République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire

présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Equations fonctionnelles et différentielles multivoques

par
Hachehouche Marwa

Devant le jury

Président	**M. F. Yarou**	Prof. Université de Jijel
Encadreur	**W. Boukrouk**	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	**F. Aliouane**	M.C.A Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

*Mes remerciements vont tout premièrement à **Dieu** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il ma donné durant ces longues années d'études et le courage pour terminer ce mémoire.*

*Je remerce chaleureusement nous encadreur **W. Boukrouk** pour la pertinence de ses remarques et sa patience durant la réalisation de ce travail. j' admire beaucoup son sérieux et sa manière de diriger qui furent pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.*

*Je remercie vivement **M. F.Yarou** pour avoir accepter de présider le jury de soutenance.*

*J' adresse également mes vifs remerciements à l'examinatrice **F. Aliouane** pour avoir accepter d'être membre de ce jury.*

Je veux aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématique.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je peux remercier profondément ma famille pour les conseils et encouragement durant toutes les années de mes études.

Dédicace

Au nom du Allah *je dédie ce travail de fin d'études*

A *l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, à toi* ***mon père Massaud****.* rahimaho allah (Que dieu l'accueil dans son vaste paradis).

A *la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur,* ***maman Acia****.*

A mes fréres **Mouad, Nadjib, Mansour, Aymen et Rida**

A *mes grands-méres* ***Aicha, Zahiya et Massauda*** *pour leur soutien moraux et pour leurs encouragements, que Dieu vous protège.*

A mes tantes **Fayrouz, Houda, Najat, Roumayssa**.

A mes oncles et leurs epouses et leurs enfants

A mes cousines **Ilef , Aness, Samira, Imen**

A toutes mes amies **Boutheyna (et Ala arrahman), Roumayssa, Ranya, Amina et wiam**.

A mes amies de l'universitaire **Iman, Ahlem, Kaouter.**

A toutes la famille Hachehouche et Boussetla.

A tous mes collégues de Analyse

A tous mes collégues de Mathématiques

A *tout qui m'aiment et que j'aime.*

★$\mathcal{H}$♡$\mathcal{M}$★

Table des matières

Introduction

En mathématiques, les équations fonctionnelles multivoques font référence à des équations dans lesquelles la solution recherchée est une fonction multivoque, ce qui constitue une généralisation des equation classique.

Une équation fonctionnelle multivoque exprime une relation entre une fonction multivoque inconnue et d'autres fonctions connues ou inconnues. Ce sont des équations qui combinent des aspects fonctionnels et intégraux, en introduisant une propriété de multivalence. Elles impliquent l'utilisation de fonctions, d'intégrales et d'opérateurs multivoques, qui attribuent à chaque point d'un espace des ensembles de valeurs possibles. De manière formelle, une équation fonctionnelle-intégrale multivoque peut être exprimée comme suit

$$F(X) = G(X) + \int_a^b K(t, X(t))dt,$$

où X représente une multifonction inconnue définie sur un intervalle $[a, b]$, F et G sont des opérateurs multivoques, et K est une multifonction intégrable. La résolution consiste à trouver une fonction X qui satisfait l'équation donnée. Cette tâche peut être complexe en raison de la présence d'opérateurs multivoques, qui introduisent une certaine indétermination dans la solution.

Les équations fonctionnelles-intégrales multivoques trouvent des applications dans divers domaines des mathématiques et des sciences, tels que l'analyse fonctionnelle, la théorie du contrôle, la théorie des jeux et l'économie mathématique. Elles permettent de modéliser des phénomènes où les solutions peuvent avoir plusieurs valeurs possibles en fonction de différentes conditions ou de l'incertitude des données.

D'autre part, une équation différentielle multivoque relie une fonction multivoque inconnue à ses dérivées, exprimant ainsi une relation entre elles par rapport à une ou plusieurs variables indépendantes. Ce sont des équations mathématiques qui combinent des aspects différentiels et intégraux tout en exhibant une propriété multivoque. Elles impliquent l'utilisation de fonctions, de dérivées, d'intégrales et d'opérateurs multivoques. formellement, une équation différentielle-intégrale multivoque peut être exprimée de la manière suivante

$$F(U) = G(U) + \int_a^b K(t, U(t), \dot{U}(t))dt,$$

où U est une multifonction inconnue définie sur un intervalle $[a, b]$, F et G sont des opérateurs multivoques, et K est une fonction intégrable. Les opérateurs multivoques F et G attribuent à chaque multifonction U une collection d'ensembles de valeurs possibles. Les équations différentielles-intégrales multivoques trouvent des applications dans divers domaines mathématiques et scientifiques, tels que la modélisation des phénomènes dynamiques, la théorie du contrôle, la mécanique des fluides, la physique mathématique, et bien d'autres. Elles permettent de décrire des systèmes où les variables évoluent à la fois en fonction de leur valeur actuelle et de leurs dérivées, avec des solutions pouvant présenter plusieurs trajectoires possibles en fonction de différentes conditions ou de l'incertitude dans les données.

Fonctionnelle ou différentielles, les équations multivoques en général, en raison de leur nature multivoque, peuvent présenter un ensemble infini de solutions ou nécessiter des techniques spéciales pour identifier toutes les solutions possibles. Résoudre ces équations peut être un domaine de recherche actif en mathématiques, impliquant l'utilisation d'approches avancées telles que l'analyse fonctionnelle, la théorie des ensembles, ou les méthodes numériques pour obtenir des résultats satisfaisants, pour déterminer les solutions uniques ou des classes spécifiques de solutions en fonction de conditions supplémentaires ou de contraintes spécifiques.

Le but de ce mémoire est d'analyser le papier [13] portant sur certaines catégories d'équations multivoques. Le but est d'étudier, puis présenter par détails les résultats donnés dans [13]. Il s'agit de théorèmes d'existence, d'unicité, d'approximation et de dépendance des données qui permettent de résoudre certains problèmes de Cauchy fonctionnels-différentiels multivoques par une approche du point fixe.

Ce mémoire est structuré comme suit.
Un premier chapitre, dans lequel nous présentons les notations, et tous les concepts nécessaires pour l'étude des équations multivoques, notamment l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$, la distance de Hausdorff, ainsi que la dérivation et l'intégrale multivoques. Nous rappelons aussi quelques notions concernant la thorie des opérateurs.

Le deuxiéme chapitre est consacré aux équations fonctionnelles, trois théorèmes sont présentés, une équation, un système d'équations, et un problème avec retard.
Le dernier chapitre par contre, est consacré aux équations différentielles, trois théorémes aussi concernant d'xistence de solutions sont présentés. Nous terminons par un exemple numérique illustrant bien l'un des théorèmes de [13].

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notations générales

Dans ce chapitre, nous rappelons de quelques définitions et théorèmes de base qui nous seront utiles dans les chapitre suivants.
Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire. On note par

- $\mathbb{I} = [a, b]$ un intervalle de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^d$ l'ensemble des vecteurs de dimension d, à coordonnées réelles.
- (E, d_E) l'espace métrique E muni de la distance d_E.
- $B_E(y, r)$ la boule ouverte de E de centre y et de rayon r.
- $\overline{B}_E(y, r)$ la boule fermée de E de centre y et de rayon r.
- $\mathcal{P}_{fb}(E)$ l'ensemble des parties fermées bornnées de E.
- $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$ la distance de Hausdorff.
- $Comp(E)$ la famille des parties non vides compactes de E.
- $C([a, b], E)$ l'espace de toutes les applications continues $U : [a, b] \to E$, muni de la distance de la convergence uniforme d_u, définie pour tous U, V par

$$d_u(U, V) = \sup_{t\in[a,b]} d_E(U(t), V(t)).$$

- Si E est un espace vectoriel normé, $cc(E)$ désigne la famille de toutes les parties non vides convexes compactes de E, et 0_E l'élément neutre de E.

- Pour $E = \mathbb{R}^d$, l'addition (de Minkowski) et la multiplication par scalaires dans $cc(\mathbb{R}^d)$ sont définies pour tous $A, B \in cc(\mathbb{R}^d)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ comme suit

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},\ \lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

- $Fix(T) = \{x \in E \setminus\ x = T(x)\}$ l'ensemble des points fixes de l'application

$$T : E \longrightarrow E.$$

- $I(T) = \{Y \subset E \setminus\ T(Y) \subset Y\}$ la famille de tous les sous-ensembles non vides invariants par T.
- $L^1(I, E)$ l'espace des applications intégrables au sens de Lebesgue sur I, à valeurs dans E.

1.2 Espace topologique, espace normé et espace métrique

Les notions de cette section ont été prises des références [2], [3] et [7].

Définition 1.2.1. *Soit E un ensemble non vide. Soit θ une famille de parties de E. On dit que θ est une topologie sur E si et seulement si*

1. $\emptyset \in \theta$, $E \in \theta$.
2. $\forall (A_i)_{i\in I} \subset \theta \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \theta$ *(stabilité par union quelconque).*
3. $\forall (A_i)_{i=1,\cdots,n} \subset \theta \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \theta$ *(stabilité par intersection finie).*

Définition 1.2.2. *Soit θ une topologie sur E. Alors (E, θ) est appelé un espace topologique. On appelle ensemble ouvert de E tout ensemble appartenant à θ, c'est-à-dire*

$$A \text{ est ouvert dans } E \Leftrightarrow A \in \theta.$$

Définition 1.2.3. *Soit (E, θ) un espace topologique et $B \subset E$. On dit que B est fermé dans E si et seulement si son complémentaire C_E^B est ouvert.*

Définition 1.2.4. *Soient (E_1, θ_1) et (E_2, θ_2) deux espaces topologiques et soit*

$$E = E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2) :\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}.$$

1. *On appelle ouvert premier tout ensemble*

$$O = \{O_1 \times O_2 : \ O_1 \in \theta_1, O_2 \in \theta_2\}.$$

2. *On appelle ouvert de E tout union d'ouverts premiers i.e.,*

$$\theta = \{\cup_k (O_1^k \times O_2^k) \setminus \ O_1^k \in \theta_1, O_2^k \in \theta_2\}$$

est une topologie sur E appelée la topologie produit de $\theta_1 \times \theta_2$, et le couple (E, θ) est appelée l'espace topologique produit de (E_1, θ_1) et (E_2, θ_2).

