République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....

№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelle.

Thème

Étude des systèmes dynamiques $(2,2)$-rationnels p-adiques

Présenté par :

Boufroua Raouf

Devant le jury

Président :	**T. Zarzaihi**	Prof. Université de Jijel
Encadreur :	**B. Saoudi**	M.C.B Université de Jijel
Examinateur :	**S. Melit**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

شكر و إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أحمد الله الذي وفقني إلى إتمام هذا العمل، الحمد لله حمدا طيبا مباركا فيه، الحمد لله كما يحب ربي و يرضى و الحمد لله من قبل و من بعد.

أشكر الدكتور المشرف **سعودي بلال** على نصائحه القيمة و صبره معي، و إنه لشرف لي أن أعمل معه و أن يشاركني خبرته و معرفته الأكاديمية، و كذلك أشكر أستاذي رئيس لجنة المناقشة البروفيسور **زرزايحي الطاهر** و الدكتورة المناقشة **مليط سميرة**، على قبولهما تقييم هذا العمل.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أعز إنسانين في الحياة، أمي وأبي حفظهما الله، و كل العائلة الكريمة، و أهديه أيضا إلى أصحابي و رفقاء دربي.

أدعو الله سبحانه و تعالى أن يجعل هذا العمل في ميزان حسناتنا، و أن نكون ذخرًا لهاته الأمة في سبيل الإصلاح و التمكين والعزَّة، كما يقول شيخنا العلامة عبد الحميد بن باديس

يَا نَشْءُ أَنْتَ رَجَاؤُنَا ** وَبِكَ الصَّبَاحُ قَدِ اقْتَرَبْ
خُذْ لِلْحَيَاةِ سِلاَحَهَا ** وَخُضِ الْخُطُوبَ وَلاَ تَهَبْ.

Table des matières

NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce travail.

(f, D)	:	Le système dynamique discret défini par une fonction f sur l'ensemble D.
$\mathcal{O}$	:	L'orbite ou bien la trajectoire.
$\mathbb{F}$	:	Un corps.
$\lvert \cdot \rvert_p$	:	La norme p-adique.
p	:	Un nombre premier.
v_p	:	La valuation p-adique.
$S_r(a)$	:	La sphère de centre a et de rayon r.
$B_r(a)$	:	La boule ouverte de centre a et de rayon r.
$B_r^+(a)$	:	La boule fermée de centre a et de rayon r.
$\mathbb{Z}_p$	:	Anneau des entiers p-adiques.
$\mathbb{Z}_p^*$	:	L'ensemble des entiers p-dique inversibles.
$\mathbb{Q}_p$	:	Corps des nombres p-adiques.
$\overline{\mathbb{Q}}_p$	:	La clôture algébrique de corps $\mathbb{Q}_p$.
$\mathbb{C}_p$	:	Corps des nombres complexes p-adiques.
$\lvert\mathbb{C}_p^*\rvert_p$	:	L'ensemble des puissances rationnelles de p.
$\mathbb{F}[x]$	:	L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{F}$.
$Fix(f)$	:	L'ensemble de tous les points fixes de f.
$SI(x_0)$	:	La boule de Siegel maximum.

INTRODUCTION

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques introduite par Newton vers 1665. Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équation différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. Généralement, ce sont des équations différentielles (si le temps est considéré comme continu) ou en différences finies (si le temps du modèle est discret).

Une modélisation discrète du temps peut être imposée soit par la nature même du processus soit par le besoin de "discrétiser" un modèle à temps continu pour le traiter numériquement. L'évolution du système est observée en choisissant certains moments du temps que nous allons supposer équidistants. Dans tous les cas le choix de l'unité de temps représente une partie importante de modélisation du système. Dans le modèle le temps sera donc noté par une variable n qui prend les valeurs entières $n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$

Le but de ce mémoire est de détailler l'étude de Rozikov et Sattarov sur les systèmes dynamiques discrets $(2, 2)$-rationnels p-adiques. Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente deux catégories des systèmes dynamiques, le Système dynamique continu "SDC" et le Système dynamique discret "SDD". On donne des concepts très importants pour nous aider à étudier les systèmes dynamiques notamment, le point fixe, l'orbite (ou trajectoire), le bassin d'attraction, la boule de Siegel maximum et les points périodiques.

On commence le deuxième chapitre par quelques rappels sur un corps non-archimédien. Puis, On donne la construction analytique du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$. On termine par le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ et ses propriétés analytiques et topologiques. On mentionne par exemple que "$\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs" et "la propriété des triangles isocèles".

Dans le troisième chapitre, on étudie le système dynamique $(2,2)$-rationnel associé à la fonction $f(z) = \dfrac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + e}$ où $a \neq 0$ et a, b, c, d, $e \in \mathbb{C}_p$, lorsque f admet un seul point fixe $z_0 = \frac{a-d}{3}$. On montre que ce point fixe est indifférent, et on trouve que l'étude de la trajectoire d'un élément $z \in \mathbb{C}_p$, est liée aux valeurs $\delta = \left|\frac{2a+d}{3}\right|_p = |a - z_0|_p$, $\alpha = |z_0 - z_1|_p$, $\beta =| z_0 - z_2 |_p$ et $r = |z - z_0|_p$. Puis, on traite le cas $\alpha = \beta$, et on distingue trois possibilités, $\delta < \alpha$, $\alpha < \delta$ et $\alpha = \delta$. Dans chacun des cas ci-dessus, l'étude de système dynamique p-adique se transforme en l'étude d'un système dynamique réel. On termine ce chapitre par la conclusion que si $z_0 = 0$ est un point fixe, alors on a seulement deux cas possibles, $\delta < \alpha$ et $\alpha = \delta$.

Chapitre 1

Préliminaires sur les systèmes dynamiques

Un système dynamique est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble des objets en interaction, il est défini par un triplet $(X; T; f)$ constitué de l'espace d'état X, du domaine temporel T, et d'une application de transition d'état $f : X \times T \to X$, qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant.

1.1 Classification des systèmes dynamiques

On distingue deux grandes catégories de systèmes dynamiques, les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret. Si $T = \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$, le système est dit continu, et si $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, le système est dit discret.

1.1.1 Système dynamique continu

La description mathématique d'évolution d'un système dynamique continu est donnée par une équation différentielle ordinaire et un ensemble de conditions initiales

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, X \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Lorsque f dépend explicitement du temps le système (1.1) est dit non autonome. Dans le cas contraire on dit que le système (1.1) autonome.

1.1.2 Système dynamique discret

Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par une équation aux différences finies, autrement dit, par une récurrence.

Définition 1.1. *[3]*
Soient $D \subset \mathbb{R}^m$ et $f : D \to D$ une fonction continue et dérivable. On appelle système dynamique discret "SDD" d'ordre 1 en dimension m la récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in D \\ x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Où

$$f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \ fois}, \ et \ f^0 = Id_D$$

Dans la pratique $x_0 = f^0(x_0),\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f^2(x_0),\ ...,\ et\ x_n = f^n(x_0)$ représentent les valeurs d'une certaine quantité x_0 au temps $0, 1, 2, ..., n$.

Dans tout ce qui suit, on utilise la notation (f, D) pour désigner le système dynamique discret défini par une fonction f sur l'ensemble D.

Voici un exemple élémentaire d'un processus dynamique à temps discret.

Exemple 1.1.
Supposons que nous avons une population de lapins qui au début de notre expérience compte x_0 lapins. Nous savons qu'en une année la population augmente de 10%. Notons par x_n le nombre de lapins de la n-ème année. Nous voulons décrire l'évolution de x_0. Après une année on obtient x_1 lapins

$$x_1 = x_0 + (0.1)x_0 = (1 + 0.1)x_0 = (1.1)x_0$$

Au cours de la deuxième année la quantité de lapins augmente de la même façon. En continuant on trouve pour une année quelconque

$$x_{n+1} = x_n + (0.1)x_n = (1.1)x_n$$

Ainsi, on remarque que pour chaque période de temps

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ telle que } f(x) = (1.1)x$$

Autrement dit, la dynamique de la population peut être décrite, comme dans l'exemple précédent, par l'itération d'une fonction f. En connaissant cette fonction nous pouvons reconstituer l'état du système a chaque moment du temps.

1.2 Comportement des systèmes dynamiques

L'étude d'un système dynamique discret est basée sur l'étude des orbites, points fixes, points périodiques et k-cycles de ce système.

1.2.1 Notion d'orbite (ou trajectoire)

Définition 1.2. *[6]*
L'orbite positive *de $x \in D$ par le système dynamique discret (f, D) est définie par*

$$\mathcal{O}_+(x) = \left\{ f^k(x),\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Si f est bijective, on définit **l'orbite** de x par*

$$\mathcal{O}(x) = \left\{ f^k(x),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*Ainsi que **l'orbite négative***

$$\mathcal{O}_-(x) = \left\{ f^{-k}(x),\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Représentation graphique de l'orbite dans $\mathbb{R}$

Dans le cas où f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ on peut représenter sur le plan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'évolution d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ qui commence dans le point $(x_0, 0)$ en suivant ces étapes

— **Étape 1 :** tracer la courbe représentant la fonction f et la droite $y = x$.
— **Étape 2 :** placer le point de coordonnées $(x_0, 0)$.
— **Étape 3 :** chercher le point d'ordonnée $f(x_0)$, on l'obtient en traçant une droite verticale passant par $(x_0, 0)$ et en cherchant son intersection avec la courbe de la fonction f . Ce point a comme ordonnée $f(x_0)$, ce qui correspond à x_1 (puisque $x_1 = f(x_0)$).
— **Étape 4 :** projeter horizontalement le point de coordonnées (x_0, x_1) sur la droite $y = x$ pour obtenir le point de coordonnées (x_1, x_1), une projection verticale permet ensuite de reporter le point $(x_1, 0)$ sur l'axe des ordonnées.

Réaliser ensuite pour x_1 les même opérations que pour x_0 afin d'obtenir x_2 et ainsi de suite pour les termes de rang suivant.

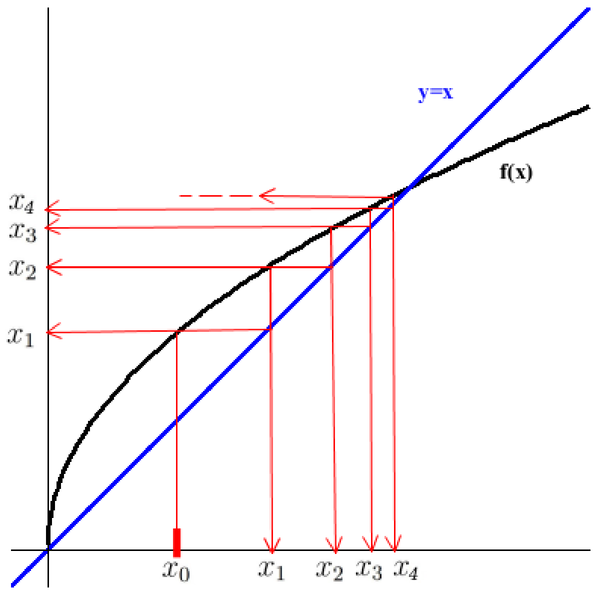

FIGURE 1.1 – Représentation graphique

Exemple 1.2.

