République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Espaces topologiques métrisables

Présente par :

Yousra Boutelba

Soutenu publiquement le 26/06/2023 devant le jury :

Président	:	Nadir Arada	M.C.A Université de Jijel
Encadreur	:	Hammoud Menigher	M.A.A Université de Jijel
Examinateur	:	Imene Boutana	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

♡ *Remerciements* ♡

Toute ma gratitude et tous mes remerciements les plus sincères à **Allah** qui nous

guident pour terminer ce travail humble.

A la prunelle de mes yeux, ma mère qui a souffert sans me laisser souffrir, je vous remercie pour son amour, son encouragement et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon chère père pour son affection et la confiance qu'il ma accordé. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière.

*J*e tiens un grand merci à mon encadreur de ce mémoire le professeur **"Hammoud Menigher"** pour ça patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils. nous avons bénéficié, au cours de nos études, de votre enseignement clair et précis. vos qualités humaines, votre modestie n'ont rien d'égal que votre compétence.

J'exprime aussi ma gratitude et mon respect aux membres de jury : le président et mon maitre **"Nadir Arada"** de l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire. Votre compétence, votre dynamisme et votre rigueur ont suscité une grande admiration et un profond respect. je remercie mon professeur, Mme **"Imen Boutana"**, d'avoir accepté de se joindre à ce jury comme examinateur, votre présence constitue pour moi un grand honneur, merci pour votre modestie, votre bienveillance. Et Je n'oublie pas non plus toutes mes profs de la faculté math et informatique en général nous vous remercions de votre enseignement.
*M*es remerciement vont aussi a ma forte forteresse mon frère "Mehdi", a mon adorable petite sœur "Aya" qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur. a toutes ma famille, mes amis, mes collègue de promo 2023, à toute personne qui de près ou de loin, a contribué à la réalisation de ce mémoire.

♡ Dédicace ♡

Du profond de mon cœur et sincères mots, je dédie ce travail a mon dieu qui m'a donnée la connaissance, et a tous ceux qui me sont chers,

A mes chers parents

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma

considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour

mon réussite et nous ont éclairé le chemin par

leurs conseils judicieux,

Que dieu leur prête bonheur et longue vie

A mon cher frère et sœur

Qui ont toujours été là pour partager mes joies et mes peines.

A la memoire de mon grand-père

RABAH BOUNAR

Il est décédé très tôt, mais il reste dans nos cœurs et n'a jamait quitté nos souvenirs. Que Dieu accorde la paix à son âme.

A toute la famille BOUTELBA et la famille BOUNAR

Je dédie ce mémoire

YOUSRA

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un espace topologique est un ensemble dont les éléments sont appelés points, auxquels s'ajoute une structure appelée topologie, qui peut être définie comme un ensemble de voisinages pour chaque point satisfaisant à certains axiomes formalisant la notion de proximité.

Les espaces topologiques ont été définis pour la première fois par Felix Hausdorff (mathématicien allemand 1868–1942) en 1914 dans son ouvrage "Principes de la théorie des ensembles". Les espaces métriques avaient été définis plus tôt en 1906 par Maurice Fréchet (mathématicien français 1878–1973), bien que ce soit Hausdorff qui ait popularisé le terme "espace métrique". L'espace métrique est un cas particulier d'espace topologique et joue un rôle important dans les applications de la topologie générale.

En topologie, un espace métrique est un ensemble au sein duquel une notion de distance entre les éléments de l'ensemble est définie. Le développement de la topologie générale a été prouvé que tout espace métrique est un espace topologique, ce qui a soulevé la question : L'inverse est-il toujours vrai ?, c'est-a-dire : Existe-t-il une métrique qui métrise l'espace topologique ?. D'où le concept d'espace métrisable.

De nombreux espaces importants pour les mathématiques sont métrisables, mais certains ne le sont pas. La métrisabilité est toujours un attribut hautement souhaitable pour un espace, car l'existence d'une métrique donne un outil précieux pour prouver des théorèmes sur l'espace. C'est donc un problème d'importance fondamentale en topologie de trouver des conditions sur un espace topologique qui garantissent sa métrisabilité.

Certains mathématiciens ont donné des conditions suffisantes et nécessaires pour qu'un espace topologique soit métrisable. L'un des premiers théorèmes de métrisation largement reconnus était le théorème de métrisation d'Urysohn (Pavel Urysohn, mathématicien soviétique 1898–1924). Ce théorème affirme que tout espace de Hausdorff régulier et vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité est métrisable. L'inverse n'est pas vrai : il existe des espaces métriques qui ne vérifies pas le deuxième axiome de dénombrabilité. Le théorème de métrisation de Nagata–Smirnov (Jun-iti Nagata : mathématicien japonais 1925–2007. Yuri Mikhailovich Smirnov : mathématicien soviétique 1921–2007) fournit un théorème plus spécifique où l'inverse est vrai.

Plusieurs autres théorèmes de métrisation suivent comme simples corollaires du théorème d'Urysohn. Par exemple, un espace de Hausdorff compact est métrisable si et seulement si il est vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.

Ce mémoire a pour objectif faire une étude sur les espaces topologiques métrisables et leurs propriétés, il est divisé en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous commençons par rappeler les notions classiques d'un espace topologique (ouvert, voisinage, base), la notion d'application continue et la notion d'homéomorphisme qui joue un rôle très important dans le transfert des propriétés topologiques d'un espace à un autre. Puis nous donnons les différents axiomes de séparation concernant la séparation de points ou de fermés, du point de vue soit de voisinages, soit de fonctions continues réelles, sans oublier la notion de compacité qui est importante car elle permet de passer d'une information locale sur un ensemble (comme la continuité d'une fonction) à une information globale sur l'ensemble (comme la continuité uniforme d'une fonction).

Dans le deuxième chapitre nous considérons les espaces métriques pour pouvoir y interpréter les notions et les théorèmes établis pour les espaces topologiques.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous allons discuter quelque théorèmes principaux de métrisabilité tel que le théorème de Nagata-smirnov, le théorème d'Urysohn, et le théorème d'Aleksandrov-Uryshon. Ensuite, nous l'avons suivi avec quelques conséquences de métrisabilité.

CHAPITRE 1
ESPACES TOPOLOGIQUES

Pour plus de détails on peut se référer à [1], [3], [4], [7].

1.1 Notions de topologie

Définition 1.1.1. *Une topologie sur un ensemble X est la donnée d'un ensemble θ de parties de X, i.e. $\theta \subset \mathcal{P}(X)$, vérifiant les axiomes suivants :*

1. *$\emptyset$ et X appartiennent à θ.*
2. *θ est stable par réunion quelconque (i.e. une réunion quelconque d'éléments de θ appartient à θ).*
3. *θ est stable par intersection finie (i.e. une intersection finie d'éléments de θ appartiennent à θ).*

L'ensemble X, muni de la topologie θ, est appelé espace topologique. On notera quelquefois (X, θ) un tel espace. Les parties de X qui appartiennent à θ sont dites parties ouvertes ou ouverts de X.

Exemple 1.1.2.

1. *Soit X un ensemble et $\theta = \mathcal{P}(X)$. Alors θ est une topologie sur X, appelée la topologie discrète sur X, pour laquelle donc toute partie de X est ouverte. Un ensemble muni de la topologie discrète est dit espace discret.*

2. *Soit X un ensemble et $\theta = \{\emptyset, X\}$, Alors X est une topologie, appelée la topologie grossière sur X. Dans un tel espace toute partie est à la fois ouverte et fermée.*

Définition 1.1.3. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ On dit que I est un intervalle si, et seulement si,*

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R} | x \leq z \leq y \Longrightarrow z \in I.$$

Définition 1.1.4. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle intervalle centré en x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[$ avec $h > 0$. (h s'appelle le rayon de cet intervalle).*

Proposition 1.1.5. *On considère sur $\mathbb{R}$ la famille $\theta_{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\theta_{\mathbb{R}} = \{A \subset \mathbb{R}, \forall x \in A, \exists h > 0,]x - h, x + h[\subset A\}.$$

Alors $\theta_{\mathbb{R}}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$ appelée la topologie usuelle.

Définition 1.1.6. *On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.*

Définition 1.1.7. *Dans un espace topologique X, une partie O est dite ouverte si elle est un voisinage de chacun de ses points. Ceci s'écrit simplement,*

$$\forall x \in X, x \in O \Rightarrow O \in V(x)$$

Définition 1.1.8. *Dans un espace topologique, un ensemble est dit fermé si son complémentaire est ouvert.*

Proposition 1.1.9. *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées d'un espace topologique X, on a alors*

1. *Toute intersection d'ensembles de $\mathcal{F}$ est un ensemble de $\mathcal{F}$.*
2. *La réunion de deux ensembles de $\mathcal{F}$ est un ensemble de $\mathcal{F}$.*
3. *L'ensemble vide et X appartiennent à $\mathcal{F}$.*

Définition 1.1.10. *Soient (X,θ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \theta$, On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X (ou base de la topologie θ) si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.*

Exemple 1.1.11. *Si X est un espace discret, alors*

$$\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in X\}$$

est une base d'ouverts de X.

Proposition 1.1.12. *Soient (X, θ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \theta$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.*
2. *Pour tout $U \in \theta$ et tout $x \in U$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subset U$.*

Définition 1.1.13. *Soit (X, θ) un espace topologique et $x \in X$. On appelle système fondamental de voisinages de x ou base de voisinages de x, toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que pour tout voisinage V de x, il existe $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$.*

Exemple 1.1.14. *Soit (X, θ) un espace topologique et $x \in X$. Alors $\mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x. L'ensemble des ouverts de X contenant x est une base de voisinages de x. Autrement dit, tout point d'un espace topologique admet une base de voisinages formée d'ensembles ouverts.*

Définition 1.1.15. *Soit $x \in X$ et $A \subset X$.*

1. *On dit que x est intérieur à A lorsque A est un voisinage de x. L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$.*
2. *On dit que x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'adhérence de A et se note $\bar{A}$.*
3. *On dit que x est un point frontière de A, s'il est à la fois adhérent à A et à $X \backslash A$. L'ensemble des points frontières de A s'appelle la frontière de A et se note Fr(A).*

Remarque 1.1.16. *Soit $A \subset X, x \in X$ et $\mathcal{B}_x$ une base de voisinage de x. Alors on a :*

1. *$x \in \overset{o}{A}$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{B}_x$ tel que $V \subset A$.*
2. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{B}_x$, on a $V \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 1.1.17. *Une partie A d'un espace topologique X est dite dense dans X ou partout dense si $\bar{A} = X$. L'espace X est dit séparable s'il existe une partie dénombrable partout dense.*

Exemple 1.1.18. *Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\theta = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}, X\}$ une topologie sur X. Soit A={1,2}, alors $\bar{A}$=X, donc A est dense dans X.*

Proposition 1.1.19. *Une partie A de X est partout dense si, et seulement si, tout ouvert non vide rencontre A.*

Proposition 1.1.20. *Soit $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de X et A un sous-ensemble de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est dense dans X.*
2. *Pour tout ouvert non vide U de X, on a $A \cap U \neq \emptyset$.*
3. *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \neq \emptyset$, on a $A \cap B \neq \emptyset$.*

1.2 Applications continues

Définition 1.2.1. *Soient X,Y deux espaces topologiques, $x_0 \in X$ et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est continue en x_0 si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes :*

1. *Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X.*
2. *Pour tout voisinage W de $f(x_0)$ dans Y, il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que $f(V) \subset W$.*

On dit que f est continue ou continue sur X si elle est continue en tout point de X.