Définition 1.2.5. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ et soit*

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

on dit que φ est une norme sur E si et seulement si

1. *Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.*
2. *Pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.*
3. *Pour tout $x, y \in E$, on a $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$.*

Définition 1.2.6. *Soit E un ensemble non vide quelconque. On appelle distance sur E une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui à $(x, y) \in E \times E$ fait correspondre le nombre réel fini positif $d(x, y)$ appelé distance de x à y, et satisfaisant aux trois conditions suivantes*

(i) $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$ *(relation de symétrie),*

(iii) $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, x)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.2.7. *On appelle espace métrique le couple (E, d) formé d'un ensemble E et une distance d sur E.*

Définition 1.2.8. *Soit (E, d_E) un espace métrique, $x_0 \in E$ et $r > 0$. On appelle boule ouvert de centre x_0 et de rayon r, notée $B_E(x_0, r)$ l'ensemble*

$$\{x \in E : \ d_E(x_0, x) < r\}.$$

Définition 1.2.9. *Soient (E, d_E) un espace métrique, et A une partie non vide de E. La distance d'un point $x \in E$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d_E(x, a). \qquad (*)$$

Définition 1.2.10. *Soient A, B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d_E). Alors, la distance entre A et B est définie par*

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d_E(x, y).$$

Définition 1.2.11. ***(L'adhérence)*** *Soient (E, d_E) un espace métrique, et A une partie non vide de E. On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$, le sous-ensemble de E défini par*

$$\overline{A} = \{x \in E,\ d(x, A) = 0\}.$$

Corollaire 1.2.1. *Soient A une partie non vide d'un espace métrique (E, d_E) et $x \in E$. Alors*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

Définition 1.2.12. *Soit (E, d_E) un espace métrique et soit $(x_n)_n \subset E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall p,\ q \in \mathbb{N},\ p > q \geq n_0 \Rightarrow d_E(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.13. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d_E), et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow d_E(x_n, x) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.14. *Un espace métrique (E, d_E) est dit complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans E.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Pour tous $x, y \in E$, on pose $d_E(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie facilement que d_E est une distance sur E, appelée distance associée à la norme. La topologie correspondante sera appelée topologie normique.

Définition 1.2.15. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

1.3 Applications lipschitziennes

Soient (E_1, d_{E_1}) et (E_2, d_{E_2}) deux espaces métriques, et soit $f : E_1 \to E_2$ une application.

• On dit que f et Lipschitzienne s'il existe une constante réelle $L \geq 0$ telle que

$$\forall x_1, x_2 \in E_1,\ \ d_{E_2}(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_{E_1}(x_1, x_2).$$

• La plus petite valeur L satisfaisant cette propriété pour f est appelée la constante de Lipschitzité.
• Si $L < 1$ on appelle f une contraction. Dans ce cas, on aura

$$d_{E_2}(f(x_1), f(x_2)) \leq d_{E_1}(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in E_1,$$

d'o*ù* le terme "contraction".
• Si $L > 1$, f est dite "expansive".
• Si $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ sont deux espaces normés, alors

$$\Big(f \text{ est } L - lipschitzienne \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in E_1,\ \|f(x_1) - f(x_2)\|_{E_2} \leq L\|x_1 - x_2\|_{E_1}\Big).$$

Théorème 1.3.1. *(Théorème du point fixe de Banach) Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ une contaraction. Alors, f admet un unique point fixe dans E.*

1.4 Distance de Hausdorff et l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.4.1. *Soient A, B deux sous ensembles d'un espace métrique (E, d_E), l'écart entre A et B est défini par*

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B),$$

La distance de Hausdorff entre A et B est definie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d_E(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d_E(a, b)\}.$$

Propriétés élementaires

1. $e(A, \emptyset) = +\infty$ si $A \neq \emptyset$
2. $e(\emptyset, B) = 0$
3. $e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$
4. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
5. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

La famille des parties non vides fermées bornées de E, $\mathcal{P}_{fb}(E)$, muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$ est un espace métrique, et on a

- Si (E, d_E) est complet, alors $(\mathcal{P}_{fb}(E), \mathcal{H})$ et $(Comp(E), \mathcal{H})$ le sont aussi.
- Si E est séparable, alors $(Comp(E), \mathcal{H})$ l'est aussi.

Dans le cas d'un espace de Banach E, $cc(E)$ désigne la famille des parties non vides convexes compactes de E et nous avons

Proposition 1.4.1. *([6]) $cc(E)$ est fermé dans $Comp(E)$.*

Remarque 1.4.1. *$(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ est un espace métrique complet car d'après la Proposition 1.4.1, il est fermé dans $Comp(\mathbb{R}^d)$ qui est complet. L'espace $(cc(\mathbb{R}^d), \mathcal{H})$ est aussi séparable puisque c'est un sous ensemble de l'espace métrique séparable $Comp(\mathbb{R}^d)$.*
Il est bien connu que l'addition de Minkowski est associative et commutative avec l'element neutre $0_{cc(\mathbb{R}^d)} = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, mais, en général, $A - A \neq 0_{cc(\mathbb{R}^d)}$ (sauf si A est un singleton), autrement dit, $(-A)$ n'est pas symétrique à A. Une première implication de ce fait est que la simplification additive n'est pas valable, i.e. $(A + B) - B \neq A$. Cela imlique aussi l'absence du symétrique dans $cc(\mathbb{R}^d)$ ce qui le prive d'être un espace vectoriel. En revanche, avec cette addition et la multiplication par un scalaire positif, $cc(\mathbb{R}^d)$ est un espace métrique semi-linéaire.

Pour la distance $\mathcal{H}$ nous avons pour tous $A, B, C, D \in cc(\mathbb{R}^d)$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les propriétés suivantes

P1) $\mathcal{H}(A + C, B + C) = \mathcal{H}(A, B)$.

P2) $H(A + B, C + D) \leq \mathcal{H}(A, C) + H(B, D)$

P3) $\mathcal{H}(\lambda A, \lambda B) = |\lambda|\mathcal{H}(A, B)$.

P4) $\mathcal{H}(\lambda A, \beta A) = |\lambda - \beta| |||A|||, \ \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$,

$|||A|||$ est la magnitude de A, définie par

$$|||A||| := \mathcal{H}(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}) = \sup_{a \in A} \|a\|_E, \ \forall A \in cc(\mathbb{R}^d).$$

Le cas des intervalles

Notons par $\mathbb{I} := cc(\mathbb{R})$ la famille de toutes les parties non vides convexes compactes de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ i.e., la famille des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Pour $A, B \in \mathbb{I}$, $A = [a_1, a_2], \ B = [b_1, b_2]$, et $\lambda \geq 0$.

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \quad \lambda A = [\lambda a_1, \lambda a_2], \quad (-\lambda)A = [-\lambda a_2, -\lambda a_1].$$

Aussi, pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ nous avons

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A.$$

La distance de Hausdorff dans $\mathbb{I}$ est définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\},$$

le diamètre et la magnitude de A sont définis par

$$diam(A) := a_2 - a_1 \text{ et } |||A||| = \mathcal{H}\Big(A, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) = \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

1.5 Différence et dérivées de Hukuhara

Pour plus de détails, on peut se référer à [1].
En 1967, le mathématicien M. Hukuhara a introduit une opération de soustraction dans l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle la différence entre A et A est égale à $0_{cc(\mathbb{R}^d)}$. En effet, soient $A, B, C \in cc(\mathbb{R}^d)$. L'ensemble C est appelé la différence de Hukuhara de A et B, si $A = B + C$.
Alors, il est noté par $A \ominus B$. Notons que $A \ominus B \neq A - B$.

Lemme 1.5.1. *([10])(la règle de simplification de Radström) Soient A, B et C des parties d'un espace vectoriel topologique telles que*

$$A + C \subset B + C.$$

Si A est convexe, B est convexe fermé et C est non vide et borné, alors

$$A \subset B.$$

Grâce à ce dernier lemme nous avons

Lemme 1.5.2. *Soient A, B, C des éléments de $cc(\mathbb{R}^d)$. Si $A + C = B + C$, alors $A = B$.*

Par ce lemme, il est clair que si la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe, alors elle est unique.

Proposition 1.5.3. *([5]) Soient $A, B \in cc(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour que la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe il faut et il suffit que l'on ait la condition suivante :*
Si $a \in \partial A$, il existe au moins un point c tel que

$$a \in B + c \subset A$$

Proposition 1.5.4. *Pour $A, B \in E$, si la différence de Hukuhara $A \ominus B$ existe, alors $diam(A) \geq diam(B)$.*

Remarque 1.5.1. *Si $A \ominus B$ existe, alors $(A \ominus B) + B = B + (A \ominus B) = A$.*
Dans la suite, introduisons la notion de différentiabilité utilisée dans ce mémoire.

Définition 1.5.1. *(Voir [9]) Soit $F : [a, b] \to E$ telle que les différences de Hukuhara $F(t) \ominus F(s)$ $(a \leq s \leq t \leq b)$ existent. Alors, la dérivée de Hukuhara de F au point $t \in]a, b[$ est définie par la formule*

$$\dot{F}(t) = \lim_{h \to 0_+} \frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{F(t) \ominus F(t-h)}{h}$$

quand ces deux limites existent par rapport à la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$. De plus

$$\dot{F}(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{F(a+h) \ominus F(a)}{h}, \dot{F}(b) = \lim_{h \to 0_+} \frac{F(b) \ominus F(b-h)}{h}.$$

Remarque 1.5.2. *Si une application $F : [a, b] \to E$ est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a, b]$, alors elle est continue sur $[a, b]$.*

Remarque 1.5.3. *Toute application $F : [a, b] \to E$ constante sur $[a, b]$ est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a, b]$ et $\dot{F}(t) = \{0_{\mathbb{R}^d}\}$, pour tout $t \in [a, b]$.*

Proposition 1.5.5. *La différence de Hukuhara de deux intervalles $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$ existe si et seulement si $diam(A) \geq diam(B)$ et elle est égale à $[a_1 - b_1, a_2 - b_2]$.*

Démonstration. Si $diam(A) \geq daim(B)$ alors $a_2 - a_1 \geq b_2 - b_1$, donc $a_2 - b_2 \geq a_1 - b_1$. Prenons $c_1 := a_1 - b_1$ et $c_2 := a_2 - b_2$, alors $B + [c_1, c_2] = [a_1, a_2] = A$, donc $A \ominus B$ existe et $A \ominus B = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$. La deuxiéme implication découle de la Proposition 1.5.4 ■

Proposition 1.5.6. *([12]) Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R})$ une application et $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$. Si F est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a, b]$, alors les fonctions réelles f_1 et f_2 sont dérivables, et pour tout $t \in [a, b]$ nous avons*

$$\dot{F}(t) = [f_1'(t), f_2'(t)].$$

Démonstration. On suppose que F est Hukuhara dérivable. Soit $t \in]a, b[$. Pour h assez petit, $F(t+h) \ominus F(t)$ et $F(t) \ominus F(t-h)$ existent, et donc

$$\begin{aligned} diam(F(t+h)) = f_2(t+h) - f_1(t+h) &\geq diam(F(t)) = f_2(t) - f_1(t) \\ &\geq diam(F(t-h)) = f_2(t-h) - f_1(t-h), \end{aligned}$$

$$F(t+h) \ominus F(t) = [f_1(t=h) - f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t)],$$

et

$$F(t) \ominus F(t-h) = [f_1(t) - f_1(t-h), f_2(t) - f_2(t-h)].$$

Puisque $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)\ominus F(t)}{h}$ existe, alors les deux limites $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f_1(t+h)\ominus f_1(t)}{h}$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f_2(t+h)\ominus f_2(t)}{h}$ existent, or

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t+h)\ominus F(t)}{h} = \dot{F}(t), \lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(t+h)\ominus f_1(t)}{h} = f_1'^d(t), \lim_{h\to 0^+} \frac{f_2(t+h)\ominus f_2(t)}{h} = f_2'^d(t)$$

donc

$$\dot{F}(t) = [f_1'^d(t), f_2'^d(t)].$$

De la même manière, on trouve que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(t)\ominus F(t-h)}{h} = \dot{F}(t) = [f_1'^g(t), f_2'^g(t)],$$

on conlut que $f_1'^d(t) = f_1'^g(t) = f_1'(t), f_2'^d(t) = f_2'^g(t) = f_2'(t)$ et que

$$\dot{F}(t) = [f_1(t), f_2(t)].$$

On adopte la même démonstration dans le cas où F est dérivable au sens de Hukuhara.