Soit $(f, \mathbb{R}_+)$ *un SDD où* f *de la forme* $f(x) = x^2$. *Prenons pour condition initiale* $x_0 = 1/2$. *L'orbite correspondante est*

$$x_0 = 1/2$$

$$x_1 = f(x_0) = 1/4$$

$$x_2 = f(x_1) = 1/16$$

Remarquons que

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = (1/2)^{2n} \to 0 \quad quand \quad n \to +\infty$$

Alors

$$\mathcal{O}_+(1/2) = \left\{1/2, 1/4, ..., (1/2)^{2n}, ..., 0\right\}$$

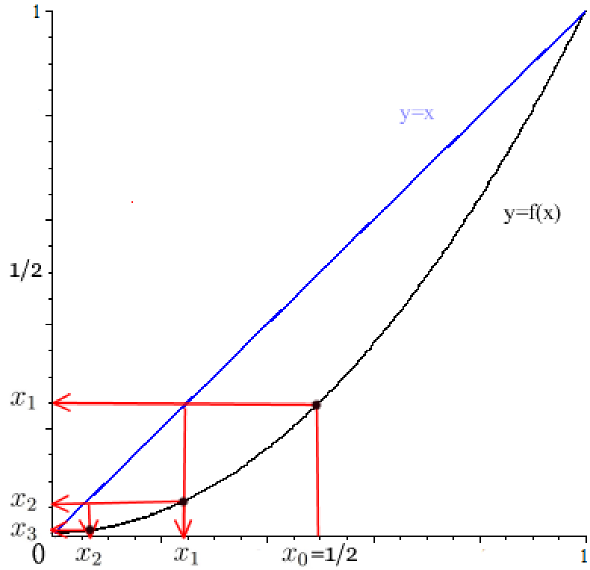

FIGURE 1.2 – L'orbite $\mathcal{O}_+(\frac{1}{2})$

1.2.2 Points Fixes

Définition 1.3. *[3]*

*On appelle "**point fixe**" d'un système dynamique discret (f, D) tout point $x_0 \in D$ tel que*

$$f(x_0) = x_0 \tag{1.2}$$

*Parfois, ces points sont appelés aussi **points stationnaires** ou **points d'équilibre**. L'ensemble des points fixes de f est noté par $Fix(f)$.*

Exemple 1.3.

Les points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ sont des points fixes du système dynamique discret $(f, \mathbb{R})$, où $f(x) = x^2$.

En effet

Pour calculer les points fixes on résout l'équation $f(x) = x$. On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = 1).$$

Définition 1.4.

Soient (f, D) un SDD et $x_0 \in Fix(f)$.

— *Le point fixe x_0 est dit **attractif**, s'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que*

$$|f(x) - x_0| < |x - x_0|, \ \forall x \in V(x_0).$$

— *Le point fixe x_0 est dit **répulsif**, s'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que*

$$|f(x) - x_0| > |x - x_0|, \ \forall x \in V(x_0).$$

— *Le point fixe x_0 est dit **indifférent**, s'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que*

$$|f(x) - x_0| = |x - x_0|, \ \forall x \in V(x_0).$$

Théorème 1.1. *[3]*

Soient $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, et $f : I \to I$ une fonction continue sur I ayant un point fixe $x_0 \in I$. S'il existe $r > 0$ telle que f est dérivable sur le voisinage $V_r(x_0)$, et que la dérivée f' est continue au point x_0. Alors

— *Le point x_0 est attractif si et seulement si*

$$\left| f'(x_0) \right| < 1.$$

— *Le point x_0 est répulsif si et seulement si*

$$\left| f'(x_0) \right| > 1.$$

— *Le point x_0 est indifférent si et seulement si*

$$\left| f'(x_0) \right| = 1.$$

Exemple 1.4.

Dans l'Exemple 1.3 on a $f'(x) = 2x$. Donc le point fixe $x_0 = 0$ est attractif, et le point fixe $x_1 = 1$ est répulsif. Car $f'(0) = 0 < 1$ et $f'(1) = 2 > 1$.

Définition 1.5. ***(Bassin d'attraction)****[5]*

*Soient (f, D) un SDD et $x_0 \in Fix(f)$. Si x_0 est un point fixe attractif, alors son **bassin d'attraction** est*

$$A(x_0) = \{x \in D, \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x_0\}.$$

Exemple 1.5.

Dans l'Exemple 1.3 Le bassin d'attraction du point $x_0 = 0$ *est* $A(0) =]-1, 1[$.

Car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on a* $f^n(x) = x^{2^n}$, *donc*

- *Si* $|x| < 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} = 0.$
- *Si* $|x| \geq 1$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x^{2^n} \neq 0.$

Définition 1.6. ***(Boule de Siegel)****[10]*

La boule $B_r(x_0)$ *est dite une boule de* ***Siegel****, si chaque sphère* $S_\rho(x_0)$ *tel que* $\rho < r$ *est une sphère invariante de* f *(i.e., si* $x \in S_\rho(x_0)$*, alors tous les points itérés* $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$ *pour tout* $n = 1, 2, ...$*).*

L'union de toutes les boules de Siegel avec le centre en x_0 *est dite à une boule de* ***Siegel maximum*** *et est notée* $SI(x_0)$.

1.2.3 Points Périodiques et k-Cycles

Définition 1.7. *[11]*

On dit que $x \in D$ *un point périodique d'un SDD* (f, D)*, s'il existe* $m \geq 1$ *tel que*

$$f^m(x) = x. \tag{1.3}$$

La période "k" d'un point $x \in D$ *est défini par,*

$$k = min\left\{m \geq 1, f^m(x) = x\right\}.$$

$*)$ *L'ensemble* $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ *forme un cycle d'ordre "k" (ou une orbite périodique d'ordre "k", ou encore un* $k-$*cycle), si*

$$\begin{cases} f(x_i) = x_{i+1}, i = 0, 1, ..., k-2; \\ f(x_{k-1}) = x_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Chaque point d'un cycle d'ordre "k" est un point fixe pour f^k *où* $f^k(x_i) = x_i$, $i = 0, 1, ..., k-1$, *et n'est pas un point fixe pour* f^m *si* $m < k$.

Remarque 1.1.

Le point fixe $f(x_s) = x_s$ *d'un système dynamique discret est un point périodique de période* $k = 1$.

Exemple 1.6.

Soit $(f, \mathbb{R})$ un SSD où $f(x) = ax(1-x)$, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Les points 2-périodiques sont les solutions du système

$$\begin{cases} f^2(x) = x; \\ f(x) \neq x, \end{cases}$$

i.e., $(a^2x^2 - (a^2+a)x + a + 1) = 0$. Comme $\Delta = (a-3)(a+1)$, alors

— *Pour $a > 3$, il y a deux points 2-périodiques distincts*

$$x_1 = \frac{a+1}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}, \text{ et } x_2 = \frac{a+1}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{(a-3)(a+1)}.$$

— *Pour $a < 3$, il n'y pas de points 2-périodiques.*

— *Pour $a = 3$, il y a une seul solution, qui coïncide avec l'un des points fixes, d'où il n'y pas de points 2-périodiques.*

On peut observer dans cet exemple un phénomène très important dans la théorie des systèmes dynamiques "le changement des caractéristiques d'un système en fonction du choix de ses paramètres".

Définition 1.8. *[3]*

Soient un SDD $(f, \mathbb{R})$, et $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ une orbite périodique de période "k" de ce système. On dit que cette orbite est ***attractive (ou répulsive)*** *si chacun de ses points est un point fixe attractif (resp. un point répulsif) de la fonction f^k.*

Les règles élémentaires de calcul de dérivées des fonctions composées permettent d'établir un critère simple similaire aux Théorèmes 1.1.

Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ une orbite périodique de période "k". En suivant la définition donnée ci-dessus, nous devons vérifier pour chaque point $x_i, i = 0, 1, ..., k-1$ s'il est un point fixe attractif (ou répulsif) de l'application f^k. Supposons que la fonction f admet une dérivée, donc la fonction f^k est dérivable. De plus, pour tout $i = 0, \cdots, k-1$

on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}f^k\right)(x_i) &= \left(\frac{d}{dx}(f^{k-1}\circ f)\right)(x_i) \\
&= f^{'}(x_i)\cdot\left(\frac{d}{dx}f^{k-1}\right)(f(x_i)) = f^{'}(x_i)\cdot\left(\frac{d}{dx}f^{k-1}\right)(x_{i+1}) \\
&= f^{'}(x_i)\cdot\left(\frac{d}{dx}(f^{k-2}\circ f)\right)(x_{i+1}) \\
&= f^{'}(x_i)\cdot f^{'}(x_{i+1})\cdot\left(\frac{d}{dx}f^{k-2}\right)(f(x_{i+1})) = f^{'}(x_i)\cdot f^{'}(x_{i+1})\cdot\left(\frac{d}{dx}f^{k-2}\right)(x_{i+2}) \\
&\vdots \\
&= f^{'}(x_i)\cdot f^{'}(x_{i+1})\cdot\ldots\cdot f^{'}(x_{k+i-1}).
\end{aligned}$$

Puisque l'orbite est périodique on a

$$\frac{d}{dx}f^k(x_i) = f^{'}(x_0)\cdot f^{'}(x_1)\ \cdot\ldots\cdot\ f^{'}(x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{p-1} f^{'}(x_j).$$

Théorème 1.2. *[3]*

Soient $I=[a,b]$ un intervalle et $f: I\to I$ une fonction continue sur I. Supposons que le SDD défini par la fonction f possède une orbite périodique $\mathcal{O}(x_0)=\{x_0,x_1,x_2,...,x_{k-1}\}\subset I$ de période "k". Si pour tout $x_i\in\mathcal{O}(x_0), i=0,1,...,k-1$, il existe un voisinage $V_r(x_i)\subset I$ tel que la fonction $f(x)$ est dérivable dans ce voisinage est que sa dérivée est continue en x_i. Alors

— *L'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est attractive si et seulement si*

$$\left|\frac{d}{dx}f^k(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{k-1} f^{'}(x_j)\right| < 1.$$

— *L'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est répulsive si et seulement si*

$$\left|\frac{d}{dx}f^k(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{k-1} f^{'}(x_j)\right| > 1.$$

— *Le cas est indéterminé si*

$$\left|\frac{d}{dx}f^k(x_0)\right| = \left|\prod_{j=0}^{k-1} f^{'}(x_j)\right| = 1.$$

Exemple 1.7.