Définition 1.2.2. *Soient X,Y deux espaces topologiques et f :$X \to Y$ une application.*

1. *On dit que f est un homéomorphisme de X sur Y si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.*
2. *On dit que les espaces topologiques X et Y sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de X sur Y .*

Les propriétés d'un espace topologique qui se conservent par homéomorphisme sont appelées propriétés topologiques.

Exemple 1.2.3. *Toute application constante de (X, θ_1) dans (Y, θ_2) est continue.*

Remarque 1.2.4. *Une application continue bijective n'est pas nécessairement un homéomorphisme.*

1.3 Axiomes de séparation

Définition 1.3.1. *Soit X un espace topologique.*

1. *On dit que X est un T_0-espace si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre point.*

2. *On dit que X un T_1-espace si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V de x, et un voisinage W de y dans X tels que $y \notin V$ et $x \notin W$.*

Proposition 1.3.2. *Un espace topologique X est T_1 si et seulement si les singletons $\{x\} \subset X$ sont des fermés.*

Démonstration.
$\Rightarrow$) Supposons que X est T_1 et montrons que $\overline{\{x\}} = \{x\}, x \in X$. Supposons qu'il existe $y \in \overline{\{x\}}$ tel que $y \neq x$, donc pour tout voisinage V de y on a $V \cup \{x\} \neq \emptyset$, c'est à dire $x \in V$. Comme X est un espace T_1 on résulte que $y \in \{x\}$. ce qui contredit $y \neq x$.
$\Leftarrow$) Soit x et y deux points de X distincts. Le singleton $\{x\}$ est fermé, et donc $X \backslash \{x\}$ est un ouvert et un voisinage de y ne contenant pas x. De même, on a $X \backslash \{y\}$ est un voisinage ouvert de x qui ne contient pas y. Alors X est T_1. □

Définition 1.3.3. *On dit que X est un T_2-espace ou X est séparé ou encore X est de* ***Hausdorff*** *s'il vérifie la propriété suivante, appelée axiome de Hausdorff :*

Pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage V de y dans X tels que $U \cap V = \emptyset$.

Exemple 1.3.4. *L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est séparé. En effet, Soit x et y deux éléments distincts dans $\mathbb{R}$, on peut supposer que $x < y$. Alors l'intervalle ouvert $]x-1, \frac{x+1}{2}[$ est un voisinage de x et l'intervalle ouvert $]\frac{x+y}{2}, y+1[$ est un voisinage de y et on a $]x-1, \frac{x+1}{2}[\cap]\frac{x+y}{2}, y+1[= \emptyset$.*

Proposition 1.3.5. *Un espace topologique X est séparé si, et seulement si, pour tout point $x \in X$, l'intersection de tous les voisinages fermés de x se réduit à $\{x\}$.*

Définition 1.3.6. *Un espace topologique X est dit :*
1) Un espace T_3 ou régulier s'il est T_1 et si pour tout $x \in X$ et tout fermé F de X, avec $x \notin F$, il existe deux ouverts U, V tel que $x \in U$. $F \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
2) Un espace $T_{3\frac{1}{2}}$ ou complètement régulier s'il est T_1 et si pour tout $x \in X$ et $x \notin F$ fermé de X ; il existe une application continue $f : X \longmapsto [0,1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$ pour tout $y \in F$.

Définition 1.3.7. *Un espace topologique X est dit T_4-espace ou normal, s'il est séparé et si deux fermés disjoints A, B de X quelconques possédant toujours des voisinages disjoints U et V de X tel que $A \subset U$ et $B \subset V$.*

Théorème 1.3.8 (Lemme d'Urysohn).
Soit X un espace topologique séparé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) X est normal.
(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles fermés disjoints de X, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f(A) = 0$ et $f(B) = 1$.

Démonstration. $(ii) \Rightarrow (i)$
On supposons les deux ouverts $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$ dans le sous-espace $[0,1]$, comme f est continue, on a $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ et $V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1])$ sont ouverts, on a $A \subset f^{-1}(0) \subset f^{-1}([0, 1 \setminus 2[)$ et $B \subset f^{-1}(1) \subset f^{-1}(]1 \setminus 2, 1])$ donc U et V contiennent respectivement les fermés A et B. En conclure X est normal.
La démonstration de $(i) \Rightarrow (ii)$
On supposons que X est normal et montrons que Si A et B sont deux sous-ensembles fermés disjoints de X, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0,1]$ telle que $f(A) = 0$ et $f(B) = 1$. Il existe une famille d'ouverts $(U_t)_{t \in [0,1]}$ (voir [1]) vérifiant les propriétés suivantes :

1. $A \subset U_0$
2. $B \subset X \setminus U_1 = U_1^c$
3. $0 \leq t < t' \leq 1$ implique $\bar{U}_t \subset U_{t'}$.

La fonction

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in U_1^c \\ \inf\{t, x \in U_t\} \end{cases}$$

répond à nos besoins. On a $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in X$ car $0 \leq t \leq 1$, $f(A) \subset f(U_0) = \{0\}$, $f(B) \subset f(U_1^c) = \{1\}$. Pour tout $0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1$ on a

$$f^{-1}([0, a[) = \bigcup_{t<a} U_t \tag{1.1}$$

et

$$f^{-1}(]b, 1]) = \bigcup_{t>b} \bar{U}_t^c \tag{1.2}$$

Démonstration de (1.1)
En effet, soit $x \in f^{-1}([0, a[)$. On a

$$0 \leq f(x) = \inf\{t, x \in U_t\} < a < 1$$

d'après la définition de la borne inférieure, il existe $t_0 < a$ tel que $x \in U_{t_0}$ alors $x \in \bigcup\limits_{t<a} U_t$ et

$$f^{-1}([0,a[) \subset \bigcup_{t<a} U_t.$$

Pour l'inclusion inverse, soit $x \in \bigcup\limits_{t<a} U_t$, il existe $t_0 < a$ avec $x \in U_{t_0}$ et

$$f(x) = \inf\{t, x \in U_t\} \leq t_0 < a$$

alors $x \in f^{-1}([0,a[)$. donc (1.1) est vrai.
Démonstration de (1.2)
si $x \in f^{-1}(]b,1])$, alors $b < f(x) \leq 1$, il existe $t_1, t_2 \in [0,1]$, $b < t_1 < t_2 < f(x)$ tel que $x \notin U_{t_2}$. Comme $\bar{U}_{t_1} \subset U_{t_2}$ on déduit que $x \notin \bar{U}_{t_1}$. D'où $x \in \bar{U}_{t_1}^c \subset \bigcup\limits_{t>b} \bar{U}_t^c$. Ainsi

$$f^{-1}(]b,1]) \subset \bigcup_{t>b} \bar{U}_t^c.$$

Pour obtenir l'inclusion inverse, soit $x_0 \in \bigcup\limits_{t>b} \bar{U}_t^c$. Il existe $t_0 > b$ tel que $x_0 \notin \bar{U}_{t_0}$. Comme $t < t_0$ implique $\bar{U}_t \subset U_{t_0}$ on en déduit que $x_0 \notin \bar{U}_t$ pour tout $t < t_0$, cela montre que $\inf\{t, x \in U_t\} > t > b$, d'où $f(x) \in]b,1]$ implique $x \in f^{-1}(]b,1])$ et l'inclusion cherchée.
On a les images réciproques par f des intervalles de la forme $[0,a[,]b,1]$ sont ouvertes de X, comme ces intervalles engendrent la topologie du sous-espace $[0,1]$, on en déduit que l'image réciproque de tout ouvert de $[0,1]$ par f est un ouvert de X, d'où f est continue.

□

Proposition 1.3.9. *Tout sous-espace d'un espace régulier est régulier.*

Démonstration. Soit A un sous-espace d'un espace régulier X. Comme X est séparé alors A est séparé. Soit $x \in A$ et F un fermé de A tel que $x \notin F$. Alors $F = G \cap A$ où G est un fermé de X. On a $x \in A$ et $x \notin F = G \cap A$ donc $x \in G$.
Comme X est régulier, il existe deux ouverts disjoints V et W de X tel que $x \in V$ et $G \subset W$.
Soit $V' = V \cap A$ et $W' = W \cap A$. Alors V' et W' sont deux ouverts disjoints de A vérifiant $x \in V'$ et $F \subset W'$. De plus A est séparé, donc A est régulier. □

Proposition 1.3.10. *Si dans un espace topologique X, tout point possède un voisinage fermé qui soit un sous-espace régulier de X, est régulier.*

Corollaire 1.3.11. *On a les implications suivantes :*

$$T_4 \Longrightarrow T_{3_{1/2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$$

Démonstration. Montrons par exemple l'implication $T_{3_{1/2}} \Longrightarrow T_3$.

