République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de série :

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Quelques théorèmes de point fixe dans un espace b-métrique

Présenté par : Marwa Samer

Devant le jury :

Président	Dalila Azzam-Laouir	Prof. Université de Jijel
Encadreur	Nora Fetouci	MCB. Université de Jijel
Examinateur	Bilal Saoudi	MCB. Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

Je remercie en premier lieu ***«Allah»*** *de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.*

Je tiens à remercier ma ***directrice*** *de mémoire madame* ***«Fetouci Nora»*** *pour sa patience, sa disponibilité et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.*

Je voudrais également remercier les membres de jury, le ***professeur*** *madame* ***«Azzam Dalila»*** *et* ***l'examinateur*** *Mr* ***«Saoudi Bilal»*** *pour avoir accepté d'évaluer ce travail, et à tous les professeurs du département de mathématique de l'université de Jijel qui ont contribué à notre formation.*

Je dédie ce travail marquant de ma vie à la mémoire de ma mère disparue trop tôt «Allah yrahmek mama».

A mon père la lumière de mes jours, la source de mes efforts, ma vie et mon bonheur qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que dieu le garde et le protège.

A ma tante ***«Nora»*** *et mes adorables sœurs* ***«Chahla» «Ikram» «Manar»****.*

Table des matières

Introduction

La théorie du point fixe a provoqué de grands effets sur le développement de nombreuses disciplines mathématiques, associées à des problèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle. Cette théorie joue un rôle capital aussi bien en analyse linéaire qu'en analyse non linéaire à cause de ses applications importantes dans la théorie des jeux, en économie, en analyse numérique, en biologie... etc.

En 1922, dans le cadre de ses travaux sur la résolution d'équations intégrales, le mathématicien polonais Stefan Banach a établi le théorème du point fixe qui porte son nom ou connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach, qui est un outil important en théorie des espaces métriques et en analyse en général. C'est un théorème très fort qui sous certaines conditions, ne donne pas seulement l'existence du point fixe, mais aussi l'unicité et même une méthode itérative pour le déterminer.

En 1969, S. B. Nadler a étendu le principe de contraction de Banach aux applications multivoques. Les applications multivoques, aussi appelées applications multivaluées ou simplement multi-applications sont des applications dont l'image est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. L'intérêt de ce type d'applications s'est révélé important dans la résolution des problèmes émergeant dans divers domaines comme : la théorie du contrôle, l'économie, la biologie...etc.

En 1989, I. A. Bakhtin a introduit le concept d'espace b-métrique, en 1993 S. Czerwik a développé les résultats des espaces b-métriques en vue de généraliser le théorème des contractions de Banach. Par la suite, plusieurs résultats d'existence et d'unicité du point fixe ont été obtenus, parmi les divers résultats publiés, on peut se référer en particulier à [1, 2, 4, 5, 7, 9, 12].

Un autre type des points fixes qui a connu plusieurs extensions aux espaces b-métriques, c'est ce qu'on appelle point fixe commun pour une paire d'applications. La preuve de l'existence et d'unicité pour ce type de point fixe repose essentiellement sur des propriétés de commutativité, compatibilité et de compatibilité faible pour une paire d'applications qui a été introduit par Jungck [8].

Pour élaborer ce mémoire, nous avons étudié plusieurs articles. On va essayer de détailler l'essentiel de leurs contenus de ces articles.

Le premier chapitre sera consacré à quelques définitions et notions de base nécessaires pour la compréhension du reste de notre travail, aussi les définitions et les théorèmes importants qui sont des théorèmes de point fixe dans l'espace métrique. Une partie de ce chapitre sera consacrée à la notion des espaces b-métriques, où nous discuterons toutes les définitions, et donnerons quelques exemples ainsi que quelques propriétés topologiques de ces espaces.
Dans le deuxième chapitre nous démontrons des théorèmes du point fixe dont des types de Banach, Kannan, Chaterjea et d'autres théorèmes, nous terminerons le chapitre par une application à la résolution d'un problème de Cauchy du premier ordre.
Nous présenterons dans le dernier chapitre, des résultats d'existence du point fixe commun et multivoque.

