

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Mécanique

N° :...../2023

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE: Sciences et Technologies

FILIERE: Génie Mécanique

SPECIALITE: Construction Mécanique

Thème

Etude de l'effet du rayon de raccordement sur la concentration de contraintes à l'épaulement d'un arbre.

Présenté Par : KAHLI Zakaria

Encadré Par : BOUNIB Hamou

KHERIREB Fawzi

Date de soutenance: 03/07/2023

Jury de Soutenance

Président : S. BOUNNECHE

Grade MAA

Univ. MSB Jijel

Encadreur : H. BOUNIB

Grade MCB

Univ. MSB Jijel

Examineur : T. SEDRAT

Grade MAA

Univ. MSB Jijel

Promotion : 2022 /2023

Remerciements

Nous remercions avant tout Dieu le tout puissant de nous avoir guidé et illuminer notre chemin afin de dépasser tous les obstacles que nous avons rencontrés. Sa bénédiction nous a beaucoup aidés pour mener à bien ce travail.

Nos plus sincères remerciements et reconnaissances vont spécialement à notre directeur de mémoire fin d'étude Mr. Bounib hamou pour la qualité de son encadrement, sa confiance, ses encouragements, ses orientations et son suivi malgré ses occupations.

Nous tenons à remercier également l'ensemble du jury qui nous ont honorés avec leur présence dans cette soutenance et d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer ce travail.

Nous exprimons notre gratitude à tous les enseignants du département de génie mécanique pour leur dévouement et leur assistance tout au long de notre cursus universitaire.

Dédicaces

A mes très chers parents,

*Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour
et nuit pour mon éducation*

*Ce travail est le fruit des sacrifices que vous
avez consentis pour ma formation,*

Toute ma famille,

Mes frères et ma sœur,

Mon binôme ; FAWZI,

Mes amis, tous mes collègues.

ZAKI

Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail à,
Mes chers parents pour leurs encouragements
tout au long de mon parcours, leur soutien et
leurs sacrifices,
Toute ma famille,
Mes frères et,
Mon binôme : ZAKI,
Mes amis et tous mes collègues.*

FAWZI

Tableau des matières

Introduction générale	1
Chapitre I Généralités sur les arbres	
I.1. Introduction	2
I.2. Définition de l'arbre	2
I.3. Formes de l'arbre	2
I.4. Matériaux de l'arbre	3
I.5. Montage des éléments de machines sur l'arbre.....	3
I.6. Sollicitations appliquées à l'arbre	4
I.6.1. Sollicitation en torsion.....	4
I.6.2. Sollicitations axiales	5
I.6.3. Sollicitations de flexion ou radiales.....	5
I.6.4. Sollicitations dynamiques sous l'effet de balourd ou variation du couple de torsion	5
I.7. Conclusion.....	6
Chapitre II Causes de défaillance d'un arbre	
II.1. Introduction.....	7
II.2. Défaillance par rupture en fatigue.....	7
II.3. Défaillance par détérioration des surfaces : Phénomène d'usure	9
II.3.1. Usure par adhésion ou grippage	9
II.3.2. Usure par abrasion.....	9
II.3.3. Usure corrosive	9
II.4. Effet de la concentration de contraintes sur la fatigue	9
II.5. Effet d'entaille	9
II.5.1. Relation entre le facteur de concentration de contrainte K_t et le facteur de concentration de contrainte en fatigue K_f	10
II.6. Causes des fissures dans les arbres des rotors	11
II.7. Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations.....	12
II.7.1. Fissure transversale	12
II.7.2. Fissure longitudinale	12
II.7.3. Fissure inclinée.....	12
II.8. Conclusion	13

Chapitre III Concentration de contraintes à l'épaulement d'un arbre

III.1. Introduction	14
III.2. Historique	15
III.3. Facteur de concentration de contraintes	15
III.4. Contrainte nominale	15
III.5. Méthodes d'évaluation du facteur de concentration de contraintes k_t	16
III.6. Moyens de diminuer les effets des concentrations de contraintes.....	17
III.7. Conclusion	18

Chapitre IV Mise en évidence de la concentration de contraintes par élément finis et comparaison de K_t avec abaques

IV.1. Introduction	19
IV.2. Choix de solide pour l'analyse par éléments finis.....	19
IV.3. Maillage du solide	20
IV.4. Calcul du facteur de concentration de contraintes pour les différentes sollicitations et comparaison avec les abaques	21
IV.4.1. Traction.....	21
IV.4.2. Flexion	25
IV.4.3. Torsion.....	29
IV.5. Conclusion.....	34

Chapitre V Application

V.1. Problématique	35
V.2. Travail demandé	35
V.3. RÉOLUTION	36
V.3.1. Dessin des diagrammes.....	36
V.3.2. Détermination des contraintes.....	43
V.3.3. Détermination des facteurs de sécurité à la fatigue aux points E, B et C.	46
V.4. Conclusion	49
Conclusion générale	50

Liste des figures

Figure I. 1: Formes d'arbre	2
Figure I. 2: Meilleure technique de montage des organes mécaniques sur l'arbre	4
Figure I. 3: Arbre soumis aux couples de torsion.	5
Figure II. 1 : Fatigue : sollicitation cyclique uni axiale.....	8
Figure II. 2: Courbe de Wöhler (courbe S-N).	8
Figure II. 3: Essai de fatigue en charge alternée : éprouvettes entaillées -versus non entaillées	10
Figure II. 4: Courbes de sensibilité à l'entaille	11
Figure II. 5: Fissure transversale.	12
Figure II. 6: Fissure longitudinale	12
Figure II. 7: Fissure inclinée	13
Figure III. 1: Lignes de forces et zone de concentration de contraintes.....	14
Figure III. 2 : Répartition de contraintes sans et avec variation de section pour un barreau parfaitement cylindrique sous différentes sollicitations.....	14
Figure III. 3.a: Arbre en traction	15
Figure III. 3.b: Arbre en torsion	16
Figure III. 4: Moyens de diminuer les effets des concentrations de contraintes	17
Figure IV. 1: Arbre épaulé à deux tronçons	19
Figure IV. 2: Solide maillé avec des éléments tétraédriques	20
Figure IV. 3: Raffinage de la zone de raccordement.....	20
Figure IV. 4: Maillage de l'arbre avec épaulement en traction $r=0.5$ mm	21
Figure IV. 5.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en traction ($r=0.5$ mm)	23
Figure IV. 5.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en traction ($r=0.5$ mm)	23
Figure IV. 6.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en traction ($r=2$ mm).....	24
Figure IV. 6.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en traction ($r=2$ mm)	24
Figure IV. 7: Abaque de facteur de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en traction.	25
Figure IV. 8: Maillage de l'arbre avec épaulement en flexion $r=0.5$ mm.....	26
Figure IV. 9.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=0.5$ mm)	27
Figure IV. 9b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=0.5$ mm).....	27
Figure IV. 10.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=2$ mm)	28

Figure IV. 10.b: Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=2$ mm).....	28
Figure IV. 11: Abaque de facteur de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en flexion.....	29
Figure IV. 12: Maillage de l'arbre avec épaulement en torsion $r=0.5$ mm.....	30
Figure IV. 13.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en torsion ($r=0.5$ mm)...	31
Figure IV. 13.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en torsion($r=0.5$ mm)	32
Figure IV. 14.a: Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en torsion ($r=2$ mm).....	32
Figure IV. 14.b: Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en torsion($r=2$ mm)	33
Figure IV. 15: Abaque de facteur de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en torsion.....	33
Figure V. 1: Arbre intermédiaire avec engrenages.	35
Figure V. 2: l'arbre dans les plans xy.....	36
Figure V. 3: l'arbre dans les plans xz	37
Figure V. 4: Diagrammes d'effort tranchant, de moments de flexion del'arbre dans les plans xy et xz, effort axial et le moment de torsion sur la longueur de l'arbre.	42
Figure V. 5: Diagramme de GOODMAN	47
Figure V. 6: Réduction de la limite d'endurance en raison de la finition de surface - pièces en acier ; c'est-à-dire le facteur de surface par rapport à la résistance à la traction différents états de surface.....	49

Liste des tableaux

Tableau IV. 1: Facteur de concentration de contraintes cas de traction (E.F+Abaque).....	22
Tableau IV. 2: Facteur de concentration de contraintes cas de flexion (E.F+Abaque).....	26
Tableau IV. 3: Facteur de concentration de contraintes cas de torsion (E.F+Abaque).....	31
Tableau V. 1: Facteurs de résistance à la fatigue généralisés pour les matériaux ductiles (courbes S–N)	48

Liste des symboles

K_t : Facteur de concentration de contrainte

K_f : Facteur de concentration de contrainte en fatigue

σ_{nom} : Contrainte nominale

σ_{max} : Contrainte maximale

M_f : Moment de flexion

M_t : Moment de torsion

T : Effort de tranchant

N : Effort axial

σ_a : Contrainte alternée

σ_m : Contrainte moyen

S_n : Limite d'endurance de la pièce non entaillée

S'_n : Limite d'endurance de la pièce entaillée

C_L : Facteur de charge

C_G : Facteur de gradient

C_S : Facteur de surface

C_T : Facteur de température

C_R : Facteur de fiabilité

F_s : Facteurs de sécurité

Introduction générale

L'effet d'entaille sous ses différentes formes : métallurgiques, mécaniques ou de fonctionnement, est cause principale de concentration de contraintes.

Les concentrations de contraintes sont sources de défaillance de pièces en matériaux ductiles travaillant à la fatigue ou de pièces en matériaux fragiles.

Les arbres sont des pièces mécaniques qui souffrent de l'effet d'entaille. Ces pièces sont essentielles, dans la construction des machines, en particulier des machines tournantes. Pour cette raison, leur calcul à la fatigue, en tenant compte des concentrations des contraintes, est une étape importante dans leur conception.

Dans le présent travail on s'intéresse à la concentration de contraintes au congé (raccordement) d'un arbre. Un arbre est une pièce rotative, généralement de section circulaire, qui supporte des éléments qui permettent la transmission de mouvement ou de puissance d'une partie d'une machine à une autre.

Selon le rôle qui lui est assigné, l'arbre est soumis à des contraintes de flexion, de torsion ou à un chargement complexe de charges de torsion, de flexion et axiales.

Notre contribution dans ce travail est l'étude de l'effet du rayon de congé (raccordement) sur la concentration de contraintes à l'épaulement d'un arbre et détermination des facteurs de sécurité d'un arbre, de transmission de puissance, travaillant à la fatigue.

Ce mémoire est décomposé en cinq chapitres, le premier chapitre se rapporte à l'étude des types d'arbres (généralités sur les arbres).

Au deuxième chapitre, nous allons présenter les causes de défaillance d'un arbre et pour le troisième chapitre nous allons parler du phénomène de concentration de contraintes.

Au quatrième chapitre mise en évidence de la concentration de contraintes par éléments finis et comparaison avec abaques de Peterson. Le dernier chapitre est la détermination des coefficients de sécurité d'un arbre travaillant à la fatigue.

Chapitre I

Généralités sur les arbres

I.1. Introduction

Les arbres sont des éléments de transmission de puissance, très importants dans la construction des machines. Pour cela, le calcul des arbres est une étape primordiale dans la conception d'une machine.

Ce chapitre est une introduction à l'étude des arbres. Il couvre les arbres, leurs formes, leurs matériaux, et les sollicitations auxquelles ils sont soumis.

I.2. Définition de l'arbre

Un arbre est une pièce de révolution d'une longueur grande en comparaison avec son diamètre, guidé par des paliers et sur lequel sont fixés des poulies, roues dentées, embrayage ou autres organes qui s'appellent rotors comme pompes centrifuges, turbines, ventilateur, compresseur, etc. La fonction principale de l'arbre est la transmission du mouvement de rotation et la puissance d'un moteur vers un autre organe de machine [1].

I.3. Formes de l'arbre

La grande majorité des arbres sont d'une forme cylindrique pour des raisons de facilité d'usinage et de symétrie. Exceptionnellement, on trouve des arbres tubulaires qui sont plus légers mais à résistance égale avec un arbre plein, on trouve aussi des arbres cannelés.

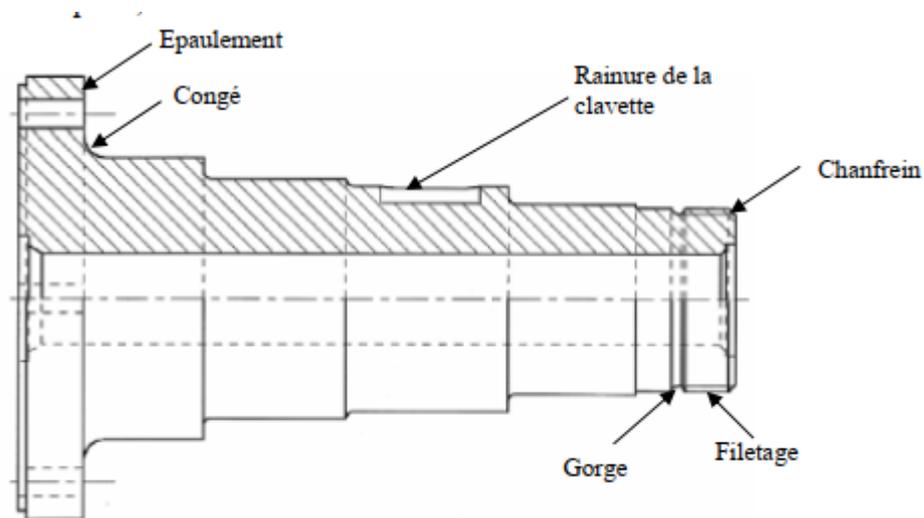


Figure I. 1: Formes d'arbre [1].

Sur l'arbre de la Figure I.1, nous avons une rainure qui permet d'accueillir une clavette, surface d'épaulement pour éliminer la translation d'un roulement par exemple, filetage pour fixer un écrou, gorge fabriquée en raison de l'usinage du filetage, congé pour diminuer la concentration de contrainte.

I.4. Matériaux de l'arbre

En général, les aciers ordinaires au carbone, laminés à chaud, entrent dans la fabrication des arbres de transmission et des arbres qui n'ont pas besoin de caractéristiques de résistance particulières [leur pourcentage de carbone varie de 0,15 à 0,30% (UNS G10150 à 10300)].

Les arbres de machine soumis à des charges variables et les arbres tournant à haut vitesse nécessitent des aciers de plus grande résistance, donc des aciers peuvent subir des traitements thermiques (généralement de 0,35% à 0,55% de carbone). Un concepteur verra à consulter les normes SAE ou toutes autres sources pertinentes afin d'obtenir des informations appropriées.

Il est important de noter que la rigidité (de flexion ou de torsion) d'un arbre est directement proportionnelle au produit du module d'élasticité du matériau (E ou G) et du moment d'inertie de la section (I ou J). Puisque les modules d'élasticité sont pratiquement les mêmes pour tous les aciers. L'augmentation de la rigidité d'un arbre en acier entraîne nécessairement l'augmentation de son diamètre. En d'autres termes, l'acier le plus résistant n'est pratiquement pas plus rigide que l'acier le moins résistant.

Pour remplir certaines fonctions particulières, les arbres peuvent être fabriqués en matériaux autres que les aciers ; alliage d'aluminium ou de titane, matières plastiques renforcées de fibres, alliages de cuivre [2].

I.5. Montage des éléments de machines sur l'arbre

L'objectif visé pendant la conception d'un arbre, quel que soit le critère choisi, consistera toujours à obtenir la construction la plus économique possible et la plus sûre. Quelles que soient les données qui ont servi de base au calcul (résistance, rigidité ou vitesse critique), le diamètre de l'arbre est grandement influencé par la distribution des moments fléchissant. Afin de réduire le plus possible ces moments, il est plus avantageux de monter les éléments de transmission le plus près possible des supports de l'arbre. La figure(I.2) illustre deux montages dont l'un est de beaucoup préférable à l'autre [2].

Citons que certains types d'éléments de transmission, les embrayages et les freins à tambour par exemple, ne produisent pas ou peu de flexion sur les arbres, ainsi leur localisation par rapport aux supports ne revêt donc pas importance primordiale.

Les arbres sont guidés par des paliers à coussinets ou des paliers à roulements. A noter que plusieurs éléments de transmission (embrayages, engrenages hélicoïdaux, engrenages coniques, etc.) ainsi que les dilatations thermiques, produisent des charges axiales qui peuvent, dans certains cas, être très importantes. Des butées doivent alors être prévues pour reprendre ces charges.

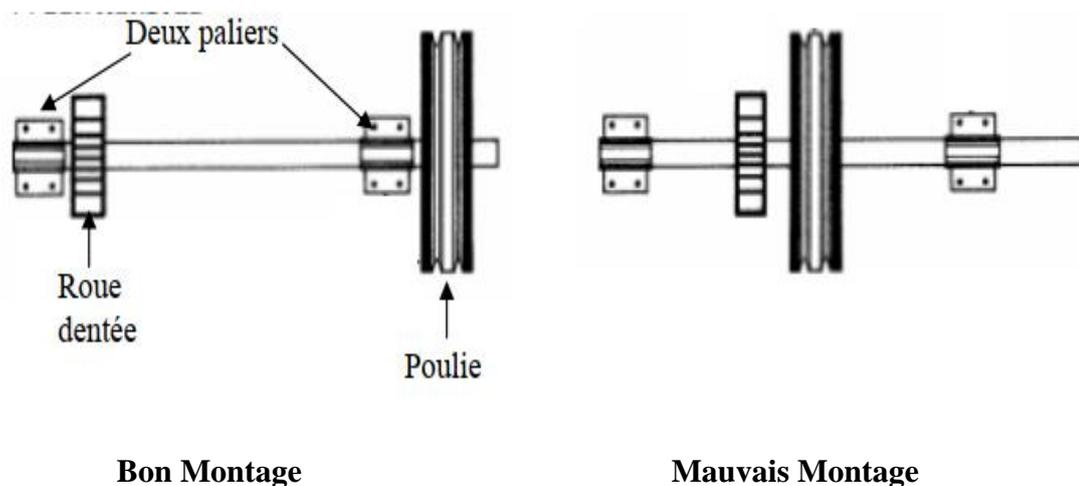


Figure I. 2: Meilleure technique de montage des organes mécaniques sur l'arbre [2]

I.6. Sollicitations appliquées à l'arbre

L'arbre reçoit divers efforts dus à aux tensions des courroies, efforts des engrenages, l'action de la pesanteur des éléments qui lui sont fixés, etc. Donc il peut être sollicité en traction-compression, flexion ou torsion [1].