Soit X un espace complètement régulier. $x \in X$ et F un fermé de X tel que $x \notin F$, $f : X \longmapsto [0,1]$ une fonction continue tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, pour tout $y \in F$. Posons :

$$U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$$

et

$$V = f^{-1}(]\frac{1}{2}, 1]).$$

On a

$$[0, \frac{1}{2}[=] - 1, \frac{1}{2}[\cap[0,1] \in \theta_{[0,1]};$$

et

$$]\frac{1}{2}, 1] =]\frac{1}{2}, 2[\cap[0,1] \in \theta_{[0,1]}.$$

Comme f est continue, alors $U, V \in \theta_X$ et $U \cap V = \emptyset$. tel que $x \in U$ et $F \subset V$, donc X est régulier. □

1.4 Espaces séparables et dénombrabilité

Définition 1.4.1. *Un ensemble X est infini si, et seulement si, il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans X, soit Card $\mathbb{N} \leq$ Card X.*

Définition 1.4.2. *Un espace est dit à base dénombrable s'il admet une base d'ouverts dénombrable.*

Exemple 1.4.3. *L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle admet une base dénombrable d'ouverts. En effet, soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, i.e.*

$$\mathcal{B} = \{]a, b[; a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$$

Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathcal{B}$ l'est aussi. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que tout point de $\mathbb{R}$ a une base de voisinages constituée par de tels intervalles. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$ tels que

$$x - \frac{1}{n} < p_n < x < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Alors la famille des intervalles $]p_n, q_n[$ forme une base de voisinages de x.

Définition 1.4.4. *Une famille de parties d'un espace topologique est dit localement finie lorsque chaque point possède un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de la famille, une famille dénombrable localement finie est une union dénombrable de familles localement finies.*

Définition 1.4.5. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des collections, alors on dit que $\mathcal{V}$ est coussinée (cushioned) dans $\mathcal{U}$ si a chaque $V \in \mathcal{V}$ il existe $U(V) \in \mathcal{U}$, telle que pour toute sous-collection $\mathcal{V}'$ de V,*

$$\overline{\cup\{V, V \in \mathcal{V}'\}} \subset \cup\{U(V), V \in \mathcal{V}'\}$$

Définition 1.4.6. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des collections, alors on dit que $\mathcal{V}$ est σ-coussinée dans $\mathcal{U}$ si chaque V_n de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ est coussinée dans $\mathcal{U}$.*

Définition 1.4.7. *On dit qu'un espace topologique (X, θ) est séparable s'il admet une partie dénombrable et dense.*

Exemple 1.4.8. $(\mathbb{R}, \theta)$*est séparable car $\bar{Q} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Proposition 1.4.9. *Soit X un espace topologique séparable. Alors toute famille d'ouverts non vides deux à deux disjoints de X est au plus dénombrable.*

Théorème 1.4.10. *Soit (X, θ) un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts. Alors X est séparable.*

Définition 1.4.11.

1. *On dit que X vérifie le premier axiome de dénombrabilité si tout $x \in X$ admet un système fondamental au plus dénombrable de voisinages.*
2. *On dit que X vérifie le second axiome de dénombrabilité si la topologie de X admet une base au plus dénombrable d'ouverts.*

Remarque 1.4.12. *Tout espace topologique vérifiant le second axiome de dénombrabilité vérifie aussi le premier axiome de dénombrabilité. La réciproque est en général fausse ; il suffit de considérer un ensemble X infini non dénombrable et muni de la topologie discrète.*

1.5 Espaces compacts

Les résultats de cette section sont pris des références [3], [4], [6].

Définition 1.5.1.

1. *Un recouvrement de X est une famille $(A_i)_i \in I$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que est un recouvrement fini de X.*
2. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Si $J \subset I$ tel que $X = \bigcup_{j\in J} A_j$ on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement de $(A_i)_i \in I$. Si de plus, J est fini, on dit alors que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $(A_i)_i \in I$.*
3. *Un recouvrement ouvert de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$*

Définition 1.5.2. *Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est compact si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X tell que $X = \cup(U_i)_{i\in I}$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \cup(U_i)_{i\in J}$.*

Exemple 1.5.3. *Soit X un espace topologique séparé et $A = \{a_1, ..., a_p\}$ une partie finie de X. Alors A est compacte.*
En effet, soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Pour tout $n \in \{1, ..., p\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $a_n \in U_{i_n}$, donc $A \subset \bigcup_{n=1}^{p} U_{i_n}$. Par conséquent A est compacte.

Exemple 1.5.4. *L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle n'est pas compact. En effet, pour $n \geq 0$, soit $U_n =]-n, n[$, alors $(U_n)_{n\geq 0}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, et on ne peut pas en extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.5.5. *Un espace topologique X est un espace de Lindelöf si, seulement si, chaque recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable.*

Théorème 1.5.6 (Lemme de Tychonoff).
Tout espace de Lindelöf régulier est normal.

Définition 1.5.7. *Soit (X, θ) un espace topologique séparé. Une partie A de X est dite compacte si le sous-espace A est compact (i.e. A muni de la topologie induite θ_A est compact).*

Il est important de noter que le sous-espace A de X est compact si et seulement si, de tout recouvrement de A par des ouverts de (X, θ) on peut extraire un recouvrement fini. Autrement dit : dire que A est θ_A-compact équivaut à dire que A est θ-compact (i. e . de tout recouvrement de A par les ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini). En effet, soit

$$A \subset \cup_{i \in I} W_i, (W_i \in \theta)$$

On a

$$A = \cup_{i \in I} (W_i \cap A) \quad \text{et} \quad (W_i \cap A) \in \theta_A$$

Si (A, θ_A) est compact, il existe $\mathcal{I}$ partie finie de I telle que :

$$A = \cup_{i \in \mathcal{I}} (W_i \cap A) \quad \text{et} \quad A \subset \cup_{i \in \mathcal{I}} W_i.$$

La réciproque se démontre de la même manière.

Définition 1.5.8. *On dit que A est relativement compacte si $\bar{A}$ est compact.*

Théorème 1.5.9 (Heine-Borel-Lebesgue).
Pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ tout intervalle borné et fermé $[a, b]$ est compact.

Démonstration. Soit $[a, b]$ avec $a \leq b$, un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est séparé, alors $[a, b]$ est séparé. Si $a = b$, alors $[a, b] = \{a\}$ est un ensemble fini, donc il est compact.
Si $a < b$, soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Soit E l'ensemble des points x de $[a, b]$ tels qu'il existe une partie finie J de I vérifiant $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. L'ensemble E est non vide car $a \in E$, et majoré par b, donc E admet une borne

supérieure c. De plus on a $c \in [a,b]$. On va montrer que $c \in E$ et que $c = b$. Soit $i_c \in I$ tel que $c \in U_{i_c}$. Puisque U_{i_c} est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset U_{i_c}$. Comme c est la borne supérieure de E, alors il existe $x \in E$ tel que $c - \varepsilon < x \leq c$, d'où on a $[x, c] \subset U_{i_c}$. Soit J une partie finie de I telle que $[a, x] \subset \bigcup\limits_{i \in J} U_i$. Soit $J' = J \cup \{i_c\}$, alors J' est une partie finie de I et on a

$$[a, c] = [a, x] \cup [x, c] \subset \bigcup_{i \in J'} U_i.$$

On a donc $c \in E$. Il reste à montrer que $c = b$. Supposons $c < b$, alors il existe $d \in]c, c+\varepsilon[\cap]c, b[$, d'où on a $d \in [a, b]$ et $[c, d] \subset U_{i_c}$. Donc $[a, d] \subset \bigcup\limits_{i \in J'} U_i$, Par conséquent, on a $d \in E$, ce qui est impossible car $d > c$. Donc on a bien $c = b$, d'où $b \in E$. $\square$

La compacité est une propriété topologique (i.e. si (Y, θ') est homéomorphe à l'espace compact (X, θ'), alors il est compact).

Théorème 1.5.10. *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

1. *Si A est compacte, alors A est fermée dans X.*
2. *Si X est compact et A est fermée dans X, alors A est compacte.*

Exemple 1.5.11. $]0, 1[$ *est une partie du sous-espace compact* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, *mais elle n'est pas une partie compacte de* $[0, 1]$.

Remarque 1.5.12. *Si A est une partie compacte d'un espace topologique X et F un fermé de X alors $A \cap F$ est compact.*

Théorème 1.5.13.

1. *Soit (X, θ) un espace topologique, (Y, θ') un espace séparé et A une partie compacte de X. L'image $f(A)$ de A par une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est compacte.*
2. *Si deux espaces sont séparés et si f et f^{-1} sont continues, une partie fermée A de X est compacte si son image $f(A)$ est compacte.*

Démonstration.

1. Considérons un recouvrement ouvert de $f(A)$:

$$f(A) \subset \bigcup W_i (W_i \in \theta')$$

on a :

$$A \subset f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} W_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(W_i)$$

$(f^{-1}(W_i))_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A, celui-ci étant compact, on peut en extraire un recouvrement fini :

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(W_{i_j}) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j})$$

donc,

$$f(A) \subset f[f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j})] \subset \bigcup_{j=1}^{n} W_{i_j}$$

d'où la compacité de $f(A)$.

2. Si $f(A)$ est compact, $(f^{-1} \circ f)(A) = f^{-1}[f(A)]$ est compact d'après a), A est une partie fermée de $f^{-1}[f(A)]$, car ce dernier est fermé dans X donc A est compact.

□

Théorème 1.5.14. *Une application f bijective continue d'un espace compact X dans un espace séparé Y est un homéomorphisme.*

Théorème 1.5.15. *Si X est un espace topologique régulier, A un sous-ensemble compact, et U un voisinage de A, alors il existe un voisinage fermé V de A tel que $V \subset U$.*

Théorème 1.5.16. *Soit X un espace topologique séparé. Si X est compact, alors il est normal.*

Démonstration. Soit A et B deux fermés disjoints de X. On a X est séparé, alors $\forall x, y \in A$, il existe U voisinage de x et V voisinage de y. donc

$$A \subset \cup_{x\in A} U_x \quad \text{et} \quad B \subset \cup_{y\in B} V_y.$$

Comme A et B sont des parties fermées de l'espace compact X, donc elles est compact, alors ils existe

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset A \quad \text{et} \quad \{y_1, y_2, ..., y_n\} \subset B$$

tel que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \quad \text{et} \quad B \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{y_i}$$

Posons $U' = \cup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ et $V' = \cup_{j=1}^{m} V_{y_j}$. Les ensembles U' et V' sont des ouverts disjoints tels que $A \subset U'$ et $B \subset V'$. Alors X est normal. $\square$

Définition 1.5.17. *On dit qu'un espace topologique X est localement compact s'il est séparé et si tout point de X possède un voisinage compact.*

Corollaire 1.5.18. *Un espace compact est automatiquement localement compact, et chaque sous-espace fermé d'un espace localement compact est localement compact (l'intersection d'un ensemble fermé et d'un ensemble compact est un sous-ensemble fermé de ce dernier, et donc compact).*

Théorème 1.5.19. *Si X est un espace topologique localement compact qui est Hausdorff ou régulier, alors la famille des voisinages compacts fermés de chaque point est une base pour son système de voisinage.*

Définition 1.5.20. *Soit $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux recouvrement de X. On dit que $\mathcal{U}$ est un raffinement de $\mathcal{V}$, et on note $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V} \succ \mathcal{U}$, si*

$$\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V} : \; U \subset V.$$

Définition 1.5.21. *Un espace topologique est dit paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini.*

Théorème 1.5.22. *Un T_1-espace X est paracompact si, seulement si, tout recouvrement ouvert de X est raffinement coussiné (pas nécessairement ouvert).*

Théorème 1.5.23. *Un T_1-espace X est paracompact si, seulement si, tout recouvrement ouvert de X est un raffinement ouvert σ-coussiné.*

1.6 Topologie produit

Définition 1.6.1. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. L'espace produit $X = \prod_{i \in I} X_i$ est le produit cartésien des espaces X_i, muni de la topologie engendrée par les ouverts élémentaires :*

$$\{\mathcal{O} = \prod_{i \in I} \mathcal{O}_i, \mathcal{O}_i \textit{est un ouvert de} X_i, \quad \textit{et} \quad \mathcal{O}_i = X_i, \textit{sauf pour un nombre fini d'indices}\}.$$

La topologie produit est constituée des réunions quelconques d'ouverts, ces ouverts élémentaires constituent une base de la topologie produit.