Notations

- $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$: L'ensemble des nombres réels positifs.
- (X, d) : Désigne un espace métrique où d est la distance associée.
- (X, d, s) : L'espace b-métrique.
- $d(x, y)$: La distance entre x et y.
- $B(x, r)$: La boule ouverte de centre x et de rayon r.
- τ_d : La famille de tous les sous-ensembles ouverts de X.
- $C(I)$: L'ensemble de toutes les fonctions continues sur I.
- 2^X : L'ensemble des parties de X.
- $\mathfrak{CB}(X)$: La famille de tous les sous-ensembles bornés et fermés.
- $H(A, B)$: La distance de Hausdorff.
- $\delta(A, B)$: L'écart de A sur B.
- $\bar{A}$: L'adhérence de A.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés sur l'espace métrique et l'espace b-métrique, puis on présente quelques théorèmes qui nous aideront à travailler dans les autres chapitres, en outre des remarques et des lemmes importants que nous avons utilisés dans les preuves.

1.1 Rappel de quelques notions de base

Définition 1.1. ***"Espace métrique"*** *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$ *(Relation de symétrie).*

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(Inégalité triangulaire).*

On appelle espace métrique tout ensemble non vide X muni d'une distance d et on le note (X, d).

Définition 1.2. ***"Suite convergente"*** *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un espace métrique (X, d) converge ou tend vers un point $x \in X$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0 : d\left(x_n, x\right) < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x\right) = 0.$$

On dit aussi que x est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $x_n \to x$ où $(\lim_{n\to\infty} x_n = x)$.

Définition 1.3. ***"Suite de Cauchy"*** *Une suite (x_n) dans un espace métrique (X, d) est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p > q \geqslant n \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$\lim_{p,q \to +\infty} d(x_p, x_q) = 0.$$

Proposition 1.1. *Toute suite convergente est de Cauchy, l'inverse est généralement faux.*

Définition 1.4. ***"Continuité"*** *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $x_0 \in E$. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est continue au point x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Définition 1.5. ***"Semi-continuité supérieure"*** *Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.*
$\star$ *On dit que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.en abrégé) au point x_0, si*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Définition 1.6. ***"Semi-continuité inférieure"*** *Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction.*
$\star$ *On dit que f est semi-continue inférieurement (s.c.i.en abrégé) au point x_0, si*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Définition 1.7. ***"Espace métrique complet"*** *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Définition 1.8. *Soit (X, d) un espace métrique, on appelle topologie associée à d la famille d'ensemble $\mathcal{T}_d$ définie par*

$$\mathcal{T}_d = \{A \subset X, \forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Définition 1.9. ***"Espace topologique métrisable"*** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit métrisable s'il existe une distance d sur X pour laquelle $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*
Où $\mathcal{T}_d$ est appelée la topologie associée à la distance d.

Pour plus de détails sur les espaces métriques voir [13].

1.2 Quelques théorèmes classiques du point fixe

Définition 1.10. *[9] Soit X un ensemble non vide et $T : X \longrightarrow X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de T si $T(x) = x$, et on note par FT ou $Fix(T)$ l'ensemble de tous les points fixes de T.*

Définition 1.11. *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite :*

1. ***Lipschitzienne*** *s'il existe une constante $k \geqslant 0$, tel que pour tous $x, y \in X$, on a*
$$d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y).$$
2. ***Contractante*** *s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in X$, on a*
$$d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y).$$
3. ***Contractive*** *si et seulement si pour tous $x, y \in X$, on a :*
$$d(Tx, Ty) \leqslant d(x, y).$$

Théorème 1.1. ***"Point fixe de Banach"*** *[9] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une contraction, alors T admet un point fixe unique.*

Théorème 1.2. ***"Point fixe de Kannan"*** *[9] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition suivante :*
$$d(Tx, Ty) \leqslant a[d(x, Tx) + d(y, Ty)].$$
où $a \in [0, \frac{1}{2}[$ et $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique.

Théorème 1.3. ***"Point fixe de Chatterjea"*** *[9] Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition :*
$$d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Ty) + d(y, Tx)].$$
où $b \in [0, \frac{1}{2}[$ et $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique.