■

1.6 Intégrale multivoque

Nous sommes concernés par la théorie de l'intégrale multivoque introduite par Hukuhara en 1967 ([5]). Son approche est basée sur les idées classiques de Riemann et Daniell, il a translaté ces idées à l'espace $cc(\mathbb{R}^d)$ des convexes compacts de $\mathbb{R}^d$. En consultant le papier [5], on trouve qu'il a aussi défini une intégrale multivoque analogue à celle de Lebesgue classique, pour se rendre compte en fin que les deux intégrales coincident et définissent une seule. En bref, l'intégrale de Hukuhara (Riemann multivoque) d'une application $F : [a,b] \to E$ existe, si F est mesurable et l'application réelle $t \mapsto |||F(t)|||$ est intégrable sur $[a,b]$.

Quelques propriétés de l'intégrale multivoque. ([1])

P1) Si $F, G : [a,b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ sont intégrables aux sens multivoque. Alors,

$$\mathcal{H}\Big(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt\Big) \leq \int_a^b \mathcal{H}(F(t), G(t))dt.$$

P2) Si $a < c < b$ et $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors F est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt. \tag{1.1}$$

P3) Si $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est intégrable sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$, F est intégrable sur [a, c] et sur [c, b] et la formule (1.1) est vérifiée.

P4) Si $F : \mathbb{R} \to cc(\mathbb{R}^d)$ est continue, alors elle est intégrable sur chaque intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

P5) Si $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ est intégrable, alors

$$|||\int_a^b F(t)dt||| \leq \int_a^b |||F(t)|||dt.$$

P6) ([8], Lemme 10) Soit $F : [a, b] \to cc(\mathbb{R}^d)$ une application continue (ou bien mesurable et bornée). Posons pour tout $t \in [a, b]$

$$L(t) = \int_a^t F(s)ds \ \ et \ \ S(t) = \int_t^b F(s)ds.$$

Alors, L et S sont continues.

Théorème 1.6.1. *(voir [12]) Dans le présent mémoire, l'intégrale d'une fonction à valeurs d'intervalle $f : [a, b] \to \mathbb{I}$ avec $f(x) = [f^-(x), f^+(x)]$ est généralement définie comme suit :*

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[\int_a^b f^-(x)dx, \int_a^b f^+(x)dx\Big].$$

1.7 Propriétés liant intégrales et dérivée

Nous aurons besoin des popriétés suivantes.

Lemme 1.7.1. *([5]) Si $F : [a, b] \to E$ est continue et $M(t) = \int_a^t F(s)ds$. Alors, M est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a, b]$ et $\dot{M}(t) = F(t)$, pour tout $t \in [a, b]$.*

Lemme 1.7.2. *([5]) Si $F : [a, b] \to E$ est mesurable et bornées, et $M(t) = \int_a^t F(s)ds$. Alors, M est dérivable au sens de Hukuhara presque partout sur $[a, b]$ et $\dot{M}(t) = F(t)$, p.p. $t \in [a, b]$*

Remarque 1.7.1. *([12]) Si une application $F : [a, b] \to E$ est dérivable au sens de Hukuhara sur $[a, b]$ et $\dot{F}$ est continue, alors pour tout $t \in [a, b]$*

$$F(t) = F(a) + \int_a^t \dot{F}(s)ds.$$

1.8 Notions sur les opérateurs

Définition 1.8.1. *([11]) Soit (E, d_E) un espace métrique. Alors, $T : E \to E$ est appelé opérateur de Picard (OP) s'il existe $x_T^* \in E$ tel que*

P1) $Fix(T) = \{x_T^*\}$.

P2) $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = x_T^*, \ \ \forall x \in E.$

Définition 1.8.2. *indefinition ([11]) Soit (E, d_E) un espace métrique. Alors, l'opérateur $T : E \to E$ est dit opérateur de Picard faible (OPF) si la suite $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in E$ et la limite (qui peut dépendre de x) est un point fixe pour T.*

Définition 1.8.3. *([11]) Soit (E, d_E) un espace métrique, $T : E \to E$ un OPF et notons par $T^\infty(x) := \lim\limits_{n\to\infty} T^n(x)$, pour chaque $x \in E$. Par définition T est dit un c-OPF s'il existe $c > 0$ tel que*

$$d_E(x, T^\infty(x)) \leq c d_E(x, T(x)), \text{ pour tout } x \in E.$$

Si de plus l'opérateur T est un OP, alors on l'appelle c-OP.

Remarque 1.8.1. *([11]) Si (E, d_E) est un espace métrique complet et $T : E \to E$ est une L-contraction, alors T est un c-OP avec $c = \frac{1}{1-L}$.*
Le résultat de base dans la théorie des OPF est le Théorème Caractérisation suivant.

Théorème 1.8.1. *([11]) Soient (E, d_E) un espace métrique et $T : E \to E$ un opérateur. Alors, T est un OPF (respectivement c-OPF) si et seulement s'il existe une partition de E, $E = \bigcup\limits_{A\in\Gamma} E_A$ telle que :*

P1) $E_A \in I(T)$, *pour tous les* $A \in \Gamma$,

P2) $T_{|}E_A : E_A \to E_A$ *est un OP (respectivement c-OP), pour tous les* $A \in \Gamma$.

Un autre résultat abstrait de dépendance des données est le suivant.

Théorème 1.8.2. *([11]) Soient (E, d_E) un espace métrique et $T_1,\ T_2 : E \to E$ deux opérateurs. Supposons que*

(i) T_i *est un* $c_i - OPF$, *pour* $i \in \{1, 2\}$,

(ii) il existe une constante réelle $\eta > 0$ telle que

$$d_E(T_1(x), T_2(x)) \leq \eta, \quad \forall x \in E.$$

Alors,

$$d(Fix(T_1), Fix(T_2)) \leq \eta \max\{c_1, c_2\}.$$

Chapitre 2

Équations fonctionnelles-intégrales Multivoques

Dans ce chapitre, E est un espace de Banach, $cc(E)$ désigne la famille des parties non vides convexes compactes de E et $\mathcal{H}$ est la distance de Hausdorff sur $cc(E)$ engendrée par la norme de E. $C\big([a,b], cc(E)\big)$ est l'espace des fonctions définies, continues de l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $cc(E)$. Au cours de la première et deuxièmme section, nous nous intéressons à l'équation multivoque

$$X(t) = G\big(t, Q(X)(t), X(t), X(a)\big) + \int_a^t K\big(t,s,X(s)\big)ds, \quad t \in [a,b] \tag{2.0}$$

où Q, G et K sont des opérateurs. Il s'agit pas d'une équation différentielle, mais plutôt une équation fonctionnelle-intégrale.

Par une solution de l'équation ci-dessus, on comprend une fonction $X \in C\big([a,b], cc(E)\big)$ (donc une multi-fonction $X : [a,b] \rightrightarrows E$) satisfaisant la relation (2.0) pour tout $t \in [a,b]$. Dans la troisième section, nous étudions un problème fonctionnel-intégral multivoque qui apparait généralement en biomathématiques.

2.1 Équation avec infinité de solutions

Considérons les opérateurs suivants

$$Q : C\big([a,b], cc(E)\big) \to C\big([a,b], cc(E)\big)$$
$$X \mapsto Q(X),$$

$$G : [a,b] \times (cc(E))^3 \to cc(E)$$
$$(t,A,B,C) \mapsto G(t,A,B,C),$$

et

$$K : [a,b] \times [a,b] \times cc(E) \to cc(E)$$
$$(t,s,A) \mapsto K(t,s,A).$$

Nous supposons que

(1) il existe un réel $l > 0$ tel que

$$\mathcal{H}\big(Q(X)(t), Q(Y)(t)\big) \leq l\mathcal{H}\big(X(t), Y(t)\big),$$

$\forall X, Y \in C\big([a,b], cc(E)\big)$, $\forall t \in [a,b]$,

(2) il existent deux réels $l_1 > 0$, $l_2 > 0$ tels que

$$\mathcal{H}\big(G(t,A_1,B_1,C), G(t,A_2,B_2,C)\big) \leq l_1\mathcal{H}(A_1,A_2) + l_2\mathcal{H}(B_1,B_2),$$

$\forall t \in [a,b]$, $\forall A_1, B_1, A_2, B_2, C \in cc(E)$,

(3) $l_1 l + l_2 < 1$,

(4) il existe un réel $l_3 > 0$ tel que

$$\mathcal{H}\big(K(t,s,A), K(t,s,B)\big) \leq l_3\mathcal{H}(A,B)$$

$\forall t, s \in [a,b]$, $\forall A, B \in cc(E)$,

(5) $G\big(a, Q(X)(a), X(a), X(a)\big) = X(a)$, $\forall X \in C\big([a,b], cc(E)\big)$.

Théorème 2.1.1. *Considérons l'équation* (2.0) *sous les conditions* (1) − (5). *Si* $S \subset C\big([a,b], cc(E)\big)$ *est l'ensemble des solutions de cette équation, alors*

$$card(S) = card(cc(E)),$$

et donc l'ensemble de solutions S *de l'équation* (2.0) *est infini.*

Sur l'espace fonctionnel $C\big([a,b],cc(E)\big)$, on peut considérer la distance de la convergence uniforme d_u définie par

$$d_u(X,Y) := \max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}(X(t),Y(t)),$$

et aussi la distance d_τ définie par

$$d_\tau(X,Y) := \max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}(X(t),Y(t))e^{-\tau(t-a)},$$

tel que $\tau > 0$ est un réel. Il est connu que $\Big(C\big([a,b],cc(E)\big),d_u\Big)$ est un espace métrique complet. L'espace métrique $\Big(C\big([a,b],cc(E)\big),d_\tau\Big)$ l'est aussi car nous avons

Proposition 2.1.1. *Les distances d_u et d_τ sont équivalentes i.e., ils existent α, $\beta > 0$ telles que*

$$\alpha d_u(X,Y) \leq d_\tau(X,Y) \leq \beta d_u(X,Y), \quad \forall X,\ Y \in C\big([a,b],cc(E)\big).$$