Prenons le système de l'Exemple 1.6 défini par la fonction

$$f(x) = ax(1-x)$$

Nous savons que quand $a > 3$, le système possède une orbite périodique de période 2. De plus, les points de cette orbite sont

$$x_1 = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a},\ x_2 = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$$

Prenons d'abord a = 3.2. Alors

$$x_1 = \frac{2.1+\sqrt{0.21}}{3.2},\ x_2 = \frac{2.1+\sqrt{0.21}}{3.2}$$

Comme la dérivée de la fonction f est

$$f^{'}(x) = a - 2ax = a(1-2x)$$

Donc si on applique le Théorème 1.2, on trouve

$$\left|\frac{d}{dx}f^2(x_1)\right| = |f'(x_1)\cdot f'(x_2)| \simeq 0.16 < 1.$$

D'où l'orbite $\mathcal{O}(x_1)$ est attractive.

Prenons maintenant a = 3.5, alors $x_1 = 6/7,\ x_2 = 3/7$ et

$$\left|\frac{d}{dx}f^2(x_1)\right| = |f'(x_1)\cdot f'(x_2)| = 5/4 > 1.$$

Dans ce cas, l'orbite $\mathcal{O}(x_1)$ est répulsive.

Chapitre 2

Notions de base en l'analyse p-adique

Dans ce chapitre, On donne la construction du corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ et ses propriétés analytiques et topologiques.

2.1 Corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$

Dans cette section, on donne le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à la norme p-adique $|\cdot|_p$.

2.1.1 La valuation p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 2.1.

*Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{Z}^*$, **la valuation p-adique** de n notée par $v_p(n)$ est le plus grand entier α tel que p^α divise n i.e., $n = p^\alpha \cdot n_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}^*$ et $(p, n_1) = 1$.*
Si $x = \dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}^*$, alors $v_p(x) = v_p(n) - v_p(m)$, et par convention $v_p(0) = +\infty$.

Exemple 2.1.

- *Pour $p = 2$, on a $v_2(\frac{2+p^3+2p^4}{p^4+2p^7}) = 1 - 4 = -3$.*
- *Pour $p > 2$, on a $v_p(\frac{2+p^3+2p^4}{p^4+2p^7}) = 0 - 4 = -4$.*

Proposition 2.1.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a

1) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$.

2) $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Preuve.
C'est évident pour $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose que a, $b \in \mathbb{Z}^*$, alors

$$\begin{cases} a = p^{v_p(a)} \times n_1, n_1 \in \mathbb{Z}^*, \\ b = p^{v_p(b)} \times n_2, n_2 \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

On pose $v_p(a) = \alpha$ et $v_p(b) = \beta$. Alors d'une part, on a

$$a \times b = p^{\alpha+\beta}(n_1 \cdot n_2),$$

où p ne divise pas $n_1 \times n_2$, donc

$$v_p(a \cdot b) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

D'autre part, on suppose que $\alpha \leq \beta$, donc

$$a + b = p^\alpha \times n_1 + p^\beta \times n_2 = p^\alpha(n_1 + p^{\beta-\alpha} \cdot n_2).$$

D'où

$$v_p(a+b) \geq \alpha = \min\{\alpha, \beta\},$$

i.e., $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$. ■

Proposition 2.2.
Pour tout a, $b \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$v_p(a) \neq v_p(b) \Rightarrow v_p(a+b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$$

Preuve.
On prend $v_p(a) < v_p(b)$, et comme on a

$$v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}^*,$$

alors $v_p(a+b) \geq v_p(a)$.
Il reste a monter que $v_p(a) \geq v_p(a+b)$. On a

$$v_p(a) = v_p(a - b + b) \geq \min\{v_p(a+b), v_p(b)\}.$$

Si $\min\{v_p(a+b), v_p(b)\} = v_p(b)$, alors $v_p(a) \geq v_p(b)$, c'est une contradiction avec l'hypothèse, donc $v_p(a) \geq v_p(a+b)$. ■

2.1.2 La norme p-adique sur $\mathbb{Q}$

Définition 2.2.
Soit p un nombre premier, on définit l'application de la norme p-adique $|\cdot|_p$: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$ par

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.2.

- *Pour $p = 2$, on a* $\left|\frac{2+p^3+2p^4}{p^4+2p^7}\right|_2 = 2^{-(-3)} = 2^3$.
- *Pour $p > 2$, on a* $\left|\frac{2+p^3+2p^4}{p^4+2p^7}\right|_p = p^{-(-4)} = p^4$.

Remarque 2.1.
On remarque que $|\cdot|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret noté par

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Définition 2.3. ***(La norme non-archimédienne)***
Soient $\mathbb{F}$ un corps, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{F}$. On dit que $\|\cdot\|$ est non-archimédienne, si elle vérifie

$$\| x + y \| \leq \max\{\| x \|, \| y \|\} \text{ (inégalité triangulaire forte).}$$

Le théorème suivant est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une norme $\|\cdot\|$ soit non-archimédienne.

Théorème 2.1. *[7]*
Soit $(\mathbb{F}, \|\cdot\|)$ un corps normé, les condition suivantes sont équivalentes

1) $\|\cdot\|$ est non-archimédienne.

2) $\| n \| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (i.e., $\mathbb{N}$ est borné).

Preuve.

1) **D'une part**, on suppose que la norme $\|\cdot\|$ est non-archimédienne et on montre par récurrence que $\|n\| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 1$, on a $\| n \| = \| 1 \| = 1 \leq 1$.

• On suppose que $\| n \| \leq 1$ est vraie pour $n \geq 1$, et on montre que $\| n+1 \| \leq 1$. On a

$$\| n+1 \| \leq \max\{\| n \|, \| 1 \|\} \leq 1.$$

D'où

$$\| n \| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2) **D'autre part**, on suppose que $\| n \| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $\| \cdot \|$ et non-archimédienne. Comme $\| \cdot \|$ est une norme, il suffit de prouver l'inégalité triangulaire fort, i.e $\| x+y \| \leq \max(\| x \|, \| y \|), \ \forall x, y \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\| x+y \|^n = \| (x+y)^n \| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left\| C_n^k \right\| \|x\|^k \|y\|^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \|x\|^k \|y\|^{n-k} \ \ (car \ \| C_n^k \| \leq 1, \ C_n^k \in \mathbb{N}^*) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} [\max\{\| x \|, \| y \|\}]^n \\
&\leq (n+1)[\max\{\| x \|, \| y \|\}]^n,
\end{aligned}$$

donc

$$\| x+y \| \leq (n+1)^{1/n} \max\{\| x \|, \| y \|\}.$$

Par passage a la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\| x+y \| \leq \max\{\| x \|, \| y \|\},$$

alors $\| \cdot \|$ est une norme non-archimédienne .

■

Proposition 2.3. *[7]*
La norme p-adique est une norme non-archimédienne sur $\mathbb{Q}$.

Preuve.
Soient x, $y \in \mathbb{Q}$, donc on a

1) $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$, d'après la Définition 2.2.

2) $|x \cdot y|_p = p^{-v_p(x \cdot y)} = p^{-v_p(x)-v_p(y)} = p^{-v_p(x)} \cdot p^{-v_p(y)} = |x|_p \cdot |y|_p$.

3) L'inégalité triangulaire forte est satisfaite, car

$$\begin{aligned} | x + y |_p = p^{-v_p(x+y)} &\leq p^{-\min\{v_p(x), v_p(y)\}} \\ &= p^{\max\{-v_p(x), -v_p(y)\}} \\ &= \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\} \\ &= \max\{| x |_p, | y |_p\}. \end{aligned}$$

D'où, la norme p-adique $| \cdot |_p$ est non-archimédienne. ■

Proposition 2.4. *[7]*

Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, on a

$$\prod_{p \text{ premier}} | x |_p \cdot | x |_\infty = 1,$$

où $| \cdot |_\infty$ est la valeur absolue usuelle.

Définition 2.4. ***(Normes équivalentes sur un corps)****[4][7]*

Soient $\mathbb{F}$ un corps, $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ deux normes sur $\mathbb{F}$. On dit que $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont équivalentes si, $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ on a

$$a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} a \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} a.$$

Remarque 2.2.

Si $p_1 \neq p_2$, alors $| \cdot |_{p_1}$ et $| \cdot |_{p_2}$ ne sont pas équivalentes (car, pour la suit $x_n = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^n$ on a $x_n \xrightarrow{|\cdot|_{p_1}} 0$, mais $x_n \not\xrightarrow{|\cdot|_{p_2}} 0$).

Proposition 2.5. *[4][9]*

Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sur $\mathbb{F}$ sont équivalentes si et seulement si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \| x \|_1 = \| x \|_2^\alpha, \ \forall x \in \mathbb{F}.$$

Proposition 2.6. *[7]*

Une norme $|| \cdot ||$ sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à la valeur absolue usuelle $| \cdot |$ si et seulement si $\| \cdot \| = | \cdot |^\alpha$, où $0 < \alpha \leq 1$.

Preuve.

1) **D'une part**, on suppose que $0 < \alpha \leq 1$, et on montre que $\| x \| = | x |^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, est une norme sur $\mathbb{Q}$. Les deux premières propriétés de la norme sont évidentes, il suffit donc de vérifier l'inégalité triangulaire.

Soit $x, y \in \mathbb{Q}$, on suppose que $| y | \leq | x |$, alors on a

$$\begin{aligned} | x + y |^{\alpha} \leq (| x | + | y |)^{\alpha} &= | x |^{\alpha} \left(1 + \frac{| y |}{| x |}\right)^{\alpha} \\ &\leq | x |^{\alpha} \left(1 + \frac{| y |}{| x |}\right) \leq | x |^{\alpha} \left(1 + \left(\frac{| y |}{| x |}\right)^{\alpha}\right) = | x |^{\alpha} + | y |^{\alpha} . \end{aligned}$$

La deuxième inégalité découle du fait que $t^{\alpha} \leq t$, $\forall t \geq 1$, et la troisième car $t^{\alpha} \geq t$, pour $0 \leq t \leq 1$.

2) **D'autre part**, si $\alpha > 1$ l'inégalité triangulaire n'est pas satisfait. Par exemple

$$| 1 + 1 |^{\alpha} = 2^{\alpha} > | 1 |^{\alpha} + | 1 |^{\alpha} = 2.$$

■

Théorème 2.2. *[4](Ostrowski)*
Tout norme non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à la norme usuelle $| \cdot |_{\infty}$, soit à $| \cdot |_p$ pour un nombre premier p.

Remarque 2.3.
Le corps $(\mathbb{Q}, | \cdot |_p)$ n'est pas complet, car il existe des suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes.

2.1.3 Le corps $\mathbb{Q}_p$

Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à $| \cdot |_p$, alors la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$ est l'étendue de la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{Q}_p, | x |_p = \lim_{n \to +\infty} | x_n |_p,$$

où $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ convergente vers x.