Définition 1.12. *[12] Soit (X, d) un espace métrique, une application $T : X \to X$ est appelée contraction généralisée si et seulement si pour tous $x, y \in X$ il existe c_1, c_2, c_3, c_4 tel que $c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 < 1$ et,*
$$d(Tx, Ty) \leqslant c_1 d(x, y) + c_2 d(x, Tx) + c_3 d(y, Ty) + c_4[d(x, Ty) + d(y, Tx)].$$

Définition 1.13. *[12] Soit (X, d) un espace métrique, une application $T : X \to X$ est appelée contraction de Ćirić si et seulement si pour tous $x, y \in X$ il existe $h < 1$ tel que*
$$d(Tx, Ty) \leq h.max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}.$$

1.3 Espace b-métrique

Définition 1.14. *[9] Soit X un ensemble non vide et soit $s \geqslant 1$ un nombre réel donné. Une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est appelée une b-métrique si les conditions suivantes sont vérifiées pour tous $x, y, z \in X$:*

(i) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leqslant s[d(x, y) + d(y, z)]$ *(Inégalité triangulaire s-relaxée).*

Le triplet (X, d, s) est appelé un espace b-métrique.

Remarque 1.1. *Un espace métrique est un espace b-métrique pour $s = 1$.*

Exemple 1.1. *Si (X, d) est un espace métrique et $\beta \geqslant 1$, alors d^β est une b-métrique avec $s = 2^\beta$, car $\forall x, y, z \in X$*

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$$

$$\begin{aligned} d^\beta(x, y) &\leqslant [d(x, z) + d(z, y)]^\beta \\ &\leqslant 2^\beta[max(d(x, z), d(z, y))]^\beta \\ &\leqslant 2^\beta[d^\beta(x, z) + d^\beta(z, y)]. \end{aligned}$$

Exemple 1.2. *Soit $X = l_p(\mathbb{R})$ avec $0 < p < 1$ tel que*

$$l_p(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

et soit la fonction $d : l_p(\mathbb{R}) \times l_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in l_p(\mathbb{R})$.
Alors $(l_p(\mathbb{R}), d, 2^{\frac{1}{p}-1})$ est un espace b-métrique.
On a

$$\begin{aligned} d^p(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|)^p \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - z_n|^p + \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n - y_n|^p. \end{aligned}$$

Alors, comme la fonction $x \mapsto x^p$ *avec* $p > 1$, $x \geqslant 0$ *est convexe, on obtient*

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - z_n|^p + \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2^{\frac{1}{p}-1} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - z_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &= 2^{\frac{1}{p}-1}(d(x,z) + d(z,y)). \end{aligned}$$

1.4 Topologie d'un espace b-métrique

1.4.1 Boules - Ensembles ouverts

Définition 1.15. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique :*

1) La boule ouverte de centre $x \in X$ *et de rayon* $r > 0$ *notée* $B(x, r)$ *est donnée par :*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

2) Un sous-ensemble Y *de* X *est appelé ouvert si pour chaque* $x \in Y$ *il existe* $r_x > 0$ *tel que* $B(x, r_x) \subseteq Y$, *où* $B(x, r_x)$ *est une boule ouverte, et on note par* τ_d *ou* $\tau(d)$ *la famille de tous les sous-ensembles ouverts de* X.

3) L'ensemble τ_d *satisfait aux axiomes d'une topologie, cette topologie est induite par une partie* U_d *ayant comme base, la famille*

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

U_d *admet une base dénombrable* $\{U_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, *alors en appliquant le théorème de métrisabilité de A. H. Frink [6] on déduit que* U_d *est induite par une métrique* ρ, *il s'ensuit que* τ_d *l'est également, ce qui prouve que* (X, d, s) *est métrisable.*

• *Une autre méthode pour démonter la métrisabilité de l'espace* (X, d, s), *fait appel au théorème suivant :*

Théorème 1.4. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique, pour* $0 < p \leqslant 1$ *on définit*

$$\rho_p(x, y) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)^p \right\}. \tag{1.1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ *et chaque* $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$ *la fonction* ρ *définie par* (1.1) *satisfaisant les conditions :*

(1) $\rho_p(x,y) = \rho_p(y,x)$.

(2) $\rho_p(x,y) \leqslant \rho_p(x,z) + \rho_p(z,y)$.