Définition 1.6.2. *Le produit cartésien d'intervalles unitaires fermés, avec la topologie du produit, est appelé un cube. Un cube est alors l'ensemble Q^A de toutes les fonctions d'un ensemble A à l'intervalle unitaire fermé Q.*

Théorème 1.6.3. *Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$, alors X est séparé si et seulement si chacun des espaces X_i est séparé.*

Théorème 1.6.4. *Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces complètement réguliers. l'espace produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est complètement régulier.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ et tout voisinage V de x dans une sous-base fixé $\mathcal{B}$ de X, il existe une fonction continue $f : X \longmapsto [0, 1]$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, pour tout $y \in X \setminus V$. Soit V un ouvert dans la sous base $\mathcal{B}$, tel que $x \in V$. Il est donc de la forme $p_{i_0}^{-1}(U_{i_0})$, ou U_{i_0} est un ouvert de X_{i_0} et $i_0 \in I$. On peut facilement vérifier que l'application $f_0 \circ p_{i_0}$, ou $f_0 : X_{i_0} \longrightarrow [0, 1]$ tels que $f_0(x_{i_0}) = 0$ et $f_0(X_{i_0} \setminus U_{i_0}) \subset \{1\}$ vérifie les propriétés requises. □

Soit F une famille de fonctions telle que chaque membre f de F est définie sur un espace topologique X dans un espace topologique Y_f.

Définition 1.6.5. *On appel application d'évaluation l'application $e : X \longrightarrow \Pi\{Y_f : f \in F\}$ qui est définie en associant un point x de X à l'élément du produit dont la f-ième coordonnée est $f(x)$. Formellement, l'application d'évaluation e est définie par : $e(x)_f = f(x)$.*

Définition 1.6.6. *On dit q'une famille F de fonctions sur X distingue points si, pour tout couple de points distincts x et y il existe f dans F tel que $f(x) \neq f(y)$. La famille distingue points et ensembles fermés si, pour tout sous-ensemble fermé A de X et tout point x de $X \setminus A$ il existe f dans F tel que $f(x) \notin \overline{f(A)}$.*

lemme 1.6.7. *Soit F une famille de fonctions continues, tout membre f étant définie sur un espace topologique X dans un espace topologique Y_f. Alors*

a) L'application d'évaluation e est une fonction continue sur X dans l'espace produit $\Pi\{Y_f : f \in F\}$.

b) La fonction e est une application ouverte de X dans $e(X)$ si F distingue points et ensembles fermés.

c) La fonction e est bijective si, et seulement si, F distingue points.

Remarque 1.6.8. *D'après le lemme précédent, si F est une famille de fonctions continues sur un T_1-espace X où tout membre f de F est définie sur X dans un espace topologique Y_f, alors l'application d'évaluation de X dans $\Pi\{Y_f : f \in F\}$ est un homéomorphisme si F distingue points et ensembles fermés.*

CHAPITRE 2

ESPACES MÉTRIQUES

2.1 Espaces métriques

Pour plus de détails on peut se référer à [3], [2], [7].

Définition 2.1.1. *Une distance (ou métrique) sur un ensemble X est une application :*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

possédant, pour tous $x, y, z \in X$, les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Muni de la distance d, X est appelé espace métrique, on note parfois un tel espace (X, d). Le nombre réel positif $d(x, y)$ est appelé la distance entre x et y dans X.

Définition 2.1.2. *Une application d est appelée une pseudo-métrique. s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. $d(x, y) = 0$ *si* $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un espace pseudo-métrique est un couple (X, d) tel que d est une pseudo-métrique pour X.

Proposition 2.1.3.

1. *Pour tout $x, y, z \in X$, on a $\mid d(x, z) - d(z, y) \mid \leq d(x, y)$.*
2. *Pour tout $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in X$, on a $d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$.*

Proposition 2.1.4. *Pour tous $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :*

1. $$\mid \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$
2. $$(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad \textit{(inégalité de Minkowski).}$$

Définition 2.1.5. *Soient A et B des parties non vides d'un espace métrique (X, d).*

1. *Si $x \in X$ la distance de x à A est $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.*
2. *La distance de A à B est $d(A, B) = inf\{d(x, y); x \in A, y \in B\}$.*

Définition 2.1.6. *On appelle diamètre de l'espace X la borne superieure des distances $|x - y|$ de tout les couples de points x, y de X. On dit d'un espace métrique dont le diamètre est fini qu'il est borné.*

2.2 Topologie des espaces métriques

Définition 2.2.1. *Soient (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$.*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$B(a, r) = \{x \in X; d(a, x) < r\} \ .$$
2. *On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$B'(a, r) = \{x \in X; d(a, x) \leq r\}.$$
3. *3. On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble :*
$$S(a, r) = \{x \in X; d(a, x) = r\} \ .$$

Notons que l'on a $B'(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.

lemme 2.2.2. *Toute boule ouverte contenant un point x contient une boule ouverte centrée en x.*

Définition 2.2.3. *La topologie sur E associée à la distance d est celle dont une base est constituée des boules ouvertes.*

On assimile souvent un espace métrique à son espace topologique.
Les ouverts de cette topologie sont, par définition, les réunions de boules ouvertes.
Les boules ouvertes sont évidemment des ouverts, et les boules fermées sont des fermés.

Proposition 2.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique. Alors on a :*

1. *L'espace (X,d) est séparé.*
2. *L'espace (X,d) vérifie le premier axiome de dénombrabilité.*
3. *Soient (Y,d') un espace métrique, $a \in X$ et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue en a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Autrement dit, f est continue en a si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ vérifiant $d(a,x) < \eta$, on ait $d'(f(a),f(x)) < \varepsilon$.*

Démonstration.

1. Soient $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, alors on a $d(x,y) > 0$. Soit $r = \frac{d(x,y)}{2}$, alors $r > 0$ et on a $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$. Par conséquent, (X,d) est séparé.
2. Pour tout point $x \in X$, $(B(x,\frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ forme un système fondamental dénombrable de voisinages de x dans (X,d).
3. Ceci résulte de la définition de la continuité, et de la définition de la topologie associée à une distance. □

Proposition 2.2.5. *Dans un espace métrique, l'ensemble dénombrable des boules ouvertes $(B(x,1/n))_{n\geq 1}$ et l'ensemble dénombrable des boules fermées $(B^{'}(x,1/n))_{n\geq 1}$ constituent des systèmes fondamentaux de voisinages du point x.*

Proposition 2.2.6. *Dans un espace métrique, tout point a une base dénombrable de voisinages. Plus précisément, toute suite de boules ouvertes centrées en x et dont le rayon tend vers 0 constitue une base de voisinages de x.*

Théorème 2.2.7. *Tout espace pseudo-métrique satisfait le premier axiome de dénombrabilité. La seconde est satisfaite si et seulement si l'espace est séparable.*

2.3 Comparaison de distances

Définition 2.3.1. *Soit* (X, d), $(Y, d^{'})$ *deux espaces métriques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. On dit que* f *est uniformément continue si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *vérifiant* $d(x, y) < \eta$, *on ait* $d^{'}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Proposition 2.3.2. *Soient* $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. f *est uniformément continue.*
2. *Pour toutes suites* $(x_n)_{n\geq 0}$ *et* $(z_n)_{n\geq 0}$ *dans* X *telles que* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, z_n) = 0$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d'(f(x_n), f(z_n)) = 0$.

Démonstration.
Montrons l'implication (1) $\Longrightarrow$ (2).
Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ des suites dans X telles que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, z_n) = 0$. puisque f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, z \in X$ vérifiant $d(x, z) < \eta$, on ait $d'(f(x), f(z)) < \varepsilon$. Comme on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, z_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, z_n) < \eta$, d'où on a $d'(f(x_n), f(z_n)) < \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d'(f(x_n), f(z_n)) = 0$.
Preuve de (2) $\Longrightarrow$ (1).
Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, z \in X$ tel que $d(x, z) < \eta$ et $d'(f(x), f(z)) \geq \varepsilon$. En prenant, $\eta = \frac{1}{n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(z_n)_{n\geq 1}$ dans X telles que pour tout $n \geq 1$, on ait $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(z_n)) \geq \varepsilon$. Par conséquent, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, z_n) = 0$, mais la suite de réels $(d'(f(x_n), f(z_n)))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{R}$. C'est une contradiction. □

Théorème 2.3.3. ***(Heine)***
Soient X *un espace métrique compact,* Y *un espace métrique. Alors, toute application continue* $f : X \to Y$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in X$ vérifiant

$$d(x, y) \leq \delta, d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

En prenant $\delta = 1/n(n \geq 1)$, on construit ainsi une suite $((x_n, y_n))$ de $X \times X$ tel que,

$$d(x_n, y_n) \leq 1/n, d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$$

L'espace métrique X étant compact, il existe une sous-suite (x_{n_k}) convergente, soit a sa limite. on a l'inégalité

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq 1/n_k$$

qui montre que la sous-suite (y_{n_k}) converge vers a. En passant à la limite dans l'inégalité $d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon$, on obtient $d(f(a), f(b)) \geq \varepsilon$, ce qui est absurde. $\square$

Définition 2.3.4. *Soit d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble X.*

1. *On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie (c'est-à-dire qu'elles ont les même ouverts, donc les même fermés). Cela revient à dire que :$\theta_{d_1} = \theta_{d_2}$, et les deux applications identités suivantes sont continues.*

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_1}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_2}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_2}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_1}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

2. *On dit que d_1 et d_2 sont uniformément équivalentes si les deux applications identités suivantes sont uniformément continues.*

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_1}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_2}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_2}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_1}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

3. *On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes ou comparables s'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$, on ait*

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y).$$

Ceci est équivalent à dire que les deux applications identités suivantes sont lipschitziennes.