Définition 2.5.
On définit l'anneau des entiers p-adiques comme suit

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ | x |_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, \ v_p(x) \geq 0\} .$$

On peut aussi définir le corps des nombres p-adiques comme le corps de fraction de $\mathbb{Z}_p$, i.e.

$$\mathbb{Q}_p = \{\frac{x}{y},\ x, y \in \mathbb{Z}_p \ et \ y \neq 0\}.$$

Théorème 2.3. ***(Développement de Hensel)****[4]*
Tout élément $x \in \mathbb{Q}_p$, admet un développement unique sous forme de série convergente dans $\mathbb{Q}_p$:

$$x = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n \tag{2.1}$$

où $a_n \in \{0, 1, ..., p-1\}$, et $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Si $a_{n_0} \neq 0$, alors on a $v_p(x) = n_0$. D'où $|\mathbb{Q}_p|_p = \{p^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

On peut utiliser le développement de Hensel pour donner une autre définition de l'ensemble des entiers p-adiques comme suit :

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p, x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i\} = \{x \in \mathbb{Q}_p, v_p(x) \in \mathbb{N}\}.$$

Remarque 2.4.

1) *On remarque que dans (2.1), il y a une infinité de chiffres avant la virgule, et un nombre fini de chiffres après la virgule, c'est-à-dire*

$$x = ...a_n...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}...a_{n_0}$$

Cette forme est appelle ***la forme canonique*** *de a dans $\mathbb{Q}_p$, ou* ***l'expansion p-adique*** *de a dans $\mathbb{Q}_p$.*

2) *Dans $\mathbb{R}$ il n'y a pas d'unicité, car*

$$1,000... = 0,999...$$

Exemple 2.3.
Le développement de Hensel de $x = -1$ est donner par

$$-1 = \sum_{k=0}^{+\infty} (p-1)p^k = ...(p-1)(p-1)(p-1).$$

D' où, pour $p = 2$, on a

$$-1 = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = ...111.$$

Remarque 2.5.

L'ensemble des entiers p-adiques inversibles est donné par

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p,\ \mid x \mid_p = 1\} &= \{x \in \mathbb{Z}_p,\ v_p(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{Q}_p, x = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i, a_0 \neq 0\}.\end{aligned}$$

Exemple 2.4.

1) On a $\mid 5 \mid_5 = 5^{-1}$, *alors* $5 \in \mathbb{Q}_5$, *car* $1 \in \mathbb{Z}$.

2) On a $\mid \sqrt{5} \mid_5 = \mid 5 \mid_5^{\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}}$, *alors* $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}_5$, *car* $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

3) Pour $p \neq 5$, $\mid \sqrt{5} \mid_p = \mid 5 \mid_p^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$, *donc* $\sqrt{5} \in \mathbb{Z}_p^*$.

2.2 Le corps des nombres complexes p-adique $\mathbb{C}_p$

Définition 2.6.

On dit qu'un corps $\mathbb{F}$ *est algébriquement clôs si chaque polynôme* $P(x)$ *dans* $\mathbb{F}[x]$ *de degré* n *admet* n *racines dans* $\mathbb{F}$.

Proposition 2.7. *[1]*

Le corps $\mathbb{Q}_p$ *n'est pas algébriquement clôs.*

Preuve.

On considère le polynôme

$$P(x) = x^4 - p^9 \in \mathbb{Q}_p[x].$$

Si α est une racine de $P(x)$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\begin{aligned}\alpha^4 - p^9 = 0 &\Leftrightarrow \alpha^4 = p^9 \\ &\Leftrightarrow \mid \alpha \mid_p^4 = p^{-9} \\ &\Leftrightarrow \mid \alpha \mid_p = p^{\frac{-9}{4}},\end{aligned}$$

donc $v_p(\alpha) = \frac{9}{4} \notin \mathbb{Z}$. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}_p$, d'où P n'a pas des racines dans $\mathbb{Q}_p$, i.e., $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs. ■

Soit $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$, La norme p-adique s'étend de manière unique à $\overline{\mathbb{Q}}_p$ mais cette clôture n'est pas complète. Donc nous avons besoin de la compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs, noté $\mathbb{C}_p$.

2.2.1 Propriétés analytiques et topologiques de $\mathbb{C}_p$

Théorème 2.4. *[7]*
Une suite $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$ est de Cauchy, si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \mid a_{n+1} - a_n \mid_p = 0.$$

Proposition 2.8. *[7]*

P1. *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, où $a \in \mathbb{C}_p^*$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\mid a_n \mid_p = \mid a \mid_p$.*

P2. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série dans $\mathbb{C}_p$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dans ce cas*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \mid_p .$$

Exemple 2.5.

1) La série $\sum_{n\geq 0} p^{n^2}$ est converge dans $\mathbb{C}_p$, car

$$\lim_{n\to+\infty} \mid p^{n^2} \mid_p = \lim_{n\to+\infty} p^{-n^2} = 0.$$

Mais, cette série est diverge dans $\mathbb{R}$, car

$$\lim_{n\to+\infty} \mid p^{n^2} \mid = \lim_{n\to+\infty} p^{n^2} = +\infty.$$

2) La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{p^{n^2}}$ est diverge dans $\mathbb{C}_p$, car

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{p^{n^2}} \right|_p = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} p^{n^2} \neq 0.$$

Proposition 2.9. ***(Propriété des triangles isocèles)****[7]*
Soient a, x deux éléments dans $\mathbb{C}_p$, on a

$$|x - a|_p < |a|_p \Rightarrow |x|_p = |a|_p.$$

Preuve.
On suppose que $|x - a|_p < |a|_p$, on a

$$|x|_p = |x - a + a|_p \leq \max\{|x - a|_p, |a|_p\} = |a|_p.$$

D'autre part, on a

$$|a|_p = |a - x + x|_p \leq \max\{|a - x|_p, |x|_p\}.$$

Si $\max\{|a - x|_p, |x|_p\} = |a - x|_p$, alors

$$|a|_p \leq |a - x|_p = |x - a|_p.$$

C'est une contradiction avec l'hypothèse, donc $\max\{|a - x|_p, |x|_p\} = |x|_p$.
D'où $|a|_p \leq |x|_p$, alors $|x|_p = |a|_p$. ∎

Proposition 2.10. *[4]*
Soient $x, y \in \mathbb{C}_p$ tels que $|x|_p \neq |y|_p$, alors

$$|x \pm y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Preuve.
On suppose que $|x|_p < |y|_p$, alors

$$|x|_p = |x + y - y|_p < |y|_p,$$

d'où

$$|x + y|_p = |y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

∎

Proposition 2.11. *[7]*
Soient $a, b \in \mathbb{C}_p$ et $r, r_0 \in]0, +\infty[$, on a les propriétés suivantes :

- ***P1.*** *La sphère $S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p, |x - a|_p = r\}$, est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}_p$.*
- ***P2.*** *Toute boule $B_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p, |x - a|_p < r\}$, est un ensemble ouvert et fermé à la fois.*
- ***P3.*** *Tout point d'une boule est un centre de cette boule.*
- ***P4.*** *Soient $B_r(a)$ et $B_{r_0}(b)$ deux boules de $\mathbb{C}_p$, alors elles sont disjoints ou l'une est inclus dans l'autre.*
- ***P5.*** $|\mathbb{C}_p|_p = \{p^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Q}\} \cup \{0\}$.

Chapitre 3

Systèmes dynamiques (2,2)-rationnels p-adiques

Dans ce chapitre, on étudie le système dynamique discret $(f, \mathbb{C}_p)$, où f est une fraction rationnelle définie par

$$f(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 + dz + e}, \ a \neq 0, \ | \ b - ad \ |_p + | \ c - ae \ |_p \neq 0, \ a, b, c, d, e \in \mathbb{C}_p. \tag{3.1}$$

où $z \neq z_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4e}}{2}$.

Remarque 3.1.
On remarque que si $b = ad$ et $c = ae$ alors d'après (3.1) on a $f(z) = a$, i.e., f devient une fonction constante. Nous avons donc supposé $b \neq ad$ ou $c \neq ae$.

Il est clair que pour calculer les points fixes de f, on résout l'équation $f(z) = z$. Ce qui équivaut à l'équation suivante

$$z^3 + (d - a)z^2 + (e - b)z - c = 0. \tag{3.2}$$

Comme $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs, alors l'équation (3.2) peut avoir trois solutions avec l'un des cas suivants

1. Une solution multiple trois fois.
2. Deux solutions, une solution simple et l'autre multiple deux fois.
3. Trois solutions distinctes.

On étudie dans ce chapitre le comportement des orbites d'un système dynamique discret (2,2)-rationnel arbitraire dans le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$ lorsque

f admet un seul point fixe, c'est-à-dire on considère le cas (1.).

Le lemme suivant donne un critère sur les paramètres de la fonction (3.1) garantissant l'unicité de son point fixe.

Lemme 3.1.
La fonction (3.1) *admet un point fixe unique si et seulement si*

$$\frac{a-d}{3} = -\sqrt{\frac{e-b}{3}} = \sqrt[3]{c} \quad ou \quad \frac{a-d}{3} = \sqrt{\frac{e-b}{3}} = \sqrt[3]{c}. \tag{3.3}$$

Preuve.
Nécessité, on suppose que la fonction (3.1) possède un seul point fixe z_0, alors l'équation (3.2) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} z^3 + (d-a)z^2 + (e-b)z - c &= (z-z_0)^3 \\ &= z^3 - 3z_0z^2 + 3z_0^2 z - z_0^3. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} 3z_0 = a-d \\ 3z_0^2 = e-b \\ z_0^3 = c. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$z_0 = \frac{a-d}{3} = \pm\sqrt{\frac{e-b}{3}} = \sqrt[3]{c}.$$

Suffisance, on suppose que les coefficients de la fonction (3.1) vérifient (3.3). Alors

$$f(z) = \frac{az^2 + bz + \left(\frac{a-d}{3}\right)^3}{z^2 + dz + \frac{(a-d)^2}{3} + b}, \ a \neq 0, \ b \neq -2a^2 \ ou \ d \neq -2a, \ a, b, d \in \mathbb{C}_p. \tag{3.4}$$

Dans ce cas, l'équation $f(z) = z$ peut être écrite comme

$$\left(z - \frac{a-d}{3}\right)^3 = 0.$$

Ainsi $f(z)$ a un point fixe unique $z_0 = \dfrac{a-d}{3}$. ■

Il résulte de ce lemme que si la fonction (3.1) a un point fixe unique alors elle est de la forme (3.4). On étudie donc le système dynamique discret $(f, \mathbb{C}_p)$ avec f donné par la

forme (3.4).
Le point fixe $z_0 = \dfrac{a-d}{3}$ est **indifférent** pour la fonction (3.4), car

$$f^{'}(z_0) = f^{'}(\frac{a-d}{3}) = 1.$$

On note $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}_p, \exists n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in \{z_1, z_2\}\}$. Pour étudier la trajectoire de $z \notin \mathcal{P}$ dans le système dynamique p-adique discret $(f, \mathbb{C}_p)$, on a besoin d'estimer $|f(z) - z_0|_p$.
On a

$$\begin{aligned} f(z) - z_0 &= \frac{az^2 + bz + z_0^3 - z_0(z^2 + dz + e)}{z^2 + dz + e} \\ &= \frac{(a - z_0)z^2 + (b - dz_0)z + z_0^3 - ez_0}{(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{(a - z_0)(z - z_0)^2 + (a - z_0)(2z_0 z - z_0^2) + (b - dz_0)z + z_0^3 - ez_0}{(z - z_1)(z - z_2)}, \end{aligned}$$

comme $d = -z_1 - z_2$, $e = z_1 z_2$ et $b = z_1 z_2 - 3z_0^2$ on obtient

$$f(z) - z_0 = \frac{\frac{2a+d}{3}(z - z_0)^2 + (z - z_0)(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

D'où

$$\mid f(z) - z_0 \mid_p = \mid z - z_0 \mid_p \cdot \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(z - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{\mid (z - z_0) + (z_0 - z_1) \mid_p \mid (z - z_0) + (z_0 - z_2) \mid_p}. \tag{3.5}$$

Remarque 3.2.
On remarque que la valeur de $|f(z) - z_0|_p$ *est liée aux valeurs* $\delta = \left|\frac{2a+d}{3}\right|_p = |a - z_0|_p$, $\alpha = |z_0 - z_1|_p$, $\beta = \mid z_0 - z_2 \mid_p$ *et* $r = |z - z_0|_p$.
De plus, $z_0 - z_1$ *et* $z_0 - z_2$ *sont symétriques en* (3.5)*. Donc on considère le système dynamique* $(f, \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{P})$ *pour les deux cas* $\alpha = \beta$ *et* $\alpha < \beta$.