I.6.1. Sollicitation en torsion

Un arbre porté par deux appuis A et B, pourtant une poulie motrice C entraînée par un moteur M et deux poulies réceptrice D1 et D2 (voir la Figure I.3). La poulie C est soumise au couple moteur C_m et les deux poulies D1 et D2 sont soumises aux couples résistants C_{r1} et C_{r2} . il en résulte une contrainte de torsion dans l'arbre. Au moment du démarrage et ralentissement du moteur, il se produit des accélérations et des décélérations angulaires provoquant une variation dans le moment de torsion.

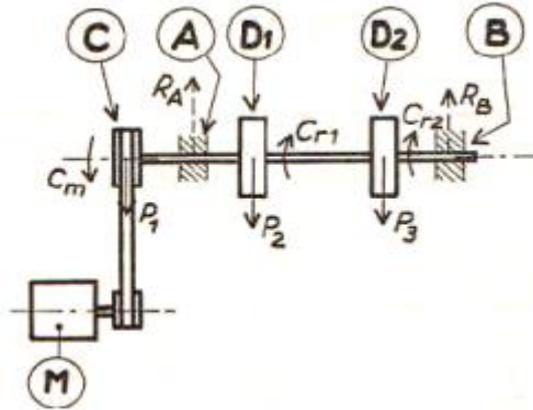


Figure I. 3: Arbre soumis aux couples de torsion [1].

I.6.2. Sollicitations axiales

Plusieurs éléments des transmissions (embrayages, engrenages coniques et hélicoïdaux, etc.), ainsi que les dilatations thermiques et d'autres organes mécaniques (ventilateur, pompes...), produisent des charges axiales qui peuvent être très importantes. Il résulte de ces charges axiales des contraintes de traction ou de compression dans l'arbre.

I.6.3. Sollicitations de flexion ou radiales

Les poids des poulies et les tensions des courroies des poulies (Figure I.3), ainsi les réactions aux paliers et toute force radiale, produisent des contraintes de flexion et de cisaillement dans l'arbre.

I.6.4. Sollicitations dynamiques sous l'effet de balourd ou variation du couple de torsion

A certaines vitesses dites vitesses critiques, les arbres deviennent dynamiquement instables, c'est à-dire que le centre de gravité quitte l'axe de rotation soit par un déséquilibre, soit par une flèche statique élevée. Cette instabilité conduit à un accroissement brusque de l'amplitude des vibrations et produit de fortes **vibrations latérales** pouvant amener à la rupture de l'arbre. C'est l'effet de balourd.

Autre type de vibration que subissent les arbres en rotation est la **variation du couple de torsion**, la rupture de l'arbre aura lieu quand la vitesse de rotation de l'arbre atteindra une autre vitesse critique de torsion.

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné un ensemble des rappels sur les arbres et les sollicitations auxquelles ils sont assujettis, en service. De même on a parlé aussi sur les matériaux qui entrent dans leurs fabrications. Ce chapitre a pour but de donner une vision globale sur un arbre, son importance et son état, en service, à prendre lors de sa conception.

Chapitre II

Causes de défaillance d'un arbre

II.1. Introduction

On peut dire qu'il y a défaillance lorsqu'une pièce ou un ensemble n'est plus apte à remplir la fonction qui lui a été assignée.

Si on considère le cas particulier des défaillances mécaniques, celles-ci peuvent être classées en plusieurs catégories. Les trois catégories fréquemment utilisées sont :

- Les défaillances dues aux déformations des pièces : Le déplacement global de certaines structures doit être inférieur à une certaine valeur pour permettre son bon fonctionnement. Lorsque l'on cherche à éviter ce genre de défaillance, on parle alors de dimensionnement en rigidité. Les défaillances en déformation peuvent également être dues à des déformations plastiques localisées ou à des phénomènes de fluage.
- Les défaillances par rupture des pièces. On parle alors de dimensionnement en résistance. On distingue deux principaux types de défaillance par rupture : la rupture due à un chargement monotone croissant ou à un choc, et la rupture due à un chargement répétitif, appelée rupture par fatigue. D'autres types de rupture peuvent également se produire tels que la rupture par fluage.
- les défaillances par détérioration des surfaces. Cette catégorie concerne différents phénomènes qui peuvent être regroupés car ils conduisent tous à une détérioration superficielle de la structure.

II.2. Défaillance par rupture en fatigue

La rupture en fatigue est un mode de défaillance qui se produit lorsqu'un composant est soumis à des chargements répétés. C'est ce mode de défaillance qui limite la durée de vie d'un composant si celui-ci a été « correctement » dimensionné et a été utilisé dans des conditions « normales ».

Pour illustrer la notion de fatigue, on considère un arbre soumis à une contrainte de traction sinusoïdale (Figure II.1). Cette figure précise la notion de contrainte moyenne et de contrainte alternée [3]

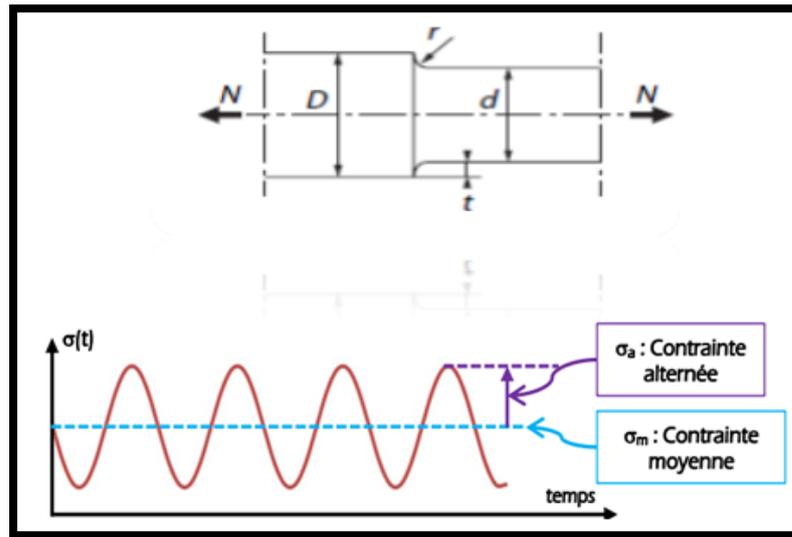


Figure II. 1 : Fatigue : Sollicitation cyclique uni-axiale [3]

La rupture de cet arbre se produira même pour des valeurs de contrainte bien inférieure à celle de la limite élastique. Il suffit pour cela de soumettre l’arbre à un nombre de cycles plus ou moins important en fonction de la valeur de la contrainte appliquée.

La résistance d’un matériau à la fatigue peut être caractérisée par une courbe de Wöhler ou courbe S-N (Stress-Number of cycles) (Figure II.2). Cette courbe représente la valeur de la contrainte alternée correspondant à la rupture pour un nombre de cycle donné. Cette courbe est obtenue pour une contrainte moyenne donnée. [3]

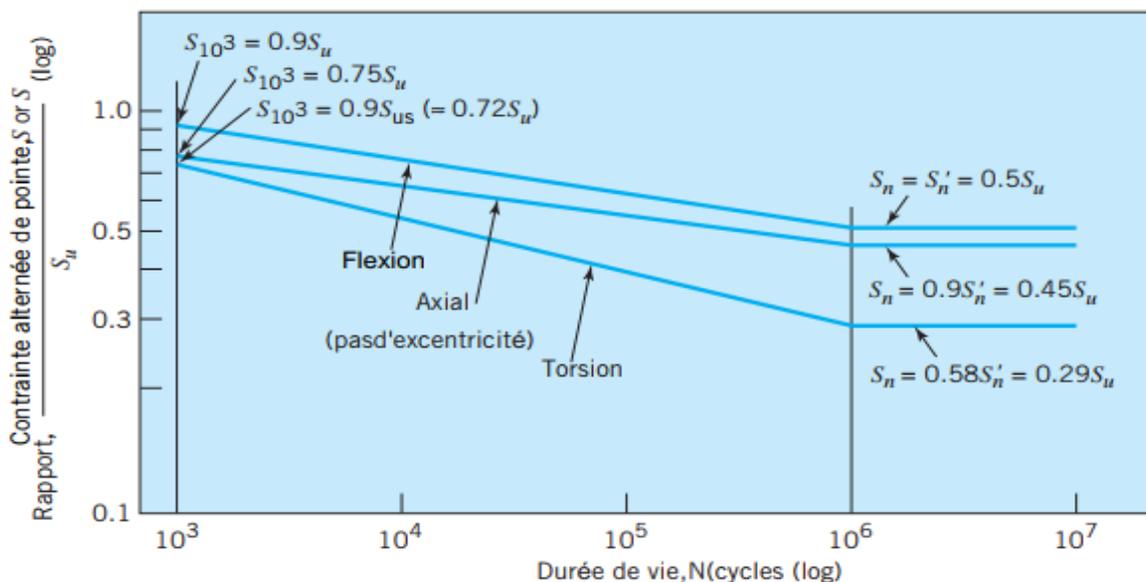


Figure II. 2: Courbe de Wöhler (courbe S-N) [4].

II.3. Défaillance par détérioration des surfaces : Phénomène d'usure

L'usure d'une surface peut être définie comme un phénomène local caractérisé par un enlèvement de matière. Les différentes formes d'usure des surfaces peuvent être classées en plusieurs catégories. [3]

II.3.1. Usure par adhésion ou grippage

Cette usure est favorisée entre autres par l'accroissement de la pression de contact ou par une mauvaise lubrification

II.3.2. Usure par abrasion

Cette usure est fortement liée à la dureté des pièces en contacts et peut être due à la présence d'un troisième corps dans l'interface. Elle peut être en particulier réduite par les choix de matériaux ou les traitements de surfaces appliqués à ces matériaux

II.3.3. Usure corrosive

L'endommagement est ici dominé par des réactions chimiques, et les produits de corrosion sont enlevés par action mécanique. Il y a formation de films inter faciaux compactés.

II.4. Effet de la concentration de contraintes sur la fatigue

La présence irrégularités géométriques, peut réduire la résistance à la fatigue. En effet, la fatigue des matériaux est généralement causée par la présence des irrégularités géométriques telles que les congés, filets, filetages, rainures et trous. La fatigue peut être réduite au minimum en réduisant les concentrateurs de contraintes en présence, en faisant une bonne conception et une fabrication minutieuse [5].

II.5. Effet d'entaille

L'expérience a montré que l'effet d'entaille des pièces influe sur la résistance à la fatigue (Figure II.3). La résistance à la fatigue des pièces entaillées est plus faible que celle les pièces non entaillées. On définit le facteur de concentration de contraintes en fatigue :

$$K_f = \frac{S_n}{S'_n}$$

S_n : la limite d'endurance de la pièce non entaillée

S'_n : la limite d'endurance de la pièce entaillée

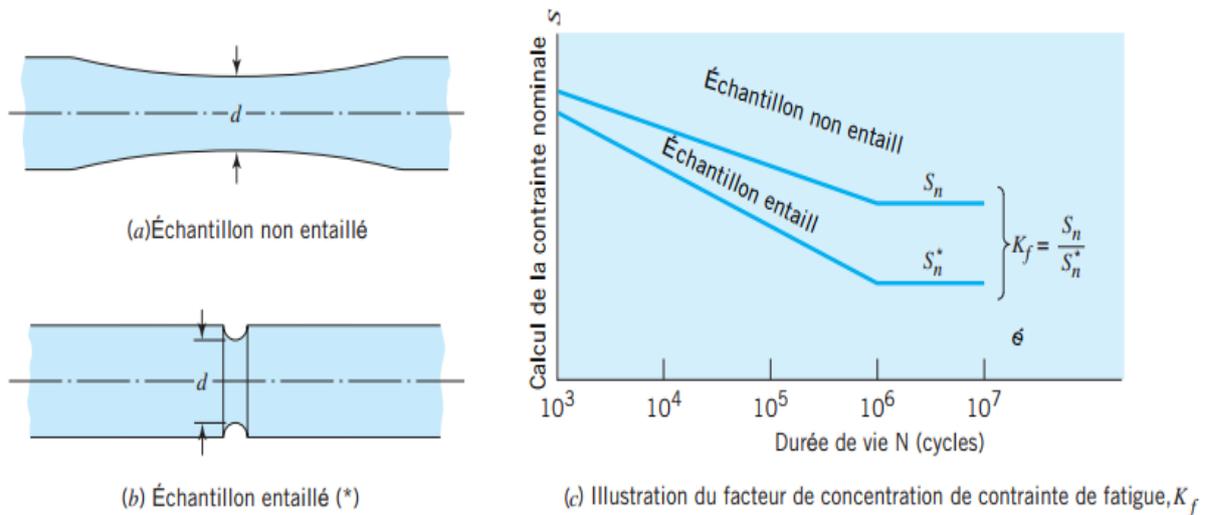


Figure II.3 : Essai de fatigue en charge alternée : éprouvettes entaillées-versus non entaillées [4].

II.5.1. Relation entre le facteur de concentration de contrainte K_t et le facteur de concentration de contrainte en fatigue K_f

Dans le cas de la rupture par fatigue, on notera que pour un matériau donné, la limite d'endurance diminue quand le facteur de concentration de contrainte K_t augmente [5]. Peterson a donné une relation entre le facteur de concentration de contrainte K_t et le facteur de concentration de contrainte en fatigue K_f par :

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

Où :

q : indice de sensibilité aux effets d'entaille.

Selon Peterson l'indice de sensibilité aux effets d'entaille q est fonction de rayon de l'entaille et de la résistance mécanique de matériau. L'indice q est donné par la figure (Figure II.4).

D'après la figure (Figure II.4) on remarque que q est élevé si la résistance mécanique augmente et le rayon d'entaille r est faible.

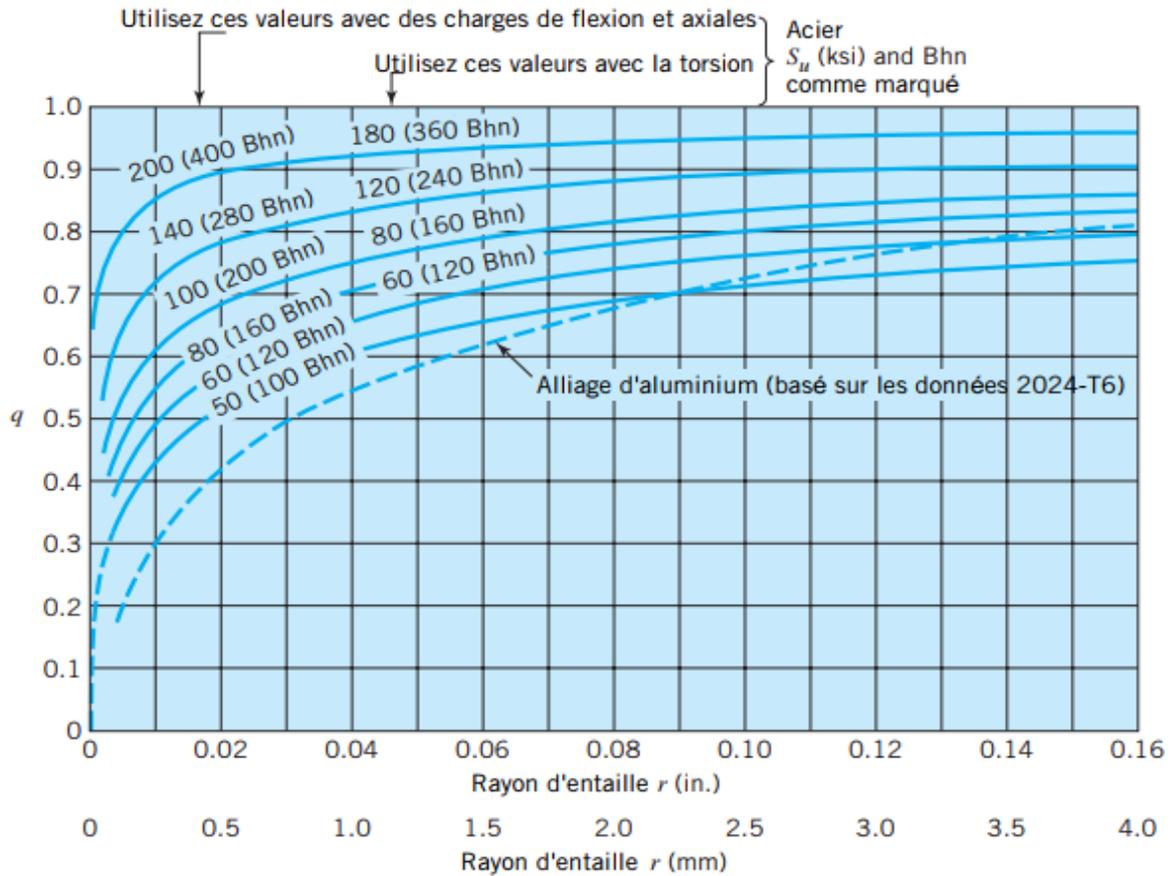


Figure II. 4: Courbes de sensibilité à l'entaille [4]

II.6. Causes des fissures dans les arbres des rotors

L'initiation et la propagation d'une fissure dans les arbres est un processus complexe résultant d'imperfections d'usinage, les entailles et les rainures, ou à cause des facteurs tels que le fretting et/ou les facteurs métallurgiques tels que des défauts de forgeage, les fissures peuvent être aussi causées par des augmentations de contraintes mécaniques. [6]

Les arbres en rotation sont soumis à différents types de sollicitations mécaniques, telles que la flexion, la torsion, la traction, le cisaillement et les charges statiques et dynamiques. Lorsque la fissure atteint une certaine profondeur, l'arbre ne peut plus supporter les charges statiques et dynamiques, et par conséquent, l'arbre subit souvent une fracture soudaine. Dans certaines conditions, la propagation de la fissure peut être accélérée à cause :

- Des défauts de fonctionnement.
- Des contraintes thermiques.
- Des conditions environnementales telles que la présence d'un milieu corrosif.
- Des conditions métallurgiques

II.7. Types des fissures dans les arbres selon leurs orientations

A la base de la géométrie des fissures dans les arbres des rotors, les fissures sont classées en trois groupes comme suit :

II.7.1. Fissure transversale

La fissure transversale reste le type de fissure le plus important car la machine est considérablement influencée par son apparition. La fissure transversale se développe si l'arbre est uniquement soumis à des contraintes de flexion. Ce type de fissures est perpendiculaire à l'axe de l'arbre (Figure II.5), elle réduit la section transversale de l'arbre et entraînent des dommages importants aux rotors. Ce type de fissure est le défaut le plus grave et le plus courant. Ainsi, il a été largement étudié par les chercheurs anciens et actuels [6].