Démonstration. Soient $X,Y \in C\big([a,b],cc(E)\big)$. Pour tout $t \in [a,b]$, nous avons

$$0 \leq t-a \leq b-a$$

d'où

$$-\tau(b-a) \leq -\tau(t-a) \leq 0$$

donc

$$e^{-\tau(b-a)} \leq e^{-\tau(t-a)} \leq 1$$

et alors

$$\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau(b-a)} \leq \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau(t-a)} \leq \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big),$$

par passage au maximum on obtient

$$\max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau(b-a)} \leq \max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau(t-a)} \leq \max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big),$$

i.e.,

$$\Big[\max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)\Big]e^{-\tau(b-a)} \leq \max_{t\in[0,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau(t-a)} \leq \Big[\max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)\Big],$$

d'où

$$e^{-\tau(b-a)}d_u(X,Y) \leq d_\tau(X,Y) \leq d_u(X,Y)$$

Il suffit donc de prende $\alpha = e^{-\tau(b-a)}$ *et* $\beta = 1$. ■

Démonstration. (**du Théorème 1.8.1**) Considérons l'opérateur

$$T : C\big([a,b],cc(E)\big) \longrightarrow C\big([a,b],cc(E)\big)$$
$$X \mapsto T(X),$$

défini par

$$\begin{aligned} T(X) : [a,b] &\longrightarrow cc(E) \\ t \mapsto T(X)(t) &= G\big(t, Q(X)(t), X(t), X(a)\big) + \int_a^t K\big(t,s,X(s)\big)ds. \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (2.0) sont exactement les points fixes de l'opérateur T.
En effet,

$$\begin{aligned} X \in Fix(T) &\Leftrightarrow X = T(X) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [a,b], \quad X(t) = T(X)(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [a,b], \quad X(t) = G\big(t, Q(X)(t), X(t), X(a)\big) + \int_a^t K\big(t,s,X(s)\big)ds \\ &\Leftrightarrow X \in S. \end{aligned}$$

Pour tout $A \in cc(E)$, définissons le sous-espace $C_A := \big\{X \in C\big([a,b],cc(E)\big) : \ X(a) = A\big\}$. Alors $(C_A)_{A\in cc(E)}$ est une partition de l'espace $C\big([a,b],cc(E)\big)$. En effet,

$$C([a,b],cc(E)) = \bigcup_{A\in cc(E)} C_A,$$

car il est clair par définition que tout $C_A \subset C([a,b],cc(E))$, d'où $\bigcup_{A\in cc(E)} C_A \subset C\big([a,b],cc(E)\big)$.
D'autre part, pour toute application $X \in C\big([a,b],cc(E)\big)$, il existe $A \in cc(E)$ telle que $X \in C_A$ (il suffit de prendre $A = X(a)$), ce qui donne $C([a,b],cc(E)) \subset \bigcup_{A\in cc(E)} C_A$. De plus, les sous-espaces C_A sont deux à deux disjoints. En effet, soient $A_1, A_2 \in cc(E)$, *tels que* $A_1 \neq A_2$. Si on suppose que $C_{A_1} \cap C_{A_2} \neq \emptyset$, alors il existe $X \in C_{A_1}$ tel que $X \in C_{A_2}$, donc $X(a) = A_1$ et $X(a) = A_2$, d'où $A_1 = A_2$, ce qui est une contradiction.
Maintenant, pout tout $A \in cc(E)$ notons par $T_A = T|_{C_A}$ la restriction de l'opérateur T sur C_A. Pour tout $X \in C_A$, par l'hypothèse (5) nous avons

$$\begin{aligned} T(X)(a) &= G\big(a, Q(X)(a), X(a), X(a)\big) + \int_a^a K(a,s,X(s))ds \\ &= X(a) + \{0_E\} \\ &= A, \end{aligned}$$

donc $T(X) \in C_A$, ainsi $C_A \in I(T_A)$ i.e. $T_A : C_A \to C_A$.
Maintenant, soit $\tau > 0$. Dans ce qui suit, on munit l'espace $C\big([a,b], cc(E)\big)$, et donc le sous-espace C_A de la distance d_τ. Soient $X, Y \in C_A$. D'après la propriété $P2)$ de la distance de Hausdorff, et d'après les hypothèses (2), (4) et (1) respectivement, nous avons pour tout $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(T_A(X), T_A(Y)\Big) &= \mathcal{H}\Big(G\big(t, Q(X)(t), X(t), X(a)\big) + \int_a^t K(t,s,X(s))ds, \\
&\qquad G\big(t, Q(Y)(t), Y(t), Y(a)\big) + \int_a^t K(t,s,Y(s))ds\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big(G\big(t, Q(X)(t), X(t), X(a)\big), G\big(t, Q(Y)(t), Y(t), Y(a)\big)\Big) \\
&\qquad + \mathcal{H}\Big(\int_a^t K(t,s,X(s))ds, \int_a^t K(t,s,Y(s))ds\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big(G\big(t, Q(X)(t), X(t), A\big), G\big(t, Q(Y)(t), Y(t), A\big)\Big) \\
&\qquad + \int_a^t \mathcal{H}\Big(K(t,s,X(s)), K(t,s,Y(s))\Big)ds \\
&\leq l_1 \mathcal{H}\Big(Q(X)(t), Q(Y)(t)\Big) + l_2 \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) + \int_a^t l_3 \mathcal{H}\Big(X(s), Y(s)\Big)ds \\
&\leq l_1 l \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) + l_2 \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) + l_3 \int_a^t \mathcal{H}\Big(X(s), Y(s)\Big)ds \\
&\leq (l_1 l + l_2) \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) + l_3 \int_a^t \mathcal{H}\Big(X(s), Y(s)\Big) e^{-\tau(s-a)} e^{\tau(s-a)} ds \\
&\leq (l_1 l + l_2) \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) \\
&\qquad + l_3 \max_{s \in [a,b]} \Big[\mathcal{H}\Big(X(s), Y(s)\Big) e^{-\tau(s-a)}\Big] \int_a^t e^{\tau(s-a)} ds \\
&\leq (l_1 l + l_2) \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) + \frac{l_3}{\tau} d_\tau(X,Y) e^{\tau(t-a)}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{H}\Big(T_A(X), T_A(Y)\Big) e^{-\tau(t-a)} \leq (l_1 l + l_2) \mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) e^{-\tau(t-a)} + \frac{l_3}{\tau} d_\tau(X,Y),$$

d'où

$$\max_{t \in [a,b]} \Big[\mathcal{H}\Big(T_A(X), T_A(Y)\Big) e^{-\tau(t-a)}\Big] \leq (l_1 l + l_2) \max_{t \in [a,b]} \Big[\mathcal{H}\Big(X(t), Y(t)\Big) e^{-\tau(t-a)}\Big] + \frac{l_3}{\tau} d_\tau(X,Y),$$

i.e.,

$$d_\tau\big(T_A(X), T_A(Y)\big) \leq \left(l_1 l + l_2 + \frac{l_3}{\tau}\right) d_\tau(X,Y).$$

Ainsi, l'opérateur T_A est lipschitzien avec une constante $L_T := l_1 l + l_2 + \frac{l_3}{\tau}$. En choisissant τ tel que $L_T < 1$, on obtient une L_T-contraction. On peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach (Théorème 1.3.1) puisque l'espace (C_A, d_τ) est complet car (C_A, d_u) est fermé dans le complet $\Big(C\big([a,b], cc(E)\big), d_u\Big)$, et les deux distances sont équivalentes. En effet, Soit $(X_n)_n \subset C_A$ telle que $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$ pour d_u. Nous avons

$$\begin{aligned}(X_n)_n \subset C_A &\Leftrightarrow X_n \in C_A, \quad \forall n\\ &\Leftrightarrow X_n \in C([a,b], cc(E) \text{ et } X_n(a) = A, \quad \forall n\end{aligned}$$

et comme $(X_n)_n$ converge uniformément vers X, alors elle converge simplement vers X i.e., pour tout $t \in [a,b]$, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(X_n(t), X(t)) = 0$, donc $X(a) = \lim_{n\to\infty} X_n(a) = \lim_{n\to\infty} A = A$, par conséquent, la fonction $X \in C_A$. Donc, par le théorème du point fixe de Banach, l'opérateur T_A admet un unique point fixe $X_A^* \in C_A$.
On conclut que le nombre des points fixes de l'opérateur T est égale aux nombre des sous-espaces C_A tels que $A \in cc(E)$, qui est aussi égale au nombre d'éléments de $cc(E)$ i.e.,
$card(Fix(T)) = card(cc(E))$. Par conséquent,

$$card(S) = card(cc(E)) = \infty.$$

■

Remarque 2.1.1. *Pour chaque $A \in cc(E)$, d'après la Remarque 1.8.1 , T_A est un c-OP, avec $c := \frac{1}{1-L_A}$. Alors, d'après le Théorème de caractérisation 1.8.1, l'opérateur T est un c-OPF.*

2.2 Système d'équations

Considérons les deux équations

$$X(t) = G_1\big(t, Q_1(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_1\big(t, s, X(s)\big)ds, \quad t \in [a,b] \tag{2.1}$$

et

$$X(t) = G_2\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_2\big(t, s, X(s)\big)ds, \quad t \in [a,b] \tag{2.2}$$

où les opérateurs $G_1, G_2, Q_1, Q_2, K_1, K_2$ satisfont les conditions $(1) - (5)$.
Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (2.1) et S_2 l'ensemble des solutions de l'équations (2.2). En utilisant le Théorème 2.1.1 et le résultat de dépendance des données abstraites (Théorème 1.8.2), nous obtenons :

Théorème 2.2.1. *Nous supposons qu'il existe* $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$ *tels que*

(6) $\mathcal{H}\Big(G_1\big(t, A, B, D\big), G_2\big(t, A, B, D\big)\Big) \leq \eta_1, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall A, B, D \in cc(E)$ *;*

(7) $d_u\big(Q_1(X), Q_2(X)\big) \leq \eta_2, \quad \forall X \in C([a, b], cc(E))$ *;*

(8) $\mathcal{H}\Big(K_1\big(t, s, A\big), K_2\big(t, s, A\big)\Big) \leq \eta_3, \quad \forall t, s \in [a, a], \quad \forall A \in cc(E).$

Alors

$$d_\tau(S_1, S_2) \leq [\eta_1 + \eta_2 l_1 + (b - a)\eta_3] \max\{c_1, c_2\}$$

où $c_i := \frac{1}{1-L_{T_i}}$ *avec* $L_{T_i} == l_1^i l^i + l_2^i + \frac{l_3^i}{\tau}, \quad i \in 1, 2.$

Démonstration. Notons par T_1 l'opérateur associé à l'équation fonctionnelle (2.1), comme dans la preuve du Théorème 2.1.1, dont la constante de contraction pour chaque $T_1 \mid_{C_A}$ est $L_{T_1} = l_1^1 l^1 + l_2^1 + \frac{l_3^1}{\tau_1}$, où $\frac{l_3^1}{l_1^1 l^1 + l_2^1} < \tau_1$ et

$$\begin{aligned} T_1 : C([a, b], cc(E)) &\longrightarrow C([a, b], cc(E)) \\ X &\mapsto T_1(X) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &T_1(X) : [a, b] \longrightarrow cc(E) \\ &\qquad t \mapsto T_1(X)(t) = G_1\big(t, Q_1(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_1\big(t, s, X(s)\big)ds. \end{aligned}$$