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_1}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_2}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} id: \quad (X, \theta_{d_2}) &\longrightarrow (X, \theta_{d_1}) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

2.4 Suites de Cauchy et espaces complets

Les résultats de cette section sont pris des références [3].

Définition 2.4.1. *On dit qu'une suite (x_n) de X converge vers $x \in X$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \mid p \geq n \Rightarrow d(x, x_p) \leq \varepsilon$$

On dit alors que x est la limite de la suite (x_n) et on écrit $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Proposition 2.4.2. *Soit (X, d) un espace métrique et $a \in X$.*

1. *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite dans X. Le point a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ si et seulement si a est la limite d'une sous-suite de $(x_n)_{n \geq 0}$.*
2. *Soit $A \subset X$. Alors $a \in \bar{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ dans A tel que $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$.*
3. *Soit $A \subset X$. Alors A est fermé dans X si et seulement si la limite de toute suite convergente d'élément de A appartient à A.*
4. *Soit Y un espace topologique et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans X convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 2.4.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans (X, d) est dite suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. On écrit*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Proposition 2.4.4. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Toute suite convergente dans X est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy dans X est bornée.*
3. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

Démonstration.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers x dans X. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $n, m \geq N$, on a
$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$
Par conséquent, $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy.
2. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d). Alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < 1$. Soit :
$$r = \max\{1, d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), ..., d(x_{N-1}; x_N)\}.$$
Alors $r \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \in B(x_N, r)$. ceci implique que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée.
3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (X, d) et $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, m \geq N$, on ait $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Pour tout $k \geq 0$, on a $n_k \geq k$. Donc, pour tout $k, p \geq N$, on a $n_k \geq n_N \geq N$ et $n_p \geq n_N \geq N$, d'où $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < \varepsilon$. Donc $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ est de Cauchy.

□

Définition 2.4.5. *On dit qu'un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.*

Exemple 2.4.6. *Soit (X, d) un espace métrique discret, alors (X, d) est complet car on a $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$, donc toute suite de Cauchy dans X est stationnaire, donc convergente.*

2.5 Espaces métriques compacts

Les résultats de cette section sont pris des références [3], [4], [6], [2].

Définition 2.5.1. *On dit qu'un espace métrique (X, d) est compact, si de toute suite d'éléments de (X, d) on peut extraire une suite convergeant vers un point de X.*

Définition 2.5.2. *Dans un espace métrique, une partie A est dite précompacte si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des ensembles dont la distance est inférieure à ε.*

Corollaire 2.5.3. *Un ensemble de distance inférieure ou égale à ε étant contenu dans une boule fermée (respectivement ouverte) de rayon ε (respectivement 2ε), un ensemble A est précompact si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules de rayon ε qu'on peut choisir ouvertes ou fermées.*

Théorème 2.5.4 (propriétés de la compacité)**.** *Soit X un espace métrique, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *L'espace X est compact.*
2. *Toute suite de X admet une valeur d'adhérence.*
3. *L'espace X est complet et précompact.*

Proposition 2.5.5. *Un espace métrique précompact est séparable.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un recouvrement fini de l'espace X par des boules de rayon $1/n$, soit A_n l'ensemble des centres de ces boules, A_n est fini et $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ est dénombrable. Montrons que A est partout dense. On a pour tout $x \in X$ et $n \geq 1$,

$$d(x, A) \leq d(x, A_n) \leq 1/n$$

d'où $d(x, A) = 0$ donc $\bar{A} = X$ ce qui prouve que A est partout dense. alors On conclut X est séparable. □

CHAPITRE 3

ESPACES TOPOLOGIQUES MÉTRISABLES

Un espace métrisable est un espace topologique dont la topologie peut être définie par une distance. Cette topologie a toutes les propriétés d'une topologie métrique.

Le but de ce chapitre est de fournir une description détaillée des théorèmes concernant les espaces métrisables.

Les résultats de ce chapitre sont pris des références [3], [5], [6], [4], [7].

3.1 Espaces métrisables

Définition 3.1.1. *Soit (X, θ) un espace topologique.*

Une distance sur l'ensemble X est dite compatible avec la topologie θ si la topologie définie par cette distance est identique à θ.

L'espace topologique (X, θ) est dit métrisable s'il existe une distance sur X compatible avec la topologie θ.

Proposition 3.1.2. *Une distance d sur un espace topologique X est compatible avec la topologie de X si, et seulement si, la famille*

$$\left\{B\left(p, \frac{1}{n}\right),\ n = 1, 2, \dots\right\},$$

est une base de voisinage de tout point $p \in X$.

Proposition 3.1.3. *Un espace topologique X est métrisable si, et seulement si, il est homéomorphe à un espace métrique.*

Exemple 3.1.4. *L'espace topologique discret $(X, \theta_d = \mathcal{P}(X))$ est métrisable.*

En effet, on définit sur X la distance ρ par

$$\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \begin{cases} 1 & si \;\; x \neq y, \\ 0 & si \;\; x = y. \end{cases}$$

La distance ainsi définie s'appelle la distance discrète.

Une boule ouverte de rayon r et de centre x est donnée par

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\},$$

et comme la distance $\rho(x, y)$ ne prend que deux valeurs 0 ou 1 alors, si $r < 1$:

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) = 0\} = \{x\},$$

et si $r \geqslant 1$:

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) = 1\} = X \setminus \{x\}.$$

On voit que tous les singletons sont des boules ouvertes donc la topologie induite par la distance ρ coïncide avec la topologie discrète. D'où l'espace topologique discret est métrisable.

Le cube de Hilbert Q est l'espace $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ où $I_n = [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est l'ensemble de toutes les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $0 \leq x_n \leq 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1.5. *Le cube de Hilbert muni de la topologie produit est métrisable.*

Remarque 3.1.6. *Un espace métrisable doit avoir toutes les propriétés topologiques que possède un espace métrique.*

Définition 3.1.7. *Un espace X est dit localement métrisable lorsque tout point de X admet un voisinage métrisable.*

3.2 Théorèmes de métrisation

Définition 3.2.1. *Un espace topologique est dit développable s'il possède une suite* $\{U_1, U_2, \ldots\}$ *de recouvrements ouverts telle que* $\{S(p, U_n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *est une base de voisinage de tout point* p *de* X*. La suite* $\{U_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *est appelée un développement de* X*.*

Proposition 3.2.2. *Un* T_2*-espace* X *est métrisable si, et seulement si, il est paracompact et développable.*

Théorème 3.2.3. *[6]*
Un T_1*-espace* X *est métrisable si, et seulement si, pour tout point* p *de* X*, il existe deux suites* $\{U_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *et* $\{V_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *de voisinages de* p *telles que*

i) $\{U_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *est une base de voisinage de* p*,*

ii) $q \notin U_n(p)$ *implique* $V_n(q) \cap V_n(p) = \emptyset$*,*

iii) $q \in V_n(p)$ *implique* $V_n(q) \subset U_n(p)$*.*

Démonstration.

Condition nécessaire : ($\Longrightarrow$)

Supposons X est métrisable. Soit p un point de X. On définit deux suites de voisinages de p, $(U_n(p))_n$ et $(V_n(p))_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ U_n(p) = B\Big(p, \frac{1}{2^n}\Big) \ \text{ et } \ V_n(p) = B\Big(p, \frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

(i) Comme le rayon de $U_n(p)$ tend vers 0 alors, d'après la proposition 2.2.6, $\{U_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ est une base de voisinage de p.

(ii) Soit $q \notin U_n(p)$, donc $d(q, p) \geqslant \frac{1}{2^n}$. Soit $a \in (V_n(q) \cap V_n(p))$. On a

$$a \in V_n(q) \implies d(q, a) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

et

$$a \in V_n(p) \implies d(p, a) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} d(q, p) &\leqslant d(q, a) + d(a, p) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Contradiction avec $d(q,p) \geqslant \frac{1}{2^n}$, donc $V_n(q) \cap V_n(p) = \emptyset$.

(iii) Soit $q \in V_n(p)$ et $a \in (V_n(q)$. On a

$$q \in V_n(p) \implies d(q,p) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

et

$$a \in V_n(q) \implies d(q,a) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

donc

$$\begin{aligned} d(p,a) &\leqslant d(p,q) + d(q,a) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Donc $a \in (U_n(p)$. D'où $V_n(q) \subset U_n(p)$.

Condition suffisante : ($\Longleftarrow$)

Supposons que, pour tout point $p \in X$, il existe deux suites $\{U_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ et $\{V_n(p),\ n = 1, 2, \ldots\}$ de voisinages de p satisfont les conditions $i)$, $ii)$ et $iii)$.

D'après la proposition 3.2.2, si X est un T_2-espace alors il est métrisable s'il est paracompact et développable.

Montrons que X est un T_2-espace :

Soit p et q deux points différents de X. Comme X est T_1-espace et d'après $i)$, il existe $U_n(p)$ tel que $q \notin U_n(p)$, donc $V_n(q) \cap V_n(p) = \emptyset$, d'après $ii)$.

Puisque p et q jouent le même rôle, on déduit que X est T_2-espace.

Montrons que X est paracompact en utilisant le théorème 1.5.23.

Considérons un recouvrement ouvert de X : $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \ \alpha \in A\}$.

Posons

$$V_{n\alpha} = \cup\big\{\overset{\circ}{\widehat{V_n(p)}} : U_n(p) \subset U_\alpha\big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_n = \{V_{n\alpha} : \alpha \in A\} \tag{3.1}$$

Alors, par (3.1), $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ est un recouvrement ouvert de X tel que $\mathcal{V} < \mathcal{U}$.