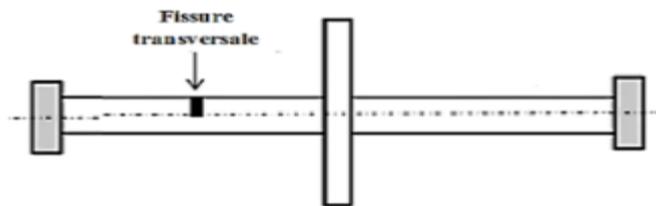


Figure II. 5: Fissure transversale [6].

II.7.2. Fissure longitudinale

Ce type de fissure est parallèle à l'axe de l'arbre, il est relativement rare et moins grave (Figure II.6).

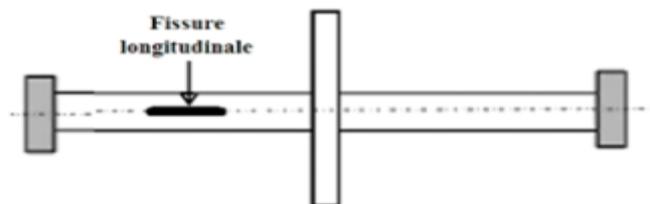


Figure II. 6: Fissure longitudinale [6].

II.7.3. Fissure inclinée

Les fissures inclinées sont identiques aux « fissures hélicoïdales ». Ce type de fissure fait un angle avec l'axe de l'arbre (Figure II.7), mais pourrait apparaître dans les arbres des machines industrielles et influencent principalement le comportement en torsion du rotor de manière assez similaire à l'effet des fissures transversales sur le comportement en flexion [6].

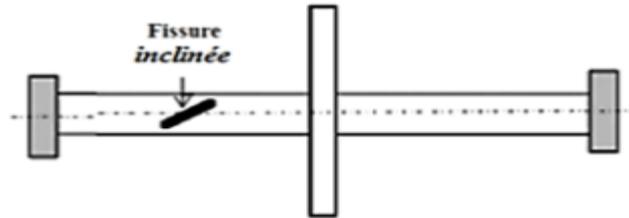


Figure II. 7: Fissure inclinée [6].

II.8. Conclusion

L'effet d'entaille est cause principale de concentration de contraintes ces concentrations de contraintes sont sources de défaillance de pièces en matériaux ductiles travaillant à la fatigue ou de pièces en matériaux fragiles.

Chapitre III

Concentration de contraintes à l'épaule d'un arbre

III.1. Introduction

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontrée lors de la conception d'un arbre. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la section de l'arbre tels que : épaulements, trous, gorges, fonds de filet, entailles, etc.... Dans ces endroits on assiste à une concentration de lignes de forces (Figure III.1) qui conduit à ce problème. Un exemple d'une telle concentration est représenté sur la figure III.2 où on présente pour deux géométries d'un barreau cylindrique, la répartition des contraintes normales en traction et en flexion, et des contraintes tangentielles en torsion [7].

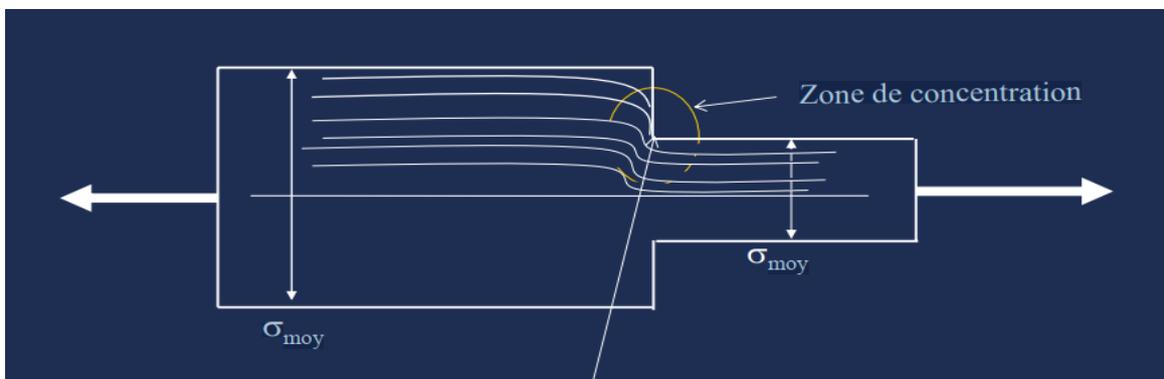


Figure III.1 : Lignes de forces et zone de concentration de contraintes

Arbre	Traction	Torsion	Flexion

Figure III.2 : Répartition de contraintes sans et avec variation de section pour un barreau parfaitement cylindrique sous différentes sollicitations.

La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage de fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile. Dans le cas des arbres, le calcul RDM ne donne plus des résultats corrects dans la zone où les contraintes sont concentrées. Mais les calculs restent valables tant que l'on s'éloigne "suffisamment" de l'accident géométrique (trou, variation brutale de la section, entaille.).

III.2. Historique

En 1898, Le phénomène de concentration de contrainte a été d'abord traité par G. Kirsh, pour un problème de concentration de contraintes autour d'un trou. Ensuite, des solutions analytiques et des formules empiriques ont été progressivement trouvées par différents chercheurs. Inglis a aussi évoqué ce problème en 1913, mais c'est H. Neuber et R.E. Peterson qui ont plus contribué à la connaissance dans ce domaine [7].

III.3. Facteur de concentration de contraintes

Le facteur de concentration de contraintes présente pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité) et la contrainte nominale en un point d'une structure [8].

III.4. Contrainte nominale

On appelle contrainte nominale, que l'on note σ_{nom} ou τ_{nom} , la contrainte maximale calculée à partir d'une étude RDM, en supposant que l'on prend en compte la plus petite section sollicitée. On présente sur la figure III.3a et figure III.3b qui suit deux exemples de calcul de la contrainte nominale en traction et en flexion [8].

La contrainte nominale en traction est donnée par la relation qui suit :

$$\sigma_{nom} = \frac{4N}{\pi d^2}$$

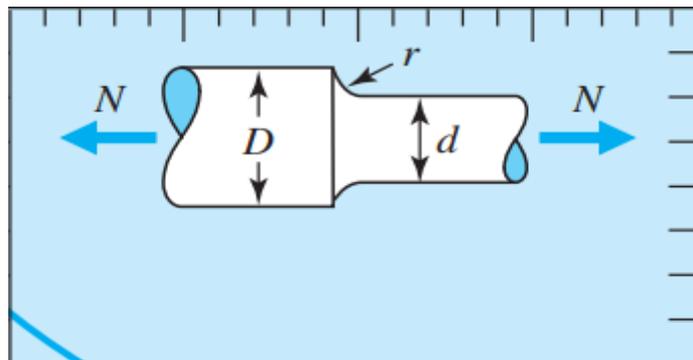


Figure III.3a : Arbre en traction

La contrainte nominale en flexion est calculée d'après la relation :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

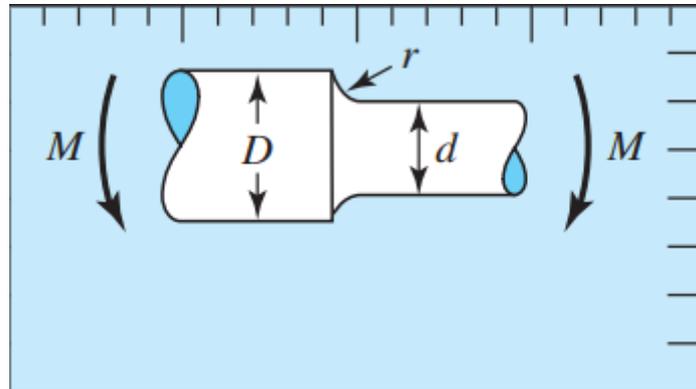


Figure III.3b : Arbre en flexion

La contrainte réelle notée σ_{max} est la valeur maximale de la contrainte obtenue avec le défaut géométrique. Le choix du facteur qui représentera les concentrations de contraintes est sera noté K_t et il est défini par le rapport entre la contrainte maximale et la contrainte nominale :

$$K_t = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

Le facteur de concentration de contraintes K_t dépend uniquement de la géométrie de la pièce (et en particulier de l'accident géométrique) et du type de sollicitation.

III.5. Méthodes d'évaluation du facteur de concentration de contraintes k_t

Les trois méthodes couramment utilisées pour la détermination du facteur de concentration de contrainte k_t sont les suivantes :

- **Les formules paramétriques** qui donnent la valeur du K_t en fonction des divers paramètres géométriques.
- **La voie numérique** où l'on détermine le K_t à l'aide d'outils de calcul numérique, telle que la méthode des éléments finis.
- **La voie expérimentale** où le K_t est déterminé au moyen de mesures de déformations effectuées au laboratoire sur un « modèle » (quelle que soit l'échelle).

III.6. Moyens de diminuer les effets des concentrations de contraintes

La méthode des lignes de forces permet d'envisager des modifications géométriques à apporter aux pièces de machines de façon à diminuer les concentrations de contraintes. Il s'agit, en fait, d'empêcher la concentration des lignes de forces au changement de section.

Le principe directeur est le suivant : le changement de section doit se faire le moins brusquement possible. Il faut donc employer les plus grands rayons de raccordement possibles.

Lorsqu'on ne peut éviter d'avoir un petit rayon de raccordement, d'avoir un trou dans un arbre ou une plaque (figure III.4-a), etc., et que ces changements de section présentent des dangers pour la pièce, on peut, en enlevant du matériau, réduire leur effet dommageable (figure III.4-b). [2]

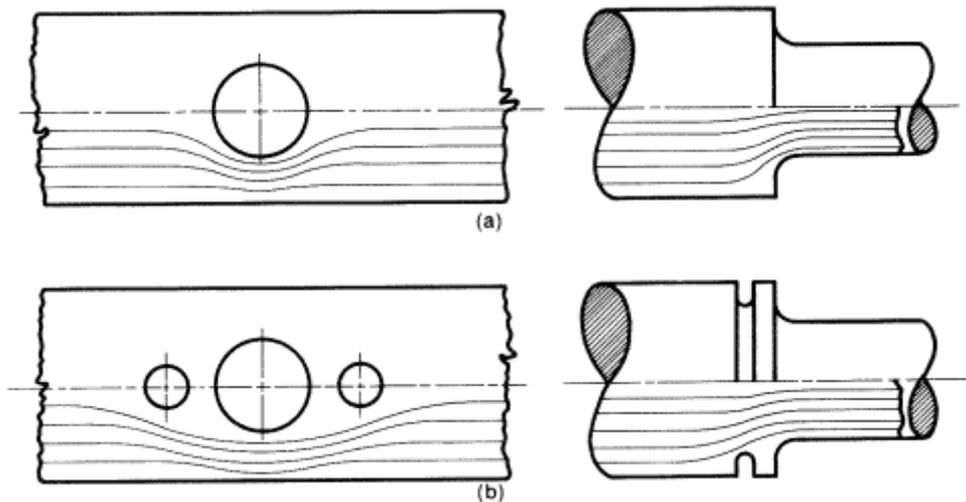


Figure III.4 : Moyens de diminuer les effets des concentrations de contraintes [2]

III.7. Conclusion

Dans ce chapitre on a parlé sur les concentrations des contraintes au congé d'un arbre sous différentes sollicitations et de même, on a parlé aussi sur les méthodes d'évaluation du facteur de concentration de contraintes K_t et les moyens de réduire les effets de l'effet d'entaille.

Chapitre IV

**Mise en évidence de la
concentration de contraintes
par élément finis et
comparaison de K_t avec
abaques**

IV.1. Introduction

La mise en évidence de la concentration de contraintes peut être faite par méthodes expérimentales telles que photoélasticimétrie ou jauges de déformations comme par méthode des éléments fins.

Dans le présent travail cette mise en évidence est faite par modèle élément fins pour les différentes sollicitations : traction, flexion, torsion. Les facteurs de concentrations de contraintes issus de l'analyse par élément fins sont comparés à ceux tirés des abaques de la référence [4] pour validation des résultats.

IV.2. Choix de solide pour l'analyse par éléments finis

Le solide choisi est un arbre épaulé à deux tronçons respectons les rapports D/d et r/d pour pouvoir comparer les résultats a ceux tirés des abaques [4].

Où D est le grand diamètre, d est petit diamètre et r est le rayon de raccordement. Pour le rayon de raccordement nous avons examiné deux cas :

- $r=0.05*d$ (faible rayon de raccordement)
- $r=0.2*d$ (grand rayon de raccordement)

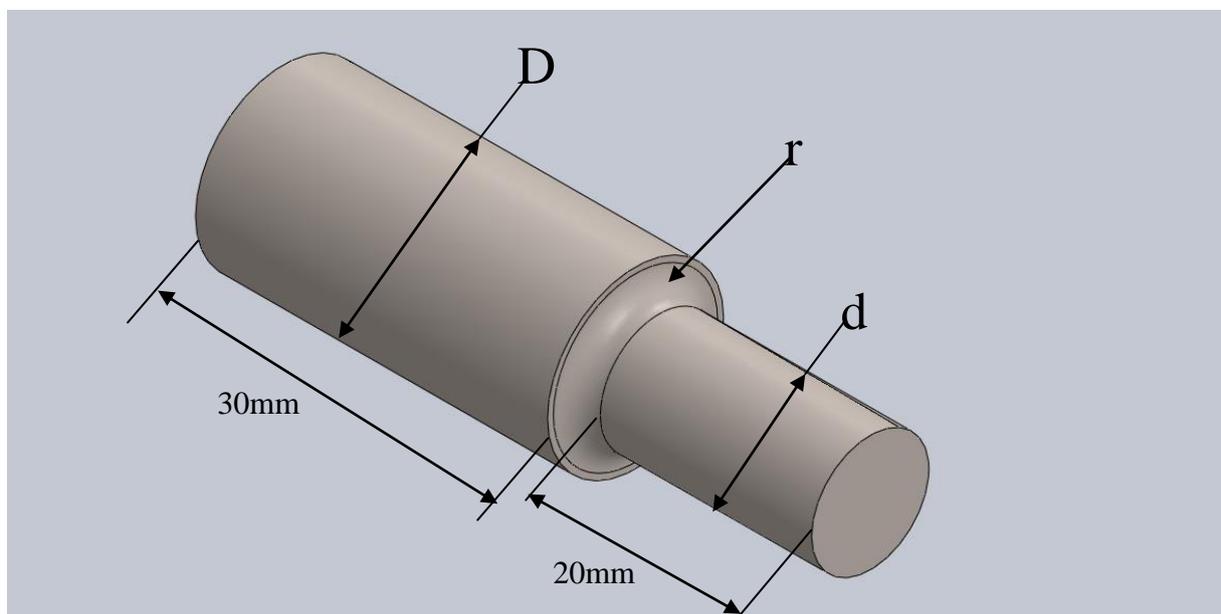


Figure IV.1 : Arbre épaulé à deux tronçons

IV.3. Maillage du solide

Nous avons utilisé un maillage volumique en éléments finis tétraédriques à 16 nœuds et nous avons raffiné le maillage dans la région du raccordement pour assurer la mise en évidence de la concentration de contraintes et la relève de sa valeur maximale.

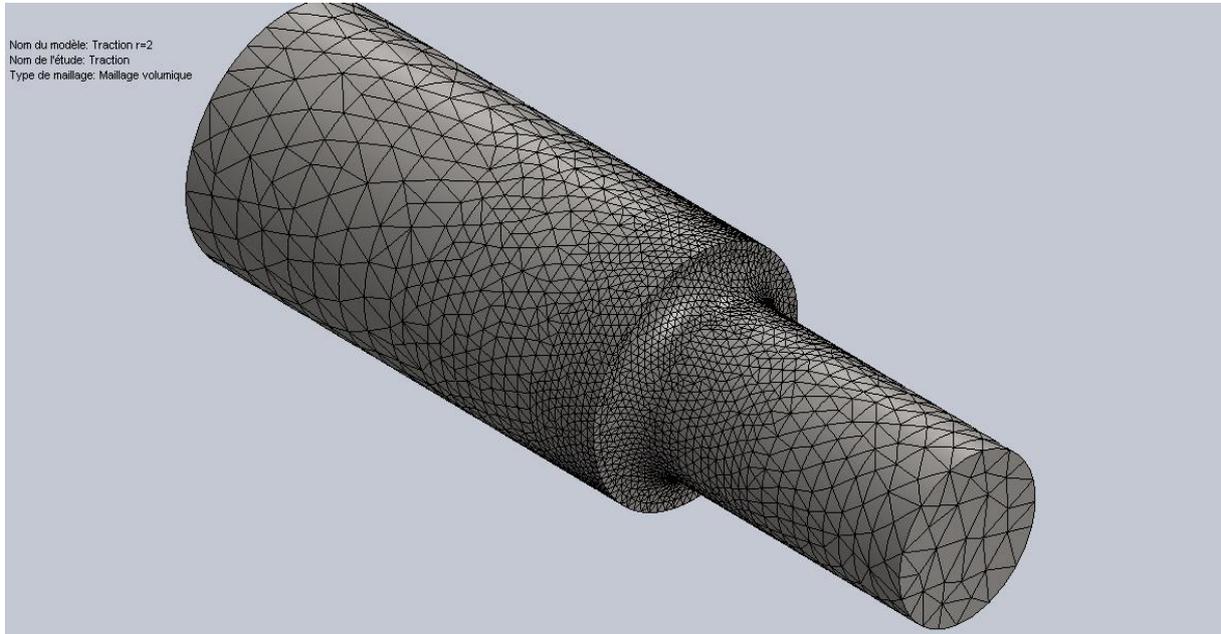


Figure IV.2 : Solide maillé avec des éléments tétraédriques

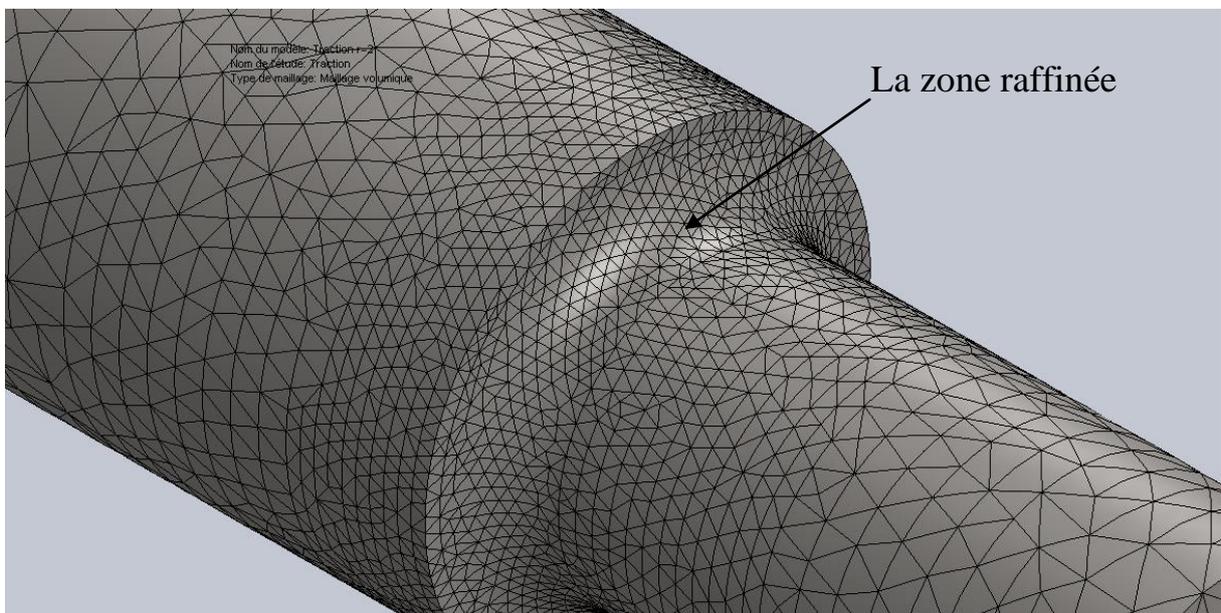


Figure IV.3 : Raffinage de la zone de raccordement

IV.4. Calcul du facteur de concentration de contraintes pour les différentes sollicitations et comparaison avec les abaques