De même, notons par T_2 l'opérateur associé à l'équation fonctionnelle (2.2), dont la constante de contraction pour chaque $T_2 \mid_{C_A}$ est $L_{T_2} = l_1^2 l^2 + l_2^2 + \frac{l_3^2}{\tau_2}$, où $\frac{l_3^2}{l_1^2 l^2 + l_2^2} < \tau_2$ et

$$\begin{aligned} T_2 : C([a, b], cc(E)) &\longrightarrow C([a, b], cc(E)) \\ X &\mapsto T_2(X) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &T_2(X) = [a, b] \longrightarrow cc(E) \\ &\qquad t \mapsto T_2(X)(t) = G_2\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_2\big(t, s, X(s)\big)ds. \end{aligned}$$

D'après la Remarque 2.1.1, T_1 est un $c_1 - OPF$ avec $c_1 = \frac{1}{1-L_{T_1}}$, et T_2 est un $c_2 - OPF$ avec $c_2 = \frac{1}{1-L_{T_2}}$. Nous allons appliquer le Théorème 1.8.2 pour les deux opérateurs

$$T_1, T_2 : \big(C([a, b], cc(E)), d_\tau\big) \longrightarrow \big(C([a, b], cc(E)), d_\tau\big),$$

tel que $\tau = max(\tau_1, \tau_2)$. On vient de vérifier la condition (i), reste à vérifier la condition (ii), i.e. vérifions qu'il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$d_\tau(T_1(X), T_2(X)) \leq \eta, \quad \forall X \in C([a,b], cc(E)).$$

Soit $X \in C([a,b], cc(E))$. Par les propriétés de la distance de Hausdorff, de l'intégrale multivouque, et par les conditions (2), (6) et (8) respectivement, nous avons pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\big(T_1(X)(t), T_2(X)(t)\big) &= \mathcal{H}\Big(G_1\big(t, Q_1(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_1\big(t,s,X(s)\big)ds, \\
&\qquad G_2\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big) + \int_a^t K_2\big(t,s,X(s)\big)ds\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big(G_1\big(t, Q_1(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big), G_2\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big)\Big) \\
&\quad + \mathcal{H}\Big(\int_a^t K_1\big(t,s,X(s)\big)ds, \int_a^t K_2\big(t,s,X(s)\big)ds\Big) \\
&\leq \mathcal{H}\Big(G_1\big(t, Q_1(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big), G_1\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big)\Big) \\
&\quad + \mathcal{H}\Big(G_1\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big), G_2\big(t, Q_2(X)(t), (X)(t), (X)(a)\big)\Big) \\
&\quad + \mathcal{H}\Big(\int_a^t K_1\big(t,s,X(s)\big)ds, \int_a^t K_2\big(t,s,X(s)\big)ds\Big) \\
&\leq l_1 \mathcal{H}\Big(Q_1(X)(t), Q_2(X)(t)\Big) + l_2 \mathcal{H}\Big(X(t), X(t)\Big) + \eta_1 \\
&\quad + \int_a^t \mathcal{H}\Big(K_1\big(t,s,X(s)\big), K_2\big(t,s,X(s)\big)\Big)ds \\
&\leq \eta_1 + l_1 \mathcal{H}\Big(Q_1(X)(t), Q_2(X)(t)\Big) + \eta_3 \int_a^t ds \\
&\leq \eta_1 + l_1 \mathcal{H}\Big(Q_1(X)(t), Q_2(X)(t)\Big) + \eta_3(b-a),
\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\big(T_1(X)(t), T_2(X)(t)\big) \leq \eta_1 + l_1 \max_{t\in[a,b]} \mathcal{H}\Big(Q_1(X)(t), Q_2(X)(t)\Big) + \eta_3(b-a).$$

Alors, grâce à (7)

$$d_u(T_1(X), T_2(X)) \leq \eta_1 + l_1 d_u(Q_1(X), Q_2(X)) + \eta_3(b-a),$$

i.e.,

$$d_u(T_1(X), T_2(X)) \leq \eta_1 + l_1\eta_2 + \eta_3(b-a).$$

et comme $d_\tau \leq d_u$, alors

$$d_\tau(T_1(X), T_2(X)) \leq \eta_1 + l_1\eta_2 + \eta_3(b-a).$$

Il suffit donc de prende $\eta = \eta_1 + l_1\eta_2 + \eta_3(b-a) > 0$. Alors la condition (ii) du Théorème 1.8.2 est vérifiée, on conclut donc d'après ce dernier que

$$d_\tau(Fix(T_1), Fix(T_2)) \leq \eta.\max\{c_1, c_2\},$$

or,

$$Fix(T_1) = S_1, \quad Fix(T_2) = S_2,$$

donc

$$d_\tau(S_1, S_2) \leq \eta \max\{c_1, c_2\}.$$

La preuve est ainsi terminée. ■

2.3 Équation de biomathématiques

Dans cette dernière section, nous allons attirer notre attention vers un problème fonctionnel-intégral multivoque, qui apparait généralement en biomathématiques. Il s'agit du problème

$$(2.3)\quad \begin{cases} X(t) = \int_{-\tau}^{t} F(s, X(s))ds, & t \in [0, b], \\ X(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} F : [-\tau, b] \times cc(\mathbb{R}_+) &\longrightarrow cc(\mathbb{R}_+) \\ (t, A) &\mapsto F(t, A) \end{aligned} \quad et \quad \begin{aligned} \varphi : [-\tau, 0] &\longrightarrow cc(\mathbb{R}_+) \\ t &\mapsto \varphi(t) \end{aligned}$$

sont deux fonctions. Ceci veut dire que l'historique de la fonction inconnue X est connu sur un intervalle de temps $[-\tau, 0]$. Par définition, une solution de (2.3) veut dire une fonction

$$\begin{aligned} X : [-\tau, b] &\longrightarrow cc(\mathbb{R}_+) \\ t &\mapsto X(t), \end{aligned}$$

continue et qui satisfait (2.3) pour tout $t \in [-\tau, b]$.

Théorème 2.3.1. *Supposons que*

(1) *les fonctions F et φ sont continues,*

(2) $\varphi(0) = \int_{-\tau}^{0} F(s, \varphi(s))ds$,

(3) *il existe une fonction* $K \in L^1([-\tau, b], \mathbb{R}_+)$ *telle que*

$$\mathcal{H}\Big(F(t,A), F(t,B)\Big) \leq K(t)\mathcal{H}(A,B), \text{ pour tous } A, B \in cc(\mathbb{R}_+) \text{ et tout } t \in [-\tau, b].$$

Alors, le problème (2.3) *admet au moins une solution.*

Démonstration. Définissons l'opérateur

$$\begin{aligned} T : C\big([0,b], cc(\mathbb{R}_+)\big) &\longrightarrow C\big([0,b], cc(\mathbb{R}_+)\big) \\ X &\mapsto T(X), \end{aligned}$$

par

$$\begin{aligned} T(X) : [0,b] &\longrightarrow cc(\mathbb{R}_+) \\ t &\mapsto T(X)(t) = \int_{-\tau}^{t} F(s, \widetilde{X}(s))ds, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{X} : [-\tau, b] &\longrightarrow cc(\mathbb{R}_+) \\ s &\mapsto \widetilde{X}(s) = \begin{cases} X(s), & s \in [0,b] \\ \varphi(s), & s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que $T(X)(t) = \int_{-\tau}^{t} F(s, \widetilde{X}(s))ds \in cc(\mathbb{R}_+)$ car la fonction F prend ses valeurs dans $cc(\mathbb{R}_+)$, pour tout $t \in [0,b]$. Pour que $\widetilde{X}$ définie bien une application continue, il faut que $X(0) = \varphi(0)$. Pour ceci, considérons le sous-espace fonctionnel

$$\mathcal{C} = \Big\{X \in C\big([0,b], cc(\mathbb{R}_+)\big); X(0) = \varphi(0)\Big\}.$$

Pour tout $X \in \mathcal{C}$ nous avons grâce` à l'hypothèse (2)

$$T(X)(0) = \int_{-\tau}^{0} F(s, \varphi(s)) = \varphi(0),$$

donc $T(X) \in \mathcal{C}$. Alors, on prend $T\ : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$.
Soit $\tau > 0$. On munit l'espace $C([0,b], cc(\mathbb{R}_+))$, et donc le sous-espace $\mathcal{C}$ de la distance d_K définie par

$$d_K(X,Y) = \max_{t\in[0,b]} \Big[\mathcal{H}(X(t), Y(t))e^{-\tau p(t)}\Big], \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$$

telle que $p(t) := \int_{-\tau}^{t} K(s)ds$. Notons que $p'(t) = K(t), \quad \forall t \in [0, b]$.
Soient $X, Y \in C([0, b], cc(\mathbb{R}_+))$. Par les propriétés de la distance de Hausdorff avec l'intégrale, et d'après l'hypothèse (3) du théorème, nous avons pour tout $t \in [0, b]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(T(X)(t), T(Y)(t)\Big) &= \mathcal{H}\Big(\int_{-\tau}^{t} F(s, \widetilde{X}(s))ds, \int_{-\tau}^{t} F(s, \widetilde{Y}(s))ds\Big) \\
&\leq \int_{-\tau}^{t} \mathcal{H}\Big(F(s, \widetilde{X}(s)), F(s, \widetilde{Y}(s))\Big)ds \\
&\leq \int_{-\tau}^{t} K(s)\mathcal{H}\Big(\widetilde{X}(s), \widetilde{Y}(s)\Big)ds \\
&= \int_{-\tau}^{t} K(s)\mathcal{H}\Big(\widetilde{X}(s), \widetilde{Y}(s)\Big)e^{-\tau p(s)}e^{\tau p(s)}ds \\
&\leq \int_{-\tau}^{t} K(s) \max_{s\in[0,b]} \Big[\mathcal{H}\Big(\widetilde{X}(s), \widetilde{Y}(s)\Big)e^{-\tau p(s)}\Big]e^{\tau p(s)}ds \\
&= \int_{-\tau}^{t} K(s)d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y})e^{\tau p(s)}ds \\
&= d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \int_{-\tau}^{t} K(s)e^{\tau p(s)}ds \\
&= d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{t} \tau K(s)e^{\tau p(s)}ds \\
&= d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{t} \left(e^{\tau p(s)}\right)' ds \\
&= \frac{1}{\tau}d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(e^{\tau p(t)} - e^{\tau p(-\tau)}) \\
&\leq \frac{1}{\tau}d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y})e^{\tau p(t)},
\end{aligned}$$

alors

$$\mathcal{H}\Big(T(X)(t), T(Y)(t)\Big)e^{-\tau p(t)} \leq \frac{1}{\tau}d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

d'où,

$$\max_{t\in[0,b]} \Big[\mathcal{H}\Big(T(X)(t), T(Y)(t)\Big)e^{-\tau p(t)}\Big] \leq \frac{1}{\tau}d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

i.e.,

$$d_K(T(X), T(Y)) \leq \frac{1}{\tau}d_K(\widetilde{X}, \widetilde{Y}).$$

Ainsi, l'opérateur T est lipschitzien avec une constante $L_T := \frac{1}{\tau}$. En choisissons τ tel que $L_T < 1$, on obtient une L_T-contraction. Puisque l'espace (C, d_k) est complet en étant fermé dans le complet $\Big(C\big([a, b], cc(\mathbb{R}), d_K\big)\Big)$, alors on peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach (Théorème 1.3.1), d'après ce dernier l'opérateur $T : C \to C$ admet un unique point fixe $X^* \in C$.