(3) $d^p(x,y) \leqslant \rho_p(x,y)$.

pour tous $x, y, z \in X$.

Théorème 1.5. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique sur un ensemble non vide* X *satisfaisant l'inégalité triangulaire s-relaxée pour* $s \geqslant 1$*, si* $p \in]0,1]$ *est donné par l'équation* $(2s)^p = 2$*, alors la fonction* $\rho_p : X \times X \to [0, +\infty[$ *est une métrique sur* X *satisfaisait l'inégalité*

$$\rho_p(x,y) \leqslant d^p(x,y) \leqslant 2\rho_p(x,y). \tag{1.2}$$

pour tous $x, y \in X$.

L'inégalité (1.2) *nous donne les conséquences suivantes.*

Corollaire 1.1. *[3] Sous les hypothèses du Théorème* 1.5*,* $\tau_d = \tau_\rho$ *i.e, la topologie de tout espace b-métrique est métrisable, et la convergence des suites par rapport à* τ_d *est caractérisée par*

$$x_n \xrightarrow{\tau_d} x \Longleftrightarrow d(x, x_n) \longrightarrow 0.$$

pour toute suite $(x_n)_n$ *dans* X *et* $x \in X$.

Définition 1.16. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique, une b-métrique est*

1) ***Continue*** *si :*

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0 \quad et \quad d(y_n, y) \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(x_n, y_n) \longrightarrow d(x,y).$$

2) ***Séparément continue*** *si la fonction* $d(x, .)$ *continue sur* X *pour tout* $x \in X$*, i.e,*

$$d(y_n, y) \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(x, y_n) \longrightarrow d(x,y).$$

pour toutes suites (x_n)*,* (y_n) *d'éléments de* X *et* $\forall x, y \in X$.

Remarque 1.2. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique :*

- ▷ *Les boules* $B(x,r)$ *ne sont pas nécessairement ouvertes.*
- ▷ *La distance b-métrique n'est pas nécessairement continue.*

Exemple 1.3. *[3] Soit* $X = \{0, 1, 2, ...\}$*, considérons un nombre fixé* $\varepsilon > 0$*, on définit* $d : X \times X \to [0, +\infty[$ *par*

$$d(0,1) = 1, \qquad d(0,m) = 1 + \varepsilon \qquad pour \quad m \geqslant 2$$

$$d(1, m) = \frac{1}{m}, \quad d(n, m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \quad \textit{pour} \quad n, m \geqslant 2$$

On étend alors d *sur* $X \times X$ *en posant* $d(n, n) = 0$ *pour tout* $n \geqslant 0$, *et* $d(n, m) = d(m, n)$ *alors*

$$d(k, n) \leqslant (1 + \varepsilon)(d(k, m) + d(m, n))$$

pour tous $k, n, m \in X$. *En effet*

1. *Si l'un des* k, n, m *est égal à* 0 *: alors,*

$$d(k, n) \leqslant (1 + \varepsilon)(d(k, m) + d(m, n)).$$

2. *Si* $k, n, m \neq 0$, *on distingue trois cas :*

   a) Si $k = 1$ *ou* $n = 1$ *:*

$$\begin{aligned} d(1, n) &= \frac{1}{n} \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{m}\right) \\ &= (1 + \varepsilon)(d(1, m) + d(m, n)). \end{aligned}$$

   b) Si $m = 1$ *:*

$$\begin{aligned} d(k, n) &= \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) \\ &= (1 + \varepsilon)(d(k, 1) + d(1, n)). \end{aligned}$$

   c) Si $k, n, m \neq 1$ *:*

$$\begin{aligned} d(k, n) &= \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \\ &\leqslant (1 + \varepsilon)\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right) \\ &= (1 + \varepsilon)(d(k, m) + d(m, n)). \end{aligned}$$

Alors d *est une b-métrique de constante* $s = 1 + \varepsilon$.
On a $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}) = \{0, 1\}$ *et la boule* $B(1, r)$ *contient une infinité de termes pour tout* $r > 0$, *ainsi* $B(1, r) \nsubseteq B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$, *ce qui montre que* $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$ *n'est pas ouverte.*