Les paramètres du système dynamique $(f, \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{P})$ vérifient les propriétés suivantes

Proposition 3.1. *[10]*

1. *Si* $\left|\sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{(a-d)^2}{3} - b}\right|_p \neq \left|\frac{2a+d}{6}\right|_p$, *alors* $\alpha = \beta$.
2. *Si* $\left|\sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{(a-d)^2}{3} - b}\right|_p = \left|\frac{2a+d}{6}\right|_p$, *alors*
   - $\alpha \leq \delta$ *et* $\beta \leq \delta$ *pour tout* $p \geq 3$.
   - $\alpha \leq 2\delta$ *et* $\beta \leq 2\delta$ *pour* $p = 2$.

Preuve.

1. Par la contra-posée, on suppose que $\alpha \neq \beta$, donc

$$\alpha = \mid z_0 - z_1 \mid_p = \mid -z_0 + z_1 \mid_p \neq \mid z_0 - z_2 \mid_p = \beta,$$

alors d'après la proposition(2.10), on a

$$\mid (z_0 - z_1) + (z_0 - z_2) \mid_p = \mid (-z_0 + z_1) + (z_0 - z_2) \mid_p = \max\{\alpha, \beta\},$$

d'où

$$\mid z_1 - z_2 \mid_p = \mid 2z_0 - z_1 - z_2 \mid_p,$$

aussi

$$\left| \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{(a-d)^2}{3} - b} \right|_p = \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|_p = \left| \frac{2z_0 - z_1 - z_2}{2} \right|_p = \left| \frac{2a+d}{6} \right|_p .$$

2. On suppose que $\left| \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{(a-d)^2}{3} - b} \right|_p = \left| \frac{2a+d}{6} \right|_p$, donc

$$\mid z_1 - z_2 \mid_p = \mid -z_1 + z_2 \mid_p = \mid 2z_0 - z_1 - z_2 \mid_p = \delta$$

Alors, d'une parte

$$\begin{aligned} \mid 2(z_0 - z_1) \mid_p &= \mid (-z_1 + z_2) + (2z_0 - z_1 - z_2) \mid_p \\ &\leq \max\{\mid -z_1 + z_2 \mid_p, \mid 2z_0 - z_1 - z_2 \mid_p\} = \delta \end{aligned}$$

donc

$$\alpha = \mid (z_0 - z_1) \mid_p \leq \frac{1}{\mid 2 \mid_p} \delta = \begin{cases} 2\delta, & si\ p = 2 \\ \delta, & sinon. \end{cases}$$

D'autre parte

$$\begin{aligned} \mid 2(z_0 - z_2) \mid_p &= \mid (z_1 - z_2) + (2z_0 - z_1 - z_2) \mid_p \\ &\leq \max\{\mid z_1 - z_2 \mid_p, \mid 2z_0 - z_1 - z_2 \mid_p\} = \delta \end{aligned}$$

donc

$$\beta = \mid (z_0 - z_2) \mid_p \leq \frac{1}{\mid 2 \mid_p} \delta = \begin{cases} 2\delta, & si\ p = 2 \\ \delta, & sinon. \end{cases}$$

$\blacksquare$

Dans ce qui suit, on étudie le cas où α est égal à β. Cette étude est dépendu de la position de α et δ, donc on a trois cas possibles, $\delta < \alpha$, $\alpha < \delta$ et $\alpha = \delta$.

3.1 Le cas de $\alpha > \delta$

Dans ce cas, le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) est devient lié au système dynamique réel $(\varphi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ associé à la fonction $\varphi_{\alpha,\delta} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par

$$\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p = \begin{cases} r, & si\ r < \alpha \\ \alpha^*, & si\ r = \alpha \\ \frac{\alpha^2}{r}, & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

où α^* et δ^* deux nombres positifs tels que $\alpha^* \geq \alpha$, $\delta^* \leq \delta$.

En effet

On a $r = \mid z - z_0 \mid_p$, $\alpha = \mid z_0 - z_1 \mid_p$, $\delta = \left| \dfrac{2a + d}{3} \right|_p$ $et\ \beta = \mid z_0 - z_2 \mid_p$. Donc

- Pour $r < \alpha$, on a $\delta r < \alpha^2$ (car $\delta < \alpha$). Donc

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p &= \mid z - z_0 \mid_p \cdot \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(z - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{\mid (z - z_0) + (z_0 - z_1) \mid_p \mid (z - z_0) + (z_0 - z_2) \mid_p} \\ &= r \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \alpha} \\ &= r. \end{aligned}$$

- Pour $r = \alpha$, on a $\delta\alpha < \alpha^2$ (car $\delta < \alpha$). Donc

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p &= \frac{\alpha^3}{\mid (z - z_0) + (z_0 - z_1) \mid_p \mid (z - z_0) + (z_0 - z_2) \mid_p} \\ &= \alpha^* \geq \alpha \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha \cdot \alpha} = \alpha. \end{aligned}$$

- Pour $\alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\delta r < \alpha^2$ (car $\delta < \alpha$). Donc

$$\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p = r \cdot \frac{\alpha^2}{r \cdot r} = \frac{\alpha^2}{r}.$$

- Pour $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\delta r = \alpha^2$ (car $\delta < \alpha$ et $r > \alpha$). Donc

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha,\delta}(r) =\mid f(z) - z_0 \mid_p &= r \cdot \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(z - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{r \cdot r} \\ &= \delta \cdot \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(z - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{\alpha^2} \\ &= \delta^* \leq \delta \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = \delta.\end{aligned}$$

- Pour $r > \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\delta r > \alpha^2$ (car $\delta < \alpha$ et $r > \alpha$). Donc

$$\varphi_{\alpha,\delta}(r) =\mid f(z) - z_0 \mid_p = r \cdot \frac{\delta r}{r \cdot r} = \delta.$$

Notation 3.1.

On note

$$\alpha^*(z) =\mid f(z) - z_0 \mid_p, \text{ si } z \in S_\alpha(z_0),$$

et

$$\delta^*(z) =\mid f(z) - z_0 \mid_p, \text{ si } z \in S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0).$$

Théorème 3.1. *[10]*

Le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) a les propriétés suivantes

1. *1.1) $SI(z_0) = B_\alpha(z_0)$.*

   1.2) $\mathcal{P} \subset S_\alpha(z_0)$.

2. *Si $r > \alpha$ et $z \in S_r(z_0)$, alors*

$$f^n(z) \in \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{r}}(z_0), & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*}(z_0), & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_\delta(z_0), & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

   pour tout $n \geq 1$.

3. *Si $z \in S_\alpha(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors on a l'une des deux possibilités suivantes*

   3.1) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_k > \alpha$ tels que $f^k(z) \in S_{\mu_k}(z_0)$ et

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{\mu_k}}(z_0), & si\ \alpha < \mu_k < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*(f^k(z))}(z_0), & si\ \mu_k = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_\delta(z_0), & si\ \mu_k > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

   pour tout $m \geq k+1$ et $f^m(z) \in S_\alpha(z_0)$ si $m \leq k-1$.

3.2) L'orbite $\mathcal{O}_+(z) = \{f^k(z), k \geq 0\}$ est un sous-ensemble de $S_\alpha(z_0)$.

Pour la démonstration, on a besoin les deux Lemmes suivants

Lemme 3.2.

Si $z \in S_r(z_0)$, alors pour la fonction (3.4) on a

$$\mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \varphi^n_{\alpha,\delta}(r), \forall n \geq 1.$$

Preuve.

On suppose que $\alpha > \delta$, et $z \in S_r(z_0)$ ($i.e.$ $\mid z - z_0 \mid_p = r$). Par récurrence, on a

- Pour $n = 1$, d'après la définition de $\varphi_{\alpha,\delta}$ on a $\mid f(z) - z_0 \mid_p = \varphi_{\alpha,\delta}(r)$.
- On suppose que $\mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \varphi^n_{\alpha,\delta}(r),\ pour\ n \geq 1$ $(i.e. f^n(z) \in S_{\varphi^n_{\alpha,\delta}(r)}(z_0))$. Alors
$$\mid f^{n+1}(z) - z_0 \mid_p = \mid f(f^n(z)) - z_0 \mid_p = \varphi_{\alpha,\delta}(\varphi^n_{\alpha,\delta}(r)) = \varphi^{n+1}_{\alpha,\delta}(r).$$

■

Lemme 3.3.

Le système dynamique réel $(\varphi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ a les propriétés suivantes

1. *$Fix(\varphi_{\alpha,\delta}) = \{r,\ 0 \leq r < \alpha\} \cup \{\alpha,\ si\ \alpha^* = \alpha\}$.*
2. *Si $r > \alpha$, alors*
$$\varphi^n_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{r}, & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta} \end{cases}$$
pour tout $n \geq 1$.
3. *Si $r = \alpha$ et $\alpha^* > \alpha$, alors*
$$\varphi^n_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^*}, & si\ \alpha < \alpha^* < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ \alpha^* = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ \alpha^* > \frac{\alpha^2}{\delta} \end{cases}$$
pour tout $n \geq 2$.

Preuve.

1. D'après la définition de $\varphi_{\alpha,\delta}(r)$, on obtient

- Pour $r < \alpha$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = r$, donc $r \in Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \alpha$ et $\alpha^* = \alpha$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha^* = \alpha = r$, donc $r \in Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \alpha$ et $\alpha^* > \alpha$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha^* > \alpha = r$, donc $r \notin Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $\alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\alpha^2}{r} \neq r$. Car sinon on a $\alpha^2 = r^2$ i.e. $\alpha = r$, contradiction, donc $r \notin Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \delta^* \leq \delta < \alpha < r$, donc $r \notin Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r > \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \delta < r$, donc $r \notin Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.