$$X^* \textit{ point fixe pour } T \Leftrightarrow X^* \in \mathcal{C} \textit{ et } X^* = T(X^*).$$

Or

$$\begin{aligned} X^* = T(X^*) &\Leftrightarrow \forall t \in [0,b], \quad X^* = T(X^*)(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [0,b], \quad X^*(t) = \int_{-\tau}^{t} F(s, \widetilde{X}^*(s))ds, \end{aligned}$$

où $\widetilde{X}^*(s) = \begin{cases} \widetilde{X}^*(s), & s \in [0,b] \\ \varphi(s), & s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$

comme $X^* \in \mathcal{C}$, donc $X^*(0) = \varphi(0)$, et comme X^* et φ sont continue, alors $\widetilde{X^*}$ est aussi continue sur $[-\tau, b]$. On conclut que $\widetilde{X}^*$ définit bien une solution pour le problème (2.3). ■

Proposition 2.3.1. *L'ensemble $\mathcal{C}$ est fermé dans $(C([0,b], cc(\mathbb{R}_+)), d_u)$.*

Démonstration. Soit $(X_n)_n \subset \mathcal{C}$ une suite qui converge vers X pour d_u. Nous avons,

$$\begin{aligned} (X_n)_n \subset \mathcal{C} &\Leftrightarrow X_n \in \mathcal{C}, \forall n \\ &\Leftrightarrow X_n \in C([0,b], cc(\mathbb{R})) \ \ et \ \ X_n(0) = \varphi(0), \forall n \end{aligned}$$

et comme $(X_n)_n$ converge uniformément vers X, alors elle converge simplement vers X i.e., pour tout $t \in [0,b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(X_n(t), X(t)) = 0,$$

donc

$$X(0) = \lim_{n\to\infty} X_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(0) = \varphi(0).$$

Par conséquent, la fonction $X \in \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$ est femré. ■

Remarque 2.3.1. *Les distances d_K et d_u sont équivalentes i.e., ils existent α, $\beta > 0$ telles que*

$$\alpha d_u(X,Y) \leq d_K(X,Y) \leq \beta d_u(X,Y), \quad \forall X,Y \in C([0,b], cc(\mathbb{R}_+)).$$

En effet, soient $X, Y \in C([0,b], cc(\mathbb{R}_+))$. Pour tout $t \in [0,b]$ nous avons

$$p(t) \geq 0 \Rightarrow -\tau p(t) \leq 0 \Rightarrow e^{-\tau p(t)} \leq e^0 = 1$$

donc

$$\mathcal{H}\big(X(t), Y(t)\big)e^{-\tau p(t)} \leq \mathcal{H}\big(X(t), Y(t)\big).$$

D'où,

$$\max_{t\in[0,b]}\left[\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau p(t)}\right] \leq \max_{t\in[a,b]}\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big),$$

i.e.,

$$d_K(X,Y) \leq d_u(X,Y),$$

il suffit donc de prende $\beta = 1$.

D'autre part, comme la fonction p est croissante (car $p' = K \geq 0$), alors pour tout $t \in [0,b]$

$$e^{\tau p(t)} \leq \max_{t\in[0,b]}\left[e^{-\tau p(t)}\right] = e^{-\tau b},$$

d'où

$$\frac{1}{e^{-\tau b}}\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big) \leq \frac{1}{e^{-\tau p(t)}}\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big) = \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau p(t)},$$

en notant par $\alpha = \frac{1}{e^{-\tau b}} = e^{-\tau b}$, on obtient

$$\alpha\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big) \leq \mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau p(t)}$$

par passage au maximun, on trouve

$$\max_{t\in[0,b]}\left[\alpha\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)\right] \leq \max_{t\in[0,b]}\left[\mathcal{H}\big(X(t),Y(t)\big)e^{-\tau p(t)}\right]$$

i.e.,

$$\alpha d_u(X,Y) \leq d_K(X,Y).$$

Chapitre 3

Équations différentielles-intégrales multivoques

Soit $\mathbb{R}^d$ l'espace réel à n-dimensions et soit $cc(\mathbb{R}^d)$ l'espace constitué de tous les sous-ensembles non vides convexes compacts de $\mathbb{R}^d$, muni de la distance de Hausdorff $\mathcal{H}$.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de Cauchy associé à une équation différentielle multivoque. Il s'agit du problème

$$(P)\begin{cases} \dot{U}(t) = F(t, U(t)), \quad t \in J \quad (E) \\ U(t_0) = A_0, \end{cases}$$

où $A_0 \in cc(\mathbb{R}^d)$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, t_0 + a]$, $a > 0$, $F \in C\big(J \times cc(\mathbb{R}^d), cc(\mathbb{R}^d)\big)$ et $\dot{U}(t)$ est la dérivée au sens de la Définition 1.5.1 de U au point t.

Nous présentons principalement des théorèmes d'existence et d'unicité globale, d'existence locale, d'approximation et de dépendence des données. Ces théorèmes ont été donnés dans [13]. Notre but était de présenter les preuves d'une façon très détaillée au lecteur et, à notre manière et aussi démontrer les passages dont la preuve n'a pas été donnée dans [13]. Nous terminons par donner un bon exemple numérique illustrant l'un des résultats de [13].

3.1 Théorème d'existence globale

Une application $U \in C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$ est une solution pour l'équation (E) si elle est dérivable au sens de Hukuhara 1.5.1 sur J et sa dérivée $\dot{U}$ satisfait (E) pour tout $t \in J$.

Lemme 3.1.1. *Soit $U \in C(J, cc(\mathbb{R}^d))$ une application.*

$$U \text{ est solution pour le l'équation } (E) \ \Leftrightarrow U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds, \ \ \forall t \in J.$$

Démonstration. Si U est solution pour (E), alors elle est dérivable au sens de Hukuhara sur J et satisfait

$$\dot{U}(s) = F\big(s, U(s)\big), \quad \forall s \in [a, b].$$

Donc $\dot{U}$ est continue, on peut alors intégrer

$$\int_a^t \dot{U}(s)ds = \int_a^t F\big(s, U(s)\big)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

d'où d'après la Remarque 1.7.1

$$U(t) = U(a) + \int_a^t F\big(s, U(s)\big)ds, \ \ \forall t \in [a, b].$$

Maintenant, si $U \in C(J, cc(\mathbb{R}^d))$ satisfait

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds, \ \ \forall t \in J,$$

alors d'après le Lemme 1.7.1, U est dérivable au sens de Hukuhara sur J et

$$\dot{U}(t) = F\big(t, U(t)\big), \quad \forall t \in [a, b],$$

i.e., U est solution de (E). ■

Considérons le problème (P).

Théorème 3.1.1. *Supposons que*

(1) F est continue sur $J \times cc(\mathbb{R}^d)$,

(2) il existe une constante réelle $L \geq 0$ telle que

$$\mathcal{H}\Big(F(t, A), F(t, B)\Big) \leq L\mathcal{H}(A, B), \ \ \forall A, B \in cc(\mathbb{R}^d), \ \forall t \in J.$$

Alors, le problème (P) admet une solution unique $U^* \in C(J, cc(\mathbb{R}^d))$, de plus $U^*(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t)$ pour chaque $t \in J$, où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$ est définie de manière récurrente par la relation

$$(R)\begin{cases} U_{n+1}(t) = A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U_n(s)\big)ds, \quad \forall t \in J, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ U_0(t) = A_0, \qquad \forall t \in J. \end{cases}$$

Démonstration. Définissons l'opérateur

$$G : C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big) \longrightarrow C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$$
$$U \mapsto G(U).$$

par la formule

$$G(U)(t) = A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, \quad \forall t \in J.$$

D'aprs le Lemme 3.1.1, il est clair que

$$U \ est \ solution \ pour \ (P) \ \Leftrightarrow U \ est \ un \ point \ fixe \ pour \ G$$

Cherchons alors les points fixes de G. Soit $\tau > 0$. On munit l'espace $C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$ de la distance d_τ (définie au chapitre précédent). Montrons que G est une contraction. Soient $U, V \in C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$. Grâce aux propriétés de la distance de Hausdorff et de l'intégrale, puis la condition de lipschtzité (2), nous avons pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\big(G(U)(t), G(V)(t)\big) &= \mathcal{H}\Big(A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, V(s)\big)ds\Big) \\
&= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, \int_{t_0}^{t} F\big(s, V(s)\big)ds\Big) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(F\big(s, U(s)\big), F\big(s, V(s)\big)\Big)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\mathcal{H}\Big(U(s), V(s)\Big)ds \\
&= L\int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(U(s), V(s)\Big)e^{-\tau(s-t_0)}e^{\tau(s-t_0)}ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \Big[\max_{s\in J} \mathcal{H}\Big(U(s), V(s)\Big)e^{-\tau(s-t_0)}\Big]e^{\tau(s-t_0)}ds \\
&= Ld_\tau(U, V)\int_{t_0}^{t} e^{\tau(s-t_0)}ds \\
&= Ld_\tau(U, V)\int_{0}^{t-t_0} e^{\tau z}dz \\
&= Ld_\tau(U, V)\frac{1}{\tau}\big(e^{\tau(t-t_0)} - e^0\big) \\
&= \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V)\big(e^{\tau(t-t_0)} - 1\big) \\
&\leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V)e^{\tau(t-t_0)},
\end{aligned}$$

ainsi,

$$\mathcal{H}\Big(G(U)(t), G(V)(t)\Big)e^{-\tau(t-t_0)} \leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U,V), \quad \forall\, t \in J,$$

donc

$$\max_{t\in J}\Big[\mathcal{H}\Big(G(U)(t), G(V)(t)\Big)e^{-\tau(t-t_0)}\Big] \leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U,V).$$

Alors,

$$d_\tau\big(G(U), G(V)\big) \leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U,V), \quad \forall U, V \in C(J, cc(\mathbb{R}^d)).$$

Ainsi, l'opérateur intégral G est Lipschitzien avec une constante $L_G = \frac{L}{\tau}$. En choisissant τ tel que $\frac{L}{\tau} < 1$, on obtient une $\frac{L}{\tau}$-contraction. Par le principe de contraction de Banach (Théorème 1.3.1), l'opérateur G admet un point fixe unique $U^* \in C(J, cc(\mathbb{R}^d))$.
D'autre part, pour chaque $t \in J$,

$$U^*(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t)$$

où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation (R). En effet, définissons l'application

$$\begin{aligned} F_0 : J &\longrightarrow cc(\mathbb{R}^d) \\ t &\mapsto F_0(t) = F(t, A_0). \end{aligned}$$

Puisque F est continue sur $J \times cc(\mathbb{R}^d)$, alors F_0 est continue sur le compact J, elle est donc bornée sur J i.e., il existe $M_0 > 0$ tel que

$$|||F_0(t)||| = |||F(t, A_0)||| \leq M_0, \quad \forall t \in J.$$

Pour tout $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Big(U_1(t), U_0(t)\Big) &= \mathcal{H}\Big(A_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U_0(s))ds, A_0\Big) \\ &= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t} F(s, U_0(s))ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \\ &= |||\int_{t_0}^{t} F(s, U_0(s))ds||| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |||F(s, U_0(s))|||ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} M_0 ds \\ &= M_0(t - t_0). \end{aligned}$$