IV.4.1. Traction

- Conditions aux limites et charge

Dans ce cas nous avons pris $D=15\text{mm}$, $d=10\text{mm}$ d'où :

- $\frac{D}{d} = 1.5$
- $\frac{r}{d} = 0.05$, $r=0.5\text{ mm}$ et $\frac{r}{d} = 0.2$, $r=2\text{ mm}$

Dans cette simulation la surface gauche est considérée encastree et une charge de $P=1000\text{N}$ est appliquee axialement sur la surface droite de l'arbre. La contrainte nominale dans ce cas est :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{A} = \sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = 12732395\text{ N/m}^2$$

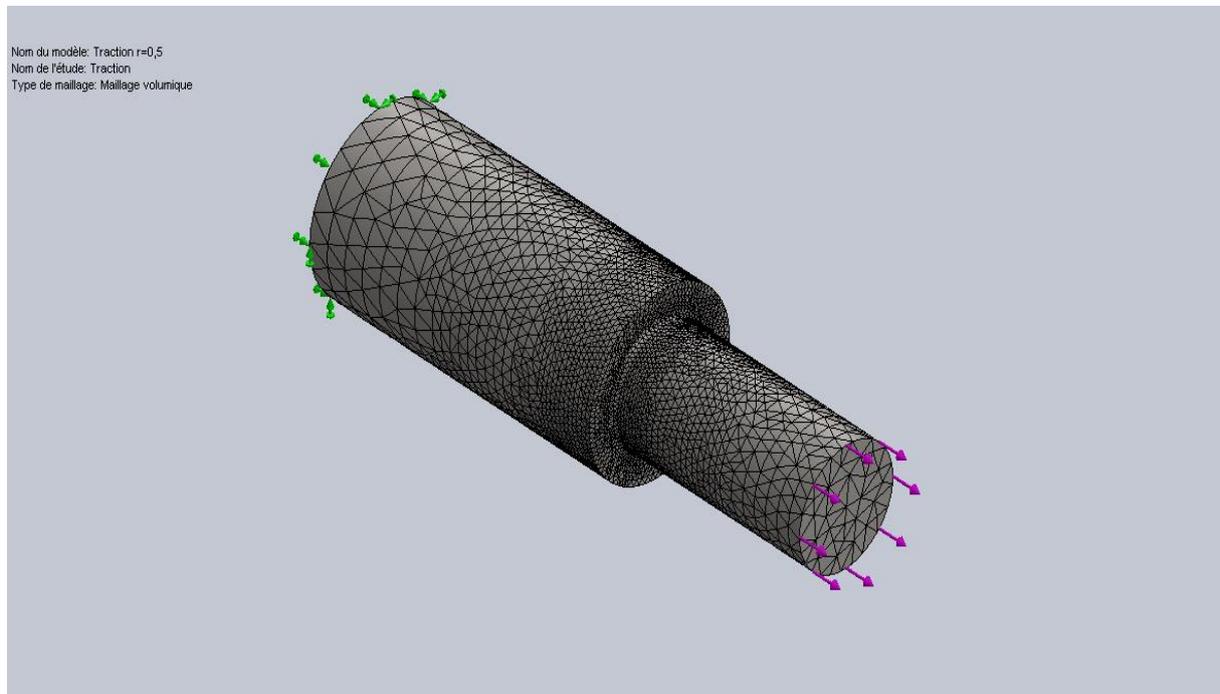


Figure IV.4 : Maillage de l'arbre avec épaulement en traction $r=0.5\text{ mm}$

- **Contraintes de Von Mises et facteur de concentration K_t**

Après exécution, du programme on a obtenu les contraintes maximales de Von Mises (Figure IV.5) et (Figure IV.6) et on a calculé le facteur de concentration de contraintes K_t pour les deux rayons de raccordement. K_t est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

De même on a tiré de l'abaque (Figure IV.9) les facteurs de concentration de contraintes K_t pour :

- $\frac{D}{d} = 1.5$ et $\frac{r}{d} = 0.05$
- $\frac{D}{d} = 1.5$; $\frac{r}{d} = 0.2$

Les résultats sont donnés dans le tableau IV.1

Tableau IV.1 : Facteur de concentration de contraintes cas de traction (E.F+Abaque)

	σ_{\max} (N/m ²)	σ_{nom} N/m ²	K_t (E.F)	K_t (abaque)
r=0.5mm	30425596	12732395	2.39	2.39
r=2mm	19898120	12732395	1.56	1.56

Conclusion :

Nous notons dans le tableau que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont complètement identiques aux résultats obtenus par l'abaque de la traction, et nous notons également que lorsque le rayon de raccordement est petit, le coefficient de concentration de contraintes est grand, et lorsque le rayon de raccordement est grand, le coefficient de concentration de contraintes est faible.

Nous en concluons que la méthode des éléments finis est une méthode efficace pour calculer le coefficient de concentration des contraintes dans le cas de la traction.

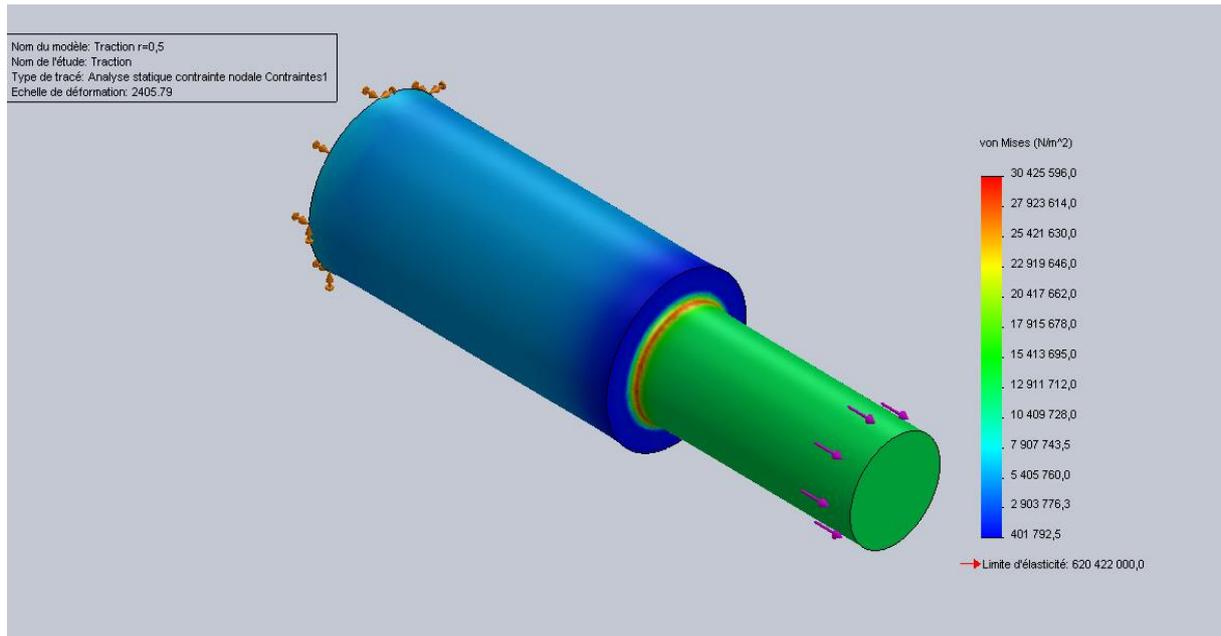


Figure IV.5.a : Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en traction ($r=0.5$ mm)

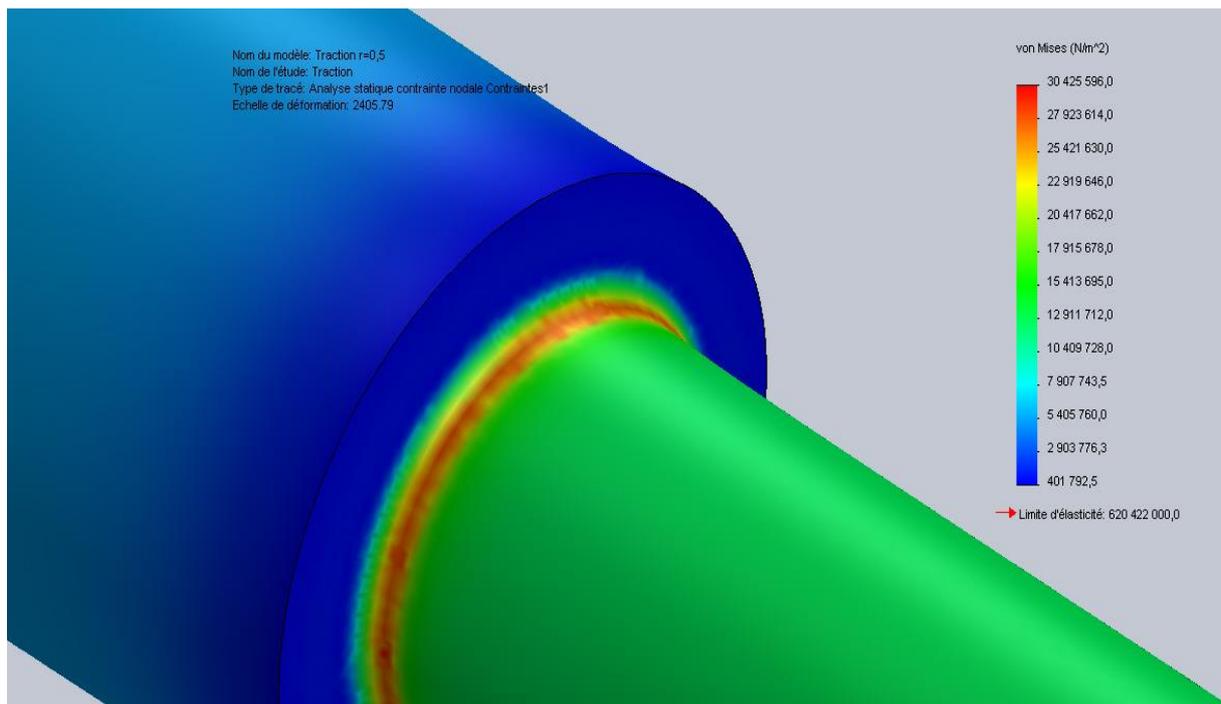


Figure IV.5.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en traction ($r=0.5$ mm)

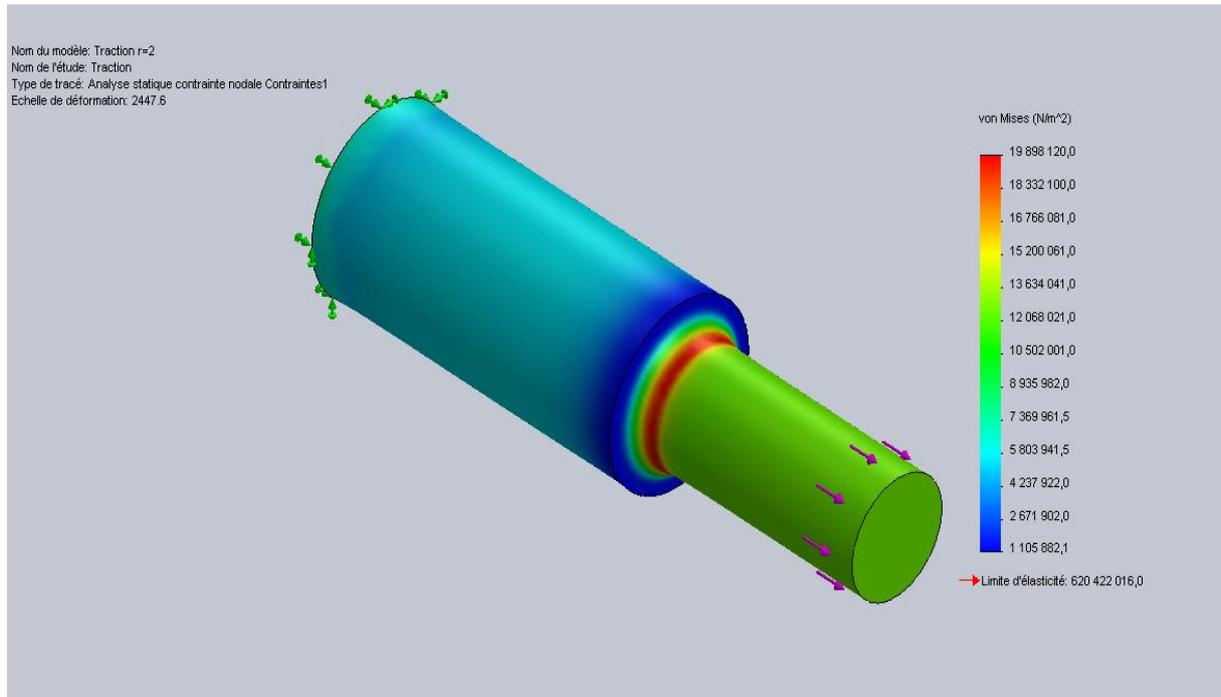


Figure IV.6.a : Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en traction ($r=2$ mm)

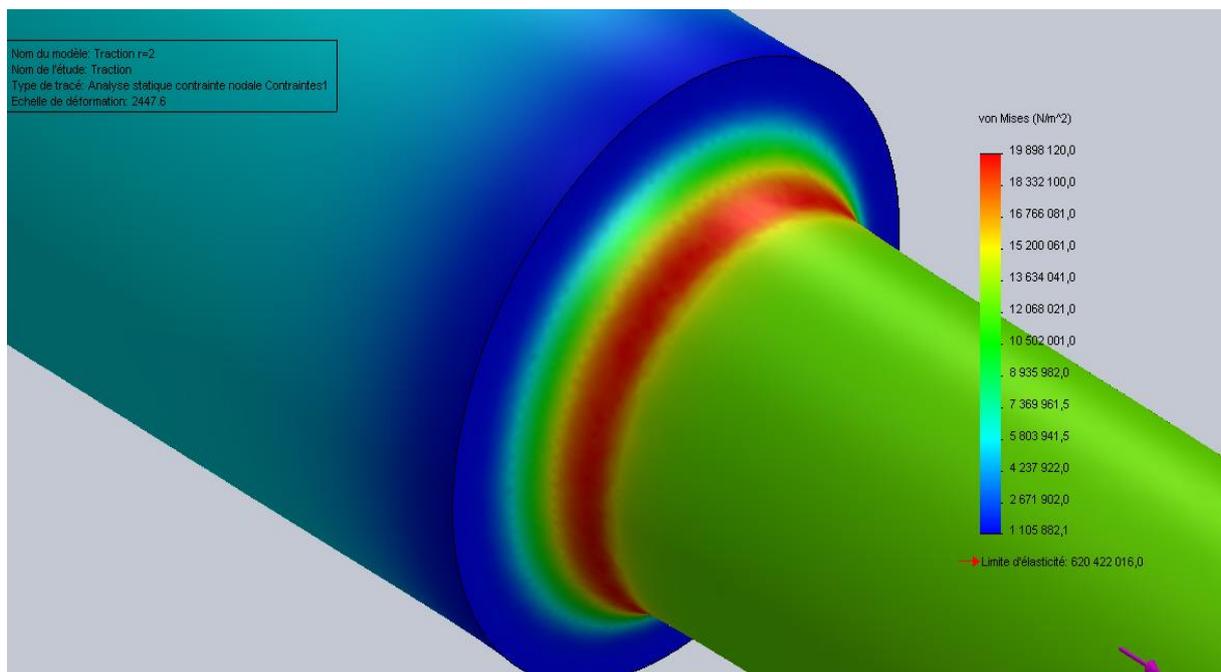


Figure IV.6.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en traction ($r=2$ mm)

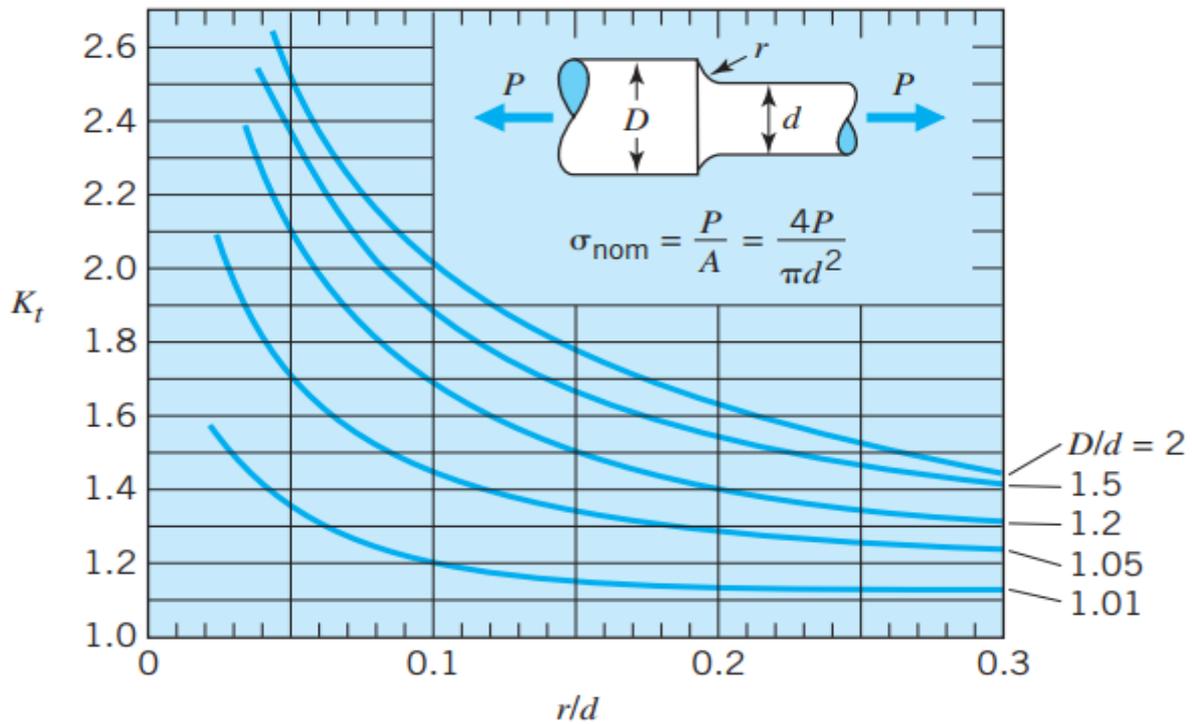


Figure IV.7 : Abaque de facteur de concentration de contraintes d’un arbre épaulé en traction [4].