2. Si $r > \alpha$, alors

Pour $n = 1$, on a

$$\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{r}, & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}. \end{cases}$$

Par conséquent

Pour $\alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\delta < \frac{\alpha^2}{r} < \alpha$, donc $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\alpha}{r} < \alpha$.

Pour $r \geq \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a comme $\delta^* \leq \delta < \alpha$, donc $\varphi_{\alpha,\delta}(r) < \alpha$. Ainsi $\varphi_{\alpha,\delta}(\varphi_{\alpha,\delta}(r)) = \varphi_{\alpha,\delta}(r)$, i.e., $\varphi_{\alpha,\delta}(r)$ est un point fixe de $\varphi_{\alpha,\delta}$ pour tout $r > \alpha$.

D'où, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\varphi^n_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{r}, & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}. \end{cases}$$

3. Si $r = \alpha$ et $\alpha^* > \alpha$, on a $\varphi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha^* > \alpha$, donc d'après *(2.)* on a

Pour tout $m \geq 1$, on a

$$\varphi^{m+1}_{\alpha,\delta}(r) = \varphi^m_{\alpha,\delta}(\varphi_{\alpha,\delta}(r)) = \varphi^m_{\alpha,\delta}(\alpha^*) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^*}, & si\ \alpha < \alpha^* < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ \alpha^* = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ \alpha^* > \frac{\alpha^2}{\delta}. \end{cases}$$

D'où, pour tout $n = m + 1 \geq 2$, on a

$$\varphi^n_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\alpha^*}, & si\ \alpha < \alpha^* < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ \alpha^* = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ \alpha^* > \frac{\alpha^2}{\delta}. \end{cases}$$

■

Preuve du Théorème 3.1 .

2. Soient $r > \alpha$ et $z \in S_r(z_0)$, alors d'après le Lemme 3.2 et la partie *(2.)* du Lemme 3.3, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \varphi^n_{\alpha,\delta}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{r}, & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta^*, & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \delta, & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

donc

$$f^n(z) \in S_{\varphi^n_{\alpha,\delta}(r)}(z_0) = \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{r}}(z_0), & si\ \alpha < r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*}(z_0), & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_\delta(z_0), & si\ r > \frac{\alpha^2}{\delta}. \end{cases}$$

3. Soit $z \in S_\alpha(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors on a

$$\mid f(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^3}{\mid (z - z_0) + (z_0 - z_1) \mid_p \mid (z - z_0) + (z_0 - z_2) \mid_p} \geq \alpha.$$

D'où

• Si $\mid f(z) - z_0 \mid_p > \alpha$, il existe $\mu_1 > \alpha$ tel que $f(z) \in S_{\mu_1}(z_0)$, (*i.e.*, $\mid f(z) - z_0 \mid_p = \mu_1$), et d'après la partie *(2.)* de ce théorème, on a

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{\mu_1}}(z_0), & si\ \alpha < \mu_1 < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*}(z_0), & si\ \mu_1 = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_\delta(z_0), & si\ \mu_1 > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

pour tout $m \geq 2$. Alors dans ce cas $k = 1$.

• Sinon $\mid f(z) - z_0 \mid_p = \alpha$, alors on considère ce qui suit

$$\mid f^2(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^3}{\mid (f(z) - z_0) + (z_0 - z_1) \mid_p \mid (f(z) - z_0) + (z_0 - z_2) \mid_p} \geq \alpha.$$

Maintenant,

* Si $| f^2(z) - z_0 |_p > \alpha$, alors il existe $\mu_2 > \alpha$ tel que $f^2(z) \in S_{\mu_2}(z_0)$, (*i.e.*, $| f^2(z) - z_0 |_p = \mu_2)$, et d'après la partie *(2.)* de ce théorème, on a

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{\mu_2}}(z_0), & si\ \alpha < \mu_2 < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*}(z_0), & si\ \mu_2 = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta}(z_0), & si\ \mu_2 > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

pour tout $m \geq 3$. Alors dans ce cas $k = 2$.

* Sinon $| f^2(z) - z_0 |_p = \alpha$. Ensuite, on peut continuer l'argument et obtenir l'inégalité suivante

$$| f^k(z) - z_0 |_p \geq \alpha.$$

Par conséquent, à chaque étape on peut avoir deux possibilités, $| f^k(z) - z_0 |_p = \alpha$ ou $| f^k(z) - z_0 |_p > \alpha$.

a) Pour $| f^k(z) - z_0 |_p > \alpha$, il existe $\mu_k > \alpha$ tel que $f^k(z) \in S_{\mu_k}(z_0)$, (*i.e.*, $| f^k(z) - z_0 |_p = \mu_k)$, et pour tout $k > 1$, on a

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\frac{\alpha^2}{\mu_k}}(z_0), & si\ \alpha < \mu_k < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta^*}(z_0), & si\ \mu_k = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ S_{\delta}(z_0), & si\ \mu_k > \frac{\alpha^2}{\delta}, \end{cases}$$

pour tout $m \geq k+1$.

b) Pour $| f^k(z) - z_0 |_p = \alpha$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{f^k(z),\ k \geq 0\} \subset S_\alpha(z_0)$, (i.e., l'orbite $\mathcal{O}_+(z) = \{f^k(z), k \geq 0\}$ est un sous-ensemble de $S_\alpha(z_0)$).

1. *1.1)* D'une part, d'après les parties *(2.)* et *(3.)* de ce théorème, on sait que $S_r(z_0)$ n'est pas invariante pour f, pour tout $r \geq \alpha$. Par conséquent, $SI(z_0) \subset B_\alpha(z_0)$.

D'autre part, d'après le Lemme 3.2 et la partie *(1.)* du lemme 3.3 pour $r < \alpha$ et $z \in S_r(z_0)$, on a $| f^n(z) - z_0 |_p = \varphi^n_{\alpha,\delta}(r)$ ($i.e. f^n(z) \in S_r(z_0)$), donc $B_\alpha(z_0) \subset SI(z_0)$. (Car $B_r(z_0)$ est une boule de Siegel, et $S_r(z_0)$ est une sphère invariante, pour tout $r < \alpha$). D'où $SI(z_0) = B_\alpha(z_0)$.

1.2) Comme $| z_0 - z_1 |_p = | z_0 - z_2 |_p = \alpha$, alors on a $z_{1,2} \notin B_\alpha(z_0)$. De plus, $f(B_\alpha(z_0)) \subset B_\alpha(z_0)$, alors on a

$$B_\alpha(z_0) \cap \mathcal{P} = \{z \in B_\alpha(z_0),\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^n(z) \in \{z_1, z_2\}\} = \emptyset.$$

Donc d'après la partie *(2.)* de ce théorème, pour tout $r > \alpha$, on a $f(S_r(z_0)) \subset B_\alpha(z_0)$. Ainsi

$$(\mathbb{C}_p \setminus B^+_\alpha(z_0)) \cap \mathcal{P} = \emptyset,$$

i.e., $\mathcal{P} \subset S_\alpha(z_0)$.

$\blacksquare$

3.2 Le cas de $\alpha < \delta$

Dans ce cas, le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) est devient lié au système dynamique réel $(\phi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ associé à la fonction $\phi_{\alpha,\delta} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par

$$\phi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p = \begin{cases} r, & si\ r < \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \alpha', & si\ r = \frac{\alpha^2}{\delta} \\ \frac{\delta r^2}{\alpha^2}, & si\ \frac{\alpha^2}{\delta} < r < \alpha \\ \delta', & si\ r = \alpha \\ \delta, & si\ r > \alpha, \end{cases}$$

où α' et δ' deux nombres positifs tels que $\alpha' \leq \frac{\alpha^2}{\delta}$, $\delta' \geq \delta$.

Théorème 3.2. *[10]*
Le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) a les propriétés suivantes

A. *A.a) $SI(z_0) = B_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0)$.*
   A.b) $f(S_\delta(z_0)) \subset S_\delta(z_0)$, i.e., $S_\delta(z_0)$ est une sphère invariante.

B. *Si $r > \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $z \in S_r(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(z) \in S_\delta(z_0).$$

C. *Si $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$, alors on a l'une des deux possibilités suivantes*

   C.a) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_k < \frac{\alpha^2}{\delta}$ tel que $f^m(z) \in S_{\mu_k}(z_0)$, pour tout $m \geq k$ et $f^m(z) \in S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0)$ si $m \leq k - 1$.

   C.b) L'orbite $\mathcal{O}_+ = \{f^k(z), k \geq 0\}$ est un sous-ensemble de $S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0)$.

Pour la démonstration, on a besoin les deux Lemmes suivants

Lemme 3.4.

Si $z \in S_r(z_0)$, alors pour la fonction (3.4) on a

$$| f^n(z) - z_0 |_p = \phi^n_{\alpha,\delta}(r), \forall n \geq 1.$$

Pour la démonstration, on utilise la récurrence comme la preuve du Lemme 3.2.

Lemme 3.5.

Le système dynamique réel $(\phi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ a les propriétés suivantes

A. $Fix(\phi_{\alpha,\delta}) = \{r,\ 0 \leq r < \frac{\alpha^2}{\delta}\} \cup \{\frac{\alpha^2}{\delta},\ si\ \alpha' = \frac{\alpha^2}{\delta}\} \cup \{\delta\}$.

B. Si $r > \frac{\alpha^2}{\delta}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \delta.$$

C. Si $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $\alpha' < \frac{\alpha^2}{\delta}$, alors $\phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \alpha'$ pour tout $n \geq 1$.

Preuve.

Soit $\alpha < \delta$, alors

A. D'après la définition de $\phi_{\alpha,\delta}(r)$, on obtient

- Pour $r < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = r$, donc $r \in Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $\alpha' = \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha' = \frac{\alpha^2}{\delta} = r$, donc $r \in Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $\alpha' < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha' < \frac{\alpha^2}{\delta} = r$, donc $r \notin Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $\frac{\alpha^2}{\delta} < r < \alpha$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\delta r^2}{\alpha^2} \neq r$. Car sinon, on a $\frac{\delta r^2}{\alpha^2} = r$ i.e. $\frac{\alpha^2}{\delta} = r$, donc c'est une contradiction, alors $r \notin Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \alpha$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \delta' \geq \delta > \alpha = r$, donc $r \notin Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r > \alpha$ et $r \neq \delta$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \delta > \alpha$, donc $r \notin Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r > \alpha$ et $r = \delta$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \delta = r$, donc $r \in Fix(\phi_{\alpha,\delta})$.