Maintenant, en général, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t),U_n(t)\Big) &= \mathcal{H}\Big(A_0+\int_{t_0}^{t}F(s,U_n(s))ds,\, A_0+\int_{t_0}^{t}F(s,U_{n-1}(s))ds\Big)\\
&= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t}F(s,U_n(s))ds,\, \int_{t_0}^{t}F(s,U_{n-1}(s))ds\Big)\\
&\leq \int_{t_0}^{t}\mathcal{H}\Big(F(s,U_n(s)),F(s,U_{n-1}(s))\Big)ds\\
&\leq \int_{t_0}^{t}L\mathcal{H}\Big(U_n(s),U_{n-1}(s)\Big)ds,
\end{aligned}$$

si on note par $q_n(t)=\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t),U_n(t)\Big)$, alors on obtient

$$q_n(t)\leq L\int_{t_0}^{t}q_{n-1}(s)ds,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, pour tout $t\in J$ nous avons, pour $n=1$

$$\begin{aligned}
q_1(t) &\leq L\int_{t_0}^{t}q_0(s)ds\\
&= L\int_{t_0}^{t}\mathcal{H}\Big(U_1(s),U_0(s)\Big)ds\\
&\leq L\int_{t_0}^{t}M_0\,(s-t_0)\,ds\\
&= LM_0\int_{t_0}^{t}(s-t_0)ds\\
&= LM_0\frac{1}{2}(t-t_0)^2\\
&\leq \frac{1}{2}M_0L(t-t_0)^2,
\end{aligned}$$

pour $n=2$,

$$\begin{aligned}
q_2(t) &\leq L\int_{t_0}^{t}q_1(s)ds\\
&\leq L\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}LM_0(s-t_0)^2ds\\
&= \frac{1}{2}L^2M_0\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^2ds\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{1}{3}M_0L^2(t-t_0)^3,
\end{aligned}$$

par réccurence, nous pouvons montrer aussi que

$$q_n(t)\leq \frac{M_0L^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

En effet, pour n=0,

$$\frac{M_0 L^0 (t-t_0)^{0+1}}{(0+1)!} = M_0(t-t_0) \geq q_0(t)$$

donc elle est vraie pour n=0. Supposons qu'elle vraie pour n i.e.,

$$q_{n+1}(t) \leq L \int_{t_0}^{t} q_n(s) ds,$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} q_{n+1}(t) &\leq L \int_{t_0}^{t} \frac{M_0 L^n (s-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} ds \\ &= \frac{M_0 L^{n+1}}{(n+1)!} \int_{t_0}^{t} (s-t_0)^{n+1} ds \\ &= \frac{M_0 L^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(t-t_0)^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{M_0 L^{n+1} (t-t_0)^{n+2}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

d'où,

$$q_n(t) \leq \frac{M_0 L^n (t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous pouvons en déduire que la suite de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur J dans $cc(\mathbb{R}^d)$, notons par U sa limite

$$\begin{aligned} U : J &\longrightarrow cc(\mathbb{R}^d) \\ t &\mapsto U(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t). \end{aligned}$$

Montrons que la fonction limite U est un point fixe pour l'opérateur G.

$$\begin{aligned} (U \textit{ est un point fixe pour } G) &\Leftrightarrow U = G(U) \\ &\Leftrightarrow U(t) = G(U)(t), \quad \forall t \in J \\ &\Leftrightarrow U(t) = A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big) ds, \quad \forall t \in J \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} U_n(t) = A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big) ds, \quad \forall t \in J, \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t), A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big) ds\Big) = 0, \quad \forall t \in J. \end{aligned}$$

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t), A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds\Big) &= \mathcal{H}\Big(A_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U_n(s))ds, A_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds\Big) \\
&= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t} F(s, U_n(s))ds, \int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds\Big) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(F(s, U_n(s)), F(s, U(s))\Big)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\mathcal{H}\Big(U_n(s), U(s)\Big)ds \\
&= L\int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(U_n(s), U(s)\Big)ds.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{H}\Big(U_{k+1}(t), U_k(t)\Big) \geq \mathcal{H}\Big(\lim_{m\to\infty} U_{m+1}(t), U_n(t)\Big) = \mathcal{H}\Big(U(t), U_n(t)\Big)$$

donc pour tout s on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(U(s), U_n(s)\Big) &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathcal{H}\Big(U_{k+1}(s), U_k(s)\Big) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} q_k(s) \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{M_0 L^k (s-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{M_0 L^k (a)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq \frac{M_0}{L} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(La)^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\leq \frac{M_0}{L} \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(La)^k}{(k)!} \\
&= \frac{M_0}{L} \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} e^{La}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in J$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t), GU(t)\Big) &\leq L\int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(U_n(s), U(s)\Big)ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \frac{M_0}{L} \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} e^{La} ds \\
&= e^{La} M_0 \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} \int_{t_0}^{t} ds \\
&= e^{La} M_0 \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} (t - t_o),
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t), G(U)(t)\Big) \leq ae^{La} M_0 \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!},$$

quand n tend vers l'infini, $\mathcal{H}\Big(U_{n+1}(t), G(U)(t)\Big)$ tend vers 0, car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(La)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.
On conclut que U n'est d'autre que l'unique point fixe U^* de G, qui est en fait la solution unique pour le problème de Cauchy (P). ■

3.2 Théorème d'existence locale

Le suivant est un théorème d'existence locale pour le problème multivoque (P).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times cc(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.2.1. *Supposons que*

(1) l'application $F : \Omega \to cc(\mathbb{R}^d)$ *est continue,*

(2) il existe une constante réelle $L \geq 0$ *telle que*

$$\mathcal{H}\Big(F(t, A), F(t, B)\Big) \leq L\mathcal{H}(A, B), \quad \forall A, B \in cc(\mathbb{R}^d), \ \forall t \in J.$$

(3) pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, *il existe* $a, b > 0$ *et* $M > 0$ *tels que*

$$\overline{\Omega}_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + b] \times \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, b) \subset \Omega$$

et

$$|||F(t, A)||| \leq M, \quad \forall (t, A) \in \overline{\Omega}_{a,b}.$$

Alors, pour tout $(t_0, A_0) \in \Omega$, *il existe une solution unique pour le problème de Cauchy* (P) *définie sur un voisinage de* t_0.

Démonstration. Soit $(t_0, A_0) \in \Omega$, d'après l'hypothèse (3), il existent $a, b > 0$, et $M > 0$ tels que

$$\overline{\Omega}_{a,b} := [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_{cc(\mathbb{R}^d)}(A_0, b) \subset \Omega$$

et

$$|||F(t, A)||| \leq M, \quad \forall (t, A) \in \overline{\Omega}_{a,b}.$$

Notons par $h := \min\{a, \frac{b}{M}\}$, puis considérons l'opérateur

$$G : C\big([t_0 - h, t_0 + h], cc(\mathbb{R}^d)\big) \longrightarrow C\big([t_0 - h, t_0 + h], cc(\mathbb{R}^d)\big)$$
$$U \mapsto G(U),$$

défini par

$$G(U) : [t_0 - h, t_0 + h] \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$$
$$t \mapsto GU(t) = A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds.$$

Dans l'espace fonctionnel $C\big([t_0-h, t_0+h], cc(\mathbb{R}^d)\big)$, considérons la boule fermée $\overline{B}(U_0, b)$

$$\overline{B}(U_0, b) := \big\{U \in C\big([t_0 - h, t_0 + h], cc(\mathbb{R}^d)\big) : d_u(U_0, U) \leq b\big\},$$

telle que

$$U_0 : [t_0 - h, t_0 + h] \longrightarrow cc(\mathbb{R}^d)$$
$$t \mapsto U_0(t) = A_0,$$

puis considérons la restriction de G à cette boule i.e., $G|_{\overline{B}(U_0,b)}$. Nous allons montrer que $\overline{B}(U_0, b)$ est invariante par rappot à G i.e., si $U \in \overline{B}(U_0, b)$, $G(U) \in \overline{B}(U_0, b)$. Soit $U \in \overline{B}(U_0, b)$. D'après les propriétés de la distance de Hausdorff, de l'intégrale, et d'après l'hypothèse (2), nous avons pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(GU(t), U_0(t)\Big) &= \mathcal{H}\Big(A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, A_0\Big) \\
&= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, \{0_{\mathbb{R}^d}\}\Big) \\
&= |||\int_{t_0}^{t} F(s, U(s))ds||| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |||F(s, U(s))|||ds
\end{aligned}$$

et puisque $[t_0, t] \subset [t_0 - h, t_0 + h] \subset [t_0 - a, t_0 + a]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(G(U)(t), U_0(t)\Big) &\leq M|t - t_0| \\
&\leq Mh \\
&\leq b,
\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{t\in[t_0-h, t_0+h]} \Big[\mathcal{H}\big(G(U)(t), U_0(t)\big)\Big] \leq b,$$

i.e.,

$$d_u(G(U), U_0) \leq b.$$

Soit $\tau > 0$. Nous allons vérifier la condition de contraction pour

$$G|_{\overline{B}(U_0,b)} : \left(\overline{B}(U_0, b), d_\tau\right) \to \left(\overline{B}(U_0, b), d_\tau\right).$$

Soient $U, V \in \overline{B}(U_0, b)$. D'après les propriétés de la distance de Hausdorff, de l'intégrale, et d'après l'hypothèse (2), nous avons pour tout $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\Big(G(U)(t), G(V)(t)\Big) &= \mathcal{H}\Big(A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, A_0 + \int_{t_0}^{t} F\big(s, V(s)\big)ds\Big) \\
&= \mathcal{H}\Big(\int_{t_0}^{t} F\big(s, U(s)\big)ds, \int_{t_0}^{t} F\big(s, V(s)\big)ds\Big) \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(F\big(s, U(s)\big), F\big(s, V(s)\big)\Big)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L\mathcal{H}\Big(U(s), V(s)\Big)ds \\
&= L\int_{t_0}^{t} \mathcal{H}\Big(U(s), V(s)\Big)e^{-\tau(s-t_0)}e^{\tau(s-t_0)}ds \\
&\leq Ld_\tau(U, V)\int_{t_0}^{t} e^{\tau(s-t_0)}ds \\
&= \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V)\left(e^{\tau(t-t_0)} - 1\right) \\
&\leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V)e^{\tau(t-t_0)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} \left[\mathcal{H}\Big(G(U)(t), G(V)(t)\Big)e^{\tau(t-t_0)}\right] \leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V),$$

i.e.,

$$d_\tau\big(G(U), G(V)\big) \leq \frac{L}{\tau}d_\tau(U, V).$$

Ainsi, l'opérateur G est lipschitzien avec une constante $L_G = \frac{L}{\tau}$. En choisissant τ tel que $\frac{L}{\tau} < 1$, on obtient une $\frac{L}{\tau}$-contraction. On peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach (Théorème 1.3.1), puisque l'espace $(\overline{B}(A_0, b), d_\tau)$ est complet. Alors par le principe de contraction de Banach, on conclut que G a un point fixe unique $U^* \in \overline{B}(A_0, b)$. Ce point fixe est la solution unique dans $\overline{B}(A_0, b)$ pour notre problème de Cauchy. ■

3.3 Cardinal de l'ensemble des solutions

Considérons l'équation multivoque (E) avec $J := [a, b]$.