IV.4.2. Flexion

- **Conditions aux limites et charge**

Dans ce cas nous avons pris $D = 15mm, d = 10mm$ d’où :

- $\frac{D}{d} = 1.5$
- $\frac{r}{d} = 0.05$ d’où $r = 0.5mm$
- $\frac{r}{d} = 0.2$ d’où $r = 2mm$.

Dans cette simulation la surface gauche est considérée encastree et une charge de $P=1000N$ est appliquee radialement sur la surface droite de l’arbre qui nous donne un moment de flexion $M=20 N.m$. La contrainte nominale dans ce cas est :

$$\sigma_{nom} = \frac{M c}{I} = \sigma_{nom} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{nom} = 203718327 N/m^2$$

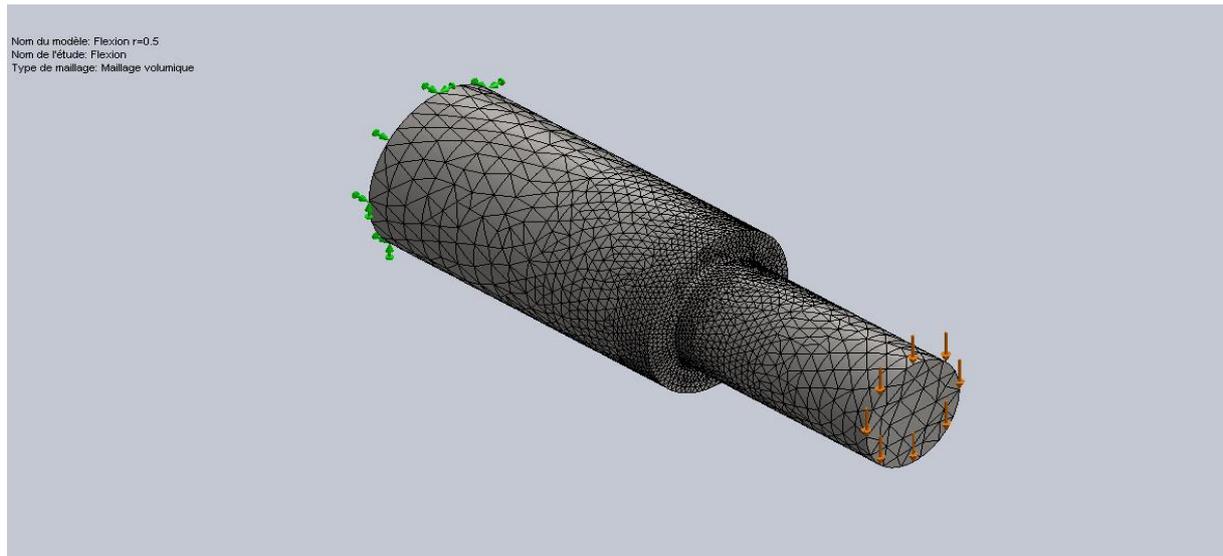


Figure IV.8 : Maillage de l'arbre avec épaulement en flexion $r=0.5$ mm

- **Contraintes de Von Mises et facteur de concentration K_t :** Après exécution, du programme on a obtenu les contraintes maximales de Von Mises (Figure IV.7) et (Figure IV.8) et on a calculé le facteur de concentration de contraintes K_t pour les deux rayons de raccordement. K_t est donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

De même on a tiré de l'abaque (Figure IV.9) les facteurs de concentration de contraintes K_t pour :

- $\frac{D}{d} = 1.5$ et $\frac{r}{d} = 0.05$
- $\frac{D}{d} = 1.5$ et $\frac{r}{d} = 0.2$

Les résultats sont donnés dans le tableau IV.2

Tableau IV. 2: Facteur de concentration de contraintes cas de flexion (E.F+Abaque)

	σ_{\max} (N/m ²)	σ_{nom} N/m ²	Kt(E.F)	Kt(abaque)
r=0.5mm	411660640	203718327	2.02	2.02
r=2mm	283326352	203718327	1.39	1.39

Conclusion :

Nous notons dans le tableau que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont complètement identiques aux résultats obtenus par l'abaque de la flexion, et nous notons également que lorsque le rayon de raccordement est petit, le coefficient de concentration de contraintes est grand, et lorsque le rayon de raccordement est grand, le coefficient de concentration de contraintes est faible.

Nous en concluons que la méthode des éléments finis est une méthode efficace pour calculer le coefficient de concentration des contraintes dans le cas de la flexion.

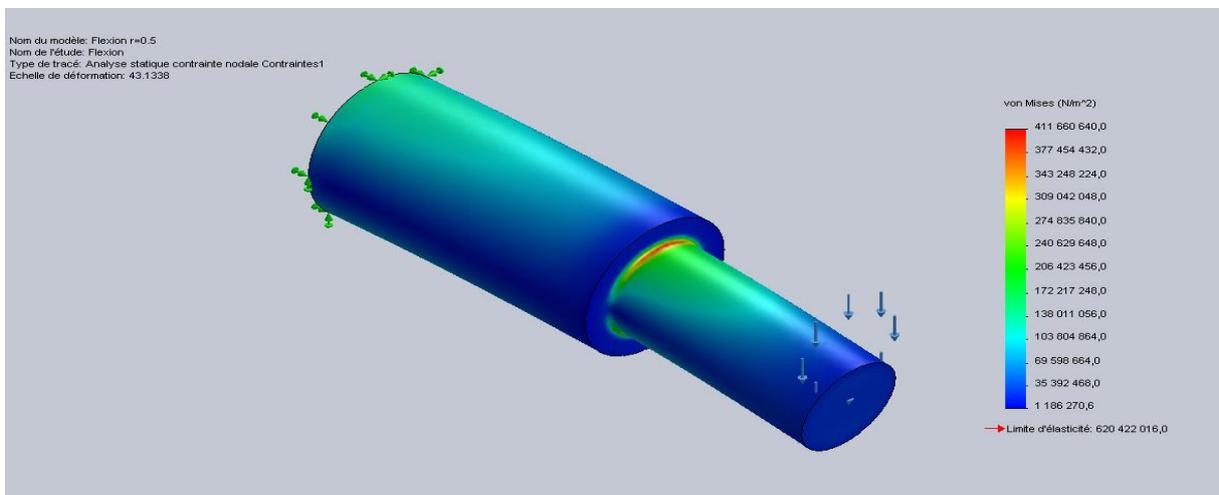


Figure IV.9.a : Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=0.5 \text{ mm}$)

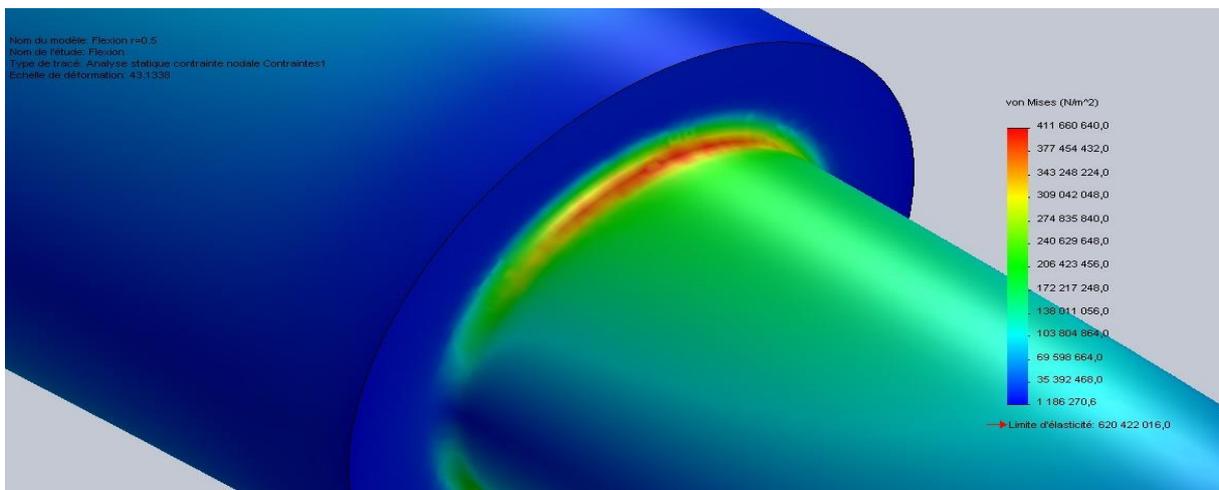


Figure IV.9.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion ($r=0.5 \text{ mm}$)

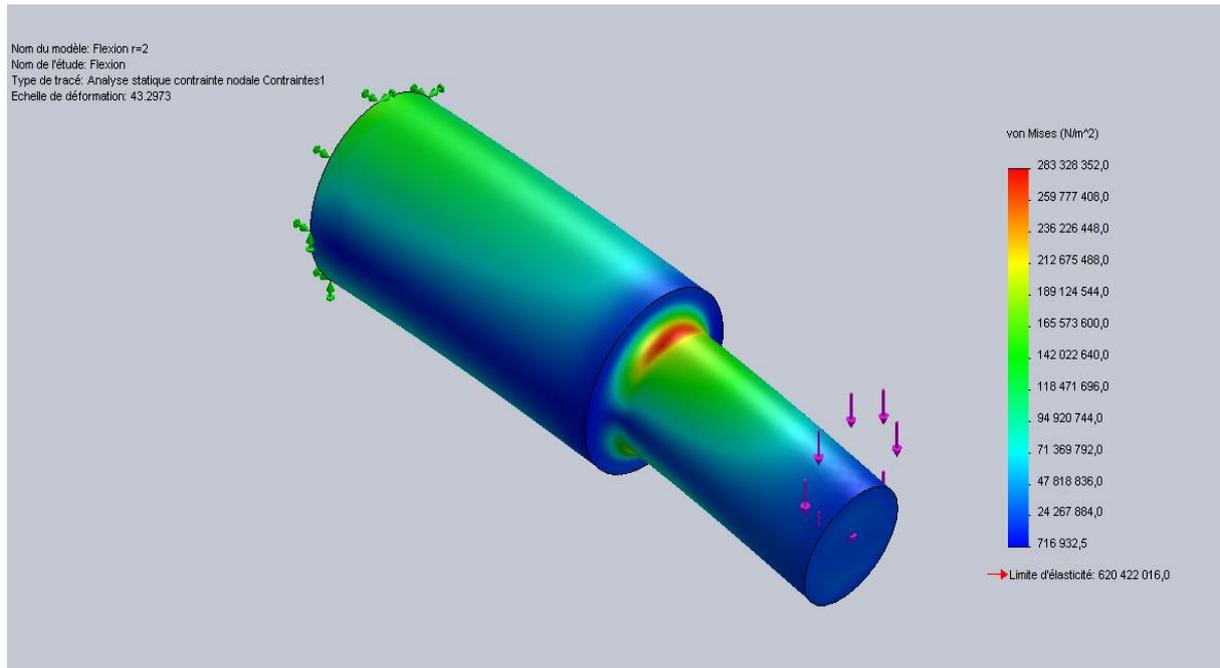


Figure IV.10.a : Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion (r=2 mm)

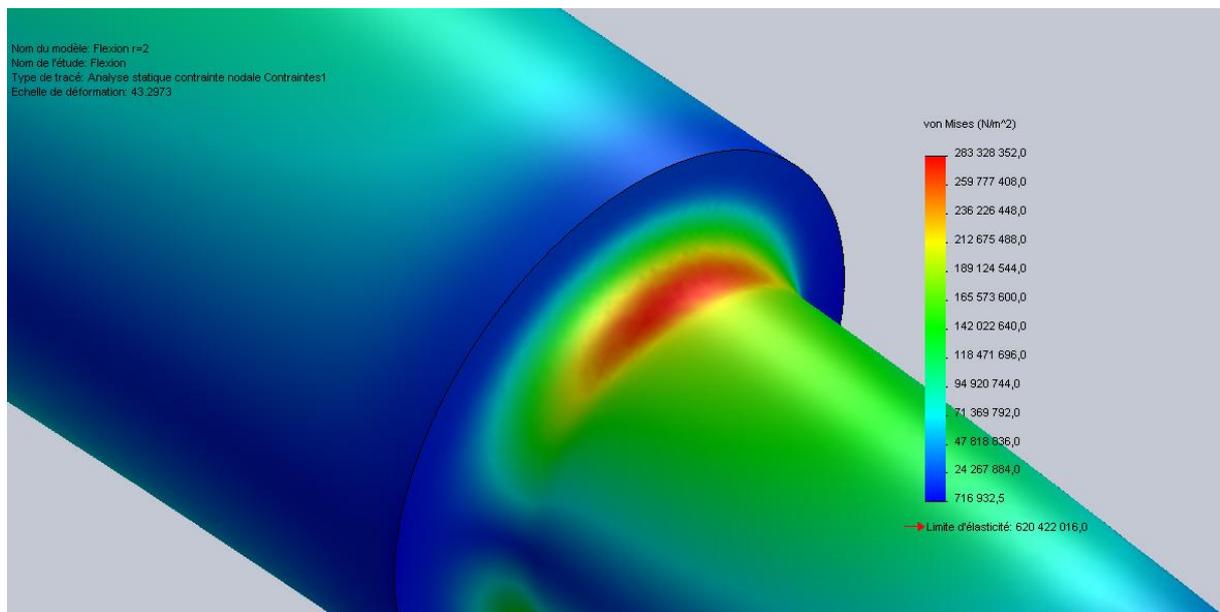


Figure IV.10.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement soumis à la flexion (r=2 mm)

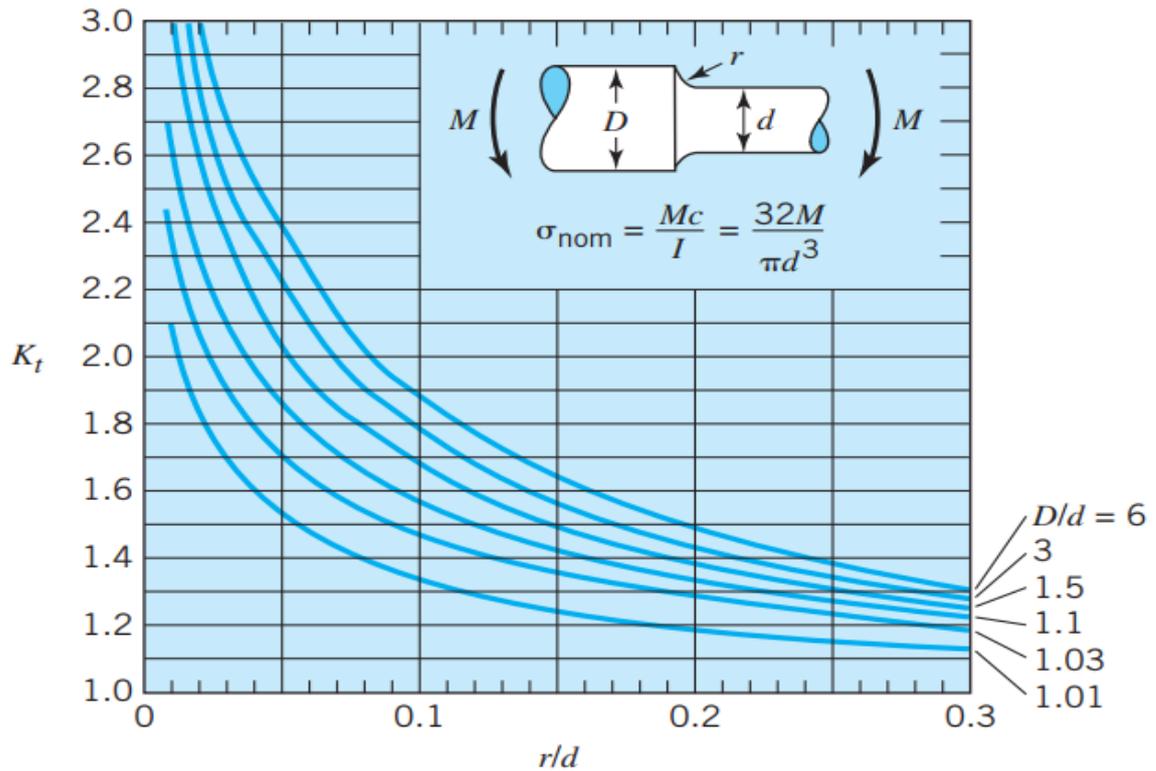


Figure IV.11: Abaque de facteur de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en flexion [4].

IV.4.3. Torsion

- **Conditions aux limites et charge**

Dans ce cas nous avons pris $D=20\text{mm}$, $d=10\text{mm}$ d'où :

- $\frac{D}{d} = 2$
- $\frac{r}{d} = 0.05$ d'où $r = 0.5\text{mm}$
- $\frac{r}{d} = 0.2$ d'où $r = 2\text{mm}$.

