tag{4.33}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{H}(w_2(\delta), \{0_{\mathbb{R}^d}\}) & = & |||w_2(\delta)||| \\
& = & \left|\left|\left|\dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} W(s)\ ds\right|\right|\right| \\
& = & \dfrac{1}{2\delta}\left|\left|\left|\displaystyle\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} W(s)\ ds\right|\right|\right| \\
& \leq & \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} |||W(s)|||\ ds \\
& \leq & \dfrac{1}{2\delta}\displaystyle\int_{I_{\tau,\delta}\setminus J} M\ ds \\
& = & M\dfrac{\mu(I_{\tau,\delta}\setminus J)}{2\delta},
\end{array}$$

d'après (4.18), la dernière quantité est inférieure à $\frac{\alpha}{2}$,

donc,

$$w_2(\delta) \in \overline{B}_E\bigg(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, \frac{\alpha}{2}\bigg), \tag{4.34}$$

d'où, en utilisant (4.33) et (4.34),

$$\frac{(-1)\left(\dot{U}(\tau-\delta)\ominus\dot{U}(\tau+\delta)\right)}{2\delta} \in \overline{B}_E\bigg(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\alpha}{2}\bigg) + \overline{B}_E\bigg(\{0_{\mathbb{R}^d}\}, \frac{\alpha}{2}\bigg) \subset \overline{B}_E\bigg(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4}+\alpha\bigg). \tag{4.35}$$

Par (4.29) et (4.35)

$$\frac{(-1)\left(\dot{U}(\tau-\delta)\ominus\dot{U}(\tau+\delta)\right)}{2\delta} \in \overline{B}_E\bigg(W(\tau), \frac{\varepsilon}{4}+\alpha\bigg) \cap \overline{V}\bigg(\Phi\big(\tau, U(\tau), \dot{U}(\tau)\big), \frac{\varepsilon}{4}\bigg),$$

ce qui est une contradiction avec (4.16). Par conséquent, la relation (4.15) est vraie. On conclut que U est une solution de l'inclusion différentielle multivoque $(\mathcal{I})$. La démonstration est alors achevée. $\blacksquare$

Conclusion et perspectives

Les EDMs sont des outils pour la modélisation des phénomènes sous présence d'incertitude. Mais de plus, elles représentent une sorte de généralisation des EDOs. Cet avantage traduit l'intérêt continu à ce type de problèmes, sans oublier les défis mathématiques abstraits qu'ils fournissent. Beaucoup de travail dans ce domaine est déja fait, cependant beaucoup d'autres questions se posent ouvrant la porte à d'autres investissements.

Les travaux présentés dans cette thèse conduisent naturellement vers nombreuses perspectives. la première, en l'occurrence découle logiquement du fait que nous n'avons traité que les EDMs du second ordre, il sera donc intéressant de généraliser, si c'est possible, nos résultats à des EDMs d'ordre supérieur. La deuxième perspective, qui semble être une continuité logique de ce travail, est de s'approfondir dans d'autres types d'IDMs, puisque dans ce travail on s'est limité à entamer juste les IDMs avec un second membre semi-continu supérieureument.

Une contribution dans une autre piste paraît aussi possible, c'est l'étude des équations différentielles avec les dérivées partielles de Hukuhara.

Bibliographie

[1] H. Attouch, A. Cabot and P. Redont, *Schoc solutions via epigraphical regularizatios of a second order in time differential inclusion*, Preprint Université Montpellier II (2000-2001).

[2] R.J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. 12 (1965) 1-12.

[3] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre*, Thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine, Juin 2003.

[4] D. Azzam-Laouir, W. Boukrouk, *A delay second order set-valued differential equation with Hukuhara derivatives*, Numerical Functional Analysis and Optimization. (2015).

[5] D. Azzam-Laouir, W. Boukrouk, *Second order set-valued differential equations with boundary conditions*, Journal of fixed point theory and applications (To appear).

[6] D. Azzam-Laouir, W. Boukrouk, *A second order differential inclusion in a semilinear metric space* (Submitted).

[7] D. Azzam-Laouir, I. Boutana and A. Makhlouf, *Application of Pettis integration to delay second order differential inclusions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2012, No. 88, 1-15.

[8] D. Azzam-Laouir, C. Castaing and L. Thibault, *Three point boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control and Cybernet. 31 (2002), 659-693.

[9] N. Bourbaki, *Topologie générale* (Livre III, chap. 9).

[10] L.P.A.J. Brandao, F. S. de Blasi, and F. Iervolino, *Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions*," Boll. Unione Mat. Ital., 4, 534-538 (1970).

[11] C. Castaing, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre*, Sém. Anal. Convexe, Montpellier (1988), exposé No 5.

[12] C. Castaing, A. Salvadori and L. Thibault, *Functional evolution equations governed by nonconvex sweeping process*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Yokohama Publishers 2(2) (2001), 217-241.