B. Par la définition de $\phi_{\alpha,\delta}$, on a

$*$ pour $r > \alpha$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \delta$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \delta.$$

$*$ Pour $r = \alpha$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \delta' \geq \delta > \alpha$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \delta.$$

$*$ pour $\frac{\alpha^2}{\delta} < r < \alpha$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\delta r^2}{\alpha^2}$, $\phi'_{\alpha,\delta}(r) = \frac{2\delta r}{\alpha^2} > 2$ et

$$\phi_{\alpha,\delta}(]\frac{\alpha^2}{\delta}, \alpha[) =]\frac{\alpha^2}{\delta}, \delta[.$$

Comme $\phi'_{\alpha,\delta}(r) > 2$, pour $r \in]\frac{\alpha^2}{\delta}, \alpha[$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^{n_0}_{\alpha,\delta}(r) \in]\alpha, \delta[\cup \{\delta'\}$. Ainsi si $n_0 \geq n$, alors on a $\phi^n_{\alpha,\delta}(r) > \alpha$. Par conséquente

$$\lim_{n\to+\infty} \phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \delta.$$

C. Pour $r = \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $\alpha' < \frac{\alpha^2}{\delta}$, on a $\phi_{\alpha,\delta}(r) = \alpha' < \frac{\alpha^2}{\delta}$. De plus, α' est un point fixe pour la fonction $\phi_{\alpha,\delta}$, d'où pour tout $n \geq 1$, on obtient $\phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \alpha'$.

$\blacksquare$

Preuve du Théorème 3.2.

Soit $\alpha < \delta$, alors on a

A. D'après le Lemme 3.4 et la partie $(A.)$ du Lemme 3.5, on a les sphères $S_r(z_0)$ et $S_\delta(z_0)$ sont invariantes, pour tout $r < \frac{\alpha^2}{\delta}$. D'où

$$SI(z_0) = B_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0) \ et \ f(S_\delta(z_0)) \subset S_\delta(z_0).$$

B. Soit $r > \frac{\alpha^2}{\delta}$ et $z \in S_r(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors d'après le Lemme 3.4 et la partie $(B.)$ du Lemme 3.5, on a

$$\mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \phi^n_{\alpha,\delta}(r), \forall n \geq 1,$$

par passage a la limite, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \mid \lim_{n\to+\infty} f^n(z) - z_0 \mid_p = \lim_{n\to+\infty} \phi^n_{\alpha,\delta}(r) = \delta.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(z) \in S_\delta(z_0).$$

C. Soit $z \in S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z) \setminus \rho$, alors on a

$$\mid f(z) - z_0 \mid_p = \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(z - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{\delta} \leq \frac{\alpha^2}{\delta}.$$

D'où

• Si $\mid f(z) - z_0 \mid_p < \frac{\alpha^2}{\delta}$, et d'après la partie *(A.)* du Lemme 3.5 il existe $\mu_1 < \frac{\alpha^2}{\delta}$ tel que $f^m(z) \in S_{\mu_1}(z_0)$, pour tout $m \geq 1$. Alors dans ce cas $k = 1$.

• Sinon $\mid f(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^2}{\delta}$, alors on considère ce qui suit

$$\mid f^2(z) - z_0 \mid_p = \frac{\mid \frac{2a+d}{3}(f(z) - z_0) + (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \mid_p}{\delta} \leq \frac{\alpha^2}{\delta}.$$

Maintenant,
$*$ si $\mid f^2(z) - z_0 \mid_p < \frac{\alpha^2}{\delta}$, alors il existe $\mu_2 < \frac{\alpha^2}{\delta}$ tel que $f^m(z) \in S_{\mu_2}(z_0)$, pour tout $m \geq 2$. Alors dans ce cas $k = 2$.
$*$ Sinon $\mid f^2(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^2}{\delta}$. Ensuite, on peut continuer l'argument et obtenir l'inégalité suivante

$$\mid f^k(z) - z_0 \mid_p \leq \frac{\alpha^2}{\delta}.$$

Par conséquent, à chaque étape, on peut avoir deux possibilités, $\mid f^k(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^2}{\delta}$ ou $\mid f^k(z) - z_0 \mid_p < \frac{\alpha^2}{\delta}$.
a) Pour $\mid f^k(z) - z_0 \mid_p < \frac{\alpha^2}{\delta}$, il existe $\mu_k > \alpha$ tel que $f^k(z) \in S_{\mu_k}(z_0)$, pour tout $m \geq k$.
b) Pour $\mid f^k(z) - z_0 \mid_p = \frac{\alpha^2}{\delta}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{f^k(z),\ k \geq 0\} \subset S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0)$, (i.e., l'orbite $\mathcal{O}_+ = \{f^k(z), k \geq 0\}$ est un sous-ensemble de $S_{\frac{\alpha^2}{\delta}}(z_0)$).

$\blacksquare$

Notation 3.2.
On note

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_k,\ \ \mathcal{P}_k = \{z \in \mathbb{C}_p,\ \ f^k(z) \in \{z_1, z_2\}\}.$$

Théorème 3.3. *[10]*
Si $\alpha < \delta$, alors

1. *$\mathcal{P}_k \neq \emptyset$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
2. *$\mathcal{P}_k \subset S_{r_k}(z_0)$, tel que $r_k = \alpha \cdot (\frac{\alpha}{\delta})^{\frac{2^k-1}{2^k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Preuve.

1. Soit $\alpha < \delta$, donc par récurrence, on a
   - Pour $k = 0$, on a $\mathcal{P}_0 = \{z_1, z_2\} \neq \emptyset$.
   - Supposons que $\mathcal{P}_k = \{z \in \mathbb{C}_p,\ f^k(z) \in \{z_1, z_2\}\} \neq \emptyset$, pour $k \geq 0$, et on montre que

$$\mathcal{P}_{k+1} = \{z \in \mathbb{C}_p,\ f^{k+1}(z) \in \{z_1, z_2\}\} \neq \emptyset.$$

   C'est-à-dire, on preuve que l'équation suivante a au moins une solution

$$f^{k+1}(z) = z_i,\ \ pour\ i = 1, 2.$$

D'après l'hypothèse $\mathcal{P}_k \neq \emptyset$, alors il existe $y \in \mathcal{P}_k$ tel que $f^k(y) \in \{z_1, z_2\}$. De plus, l'équation $f(z) = y$ peut s'écrire sous la forme

$$(a-y)z^2 + (b-dy)z + \left(\frac{a-d}{3}\right)^3 - y\left[\frac{(a-d)^2}{3} + b\right] = 0. \tag{3.6}$$

Comme $z_1, z_2 \in S_\alpha(z_0)$, $a \in S_\delta(z_0)$ (car $\mid a - z_0 \mid_p = \mid \frac{2a+d}{3} \mid_p = \delta$), et d'après la partie *A.b)* du Théorème 3.2, on a la sphère $S_\delta(z_0)$ est invariante, donc

$$\mathcal{P} \cap S_\delta(z_0) = \emptyset.$$

Ainsi $a \notin \mathcal{P}$, d'où $a - y \neq 0$. Alors l'équation (3.6) a deux solutions $z = t_1, t_2$ (car $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clôs). Pour $z \in \{t_1, t_2\}$, on a

$$f^{k+1}(z) = f^k(f(z)) = f^k(y) \in \{z_1, z_2\}.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1} \neq \emptyset$, d'où $\mathcal{P}_k \neq \emptyset$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. On a $\mid z_0 - z_1 \mid_p = \mid z_0 - z_2 \mid_p = \alpha$, et $\alpha > \frac{\alpha^2}{\delta}$ (car $\alpha < \delta$). Donc d'après (3.5) et la partie *(B.)* du Lemme 3.5, pour $z \in S_\alpha(z_0)$ et $z \neq z_{1,2}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(z) \in S_\delta(z_0),$$

i.e., $S_\alpha(z_0) \cap \mathcal{P} = \{z_1, z_2\} = \mathcal{P}_0$. On note $r_0 = \alpha$, alors $\mathcal{P}_0 \subset S_{r_0}(z_0)$.
Maintenant, pour trouver les sphères qui sont contenantes les solutions des équations

$$f^k(z) = z_i, \ k = 1, 2, 3, ..., \ i = 1, 2.$$

On écrit les dernières équations sous la forme

$$f^k(z) - z_0 = z_i - z_0, \ k = 1, 2, 3, ..., \ i = 1, 2.$$

Pour chaque k nous voulons trouver un certain r_k tel que la solution z de $f^k(z) = z_i$ (pour certains $i = 1, 2$) appartient à $S_{r_k}(z_0)$ (i.e., $z \in S_{r_k}(z_0)$). D'après le Lemme 3.4, on a

$$|f^k(z) - z_0|_p = \phi^k_{\alpha,\delta}(r) = \alpha, \ k = 1, 2, 3, ...$$

D'où, si on montre que la dernière équation a une solution unique r_k pour chaque k, alors on obtient

$$\mathcal{P}_k = \{z \in \mathbb{C}_p, \ f^k(z) = z_i, \ i = 1, 2\} \subset S_{r_k}(z_0).$$

D'après les parties *(A.)* et *(C.)* du Lemme 3.5, on a $\frac{\alpha^2}{\delta} < r \leq \alpha$. De plus, on a $r_0 = \alpha$ et $\frac{\alpha^2}{\delta} < r < \alpha$, pour $k = 1, 2, \ldots$. Par la définition de $\phi_{\alpha,\delta}$, on a

$$\phi_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\delta r^2}{\alpha^2}.$$

Ainsi

$$\phi^k_{\alpha,\delta}(r) = \frac{\delta^{2^k-1}}{\alpha^{2(2^k-1)}} r^{2^k} = \alpha.$$

Par conséquent

$$r^{2^k} = \alpha^{2^k} \cdot \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{2^k-1}{2^k}} \right]^{2^k}.$$

Prendre 2^k-racine on obtient une seule solution positive $r = r_k = \alpha \cdot \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{2^k-1}{2^k}}$.

■

3.3 Le cas de $\alpha = \delta$

Dans ce cas, le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) est devient lié au système dynamique réel $(\psi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ associé à la fonction $\psi_{\alpha,\delta} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par

$$\psi_{\alpha,\delta}(r) = \mid f(z) - z_0 \mid_p = \begin{cases} r, & si\ r < \alpha \\ \hat{\alpha}, & si\ r = \alpha \\ \alpha, & si\ r > \alpha, \end{cases}$$

où $\hat{\alpha}$ est un nombre positif.

Notation 3.3.
On note

$$\hat{\alpha}(z) = \mid f(z) - z_0 \mid_p, \ si\ z \in S_\alpha(z_0).$$

Théorème 3.4. *[10]*
Le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \backslash \mathcal{P})$ où f de la forme (3.4) a les propriétés suivantes

I. I.i) $SI(z_0) = B_\alpha(z_0)$.

I.ii) $B_\alpha(z_0) \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

II. Si $r > \alpha$ *et* $z \in S_r(z_0)$, *alors* $f(z) \in S_\alpha(z_0)$.

III. Soit $z \in S_\alpha(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\hat{\alpha}(z)}(z_0), & si\ \hat{\alpha}(z) \leq \alpha,\ \forall m \geq 1. \\ S_{\hat{\alpha}(z)}(z_0), & si\ \hat{\alpha}(z) > \alpha,\ m = 2k+1 \\ S_\alpha(z_0), & si\ \hat{\alpha}(z) > \alpha,\ m = 2k. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$.