Dans cette simulation la surface gauche est considérée encastree et un moment de torsion de $T=10\text{N.m}$ est appliqué sur la surface droite de l'arbre. La contrainte nominale dans ce cas est :

$$\tau_{nom} = \frac{T c}{J} = \sigma_{nom} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau_{nom} = 50929581 \text{ N/m}^2$$

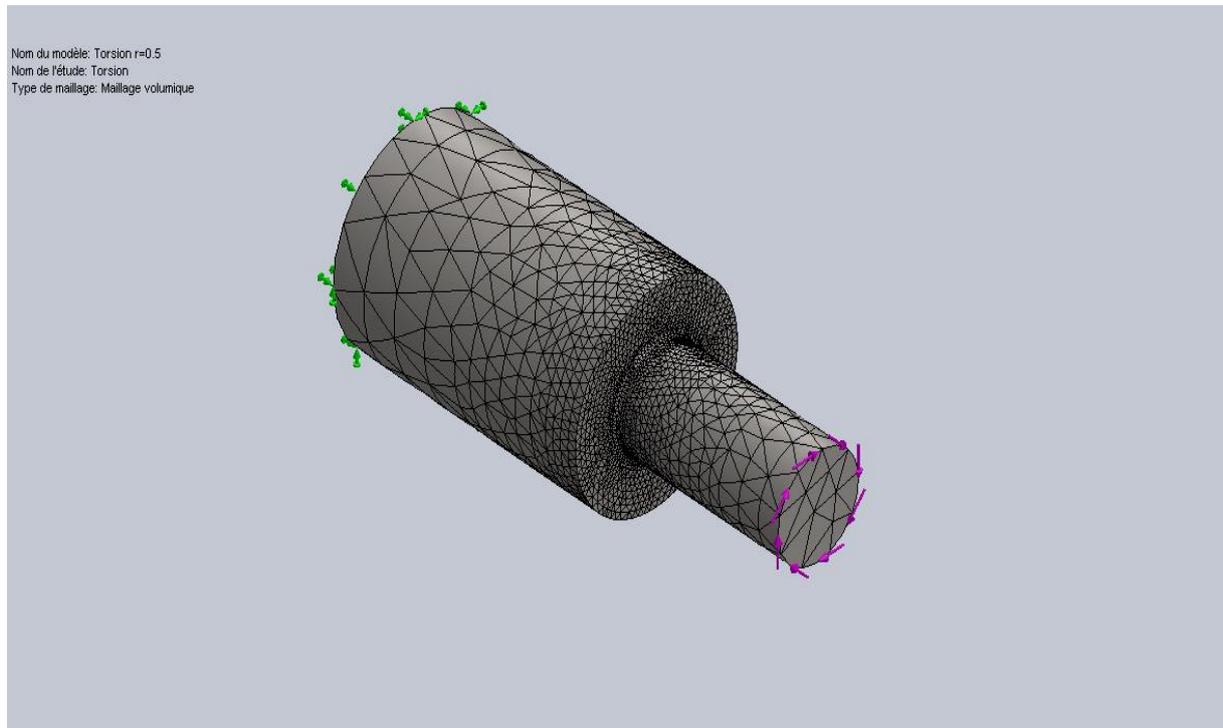


Figure IV.12: Maillage de l'arbre avec épaulement en torsion $r=0.5$ mm

- **Contraintes de Von Mises et facteur de concentration K_t**

Après exécution, du programme on a obtenu les contraintes maximales de Von Mises (Figure IV.13) et (Figure IV.14) et on a calculé le facteur de concentration de contraintes K_t pour les deux rayons de raccordement. K_t est donné par :

$$K_t = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{nom}}}$$

Avec :

$$\tau_{\max} = \sigma_{\max} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

De même on a tiré de l'abaque (Figure IV.15) les facteurs de concentration de contraintes K_t pour :

- $\frac{D}{d} = 2$ et $\frac{r}{d} = 0.05$
- $\frac{D}{d} = 2$; $\frac{r}{d} = 0.2$

Les résultats sont donnés dans le tableau IV.3

Tableau IV. 3: Facteur de concentration de contraintes cas de torsion (E.F+Abaque)

	τ_{max} (N/m ²)	τ_{nom} N/m ²	Kt(E.F)	Kt(abaque)
r=0.5mm	88291202	50929581	1.73	1.73
r=2mm	63653934	50929581	1.25	1.25

Conclusion :

Nous notons dans le tableau que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont complètement identiques aux résultats obtenus par l’abaque de la torsion, et nous notons également que lorsque le rayon de raccordement est petit, le coefficient de concentration de contraintes est grand, et lorsque le rayon de raccordement est grand, le coefficient de concentration de contraintes est faible.

Nous en concluons que la méthode des éléments finis est une méthode efficace pour calculer le coefficient de concentration des contraintes dans le cas de la torsion.

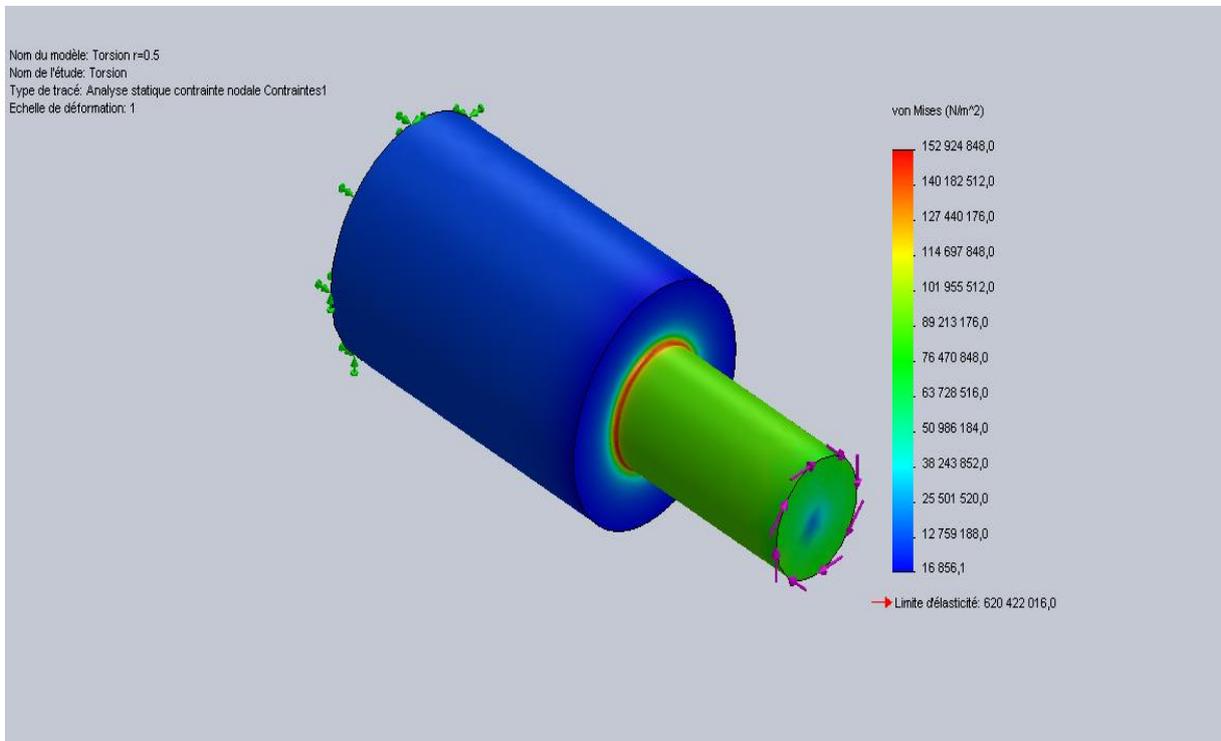


Figure IV.13.a : Champ de contraintes d’un arbre avec épaulement en torsion (r=0.5 mm)

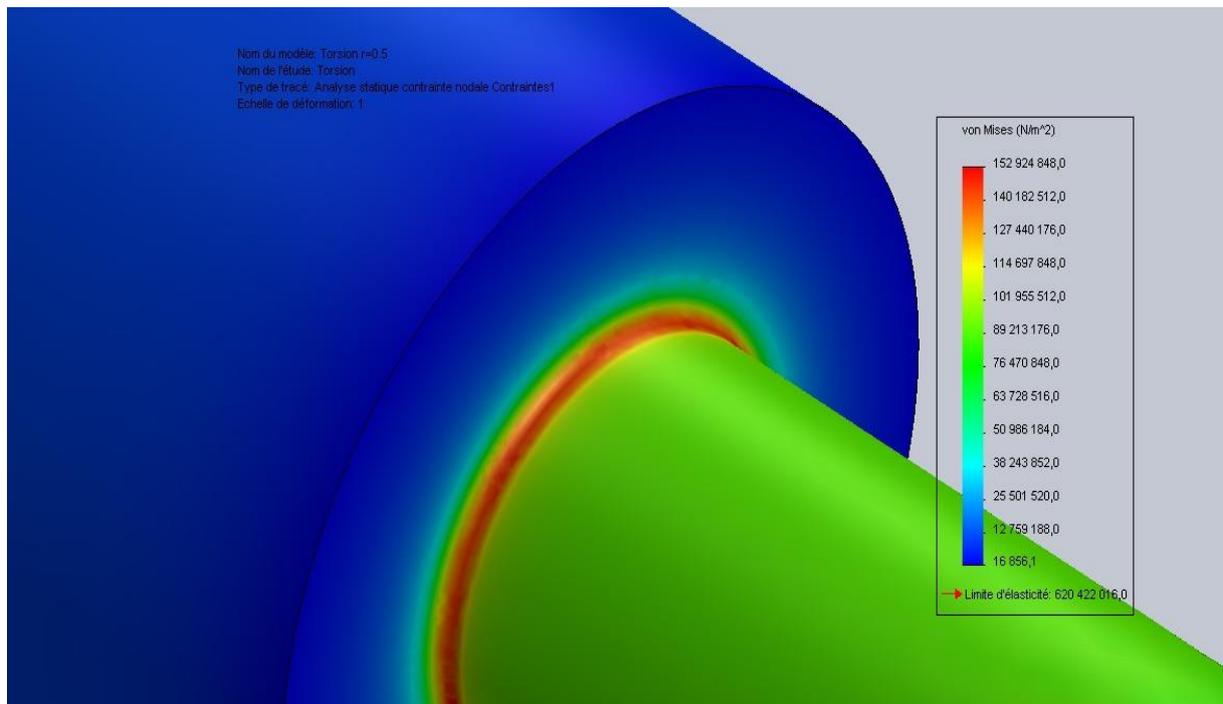


Figure IV.13.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en torsion($r=0.5$ mm)

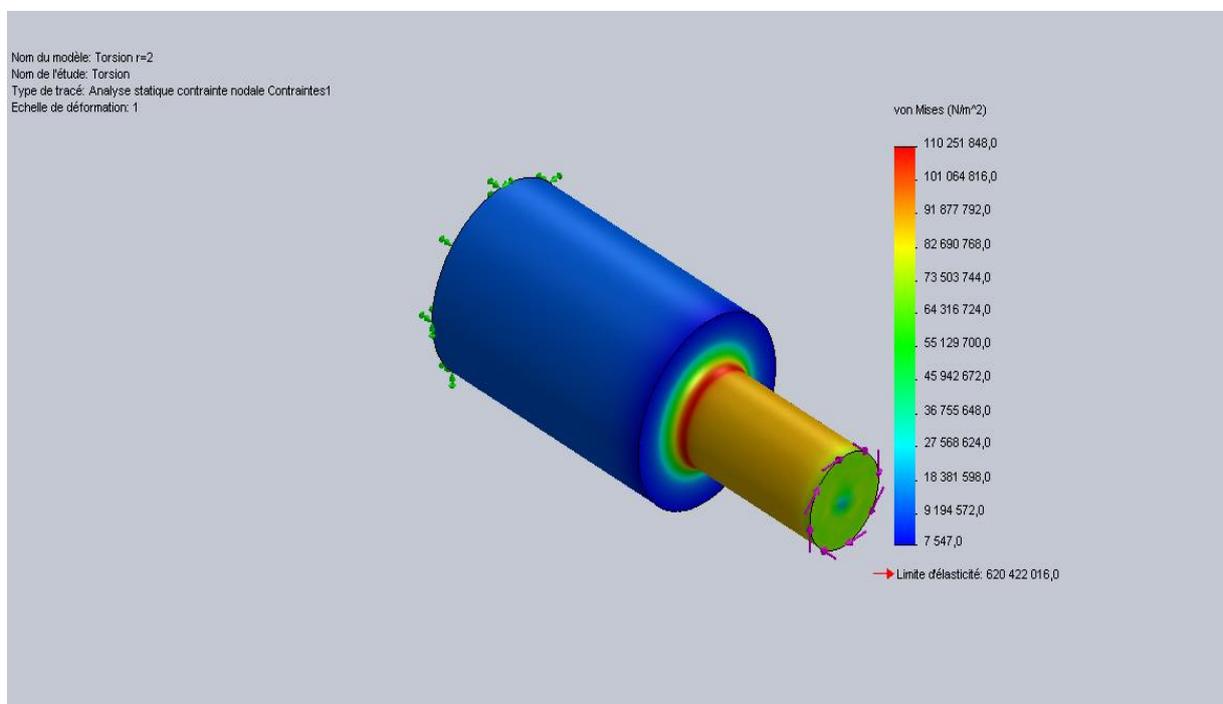


Figure IV.14.a : Champ de contraintes d'un arbre avec épaulement en torsion ($r=2$ mm)

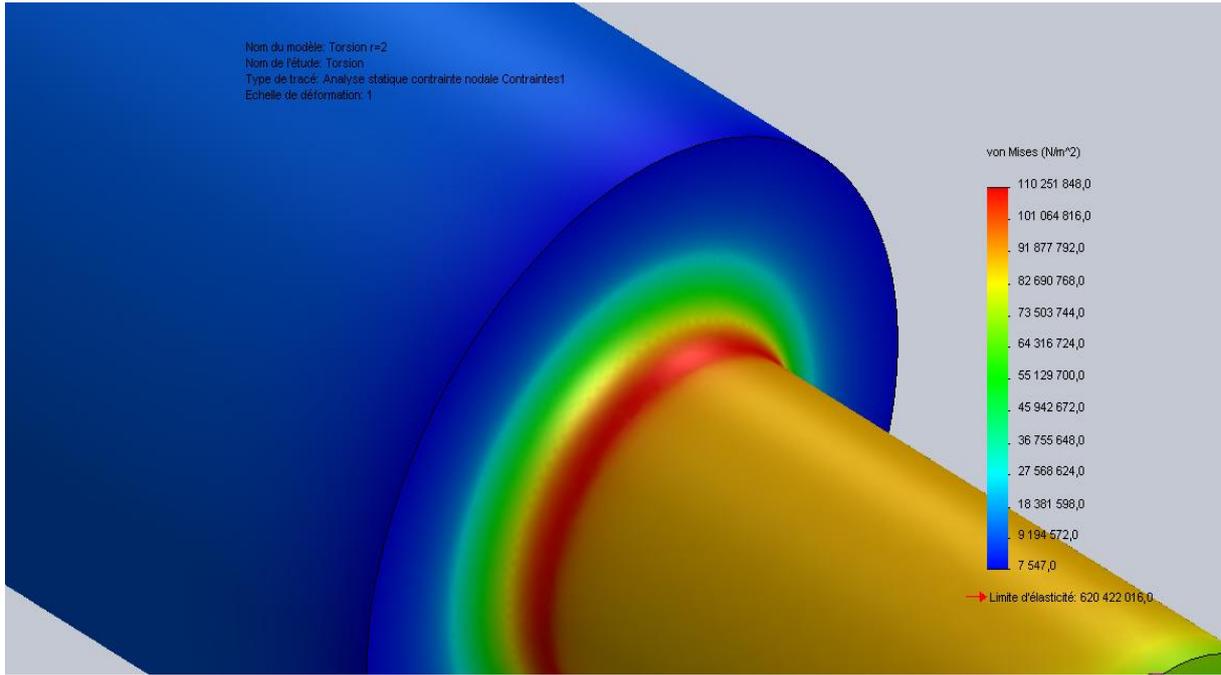


Figure IV.14.b : Concentration des contraintes dans la zone de raccordement d'un arbre avec épaulement en torsion(r=2 mm)

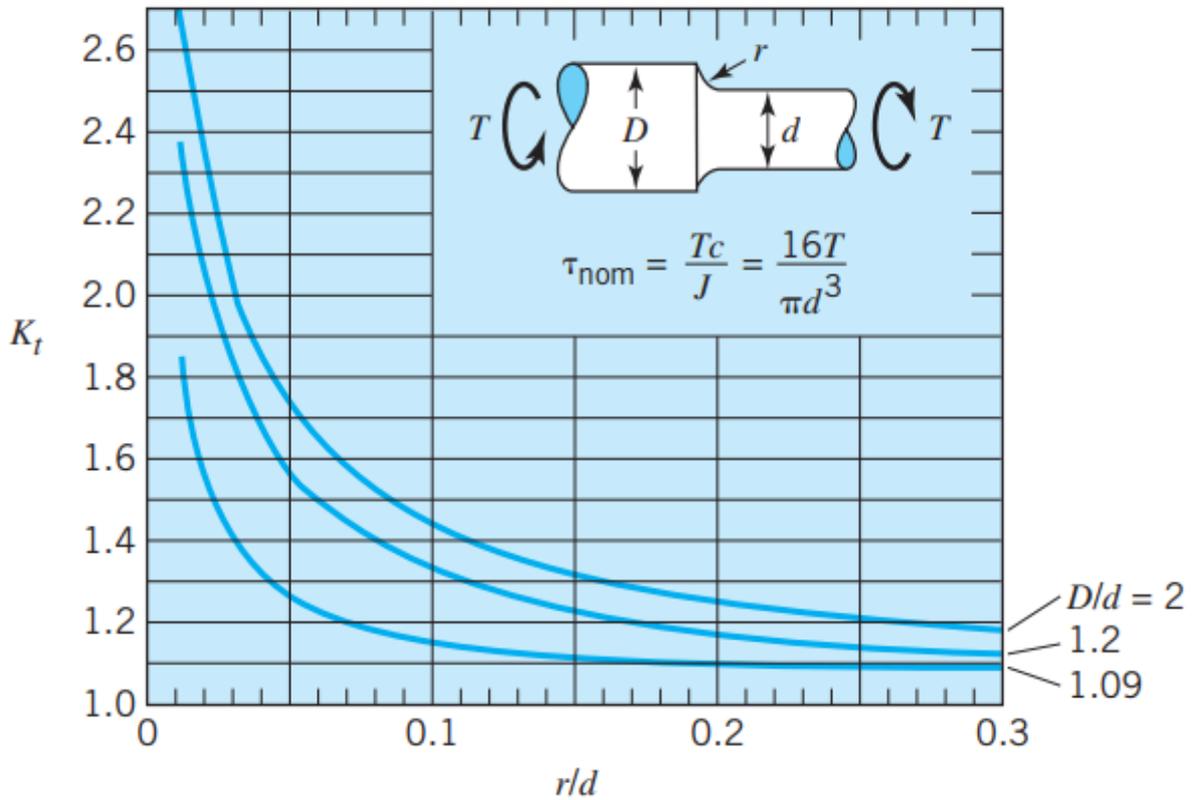


Figure IV.15: Abaque de facteur de concentration de contraintes d'un arbre épaulé en torsion [4].