Théorème 3.3.1. *On suppose que F satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.1. Alors,* *(1) l'opérateur* $G : C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big) \to C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$, *donné par*

$$G(U)(t) = (U)(a) + \int_a^t F\big(s, U(s)\big)ds, \ \forall t \in J$$

est un OPF,

(2) l'ensemble de solutions $S_{(E)}$ *de l'équation* (E) *est infini.*

Démonstration. Pour tout $A \in cc(\mathbb{R}^d)$, considérons le sous-espace

$$C_A := \{U \in C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big) : U(a) = A\}.$$

Il est clair que pour tout $A \in cc(\mathbb{R}^d)$, par définition $C_A \subset C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$, donc $\bigcup\limits_{A \in cc(\mathbb{R}^d)} C_A \subset C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$. D'autre part, $C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big) \subset \bigcup\limits_{A \in cc(\mathbb{R})} C_A$ car

$$\forall\, U \in C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big), \ \ \exists\, A \in cc(\mathbb{R}^d) : \ U \in C_A,$$

il suffit de prende $A = U(a)$. De plus, les C_A sont deux à deux disjoints. En effet, $A \neq B \Rightarrow C_A \bigcap C_B = \emptyset$, car sinon,

$$\begin{aligned} C_A \cap C_B \neq \emptyset &\Rightarrow \exists\, U \in C_A \text{ tel que } U \in C_B \\ &\Rightarrow U(a) = A \text{ et } U(a) = B \\ &\Rightarrow A = B \quad (\text{contradiction}). \end{aligned}$$

Donc $(C_A)_{A \in cc(\mathbb{R}^d)}$ définit bien une partition pour $C\big(J, cc(\mathbb{R}^d)\big)$.
D'autre part, soit $U \in C_A$. Nous avons,

$$G(U)(t) = U(a) + \int_a^t F\big(s, U(s)\big)ds, \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Pour $t = a$,

$$\begin{aligned} G(U)(a) &= U(a) + \int_a^a F\big(s, U(s)\big)ds \\ &= U(a) + \{0_{\mathbb{R}^d}\} \\ &= A, \end{aligned}$$

car $U \in C_A$. Donc $G(U) \in C_A$, ainsi

$$C_A \in I(G), \ \forall A \in cc(\mathbb{R}^d).$$

De plus, $\forall A \in cc(\mathbb{R}^d)$, $G|_{C_A} : C_A \longrightarrow C_A$ est un OP en étant une contraction (voir preuve du Théorème 3.1.1).

On conclut par le Théorème de caractérisation 1.8.1 que G est un OPF.
Maintenant, notons que $S_{(E)} = Fix(G)$ i.e., Les points fixes de l'opérateur G sont exactement les solutions de l'équation (E), car

$$\begin{aligned} U \in Fix(G) &\Leftrightarrow U = G(U) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [a,b], \quad U(t) = G(U)(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [a,b], \quad U(t) = U(a) + \int_a^t F\big(s, U(s)\big) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$card(S_{(E)}) = card(Fix(G)) = le\ nombre\ des\ C_A = card(cc(\mathbb{R}^d) = \infty.$$

■

Exemple numérique. Considérons le problème de Cauchy

$$(P) \begin{cases} \dot{U}(t) = tU(t), \quad t \in [0,T] \\ U(0) = [1,2]. \end{cases}$$

Il est de la forme

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = F(t, U(t)), \quad t \in [0,T] \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

telle que $U_0 = [1,2] \in cc(\mathbb{R})$, et le second membre

$$\begin{aligned} F : [0,T] \times cc(\mathbb{R}) &\longrightarrow cc(\mathbb{R}) \\ (t, [b^-, b^+]) &\mapsto F(t, [b^-, b^+]) = t[b^-, b^+] = [tb^-, tb^+]. \end{aligned}$$

l'application F est continue. En effet, soit $(t, B) \in [0,T] \times cc(\mathbb{R})$ et soit $(t_n, B_n)_n$ une suite convergente vers (t, B) dans $[0,T] \times cc(\mathbb{R})$. D'après les propriétés de la distance de Hausdorff, nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\Big(F(t_n, B_n), F(t,B)\Big) &= \mathcal{H}\Big(t_n B_n, tB\Big) \\ &\leq \mathcal{H}\Big(t_n B_n, t_n B\Big) + \mathcal{H}\Big(t_n B, tB\Big) \\ &= t_n \mathcal{H}\Big(B_n, B\Big) + |t_n - t| |||B|||, \end{aligned}$$

quand n tend vers l'infini, $\mathcal{H}\Big(F(t_n, B_n), F(t, B)\Big)$ tend vers 0, car $t_n \to t$ dans $\mathbb{R}$, et $B_n \to B$ dans $cc(\mathbb{R})$, d'où la continuité de F.

Maintenant, soient $B_1, B_2 \in cc(\mathbb{R})$. Encore d'après les propriétés de la distance de Hausdorff, nous avons pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{H}\Big(F(t, B_1), F(t, B_2)\Big) = \mathcal{H}\Big(tB_1, tB_2\Big) = t\mathcal{H}\Big(B_1, B_2\Big) \leq T\mathcal{H}\Big(B_1, B_2\Big).$$

On conclut qu'il existe $L = T \geq 0$, tel que

$$\mathcal{H}\Big(F(t, B_1), F(t, B_2\Big) \leq L\mathcal{H}(B_1, B_2), \ \ \forall B_1, B_1 \in cc(\mathbb{R}), \ \forall t \in [0, T].$$

La condition de Lipschitzité du Thérème 3.1.1 est donc satisfaite, alors d'après ce dernier le problème donné admet une solution unique $U^* \in C([o, T], cc(\mathbb{R}^d))$, de plus $U^*(t) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(t)$, pour chaque $t \in [0, T]$, où $(U_n)_n \subset C\big([0, T], cc(\mathbb{R})\big)$ est définie de manière récurrente par la relation

$$\begin{cases} U_{n+1}(t) = [1, 2] + \int_0^t F\big(s, U_n(s)\big)ds, \ \ \forall t \in [0, T], \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \\ U_0(t) = [1, 2], \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

On calcule

$$\begin{aligned} U_1(t) &= [1, 2] + \int_0^t F\big(s, U_0(s)\big)ds \\ &= [1, 2] + \int_0^t F\big(s, [1, 2]\big)ds \\ &= [1, 2] + \int_0^t ([s, 2s])ds \\ &= [1, 2] + \Big[\int_0^t sds, \int_0^t 2sds\Big] \\ &= [1, 2] + \Big[\frac{1}{2}t^2, t^2\Big] \\ &= \Big[1 + \frac{1}{2}t^2, 2 + t^2\Big], \ \ \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} U_2(t) &= [1, 2] + \int_0^t F\big(s, U_1(s)\big)ds \\ &= [1, 2] + \int_0^t \Big[s + \frac{1}{2}s^3, 2s + s^3\Big]ds \\ &= [1, 2] + \Big[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4, t^2 + \frac{1}{4}t^4\Big] \\ &= \Big[1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4, 2 + t^2 + \frac{1}{4}t^4\Big], \ \ \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

d'où, pour tout $t \in [0,T]$

$$U_n(t) = \left[1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{8}t^4+\ldots+\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}+...+\frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!}, 2+t^2+\frac{1}{4}t^4+\ldots+2\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}+...+2\frac{(\frac{t^2}{2})^n}{n!}\right],$$

alors,

$$U_n(t) = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}, 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} U^*(t) &= \lim_{n\to\infty} U_n(t) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}, 2\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}\right] \\ &= \left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}, 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}\right] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}, 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{t^2}{2})^k}{k!}\right], \end{aligned}$$

d'où,

$$U^*(t) = \left[e^{\frac{t^2}{2}}, 2e^{\frac{t^2}{2}}\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Remarque. Nous pouvons considérer que U recherchée dans le problème (P) est définie par $U(t) = [u_1(t), u_2(t)], \ \forall\, t \in [0,T]$, d'où d'apès , $\dot{U}(t) = [\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t)], \ \forall t \in [0,T]$, telle que $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ sonts les dérivées ordinaires des fonctions réelles u_1, u_2. Le poblème devient

$$(P)\begin{cases}[\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t)] = [tu_1(t), tu_2(t)], & t \in [0,T] \\ [u_1(0), u_2(0)] = [1,2], \end{cases}$$

i.e.,

$$(P_1)\begin{cases}\dot{u}_1(t) = tu_1(t), \ \ t \in [0,T] \\ u_1(0) = 1, \end{cases}$$

et

$$(P_2)\begin{cases}\dot{u}_2(t) = tu_2(t), \ \ t \in [0,T] \\ u_2(0) = 2. \end{cases}$$

Pour le problème de Cauchy ordinaire (P_1), la solution unique est la fonction réelle

$$\begin{aligned} u_1 : [0,T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto u_1(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}, \end{aligned}$$

tandis que pour (P_2), la solution unique est la fonction réelle

$$\begin{aligned} u_2 : [0,T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto u_2(t) = 2e^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la solution unique du problème (P) est la fonction multivoque

$$\begin{aligned} U : [0,T] &\longrightarrow cc(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto U(t) = [e^{\frac{1}{2}t^2}, 2e^{\frac{1}{2}t^2}]. \end{aligned}$$

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous avons intéressé à l'étude de certaines équations multivoques, fonctionnelles ainsi que différentielles. Dans cette étude, nous faisons appel à des outils tels que la distance de Hausdorff, la dérivée, l'intégrale multivoques, et la théorie des opérateurs. Nous traitons globalement ces équations par une approche du point fixe.

Bibliographie

[1] W. Boukrouk, *Contribution à l'étude des équations différentielles multivoques du second ordre*, Département de Mathématiques, thèse de Doctorat, Université de Jijel (2015).

[2] N. Bourbaki, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Annales de l'institut fourier, (1950).

[3] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espace normés, Université d'Orléans, août (2011).

[4] M. Frechet, Les espaces abstraits, Gauthier-Villars, Paris, (1928).

[5] M. Hukuhara, Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac. 10 (1967), 205-223.

[6] M. Hukuhara, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, Funkcial. Ekvac. 10 (1967), 43-66.

[7] P. Mironescu, Cours de topologie métrique, Université Lyon 1, (2005).

[8] M. Piszczek, On multivalued cosine families, J. Appl. Anal.13 (2007), 57-76.

[9] M. Piszczek, On a multivalued second order differential problem with Hukuhara Derivative, em J. Comput. Appl.Math.,(2008), 151-161

[10] H. Radstrom, An embeldding theorem for spaces of convex sets, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 165-169.

[11] I. A. Rus, Picard operators and applications, Scientiae Mathematicae Japonicae 58 (2003), 191-219.

[12] L. Stefanini, and B. Bede, Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1311-1328.

[13] I-C. Tise, *A Fixed point Approach to Functional-Integral set equations.* Demonstratio Mathematica, No. 04, 2010, 815-826.