Pour la démonstration, on a besoin les deux Lemmes suivants

Lemme 3.6.

Si $z \in S_r(z_0)$, alors pour la fonction (3.4) on a

$$\mid f^n(z) - z_0 \mid_p = \psi_\alpha^n(r), \forall n \geq 1.$$

Pour la démonstration, on utilise la récurrence comme la preuve du Lemme 3.2.

Lemme 3.7.

Le système dynamique réel $(\psi_{\alpha,\delta}, \mathbb{R}_+)$ a les propriétés suivantes

I. $Fix(\psi_\alpha) = \{r,\ 0 \leq r < \alpha\} \cup \{\alpha,\ si\ \hat{\alpha} = \alpha\}$.

II. Si $r > \alpha$, alors $\psi_\alpha(r) = \alpha$.

III. Soit $r = \alpha$.

III.i) Si $\hat{\alpha} \leq \alpha$, alors $\psi_\alpha^n(r) = \hat{\alpha}$, pour tout $n \geq 1$.

III.ii) Si $\hat{\alpha} > \alpha$, alors

$$\psi_\alpha^n(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & si\ n = 2k \\ \hat{\alpha}, & si\ n = 2k+1. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 1$.

Preuve.

I. D'après la définition de ψ_α, on obtient

- Pour $r < \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = r$, donc $r \in Fix(\psi_\alpha)$.
- Pour $r = \alpha$ et $\hat{\alpha} = \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \hat{\alpha} = \alpha = r$, donc $r \in Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.
- Pour $r = \alpha$ et $\hat{\alpha} \neq \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \hat{\alpha} \neq \alpha = r$, donc $r \notin Fix(\varphi_{\alpha,\delta})$.

- Pour $r > \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \alpha \neq r$, donc $r \notin Fix(\psi_\alpha)$.

$II.$ D'après la définition de ψ_α et pour $r > \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \alpha$.

$III.$ Si $r = \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \hat{\alpha}$, donc

- Si $\hat{\alpha} \leq \alpha$, on a $\psi_\alpha(r) = \hat{\alpha}$. Ainsi pour tout $n \geq 1$, on a $\psi_\alpha^n(r) = \hat{\alpha}$.
- Sinon $\hat{\alpha} > \alpha$, on a $\psi_\alpha^1(\alpha) = \psi_\alpha^3(\alpha) = \cdots = \psi_\alpha^{2k+1}(\alpha) = \hat{\alpha}$ et $\psi_\alpha^2(\alpha) = \psi_\alpha^4(\alpha) = \cdots = \psi_\alpha^{2k}(\alpha) = \alpha$, d'où

$$\psi_\alpha^n(\alpha) = \begin{cases} \hat{\alpha}, \; si \; n = 2k+1 \\ \alpha, \; si \; n = 2k. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 1$.

C'est-à-dire, α et $\hat{\alpha}$ sont des points 2-périodiques pour ψ_α.

■

Preuve du Théorème 3.4.

$II.$ Soient $r > \alpha$ et $z \in S_r(z_0)$, alors d'après le Lemme 3.6 et la partie $(II.)$ du Lemme 3.7, on a

$$\mid f(z) - z_0 \mid_p = \psi_\alpha(r) = \alpha,$$

i.e., $f(z) \in S_\alpha(z_0)$.

$III.$ Soit $z \in S_\alpha(z_0) \setminus \mathcal{P}$, alors d'après le Lemme 3.6 et la partie $(III.)$ du Lemme 3.7, on a

$$f^m(z) \in \begin{cases} S_{\hat{\alpha}(z)}(z_0), & si \; \hat{\alpha}(z) \leq \alpha, \; \forall m \geq 1. \\ S_{\hat{\alpha}(z)}(z_0), & si \; \hat{\alpha}(z) > \alpha, \; m = 2k+1 \\ S_\alpha(z_0), & si \; \hat{\alpha}(z) > \alpha, \; m = 2k. \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 0$.

$I.$ $I.i)$ D'une part, d'après le Lemme 3.6 et la partie $(I.)$ du Lemme 3.7, pour $r < \alpha$ et $z \in S_r(z_0)$, on a $\mid f^n(z) - z \mid_p = \psi^n(r)$ $(i.e., f^n(z) \in S_r(z_0)$, donc $B_\alpha(z_0) \subset SI(z_0))$. Car $B_r(z_0)$ est une boule de Siegel, et $S_r(z_0)$ est une sphère invariante de f, pour tout $r < \alpha$.

D'autre part, d'après les parties $(II.)$ et $(III.)$ de ce théorème, on a si $r \geq \alpha$, alors $S_r(z_0)$ n'est pas invariante, donc $SI(z_0) \subset B_\alpha(z_0)$. D'où $SI(z_0) = B_\alpha(z_0)$.

I.ii) Comme $\mid z_0 - z_1 \mid_p = \mid z_0 - z_2 \mid_p = \alpha$, on a $z_{1,2} \notin B_\alpha(z_0)$. De plus $f(B_\alpha(z_0)) \subset B_\alpha(z_0)$, d'où

$$B_\alpha(z_0) \cap \mathcal{P} = \{z \in B_\alpha(z_0),\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^n(z) \in \{z_1, z_2\}\} = \emptyset.$$

■

Exemple 3.1.

Soit le système dynamique p-adique discret $(f, \mathbb{C}_p)$ où f est définie par

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{z^2 + 3z + 2}, \tag{3.7}$$

où $z \neq z_{1,2} = \{-1, -2\}$.

D'après le Lemme 3.3, on a $z_0 = 0$ est le seul point fixe de f. Ainsi z_0 est indifférent, car $f'(0) = 1$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $z \neq z_{1,2}$, on a

$$\mid f(z) \mid_p = \mid z \mid_p \cdot \frac{\mid 3z + 2 \mid_p}{\mid z + 1 \mid_p \mid z + 2 \mid_p},$$

où

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}_p, \exists n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in \{-1, -2\}\},$$

$$\delta = |3|_p \ ,\ \alpha = \mid -1 \mid_p \ \text{ et } \beta = \mid -2 \mid_p .$$

1) ***Dans*** $\mathbb{C}_3$ ***:*** *on a, $\alpha = \beta = 1$ et $\delta = \frac{1}{3} < \alpha$, alors le système dynamique 3-adique associé à la fonction (3.7) est lié au système dynamique réel associé à la fonction $\varphi_{1,\frac{1}{3}}$. D'après le Théorème 3.1, on a les résultats suivants*

- *$SI(0) = B_1(0)$ et $\mathcal{P} \subset S_1(0)$.*
- *Pour $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $r = |z|_3 = |\frac{1}{\sqrt{3}}|_3 = \sqrt{3}$. Comme $1 < \sqrt{3} < 3$, alors $z \in S_{\sqrt{3}}(0)$ et $\{f^n(z), n \geq 1\} \subset S_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(0)$.*
- *Pour $z = \frac{1}{\sqrt{9}}$, on a $r = |z|_3 = 9 > 3$, donc $z \in S_9(0)$ et $\{f^n(z), n \geq 1\} \subset S_{\frac{1}{3}}(0)$.*
- *Pour $z = 8$, on a $r = |z|_3 = 1$ et $|f(z)|_3 = 9 > 1$, donc $z \in S_1(0)$, $f(z) \in S_9(0)$ et $\forall m \geq 2$, $f^m(z) \in S_{\frac{1}{3}}(0)$.*

2) ***Dans*** $\mathbb{C}_5$ ***:*** *on a, $\alpha = \beta = \delta = 1$, alors le système dynamique 5-adique associé à la fonction (3.7) est lié au système dynamique réel associé à la fonction ψ_1. D'après le Théorème 3.4, on a*

- *$SI(0) = B_1(0)$ et $B_1(0) \cap \mathcal{P} = \emptyset$.*
- *Pour $z = \frac{1}{5}$, on a $r = |z|_5 = 5 > 1$, d'où $z \in S_5(0)$, alors $f(z) \in S_1(0)$.*

- *Pour* $z = 4$, *on a* $r = |z|_5 = 1$ *et* $|f(z)|_5 = 5 > 1$, *donc* $f^{2k}(z) \in S_1(0)$ *et* $f^{2k+1}(z) \in S_5(0)$, $\forall k \geq 0$.
- *Pour* $z = 6$, *on a* $r = |z|_5 = 1$ *et* $|f(z)|_5 = \frac{1}{5} < 1$, *donc* $f^k(z) \in S_{\frac{1}{5}}(0)$, $\forall k \geq 1$.

Après plusieurs tentatives, nous n'avons pas pu trouver un exemple pour le cas $\alpha < \delta$, où le seul point fixe de f est $z_0 = 0$.

Conclusion 3.1.

Soit le système dynamique p-adique $(f, \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{P})$ *où* f *est définie par* (3.4). *Si* $z_0 = 0$ *est le seul point fixe de* f, *alors*

$$f(z) = \frac{az^2 + bz}{z^2 + az + b}, \quad \text{où } z \neq z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

De plus, si $\alpha = \beta$, *alors* $\delta \leq \alpha$.

En effet

Supposons que $\alpha = \beta$, alors si $\alpha < \delta$, on a

$$\alpha = \mid z_1 \mid_p < \delta = \mid z_1 + z_2 \mid_p \leq \max\{\alpha, \beta\} = \alpha.$$

C'est une contradiction.

Bibliographie

[1] **Y. Amice** *Les nombres p-adiques.* Presses Universitaires de France, Collection SUP, "Le mathématicien", (1975).

[2] **J.P. Bézivin**, *Dynamique des fractions rationnelles p-adiques*, Cours DEA de mathématique, Université de Caen, (23 Mai 2005).

[3] **A. Désilles.** *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret.* 24 septembre 2003.

[4] **B. Diarra.** *Analyse p-adique.* Cours de DEA - Algèbre commutative FAST - Université du Mali Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[5] **S. N. Elaydi.** *Discrete chaos : with applications in science and engineering.* CRC press, 2007.

[6] **A. Escassut.** *Analytic Elements in p-adique Analysis.* World scientific publushing (1995).

[7] **S. Katok.** *Real and p-adic analysis.* Course notes for MATH 497C MASS Program, FALL 2000 Revised, Novembre 2001.

[8] **G. C. Layek.** *An introduction to dynamical systems and chaos.* Vol. 449. New Delhi : Springer, 2015.

[9] **C. Pierre.** *"Les nombres p-adiques, notes du cours de M2."* Cours en ligne.

[10] **U. A. Rozikov and I. A. Sattarov.** *p-adic dynamical systems of* $(2, 2)$*-rational functions with unique fixed point.* Chaos Solit. Fract. 105, 260 - 270(2017).

[11] **U. A. Rozikov and I. A. Sattarov.** *"Dynamical systems of the p-adic* $(2, 2)$*-rational functions with two fixed points."* Results in Mathematics 75.3 (2020) : 100.

[12] **I. Sattarov.** *"p-Adic* $(3, 2)$*-rational dynamical systems with three fixed points."* arXiv preprint arXiv :1909.00335 (2019).