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence la concentration de contraintes par la méthode des éléments finis. A travers ce travail, on peut conclure que la méthode des éléments finis est une méthode efficace pour cette mise en évidence pour les différentes sollicitations : traction, flexion, torsion. En général, on remarque, que la concentration de contraintes est d'autant plus importante si la partie entaillée travaille en traction ou flexion.

Chapitre V

Application

V.1. Problématique

Dans cette partie de travail on propose de déterminer les facteurs de sécurité à la fatigue d'un arbre, en certaines de ses zones proposées. Cet arbre est un arbre intermédiaire de transmission de puissance avec un engrenage hélicoïdal B, un engrenage conique D et deux paliers de guidage A et C (Figure V.1).

Les charges agissantes sur l'engrenage conique sont indiquées. Les forces sur l'engrenage hélicoïdal peuvent être déterminées à partir de l'équilibre des moments autour de l'axe x de l'arbre.

Les dimensions de l'arbre sont indiquées sur le dessin 2. Tous les congés d'épaule ont un rayon de 5 mm. Le roulement de guidage A absorbe la poussée axiale des engrenages. L'arbre est en acier trempé, $R_m (S_u) = 1069 \text{ MPa}$, $R_e (S_y) = 896 \text{ MPa}$.

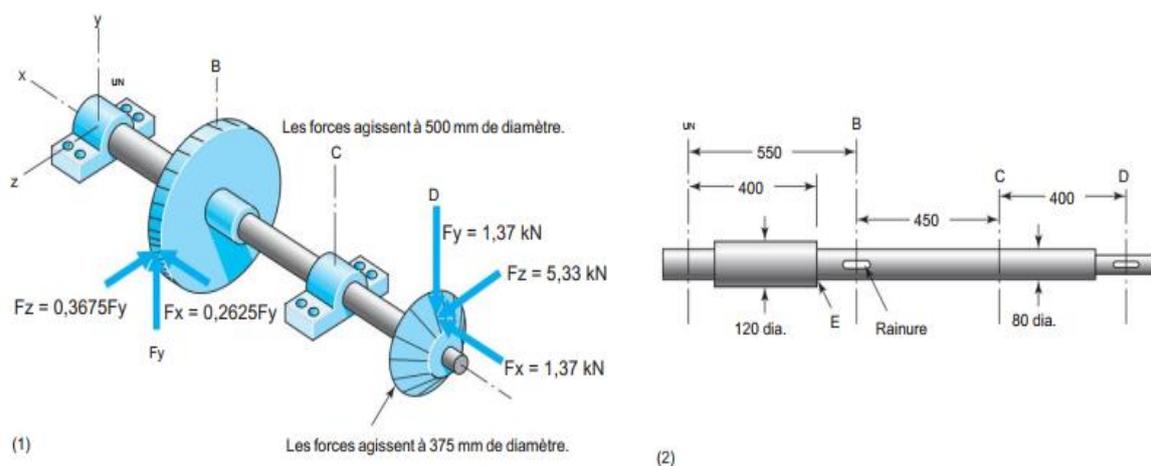


Figure V.1 : Arbre intermédiaire avec engrenages [4].

V.2. Travail demandé

- Dessins des diagrammes : de charges, d'effort tranchant et de moment de flexion pour l'arbre dans les plans xy et xz, de l'effort axial et du moment de torsion.
- Calcul des contraintes équivalentes aux points B, C et E de l'arbre, en vue de déterminer les facteurs de sécurité à la fatigue en B,C et E pour une fiabilité de 99%.

V.3. RÉOLUTION

V.3.1. Dessin des diagrammes

IV.3.1.1. Détermination des charges appliquées sur l'engrenage B

A l'équilibre on a:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow F_y \times \frac{D}{2} - F_z \times \frac{d}{2} = 0$$

$$F_y \times 250 = 5.33 \times 187.5 \Rightarrow F_y = \frac{5.33 \times 187.5}{250}$$

$$\Rightarrow F_y = 4 \text{ KN}$$

D : diamètre de l'engrenage hélicoïdal

d : diamètre de l'engrenage conique

D'après les données fournies :

$$F_x = 0,2625 F_y = 1,05 \text{ KN} ; F_z = 0,3675 F_y = 1,47 \text{ KN.}$$

IV.3.1.2. Détermination des charges appliquées sur l'arbre dans les plans xy et xz

Le plan xy :

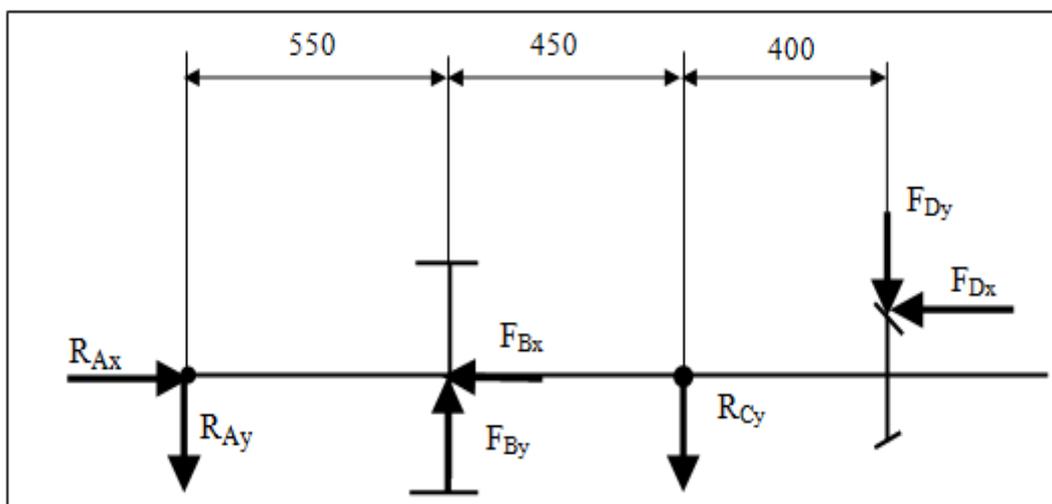


Figure V. 2: l'arbre dans les plans xy

Sur l'axe x :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ax} - F_{Bx} - F_{Dx} = 0 \text{ d'où } R_{Ax} = 1.05 + 1.37 = 2.42 \text{ KN}$$

Sur l'axe y :

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -R_{Ay} + F_{By} - R_{Cy} - F_{Dy} = 0 \\ &\Rightarrow -R_{Ay} = F_{By} - R_{Cy} - F_{Dy}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\sum M_z/A = 0 \Rightarrow -F_{By} \times 550 + R_{Cy} \times 1000 - F_{Dy} \times 187.5 + F_{Dy} \times 14000 = 0$$

$$\Rightarrow R_{Cy} = \frac{4(550) + 1,37(187,5) - 1,37(1400)}{1000} = 0,54 \text{ KN}$$

De (1) : $R_{Ay} = 4 - 0,54 - 1,37 = 2,09 \text{ KN}$

Le plan xz :

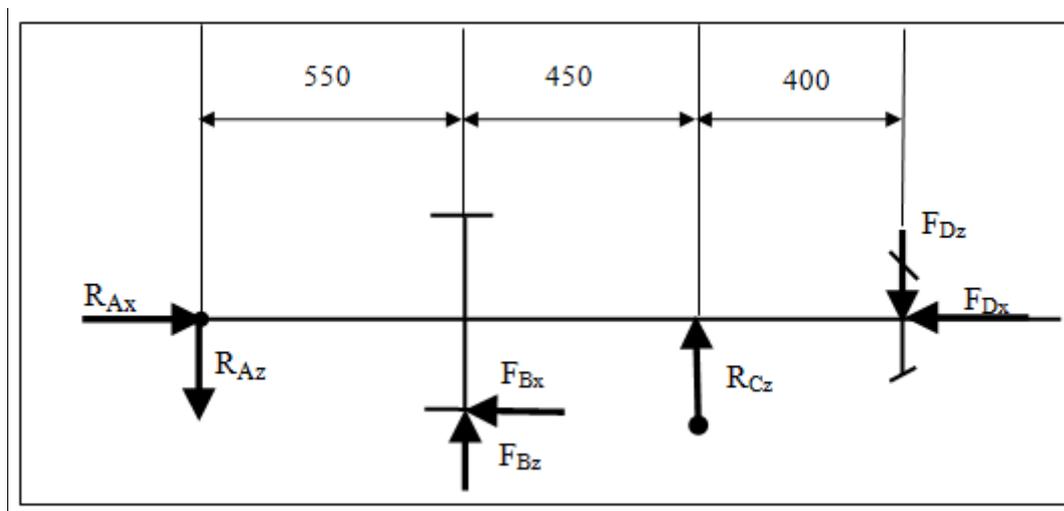


Figure V. 3: l'arbre dans les plans xz

Sur l'axe z :

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0 &\Rightarrow -R_{Az} + F_{Bz} + R_{Cz} - F_{Dz} = 0 \\ &\Rightarrow R_{Az} = F_{Bz} + R_{Cz} - F_{Dz}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow F_{Bz} \times 250 - F_{Bz} \times 550 - R_{Cz} \times 1000 + F_{Dz} \times 14000 = 0$$

$$\Rightarrow R_{Cz} = \frac{1,05(250) - 1,47(550) + 5,33(1400)}{1000} = 6,92 \text{ KN}$$

De (2) : $R_{Az} = 1,47 + 6,92 - 5,33 = -3,06 \text{ KN}$

IV.3.1.3. Détermination des efforts tranchant dans l'arbre

Le Plan xy

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 550$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{Ay} - T_1 = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = -R_{Ay}$$

$$\Rightarrow T_1 = -2.09 \text{ KN}$$

Tronçon 2 : $550 \leq x \leq 1000$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + F_{By} - T_2 = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = -R_{Ay} + F_{By}$$

$$\Rightarrow T_2 = -2.09 + 4$$

$$\Rightarrow T_2 = 1.91 \text{ KN}$$

Tronçon 3 : $1000 \leq x \leq 1400$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -R_{Ay} + F_{By} - R_{cy} - T_3 = 0$$

$$\Rightarrow T_3 = -R_{Ay} + F_{By} - R_{cy}$$

$$\Rightarrow T_3 = -2.09 + 4 - 0.54$$

$$\Rightarrow T_3 = 1.37 \text{ KN}$$

Le Plan xz

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 550$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_{Az} - T_1 = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = -R_{Az}$$

$$\Rightarrow T_1 = -3.06 \text{ KN}$$

Tronçon 2 : $550 \leq x \leq 1000$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_{Az} + F_{Bz} - T_2 = 0$$

$$\Rightarrow T_2 = -R_{Az} + F_{Bz}$$

$$\Rightarrow T_2 = -3.06 + 1.47$$

$$\Rightarrow T_2 = -1.59 \text{ KN}$$

Tronçon 3 : $1000 \leq x \leq 1400$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -R_{AZ} + F_{BZ} + R_{CZ} - T_3 = 0$$

$$\Rightarrow T_3 = -R_{AZ} + F_{BZ} + R_{CZ}$$

$$\Rightarrow T_3 = -3.06 + 1.47 - 6.92$$

$$\Rightarrow T_3 = 5.33 \text{ KN}$$

IV.3.1.4. Détermination de la normal N

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 550$

$$R_{Ax} + N = 0 \Rightarrow N = -R_{Ax} = -2.42 \text{ KN}$$

Tronçon 2 : $550 \leq x \leq 1400$

$$R_{Ax} - F_{Bx} + N = 0 \Rightarrow N = -R_{Ax} + F_{Bx} = -1.37 \text{ KN}$$

IV.3.1.5. Détermination du moment de torsion

Le couple aux deux engrenages doit être égal.

Par conséquent, $F_{By} (250\text{mm}) = F_{Dz} (187,5 \text{ mm}) = 1000 \text{ KN.mm}$

IV.3.1.6. Détermination du moment de flexion

Le plan xy :

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 550$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_f - R_{Ay} * x = 0 \Rightarrow M_f = -R_{Ay} * x$$

Pour :

$$X=0 \Rightarrow M_f=0$$

$$X=550 \Rightarrow M_f = -2.09 * 550 = -1149.5 \text{ KN.mm}$$

Tronçon 2 : $550 \leq x \leq 1000$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_f - R_{Ay} * x + F_{By} (x - 550) = 0$$

$$\Rightarrow M_f = -R_{Ay} * x + F_{By}(x - 550)$$

Pour :

$$x = 550 \Rightarrow M_f = -2.09 * 550 + 4 * (550 - 550) = -1149.5 \text{ KN.mm}$$

$$x = 1000 \Rightarrow M_f = -2.09 * 1000 + 4 * (1000 - 550) = -290 \text{ KN.mm}$$

Tronçon 3 : $1000 \leq x \leq 1400$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_f - R_{Ay} * x + F_{By}(x - 550) - R_{Cy} * (x - 1000)$$

$$\Rightarrow M_f = -R_{Ax} * (x) + F_{By} (x - 550) - R_{Cy} * (x - 1000)$$

Pour :

$$x = 1000 \Rightarrow M_f = -2.09 * (1000) + 4 * (1000 - 550) = -290 \text{ KN.mm}$$

$$x = 1400 \Rightarrow M_f = -2.09 * (1400 - 1000) + 4 * (1400 - 550) - 0.54 (1400 - 1000) \\ = 258 \text{ KN.mm}$$

Le plan xz :

Tronçon 1 : $0 \leq x \leq 550$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -M_f - R_{Az} * x = 0 \Rightarrow M_f = -R_{Az} * x$$

Pour :

$$x = 0 \Rightarrow M_f = 0$$

$$x = 550 \Rightarrow M_f = -3.06 * 550 = -1683 \text{ KN.mm}$$

Tronçon 2 : $550 \leq x \leq 1000$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -M_f - R_{Az} * x + F_{Bz} * (x - 550) + M_f = 0$$

$$\Rightarrow M_f = F_{Bz} * (x - 550) - R_{Az} * x + M_f$$

Pour :

$$x = 550 \Rightarrow M_f = 1.47 * (550 - 550) - 3.06 * 550 + 262.5 = -1420.5 \text{ KN.mm}$$

$$x = 1000 \quad \Rightarrow \quad M_f = 1.47*(1000-550) - 3.06*1000 + 262.5 = -2136 \text{ KN.mm}$$

Tronçon 3 : $1000 \leq x \leq 1400$

$$\sum M_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -M_f - R_{ay} * x + F_{by}(X-550) - R_{cy}*(x - 1000) + M_f + R_{cz}(x - 1000)$$

$$\Rightarrow \quad M_f = F_{By} (x - 550) - R_{Az}*(x) - R_{cy}*(x - 1000) + M_f + R_{cz}(x - 1000)$$

Pour :

$$\begin{aligned} x=1000 \quad \Rightarrow \quad M_f &= 1.47*(1000 - 550) - 3.06*1000 + 262.5 + 6.92*(1000 - 1000) \\ &= - 2136 \text{ KN.mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=1400 \quad \Rightarrow \quad M_f &= 1.47*(1400-550) - 3.06*1400 + 262.5 + 6.92*(1400-1000) \\ &= - 4 \text{ KN.mm} \end{aligned}$$

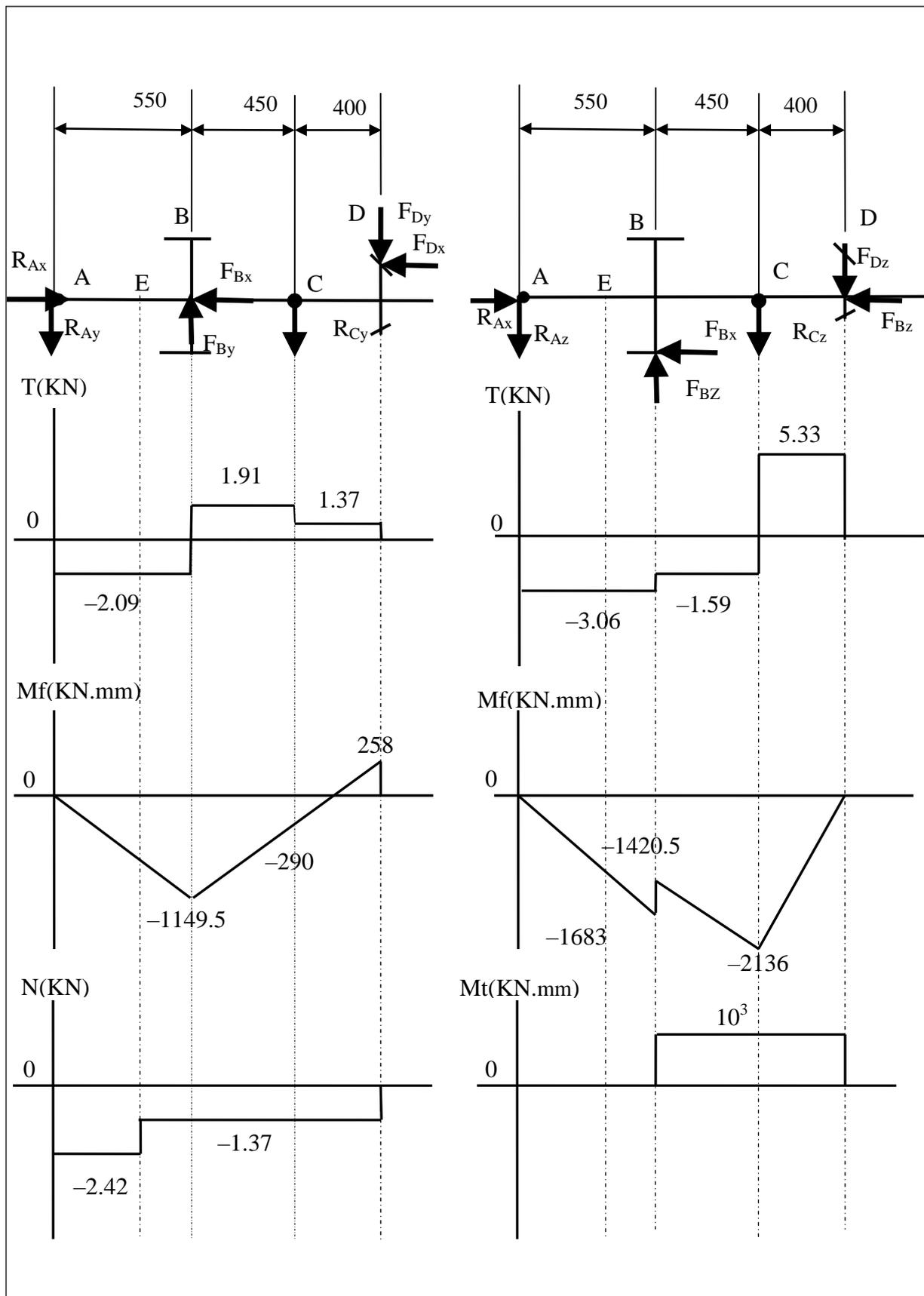


Figure V. 4 : Diagrammes de l'effort tranchant, du moment de flexion de l'arbre dans les plans xy et xz, effort axial et le moment de torsion sur la longueur de l'arbre.