[13] C. Castaing, M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Mth., 580 Springer-Verlag, Berlin (1977).

[14] A. Cellina, *Multivalued differential equations and ordinary differential equations*, Siam J. Appl. Math. 18(1970), 533-538.

[15] C. Dazé, *Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'Ekeland*, Mémoire. Maitre des sciences (M. Sc.) en mathématiques, 2010. Université de Montréal.

[16] F.S. De Blasi, F. Iervolino, *Equazioni differenziali con soluzioni a valore compatto convesso*, Boll. Unione Mat. Ital., 2, No. 4-5, 491-501 (1969).

[17] F.S. De Blasi, F. Iervolino, *Euler method for differential equations with set-valued solutions*, Boll. Unione Mat. Ital., 4, No. 4, 941-949 (1971).

[18] F.S. De Blasi, V. Lakshmikantham, and T. Gnana Bhaskar, *An existence theorem for set differential inclusions in a semilinear metric space*, Control and Cybernet. Vol. 36 (2007), 571-582.

[19] F.S. De Blasi, and A. Lazota, *Daniell's method in the theory of Aumann-Hukuhara integral of set-valued functions*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 8 (45), (1968), 252-256.

[20] F.S. De Blasi, and G. Pianigiani, (2004a) *Approximate selections in a-convexe metric spaces and topological degree*, Topo. Meth. Nonl. Anal. 24, 347-375.

[21] K. Deimling, *Non linear Functional Analysis*, Springer Verlag, 1985.

[22] R. Descombes, *Cours d'analyse*, Librairie Vuibert, Paris, (1962).

[23] J. Dugundji, *An extension of Tietz's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367.

[24] J. Dugundji, *Topologiy*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[25] P.W. Elo, Y.N. Raffoul and C.C. Tisdell, *Existence, uniquness and constructive results for delay differential equations*, Electronic Journal of Differential equations 2005 (121) (2005), 1-11.

[26] O.I. Gaidukevich and V. K. Maslyuchenko, *New generalizations of the Scorza-Dragoni Theorem*, Ukranian Mathematical Journal, Vol. 52, No. 7, (2000) 1010-1017.

[27] C.P. Gupta, *Solvability of three-point nonlinear boundary value problem for a second order differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 168 (1992), 540-551.

[28] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, London Sydney (1967).

[29] C.D. Horvath, *Contractibility and generalized convexity*, J. math. Ana. Appl. 156, n°2 (1991), p.p. 341-357.

[30] C.D. Horvath, *Extentsion and selection theorems in topological spaces with a generalied convexity structure*, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, Vol. II, n°2 (1993), p.p. 253-269.

[31] M. Hukuhara, *Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac. 10 (1967), 205-223.

[32] M. Hukuhara, *Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac. 10 (1967), 43-66.

[33] A.G. Ibrahim and A.M.M. Gomaa, *Existence theorems for functional multivalued three point boundary value problem of second order*, J. Egypt. Math. Soc. 8(2)(2000),155-168.

[34] V. Lakshmikantham, T.GnanaBhaskar and J.Vasundhara Devi, *Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces*, Cambridge Scientific Publishers, (2006).

[35] J.V. Llinares, *Existence of maximal elements in a binary relation relaxing the convexity condition*, WP-AD 95-10. University of Alicante, Spain.

[36] J.V. Llinares, *Abstract convexity, some relations and applications*, Optimization, 51(6)(2002), 797-818.

[37] S. Lojasiewiez, *An introduction to the theory of real functions*, A Willey-Intersection Publication, John Willey and Sons, Ltd., Chichester, 1989. em J. Comput. Appl. Math., 1113 : 51–64, 2000.

[38] S.A. Marano, *Existence theorems for Multivalued Boundary Value Problem*, Bull. Australian Math. Soc. 45 (1992), 249-260.

[39] S.A. Marano, *A Remark on a second order Three-point Boundary Value Problem*, J. Math. Anal. Apll. 183 (1994), 518-522.

[40] M.T. Malinowski, *Interval differential equations with a second type Hukuhara derivative*, Applied Mathematics Letters 24 (2011) 2118-2123.

[41] M.T. Malinowski, *Second type Hukuhara differentiable solutions to the delay set-valued differential equations*, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 9427-9437.

[42] M.T. Malinowski, *Interval Cauchy problem with a second type Hukuhara derivative*, Information Sciences 213 (2012), 94-105.

[43] M.T. Malinowski, *On set differential equations in Banach spaces - a second type Hukuhara differentiability approach*, Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 289-305.

[44] M.T. Malinowski, *On a new set-valued stochastic integral with respect to semi-martingales and its applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 408 (2013), 669-680.