De plus, pour tout n, $\mathcal{V}_n$ est coussiné dans $\mathcal{U}$. En effet, soit A' un sous ensemble de A. Soit un point $q \notin \cup\{U_\alpha : \ \alpha \in A'\}$ et un point p vérifiant $U_n(p) \subset U_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A'$. Alors $q \notin U_n(p)$ et, d'après $ii)$, $V_n(q) \cap V_n(p) = \emptyset$, ce qui implique $V_n(q) \cap \overset{\circ}{\widehat{V_n(p)}} = \emptyset$. Alors, de (3.1) on trouve

$$V_n(q) \cap (\cup\{V_{n\alpha} : \alpha \in A'\}) = \emptyset.$$

On conclut de définition de l'adhérence que

$$q \notin \overline{\cup\{V_{n\alpha} : \alpha \in A'\}}.$$

On a trouvé que, pour tout point q de X,

$$q \notin \cup\{U_\alpha : \ \alpha \in A'\} \implies q \notin \overline{\cup\{V_{n\alpha} : \alpha \in A'\}}\,,$$

donc

$$\overline{\cup\{V_{n\alpha} : \alpha \in A'\}} \subset \cup\{U_\alpha : \alpha \in A'\},$$

ce qui prouve que $\mathcal{V}_n$ est coussiné dans $\mathcal{U}$. Donc $\mathcal{V}$ est un raffinement σ-coussiné de $\mathcal{U}$.

Ainsi nous pouvons conclure que X est paracompact.

Montrons que X est développable :

Considérons la suite de recouvrements ouverts de X suivante

$$\{\mathcal{W}_m,\ m = 1, 2, \ldots\} \ \text{ où } \ \mathcal{W}_m = \left\{\overset{\circ}{\widehat{V_m(q)}} : q \in X\right\},\ \forall m \geqslant 1.$$

On va montrer que $\{S(p, \mathcal{W}_m),\ m = 1, 2, \ldots\}$ est une base de voisinage pour tout point p de X.

Notons d'abord que nous pouvons supposer que $m \geqslant n$ implique $U_m(p) \subset U_n(p)$ et $V_m(p) \subset V_n(p)$, puisque sinon, nous remplaçons $U_n(p)$ et $V_n(p)$ par $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i(p)$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i(p)$, respectivement.

Soit $U(p)$ un voisinage arbitraire de $p \in X$. D'après $i)$ il existe n pour lequel $U_n(p) \subset U(p)$. De même, puisque $V_n(p)$ est un voisinage de p, il existe m tel que $U_m(p) \subset V_n(p)$ (on peut prendre $m \geqslant n$).

Notons que

$$S(p, \mathcal{W}_n) = \cup\{U : p \in U \subset \mathcal{W}_n\} = \cup\{\overset{\circ}{\widehat{V_m(q)}} : p \in \overset{\circ}{\widehat{V_m(q)}},\ q \in X\}.$$

Soit $p \in \overset{\circ}{\widehat{V_m(q)}}$ pour certain q, alors

$$V_m(q) \cap V_m(p) \neq \emptyset \quad (\text{car } p \in V_m(q) \cap V_m(p)),$$

ce qui implique d'après *ii*)

$$q \in U_m(p) \subset V_n(p).$$

Il résulte donc de *iii*) que

$$V_m(q) \subset V_n(p) \subset U_n(p).$$

Cela implique

$$\overset{\circ}{\widehat{V_m(q)}} \subset U_n(p).$$

Par conséquent nous avons

$$S(p, \mathcal{W}_m) \subset U_n(p) \subset U(p).$$

Cela signifie que $\{S(p, \mathcal{W}_m),\ m = 1, 2, \ldots\}$ est une base de voisinage de p. $\square$

Théorème 3.2.4 (Théorème de métrisation de Nagata-Smirnov). *[6]*
Un espace régulier X est métrisable si, et seulement si, il a une base ouverte σ-localement finie.

Démonstration.

Condition nécessaire : ($\Longrightarrow$)

Supposons que X est régulier métrisable, et considérons le recouvrement ouvert de X suivant

$$\mathcal{B}_n = \left\{B\left(p, \frac{1}{n}\right),\ p \in X\right\},$$

où $B(p, \frac{1}{n})$ est la boule ouverte centrée en p et de rayon $\frac{1}{n}$.

Puisque X est paracompact (comme espace métrique) il existe un raffinement ouvert localement fini $\mathcal{V}_n$ de $\mathcal{B}_n$. Donc $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ est une base ouverte σ-localement finie de X.

Condition suffisante : ($\Longleftarrow$)

Supposons que X est régulier a une base ouverte $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, où $\mathcal{V}_n$ est une famille ouverte localement finie pour tout $n \geqslant 1$.

Pour tout pair (n, m) de nombres naturels et tout point p de X, nous définissons des voisinages $U_{nm}(p)$ et $V_{nm}(p)$ comme suit.

Mettons

$$V_n(p) = \cap\{V,\ p \in V \in \mathcal{V}_n\}. \tag{3.2}$$

L'intersection dans (3.2) est finie car $\mathcal{V}_n$ est localement finie, donc $V_n(p)$ est un voisinage ouvert de p.

Maintenant, en utilisant la régularité de X, si

$$p \in U_p \subset \overline{U_p} \subset V_n(p), \quad \text{pour certain } U_p \in \mathcal{V}_m,$$

on met

$$U_{nm}(p) = V_n(p),$$

et

$$V_{nm}(p) = U_p \cap \big(\cap\{X - \overline{V} : p \notin \overline{V},\ V \in \mathcal{V}_m\}\big); \tag{3.3}$$

sinon on met

$$U_{nm}(p) = X,$$

et

$$V_{nm}(p) = V_n(p) \cap \big(\cap\{X - \overline{V} : p \notin \overline{V},\ V \in \mathcal{V}_m\}\big). \tag{3.4}$$

Puisque $\mathcal{V}_m$ est localement finie, les intersections dans (3.3) et (3.4) sont finies, donc $U_{nm}(p)$ et $V_{nm}(p)$ sont des voisinages ouverts de p.

Montrons que $\{U_{nm}(p),\ n, m = 1, 2, \ldots\}$ et $\{V_{nm}(p),\ n, m = 1, 2, \ldots\}$ satisfont les conditions du théorème 3.2.3.

(i) Soit $W(p)$ un voisinage arbitraire de $p \in X$. Puisque $\mathcal{V}$ est une base ouverte et X est régulier, on peut choisir n, m et $U_p \in \mathcal{V}_m$ tels que

$$p \in U_p \subset \overline{U_p} \subset V_n(p) \subset W(p).$$

Donc, par la définition de $U_{nm}(p)$,

$$U_{nm}(p) = V_n(p) \subset W(p),$$

prouve que $\{U_{nm}(p),\ n, m = 1, 2, \ldots\}$ est une base de voisinage de p.

(ii) Soit $q \notin U_{nm}(p)$. Alors $U_{nm}(p) \neq X$, et donc il existe $U_p \in \mathcal{V}_m$ tel que

$$p \in U_p \subset \overline{U_p} \subset V_n(p) = U_{nm}(p) \ \text{ et } \ V_{nm}(p) \subset U_p.$$

Ainsi $q \notin \overline{U_p}$, et d'après (3.3)

$$V_{nm}(q) = U_q \cap \big(\cap\{X - \overline{V} : q \notin \overline{V},\ V \in \mathcal{V}_m\}\big).$$

Donc

$$V_{nm}(q) \subset X - \overline{U_p}.$$

Puisque $V_{nm}(p) \subset U_p$, on obtient

$$V_{nm}(q) \cap V_{nm}(p) = \emptyset.$$

(iii) Soit $q \in V_{nm}(p)$. De la définition de $V_n(p)$ et $V_{nm}(p)$, on déduit que $V_{nm}(p) \subset V_n(p)$, donc

$$q \in V_n(p) = \cap\{V,\ p \in V \in \mathcal{V}_n\}.$$

On conclut que, si $p \in V \in \mathcal{V}$ alors $q \in V$. Alors

$$V_n(q) = \cap\{V,\ q \in V \in \mathcal{V}_n\} \subset V_n(p).$$

Puisque $V_{nm}(q) \subset V_n(q)$ on obtient

$$V_{nm}(q) \subset V_n(p) = U_{nm}(p),$$

dans le cas où $U_{nm}(p) = V_n(p)$. Si $U_{nm}(p) = X$, alors $V_{nm}(q) \subset U_{nm}(p)$.

Ainsi $\{U_{nm}(p),\ n, m = 1, 2, \ldots\}$ et $\{V_{nm}(p),\ n, m = 1, 2, \ldots\}$ vérifient les conditions *i*), *ii*) et *iii*) du théorème 3.2.3, et donc X est métrisable. □

Théorème 3.2.5 (**Théorème d'Urysohn**). *[4]*
Un T_1-espace régulier dont la topologie a une base dénombrable est homéomorphe à un sous-espace du cube de Hilbert Q, et est donc métrisable.

Démonstration. D'après la remarque 1.6.8, il suffit de montrer qu'il existe une famille dénombrable de fonctions continues de X dans Q qui distingue points et ensembles fermés.

Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable pour la topologie de X et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les couples (U, V) tel que U et V appartiennent à $\mathcal{B}$ et $\overline{U} \subset V$. Naturellement, $\mathcal{A}$ est dénombrable.

Pour tout couple (U, V) de $\mathcal{A}$ choisissons une fonction continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ telle que $f(\overline{U}) = \{0\}$ et $f(X \setminus V) = \{1\}$ (une telle fonction existe car X est normal d'après le lemme **??**) et soit F la famille de fonctions ainsi obtenue.

Alors F est dénombrable et il reste à prouver que F distingue points et ensembles fermés.

Soit B un fermé de X et $x \in X \setminus B$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de X qui est normal, donc régulier, on peut choisir deux membres U et V de $\mathcal{B}$ tels que

$$x \in V \subset X \setminus B \quad \text{et} \quad x \in \overline{U} \subset V.$$

Alors $(U, V) \in \mathcal{A}$, et si f est le membre correspondant de F, alors

$$f(x) \in f(\overline{U}) = \{0\},$$

et

$$f(B) \subset f(X \setminus V) = \{1\}.$$

D'où, $f(x) \neq \overline{f(B)}$. □

Corollaire 3.2.6. *Un espace compact est métrisable si, et seulement si, il admet une base de topologie dénombrable.*

Démonstration. L'implication inverse est une résultat du théorème d'Urysohn.