V.3.2. Détermination des contraintes

a) Au point E

Au point E nous avons :

- $N = -1,37 \text{ kN}$,
- $Mf_{xy} = 836 \text{ KN. mm}$, $Mf_{xz} = 1224 \text{ KN. mm}$
- ✓ Contrainte axiale (moyenne) : $\sigma_m = \frac{4N}{\pi d^2} \times Kf$

De l'abaque (Figure IV.7) on a $Kt=2.2$ et de la figure II.4 On a $q=0.94$

D'où $Kf = 2.13$ et pour $d=80 \text{ mm}$, σ_m :

$$\sigma_m = \frac{4(-1.37 \times 10^3)}{\pi 80^2} \times 2.13 = -0.581 \text{ MPa}$$

- ✓ Contrainte de flexion (contrainte alternée) :

$$\sigma_a = \frac{32Mf}{\pi d^3} \times Kf$$

$$Mf = \sqrt{(Mf_{xy})^2 + (Mf_{xz})^2}$$

$$Mf = \sqrt{(836)^2 + (1224)^2} = 1482 \text{ KN. mm}$$

De l'abaque (Figure IV.11) $Kt= 1.9$, et la figure II.4 $q = 0.94$. Par conséquent, $Kf = 1,85$ et

$$\sigma_a = \frac{32 \times (1482 \times 10^3)}{\pi 80^3} \times 1.85 = 54.5 \text{ MPa}$$

Au point E nous avons :

$$\sigma_m = 0.581 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 54.5 \text{ MPa}$$

b) Au point B

Au point B nous avons :

- $N = -1.37 \text{ KN}$
- $Mf_{xy} = 1149.5 \text{ KN. mm}, Mf_{xz} = 1683 \text{ KN. mm}$
- $Mt = 1000 \text{ KN. mm}$

Dans ce cas nous avons une rainure de clavette pour laquelle on recommande $Kf = 1,6$ pour la flexion et la torsion et $1,0$ pour la charge axiale au niveau de la rainure de clavette.

✓ Contrainte axiale (moyenne) :

$$\sigma_m = \frac{4N}{\pi d^2} \times Kf$$

$$\sigma_m = \frac{4(-1.37 \times 10^3)}{\pi 80^2} \times 1 = -0.27 \text{ MPa}$$

✓ Contrainte de torsion (moyenne) :

$$\tau_m = \frac{16T}{\pi d^3} \times Kf$$

$$\tau_m = \frac{16 \times 10^6}{\pi 80^3} \times 1.6 = 15.9 \text{ MPa}$$

D'où la contrainte équivalente moyenne :

$$\sigma_m = \frac{-0.27}{2} + \sqrt{(15.9)^2 + \left(\frac{-0.27}{2}\right)^2} = 15.76 \text{ MPa}$$

✓ Contrainte de flexion (alternée) :

$$\sigma_a = \frac{32Mf}{\pi d^3} \times Kf$$

$$Mf = \sqrt{(1149.5)^2 + (1683)^2} = 2038 \text{ KN. mm}$$

$$\sigma_a = \frac{32 \times (2038 \times 10^3)}{\pi 80^3} \times 1.6 = 64.9 \text{ MPa}$$

Au point B nous avons :

$$\sigma_m = 15.76 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 64.9 \text{ MPa}$$

c) Au point C

Au point C nous avons :

- $N = -1.37 \text{ KN}$
- $M_{f_{xy}} = 290 \text{ KN} \cdot \text{mm}$, $M_{f_{xz}} = 2132 \text{ KN} \cdot \text{mm}$
- $M_t = 1000 \text{ KN} \cdot \text{mm}$

Dans ce cas on prend $K_f=1$ (pas d'entailles)

- ✓ Contrainte axiale (moyenne) :

$$\sigma_m = \frac{4N}{\pi d^2}$$

$$\sigma_m = \frac{4(-1.37 \times 10^3)}{\pi 80^2} = -0.27 \text{ MPa}$$

- ✓ Contrainte de torsion (moyenne) :

$$\tau_m = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = \frac{16 \times 10^6}{\pi 80^3} = 9.94 \text{ MPa}$$

D'où la contrainte équivalente moyenne :

$$\sigma_m = \frac{-0.27}{2} + \sqrt{(9.94)^2 + \left(\frac{-0.27}{2}\right)^2} = 9.80 \text{ MPa}$$

- ✓ Contrainte de flexion (alternée) :

$$\sigma_a = \frac{32M_f}{\pi d^3}$$

$$M_f = \sqrt{(2132)^2 + (290)^2} = 2152 \text{ KN} \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_a = \frac{32 \times (2152 \times 10^3)}{\pi 80^3} = 42.8 \text{ MPa}$$

Au point C nous avons :

$$\sigma_m = 9.80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_a = 42.8 \text{ MPa}$$

V.3.3. Détermination des facteurs de sécurité à la fatigue aux points E, B et C.

Pour pouvoir déterminer les facteurs de sécurité à la fatigue, on doit tracer le diagramme de résistance à la fatigue ($\sigma_m - \sigma_a$) selon la loi de GOODMAN. Pour cela on doit évaluer les contraintes d'endurances.

La contrainte d'endurance à la fatigue est donnée par :

$$S_n = S'_n C_L C_G C_S C_T C_R$$

Où :

$S'_n = 0.5 S_u$: Contrainte d'endurance (acier) sans entailles

C_L : Facteur de charge

C_G : Facteur de gradient

C_S : Facteur de surface

C_T : Facteur de température

C_R : Facteur de fiabilité

S_n est calculé pour deux valeurs de C_S

$C_S = 0.9$ zones non entaillées

$C_S = 1$ zones entaillées

Les autres facteurs sont inchangés et ils sont tirés du tableau V.1

L'arbre est d'un acier de : $S_u = 155 \text{ ksi} = 1069 \text{ MPa}$; $S_y = 130 \text{ ksi} = 896 \text{ MPa}$

D'où :

Pour $C_S = 0.9$, $C_L = 1$, $C_G = 0.8$, $C_T = 1$, $C_R = 0.816$

$$S_n = S'_n C_L C_G C_S C_T C_R = \left(\frac{1069}{2} \right) (1)(0.8)(0.9)(1)(0.816)$$

$$S_n = 314 \text{ MPa}$$

Pour $C_S=1$, $C_L=1$, $C_G=0.8$, $C_T=1$, $C_R=0.816$

$$S_n = S'_n C_L C_G C_S C_T C_R = \left(\frac{1069}{2}\right) (1)(0.8)(1)(1)(0.816)$$

$S_n = 349 \text{ MPa}$

Les contraintes de rupture par fatigue sont les points d'intersection des droites de GOODMAN et les droites passant par l'origine et les points de contraintes E(0,54.5), B(15.76,64.9) et C(9.80,42.8). En connaissant ces contraintes les facteurs de sécurité à la fatigue sont donnés par :

$$F_s = \frac{\text{Contrainte de rupture par fatigue}}{\text{Contrainte alternée}}$$

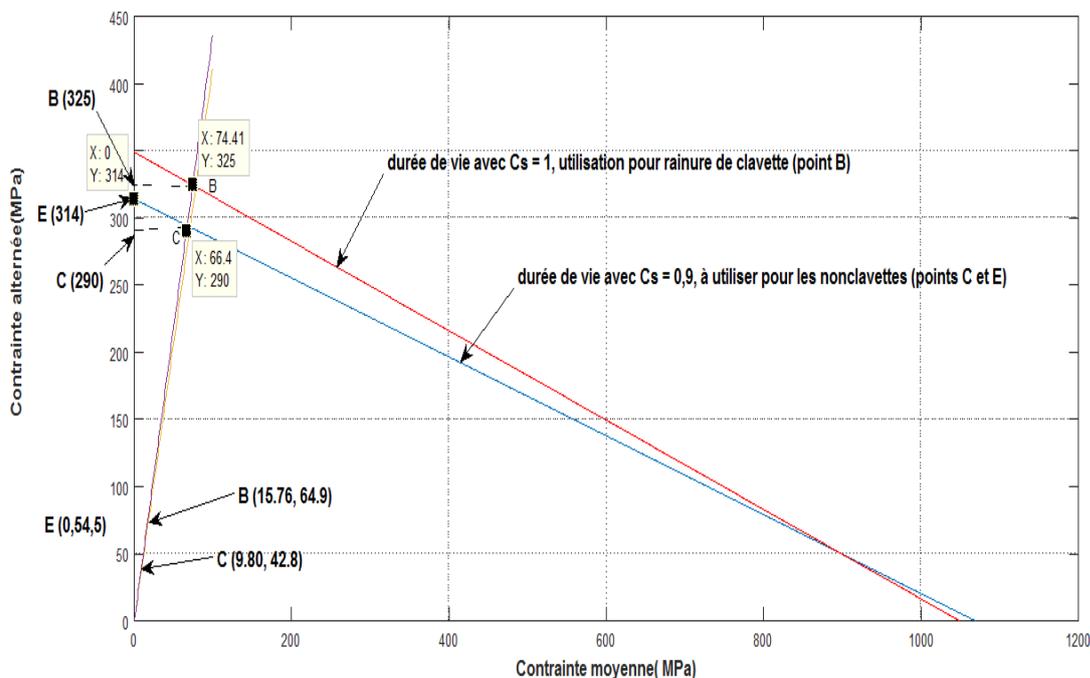


Figure V. 5: Diagramme de rupture par fatigue

D'après le diagramme de rupture par fatigue figure V.5 on relève les contraintes de rupture par fatigue suivantes :

- Au point B : $\sigma_f = 325 \text{ MPa}$
- Au point C : $\sigma_f = 290 \text{ MPa}$
- Au point E : $\sigma_f = 314 \text{ MPa}$

D'où les facteurs de sécurité aux points demandés :

- Point (E) : $F_s = 314/54,5 = 5,8$
- Point (B) : $F_s = 325/64,9 = 5,0$
- Point (C) : $F_s = 290/42,8 = 6,8$

Les facteurs de sécurité trouvés sont les mêmes que ceux donnés comme réponse par la référence [4]. On remarque que ces facteurs de sécurité sont nettement supérieurs à 3 donc la résistance à la fatigue de l'arbre est vérifiée.

Tableau V. 1: Facteurs de résistance à la fatigue généralisés pour les matériaux ductiles (courbes S–N) [4].

	Flexion	Traction	Torsion
CL (facteur de charge)	1.0	1.0	0.58
CG (facteur de gradient) : diamètre <(0,4 po ou 10 mm)	1.0	0,7 à 0,9	1.0
(0,4 po ou 10 mm) < diamètre < (2 po ou 50 mm)^c	0,9	0,7 à 0,9	0,9
CS (facteur de surface)	voir Figure V.5		
CT (facteur de température) T=< 840 °F	Les valeurs sont uniquement pour l'acier		
840 °F < T=< 1020 °F	1,0	1,0	1,0
		1 - (0,0032T - 2,688)	
CR (facteur de fiabilité)			
50% fiabilité "	1.000	"	"
90% "	0,897	"	"
95% "	0,868	"	"
99% "	0.814	"	"
99,9 % "	0,753	"	"

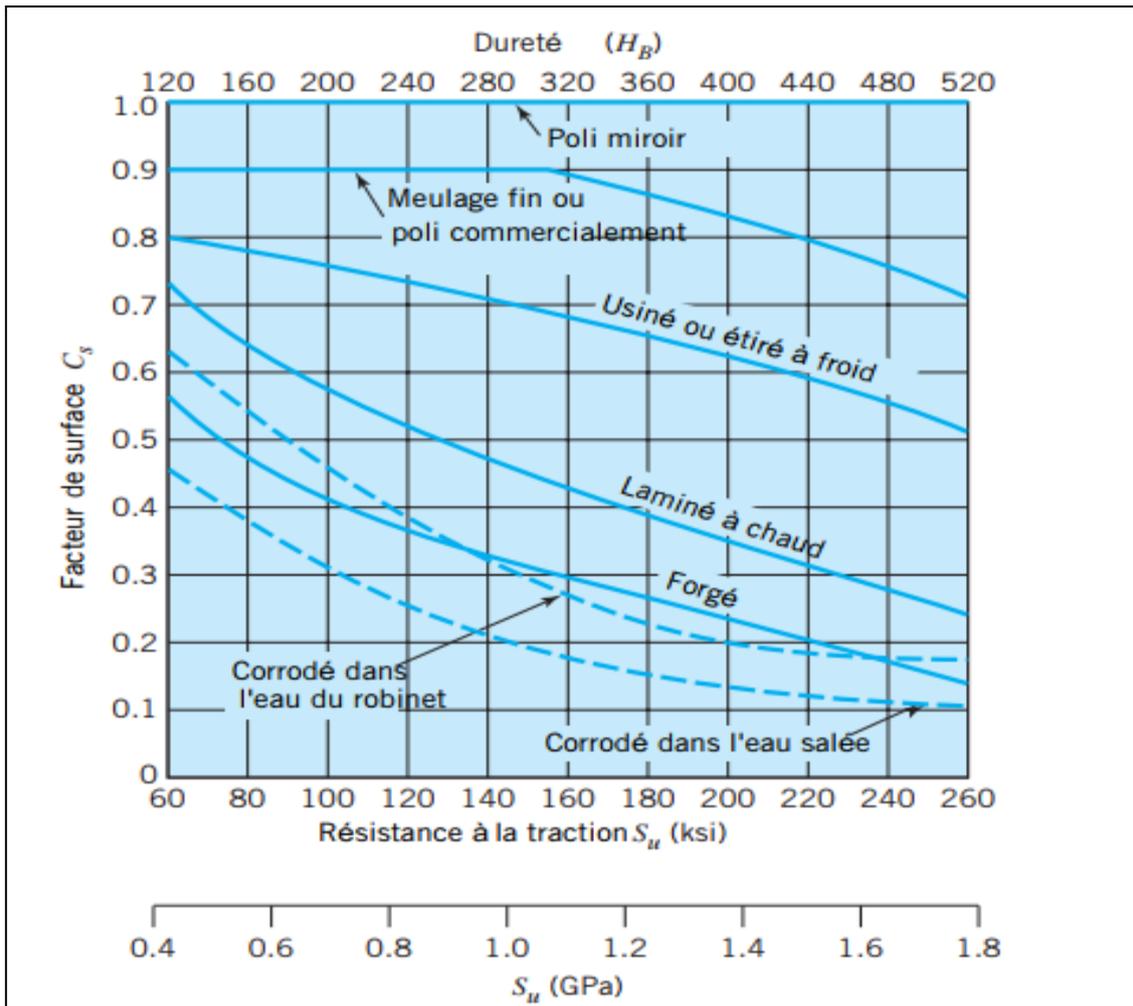


Figure V. 6: Réduction de la limite d'endurance en raison de la finition de surface - pièces en acier ; c'est-à-dire le facteur de surface par rapport à la résistance à la traction différents états de surface [4].

V.4. Conclusion

Dans ce chapitre on fait une vérification d'un arbre transmission de puissance à la fatigue par méthode RDM. Les résultats obtenus sont acceptables donc l'arbre fonctionne en toute sécurité.

Conclusion générale

L' effet d' entailles cause des concentrations de contraintes. Ces concentrations sont sources de rupture par fatigue des éléments de machines, en exemple les arbres.

Dans ce travail nous avons visualisé ces concentrations de contraintes pour les différentes sollicitations possibles d'un arbre épaulé par éléments finis. De même nous avons vérifié la validité d'un abaque donnant le facteur de concentration de contraintes pour ces sollicitations.

Les résultats obtenus montrent que les concentrations de contraintes sont plus importantes si le rayon de l'entaille est faible. Également nous avons vérifié la résistance d'un arbre entaillé à la fatigue. Le but de ce dernier point est de savoir concevoir un arbre fiable travaillant à la fatigue.

En fin par le biais de ce travail, nous avons acquis des connaissances sur les concentrations de contraintes et comment les prendre en considération lors d' une conception mécanique.

Bibliographie

- [1] Dr A. Beloufa, «Cours Eléments de Machines » Centre universitaire – Ain Témouchent, Institut des Sciences et de la Technologie, Département de mécanique, 2016.
- [2] éléments de machines, Gilbert D, Michel G, pierre TH, édition de l'école polytechnique de Montréal, [1986]
- [3] Jean-Philippe NOYEL, «Analyse de l'initiation de fissures en fatigue decontact» L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, École doctorale des Sciences pour l'Ingénieur de Lyon, Spécialité Génie Mécanique, 2015.
- [4] : ROBERT C. JUVINALL et KURT M. MARSHEK «Fundamentals of Machine Component Design»
- [5] Meddour Belkacem, «Fatigue des matériaux». 2016
- [6]A. Doct.GM. FellahFELLAH, « Influence des fissures sur le comportement vibratoire des rotors,» PhD Thesis., 2019.
- [7] : Jian LU et Henri –Paul LIEURADE « Concentration de contrainte »10 avr. 1998.
- [8] : Lassoued Mohammed, «Etude de la concentration de contrainte dans une plaque trouée sollicitée en traction» mémoire de master 2011.