[45] M. Martelli and A. Vignoli, *On differentiability of multi-valued maps*, Boll. Unione Mat. Ital., 4, No. 10, 701-712 (1974).

[46] R.E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[47] E. Pap, *Handbook of Measure theory* : In two volumes, volume 2, 2002 Elsevier Science B. V.

[48] B. Piatek, *On the continuity of the integrable multifunctions*, Opuscula Mathematica.,29. No. 1. 2009, 81-88.

[49] M. Piszczek, *On multivalued cosine families*, J. Appl. Anal.13 (2007), 57-76.

[50] M. Piszczek, *On a multivalued second order differential problem with Hukuhara Derivative*, em J. Comput. Appl. Math.,(2008), 151-161.

[51] V.A. Plotnikov, A. V. Tumburkaki, *Integro-differentrial inclusions with Hukuhara derivative*, Nonlinear Oscillations, Vol 8, No. 1, (2005) 78-86.

[52] H. Radström, *An embeldding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc.,3 (1952), 165-169.

[53] C. Severini, *Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett., 657-667, 1898.

[54] S. Sivaji Ganesh, *Lecture notes on Ordinary Differential Equations*, Annual Foundation School, IIT Kanpur, Dec. 3-28, 2007. Dept. of Mathematics, IIT Bombay, Mumbai-76.

[55] N. V. Skripnik, *Averaging of impulsive differential inclusions with Hukuhara derivative*, Nonlinear Oscillations, Vol. 10, No. 3, (2007) 422-438.

[56] A. Smajdor, *On a multivalued differential problem*, Internat. J. Bifur Chaos Appl Sci. Engrg., 13 (2003) 1877-1882.

[57] L. Stefanini, B. Bede, *Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 1311-1328.

[58] A. Tolstonogov, *Differential inclusions in a Banach space*, Kluwer Academic Publishers, Dordrechet (2000).

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\ddot{U}(t)=F(t,U(t),\dot{U}(t)), & t\in[0,1],\\ U(0)=\{0_{\mathbb{R}^d}\}; \quad U(\theta)=U(1), & \end{cases}\qquad (\mathcal{I})\begin{cases}\ddot{U}(t)\in\phi(t,U(t),\dot{U}(t)), & t\in[0,1],\\ U(0)=\{0_{\mathbb{R}^d}\}; \quad U(\theta)=U(1), & \end{cases}$$

RESUME

Dans cette thèse, nous considérons une équation différentielle multivoque du second ordre avec trois conditions aux limites de la forme $(\mathcal{P})$, où $F:[0,1]\times E\times E\to E$ est une application, $E=cc(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des parties non vides convexes compactes de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, et les dérivées considérées sont celles de Hukuhara.

Nous démontrons l'existence et l'unicité de solution pour l'équation $(\mathcal{P})$ sous différentes conditions sur l'application F.

Nous terminons par une inclusion différentielle multivoque du second ordre avec les dérivées de Hukuhara de la forme $(\mathcal{I})$, avec $\phi:[0,1]\times E\times E\to 2^E$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides $K-$ convexes et compactes.

ABSTRACT

In this thesis, we consider a second order multi-valued differential equation with three boundary conditions of the form $(\mathcal{P})$, where $F:[0,1]\times E\times E\to E$ is a mapping, $E=cc(\mathbb{R}^d)$ is the space of nonempty convex compact subsets of the Euclidian space $\mathbb{R}^d$, and the considered derivatives are in the sense of Hukuhara.

We prove the existence and uniqueness of solutions for the equation $(\mathcal{P})$ under different assumptions on the mapping F.

We finish by a second order multi-valued differential inclusion with Hukuhara derivatives of the form $(\mathcal{I})$, with $\phi:[0,1]\times E\times E\to 2^E$ an upper semi-continuous set-valued mapping with nonempty $K-$convex and compact values.

ملخص

في هذه الأطروحة، نعتبر معادلة تفاضلية متعددة القيم (مجموعاتية) من الدرجة الثانية ذات ثلاثة شروط حدية من الشكل$(\mathcal{P})$، حيث $F:[0,1]\times E\times E\to E$ تابع، $E=cc(\mathbb{R}^d)$ هو الفضاء المكون من الأجزاء غير الخالية المحذبة المتراصة من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^d$ ، و المشتقات المعتبرة هي مشتقات يوكوهارا.

نبرهن وجود و وحدانية الحلول للمعادلة$(\mathcal{P})$ تحت شروط مختلفة للتابع F.

و في الختام، نعتبر احتوائية تفاضلية متعددة القيم (مجموعاتية) من الدرجة الثانية بمشتقات يوكوهارا من الشكل $(\mathcal{I})$،

مع $\phi:[0,1]\times E\times E\to 2^E$ تابع متعدد القيم نصف مستمر من الأعلى ذو قيم غير خالية $K-$محذبة ومتراصة.