Pour l'implication directe, supposons que X est compact alors il est précompat, d'après la proposition 2.5.5 X est séparable, et comme X est métrisable alors, d'après la proposition 3.3.1 il admet une base de topologie dénombrable. □

Notations :

Soit p un point de X, A un sous-ensemble de X et $\mathcal{U}$ une famille de sous-ensembles de

X. Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
&S(p,\mathcal{U}) = \cup\{U : p \in U \in \mathcal{U}\},\\
&S(A,\mathcal{U}) = \cup\{U : U \in \mathcal{U},\ U \cap A \neq \emptyset\},\\
&\mathcal{U}^* = \{S(U,\mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}.
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, alors $S(p,\mathcal{U})$ et $S(A,\mathcal{U})$ sont des ensembles ouverts.

Théorème 3.2.7 (Alexandroff-Urysohn). *[6]*
Un T_1-espace X est métrisable si, et seulement si, il existe une suite $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots$ de recouvrements ouverts telle que :

i) $\mathcal{U}_1 \succ \mathcal{U}_2^* \succ \mathcal{U}_2 \succ \mathcal{U}_3^* \succ \cdots$

ii) $\{S(p,\mathcal{U}_n),\ n = 1,2,\dots\}$ *est une base de voisinages en tout point p de X.*

Démonstration.

Condition nécessaire : ($\Longrightarrow$)

Soit X un T_1-espace métrisable. Considérons la suite de recouvrements de x suivante

$$\mathcal{U}_n = \Big\{B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big) : p \in X\Big\}.$$

On va montrer que les conditions $i)$ et $ii)$ sont satisfaites.

(i) Premièrement prouvons que $\mathcal{U}_n \succ \mathcal{U}_{n+1}^*$, pour tout $n \geqslant 1$.

D'après la définition de $\mathcal{U}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{n+1}^* &= \{S(U,\mathcal{U}_{n+1}) : U \in \mathcal{U}_{n+1}\}\\
&= \{\cup\{W : W \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap W \neq \emptyset\} : U \in \mathcal{U}_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Donc il faut montrer que, pour tout $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ il existe $p \in X$ tel que

$$\cup\{W : W \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap W \neq \emptyset\} \subset B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big).$$

Soit $U, W \in \mathcal{U}_{n+1}$. Alors il existe $p, q \in X$ tels que

$$U = B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big) \quad \text{et} \quad W = B\Big(q, \frac{1}{3^n}\Big).$$

On a, $U \cap W \neq \emptyset$ implique $d(p,q) < \frac{2}{3^{n+1}}$. Soit $x \in W$. On a

$$\begin{aligned} x \in W &\iff d(x,q) < \frac{1}{3^{n+1}} \\ &\implies d(x,q) + d(q,p) < \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} \\ &\implies d(x,p) < \frac{1}{3^n} \\ &\implies x \in B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big) \\ &\implies W \subset B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big) \in \mathcal{U}_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\cup\{W : W \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap W \neq \emptyset\} \subset B\Big(p, \frac{1}{3^n}\Big),$$

ce qui montre que $\mathcal{U}_n \succ \mathcal{U}_{n+1}^*$.

Deuxièmement prouvons que $\mathcal{U}_n^* \succ \mathcal{U}_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

D'après la définition de $\mathcal{U}^*$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n^* &= \{S(U,\mathcal{U}_n) : U \in \mathcal{U}_n\} \\ &= \{\cup\{W : W \in \mathcal{U}_n, U \cap W \neq \emptyset\} : U \in \mathcal{U}_n\}. \end{aligned}$$

Donc il faut montrer que, pour tout $K \in \mathcal{U}_n$ il existe $U \in \mathcal{U}_n$ tel que

$$K \subset \cup\{W : W \in \mathcal{U}_n, U \cap W \neq \emptyset\}.$$

On voit que

$$K \in \{W : W \in \mathcal{U}_n, K \cap W \neq \emptyset\},$$

donc il suffit de prendre $U = K$.

Ainsi la condition $i)$ est satisfaite.

(ii) On a

$$S(p,\mathcal{U}_n) = \cup\{U : p \in U \in \mathcal{U}_n\} = \cup\Big\{B\Big(q, \frac{1}{3^n}\Big) : p \in B\Big(q, \frac{1}{3^n}\Big),\ q \in X\Big\}.$$

Comme X est métrisable alors, d'après la proposition 2.2.6 $\{S(p,\mathcal{U}_n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ est une base de voisinages en tout point $p \in X$.

Condition suffisante : $(\Longleftarrow)$

Soit $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ une suite de recouvrements ouverts de X satisfait les conditions $i)$ et $ii)$.

Pour tout nombre rationnel de la forme $\frac{k}{2^n}$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$ on définit un recouvrement ouvert $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$ de X comme suit :

$$\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2}\Big) = \mathcal{U}_1 \quad , \quad \mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^2}\Big) = \mathcal{U}_2 \quad , \quad \mathcal{V}\Big(\frac{3}{2^2}\Big) = \Big\{S(V_1, \mathcal{U}_2),\ V \in \mathcal{V}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\} \quad ,$$

$$\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^3}\Big) = \mathcal{U}_3 \quad , \quad \mathcal{V}\Big(\frac{3}{2^3}\Big) = \Big\{S(V, \mathcal{U}_3),\ V \in \mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^2}\Big)\Big\} \quad ,$$

$$\mathcal{V}\Big(\frac{5}{2^3}\Big) = \Big\{S(V, \mathcal{U}_3),\ V \in \mathcal{V}\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big\} \quad , \quad \mathcal{V}\Big(\frac{7}{2^3}\Big) = \Big\{S(V, \mathcal{U}_3),\ V \in \mathcal{V}\Big(\frac{3}{2^2}\Big)\Big\} \quad , \quad \ldots$$

Généralement, supposons que nous ayons défini $\mathcal{V}(\frac{k}{2^n})$, $k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}$. On définit alors $\mathcal{V}(\frac{k}{2^{n+1}})$ par

$$\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{U}_{n+1} \ ,$$

$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{2k'}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{k'}{2^n}\Big) \quad \text{si } k = 2k' \ ,$$

et

$$\mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \mathcal{V}\Big(\frac{2k'+1}{2^{n+1}}\Big) = \Big\{S(V, \mathcal{U}_{n+1}),\ V \in \mathcal{V}\Big(\frac{k'}{2^n}\Big)\Big\} \quad \text{si } k = 2k' + 1 \ ,$$

où $1 \leqslant k' \leqslant 2^n - 1$. De plus, on pose $\mathcal{V}(1) = \{X\}$.

Maintenant, nous définissons les fonctions à valeurs réelles $\varphi(p, q)$ et $\rho(p, q)$ avec deux variables $p, q \in X$ par

$$\varphi(p, q) = \inf \Big\{\frac{k}{2^n} : q \in S\Big(p, \mathcal{V}\Big(\frac{k}{2^n}\Big)\Big)\Big\},$$

et

$$\rho(p, q) = \sup \big\{|\varphi(p, x) - \varphi(q, x)| : x \in X\big\}.$$

Prouvons que ρ est une métrique :

De la définition de ρ on résulte que $\rho(p, q) = \rho(q, p) \geqslant 0$ et $\rho(p, p) = 0$. Pour prouver l'inégalité triangulaire pour ρ, soit $p, q, s \in X$. Alors

$$\begin{aligned}\rho(p,q) &\leqslant \sup\Big\{|\varphi(p,x)-\varphi(s,x)|+|\varphi(s,x)-\varphi(q,x)| : x\in X\Big\}\\ &\leqslant \sup\Big\{|\varphi(p,x)-\varphi(s,x)| : x\in X\Big\}+\sup\Big\{|\varphi(s,x)-\varphi(q,x)| : x\in X\Big\}\\ &= \rho(p,s)+\rho(s,q).\end{aligned}$$

Il reste de montrer que $\rho(p,q)=0$ implique $p=q$. On utilise la preuve par contraposition. Soit p et q deux points distincts de X, alors

$$\begin{aligned}\rho(p,q) &= \sup\Big\{|\varphi(p,x)-\varphi(q,x)| : x\in X\Big\}\\ &\geqslant |\varphi(p,q)-\varphi(q,q)| = \varphi(p,q).\end{aligned}$$

Puisque X est T_1, par la condition $ii)$ on peut choisir un n pour lequel

$$q \notin S(p,\mathcal{U}_n) = S\Big(p, \mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big).$$

D'où $\varphi(p,q) \geqslant \frac{1}{2^n}$, et donc $\rho(p,q) \geqslant \frac{1}{2^n}$, i.e. $\rho(p,q) \neq 0$.

Ainsi ρ est une métrique sur X.

Prouvons que ρ est compatible avec la topologie de X :

D'après la proposition 3.1.2, il suffit de montrer que

$$\Big\{B\Big(p,\frac{1}{i}\Big),\ i=1,2,\dots\Big\},$$

est une base de voisinage de tout point $p \in X$.

Soit $p \in X$ et $U(p)$ un voisinage de p. D'après $ii)$ il existe un n tel que $S(p\mathcal{U}_n) \subset U$.

Prenons le nombre naturel i tel que $\frac{1}{i} < \frac{1}{2^n}$. On va montrer que $B(p,\frac{1}{i}) \subset U(p)$.

Soit $q \in B(p,\frac{1}{i})$, i.e. $\rho(p,q) < \frac{1}{i}$. Alors

$$\varphi(p,q) \leqslant \rho(p,q) < \frac{1}{2^n}.$$

Donc, par la définition de φ

$$q \in S\Big(p,\mathcal{V}\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big) = S(p,\mathcal{U}_n) \subset U(p),$$

d'où

$$B\Big(p,\frac{1}{i}\Big) \subset U(p).$$

Ceci prouve que $\{B(p, \frac{1}{i}),\ i = 1, 2, \ldots\}$ forme une base de voisinages de p. Ainsi ρ est une métrique compatible avec la topologie de X, et donc X est un espace métrisable.

□

Théorème 3.2.8. *(théorème de Smirnov)[5]*
Un espace est métrisable si, et seulement si, il est paracompact et localement métrisable.

Démonstration. Supposons que X est métrisable. Alors X est localement métrisable et, d'après la proposition 3.2.2 il est paracompact.

Inversement, supposons que X soit un espace de Hausdorff paracompact localement métrisable. Nous allons montrer que X a une base dénombrable localement finie.

On couvre X par des ensembles ouverts métrisables puis on choisit un raffinement ouvert localement fini $\mathcal{C}$ de ce recouvrement. Tout élément C de $\mathcal{C}$ est métrisable. Soit la fonction $d_c : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ une métrique qui donne la topologie de C.

Étant donné $x \in C$, soit $B_C(x, \varepsilon) = \{y \in C :\ d_c(x, y) < \varepsilon\}$. Comme C est ouvert, l'ensemble $B_C(x, \varepsilon)$ est ouvert dans X.

Étant donné $m \in \mathbb{Z}_+$, soit $\mathcal{A}_m$ le recouvrement de X par toutes ces boules ouvertes de rayon $1/m$, c-à-dire

$$\mathcal{A}_m = \Big\{B_c\Big(x, \frac{1}{m}\Big),\ x \in C \in \mathcal{C}\Big\}.$$

Soit $\mathcal{D}_m$ un raffinement ouvert localement fini de $\mathcal{A}_m$ (on utilise ici la paracompacité de X). Soit $\mathcal{D}$ l'union des collections $\mathcal{D}_m$. Alors $\mathcal{D}$ est dénombrable localement fini.

Montrons que $\mathcal{D}$ est une base de X. Soit x un point de X et soit U un voisinage de x. On cherche à trouver un élément D de $\mathcal{D}$ tel que $x \in D \subset U$. Or x n'appartient qu'à un nombre fini d'éléments de $\mathcal{C}$, notés $C_1, \ldots, C_k$, alors $U \cap C_i$ est un voisinage de x dans l'ensemble C_i, donc

$$\exists \varepsilon_i > 0 : B_{c_i}(x, \varepsilon_i) \subset (U \cap C_i).$$

Choisissons m pour que $2/m < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Puisque la collection $\mathcal{D}_m$ couvre X, il doit y avoir un élément D de $\mathcal{D}_m$ contenant x. Comme $\mathcal{D}_m$ est un raffinement de $\mathcal{A}_m$, il doit y avoir un élément $B_C(y, 1/m)$ de $\mathcal{A}_m$, pour un certain $C \in \mathcal{C}$ et un certain $y \in C$, qui contient D.

Puisque

$$x \in D \subset B_C(y, 1/m),$$

le point x appartient à C, doit être C un des ensembles $C_1, \ldots, C_k$, soit $C = C_i$. Comme $B_C(y, 1/m)$ a un diamètre d'au plus $2/m < \varepsilon_i$, alors

$$x \in D \subset B_{C_i}(y, 1/m) \subset B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subset U.$$

Donc, d'après la proposition 1.1.12, $\mathcal{D}$ est une base de X. Alors l'espace X est paracompact a une base dénombrable localement fini. On conclure que X est métrisable. $\square$

3.3 Conséquences

Les résultats de cette section sont pris des références [7], [3].

Proposition 3.3.1. *Un espace topologique X admettant une base de topologie dénombrable est séparable. La réciproque est vrai si X est métrisable.*

Démonstration. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de la topologie de X ; on peut supposer ces B_n non vides. En prenant un point x_n dans tout B_n, on construit une suite x_n partout dense. Donc X est séparable.

Réciproquement, supposons X métrisable et séparable. Soit d une distance sur X définissant la topologie de X et soit (a_n) une suite partout dense. Vérifions alors que l'ensemble des boules ouvertes $B(a_n, 1/m)$, où $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$, est une base de la topologie. Soit O un ouvert de X et $x \in O$, il existe une boule ouverte $B(x, r), r > 0$ contenu dans O. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in B(a_n, 1/m) \subset B(x, r).$$

Choisissions $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/m \leq r/2$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, a_n) < 1/m$. Si $d(a_n, y) < 1/m$, on a alors

$$d(x, y) \leq d(x, a_n) + d(a_n, y) < 2/m \leq r,$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Il en résulte que l'ouvert O est une réunion de boules $B(a_n, 1/m)$ ce qui prouve l'assertion. $\square$

Proposition 3.3.2. *Tout sous-espace d'un espace métrisable séparable est séparable.*

Démonstration. Si un espace admet une base de topologie dénombrable, il en est de même de tout sous-espace et on conclut d'après la proposition précédente qu'il est séparable. □

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème de Heine (Théorème 2.3.3).

Corollaire 3.3.3. *Soit X un espace compact métrisable. Alors toutes les distances sur X compatibles avec la topologie de X sont uniformément équivalentes.*

L'un des corollaires du théorème d'Urysohn (Théorème 3.2.5) est le suivant.

Corollaire 3.3.4. *Soit Xun espace métrisable, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) X admet une base de topologie dénombrable.

2) X est séparable.

3) X est homéomorphe à un sous-espace du cube de Hilbert.

Démonstration.
L'équivalente 1) $\Longleftrightarrow$ 2) a déjà été démontrée (proposition 3.3.1).

1) $\Longrightarrow$ 3). Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de la topologie de X et D l'ensemble dénombrable

$$D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \overline{B_i} \subset B_j\}.$$

D'après le lemme d'Urysohn, il existe pour tout $(i,j) \in D$ une fonction continue $f_{ij} : X \longrightarrow [0,1]$ telle que

$$f_{ij}(B_i) = \{0\} \quad \text{et} \quad f_{ij}(X \setminus B_j) = \{1\}.$$

Considérons l'application continue $f = (f_{ij})_{(i,j)\in D}$ de X dans $[0,1]^D$. Nous allons démontrer que f est un homéomorphisme de X sur $f(X)$.

1. Vérifions que f est injective. Soit $x, y \in X,\ x \neq y$, puisque l'espace X étant séparé, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_j$ et $y \notin B_j$, de plus X étant régulier, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j.$$

On a $(i,j) \in D$, d'où $f_{ij}(x) = 0$ et $f_{ij}(y) = 1$, donc $f(x) \neq f(y)$.

2. Montrons que $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ est continu. Le sous-espace $f(X)$ étant métrisable, il s'agit de démontrer que toute suite (x_n) de X converge si la suite $(f(x_n))$ converge dans $f(X)$. Notons $f(x)$ la limite de la suite $(f(x_n))$ et montrons que la suite (x_n) converge vers x. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_j$ (l'ensemble de ces ouverts B_j est évidemment un système fondamental de voisinages de x), il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j,$$

d'où $f_{ij}(x) = 0$. Étant donné que

$$f_{ij}(x) = \lim_{n\to\infty} f_{ij}(x_n),$$

on a $f_{ij}(x_n) \neq 1$ dès que n est suffisamment grand, c'est-à-dire $x_n \in B_j$ et ceci prouve que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3) $\Longrightarrow$ 2). Le cube de Hilbert étant métrisable séparable (proposition 3.1.5), la proposition 3.3.2 montre que 3) implique 2). □

Exemple 3.3.5. *Considérons sur $\mathbb{R}$ la topologie θ_l qui a la base $\mathcal{B}_l = \{]a,b];\ a,b \in \mathbb{R},\ b > a\}$. On va montrer que l'espace $(\mathbb{R},\theta_l)$ n'est pas métrisable. Pour cela il suffit de montrer qu'il est séparable mais il n'admet pas de base dénombrable.*

1. *Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, alors pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on ait $\mathbb{Q} \cap\,]a,b[\, \neq \emptyset$, d'où $\mathbb{Q} \cap\,]a,b] \neq \emptyset$. Autrement dit, pour tout $]a,b] \in \mathcal{B}_l$ on ait $\mathbb{Q} \cap\,]a,b] \neq \emptyset$. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R},\theta_l)$, par conséquent $(\mathbb{R},\theta_l)$ est séparable.*

2. *Soit U un ouvert non vide de $(\mathbb{R},\theta_l)$, on a $U = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i,b_i]$, avec $a_i,b_i \in \mathbb{R}$ et $a_i < b_i$. Pour tout $i \in I$ on a $]a_i,b_i] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Posons $\mathbb{Q} \cap U = \{r_n, n \geq 0\}$. Pour tout $n \geq 0$, soit*

$$I_n = \{i \in I :\ r_n \in\,]a_i,b_i]\} \quad et \quad U_n = \bigcup_{i\in I_n}]a_i,b_i].$$

Alors on a $\cup I_n = I$ et $U = \bigcup\limits_{n\geq 0} U_n$. Soit $a_n = \inf\limits_{i\in I_n} a_i$ et $b_n = \sup\limits_{i\in I_n} b_i$, on a $a_n,b_n \in [-\infty,+\infty]$ et

$$U_n = \begin{cases}]a_n,b_n] & si \quad b_n \in U_n, \\ ]a_n,b_n[& si \quad b_n \notin U_n. \end{cases}$$

On distingue plusieurs cas.

Si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, *il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'on ait* $]a_n, b_n[= \bigcup_{k \geq N}]a_n, b_n - \frac{1}{k}]$.

Si $a_n \in \mathbb{R}$ *et* $b_n = +\infty$, *il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'on ait* $]a_n, +\infty[= \bigcup_{k \geq N}]a_n, k]$.

Si $a_n = -\infty$ *et* $b_n \in \mathbb{R}$, *il existe* $N \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'on ait* $]-\infty, b_n[= \bigcup_{k \geq N}]-k, b_n - \frac{1}{k}]$.

De même pour les autres cas. En tout cas, on peut écrire U_n *comme réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme* $]\alpha, \beta]$, *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Par conséquent,* U *est réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme* $]\alpha, \beta]$, *avec* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. *Supposons que* $(\mathbb{R}, \theta_l)$ *admet une base dénombrable d'ouverts* $(U_n)_{n \geq 0}$. *On peut supposer que pour tout* $n \geq 0$, $U_n =]a_n, b_n]$, *avec* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et* $b \neq b_n$ *pour tout* $n \geq 0$. *Alors* $]a, b]$ *ne peut pas s'écrire comme réunion d'intervalles* $]a_n, b_n]$, *c'est une contradiction. Donc* $(\mathbb{R}, \theta_l)$ *n'admet pas de base dénombrable d'ouverts.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Avanissian, Initiation à l'analyse fonctionnelle, Presses universitaires de France, 1996.

[2] N. Bourbaki, Topologie Générale, Chapitres 1 à 4, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, nouvelle édition, 2007.

[3] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Dunod, 2011.

[4] J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955, réédition, Springer-Verlag, 1975.

[5] J.R. Munkres, Topology, Prentice-Hall, 1975, 2nd edition, 2000.

[6] J.I. Nagata, Modern general topology, North-holland, 2ème édition, 1985.

[7] C. Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Hermann, 2012.