Remarque 1.3. *[3] Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique et* $x \in X$.
$B(x, r)$ *est* τ_d*-ouverte pour chaque* $r > 0$ *si et seulement si* $d(x, .)$ *est semi-continue*

supérieurement sur X.
Par conséquent si la b-métrique est séparément continue sur X*, alors les boules* $B(x,r)$ *sont* τ_d*-ouvertes.*

Remarque 1.4. *[3] Si pour tout* $0 < p < 1$*, une b-métrique* d *sur un ensemble* X *satisfait l'inégalité*

$$d(x,y)^p \leqslant d(x,z)^p + d(z,y)^p \quad \textit{pour tous} \quad x,y,z \in X.$$

Alors les boules correspondantes à d *sont* τ_d*-ouvertes. De plus, la b-métrique* d *est continue.*

1.4.2 Notions d'équivalence pour une b-métrique

Définition 1.17. *[3] Soient* d_1, d_2 *deux b-métriques sur le même ensemble* X. *Alors* d_1, d_2 *sont dites :*

1) *Topologiquement équivalentes si* $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.
2) *Uniformément équivalentes si l'application identité* I_x *sur* X *est uniformément continue de* (X, d_1, s_1) *à* (X, d_2, s_2) *ainsi que de* (X, d_2, s_2) *à* (X, d_1, s_1)*, tels que* $s_1, s_2 \geqslant 1$*, i.e,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0 \quad \textit{tel que} \quad d_1(x,y) \leqslant \sigma(\varepsilon) \Longrightarrow d_2(x,y) \leqslant \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma(\varepsilon) > 0 \quad \textit{tel que} \quad d_2(x,y) \leqslant \sigma(\varepsilon) \Longrightarrow d_1(x,y) \leqslant \varepsilon.$$

3) *Lipschitziennes équivalentes, s'il existe* $c_1, c_2 > 0$ *tels que*

$$c_1 d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant c_2 d_2(x,y).$$

pour tous $x, y \in X$.

1.4.3 Complétude d'un espace b-métrique

Nous allons maintenant présenter les notions de convergence, compacité, fermeture et complétude dans un espace b-métrique.

Définition 1.18. *Soit* (X, d, s) *un espace b-métrique. Alors une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* X *est dite :*

(i) ***Convergente :*** *s'il existe* $x \in X$ *tel que* $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ *quand* $n \to +\infty$.
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(ii) ***Cauchy*** *: si $d(x_n, x_m) \to 0$ quand $n, m \to +\infty$.*

Définition 1.19. *Soit (X, d, s) un espace b-métrique, un sous-ensemble $Y \subset X$ est :*

(i) ***Fermé :*** *si pour chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x, on a $x \in Y$.*

(ii) ***Compact*** *: si pour toute suite d'éléments de Y, il existe une sous-suite qui converge vers un élément de Y.*

Définition 1.20. *L'espace b-métrique est complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

1.5 Quelques notions d'analyse multivoque

Définition 1.21. *"* ***Multi-applications*** *" Soient X_1, X_2 deux ensembles non vides, on dit que F est une multi-application de X_1 dans X_2 si pour tout $x \in X_1$ elle associe un ensemble $F(x)$ de X_2, et on note*

$$\begin{aligned} F : X_1 &\rightrightarrows X_2 \\ x &\mapsto F(x). \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} F : X_1 &\to 2^{X_2} \\ x &\mapsto F(x). \end{aligned}$$

Définition 1.22. *Soit $F : X_1 \rightrightarrows X_2$ une multi-application*

∘ *Le domaine effectif de F : est noté $D(F)$ et est défini par*

$$D(F) = \{x \in X_1 : F(x) \neq \emptyset\}.$$

∘ *L'image de F : est notée $Im(F)$ et est définie par*

$$Im(F) = \bigcup_{x\in D(F)} F(x) = \{y \in X_2, \exists x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

∘ *Soit $A \subset X_1$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de X_2 défini par*

$$F(A) = \bigcup_{x\in A} F(x) = \{y \in X_2, \exists x \in A, y \in F(A)\}.$$

∘ *Le graphe de F : est noté $gph(F)$ et défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 : x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

∘ *On appelle sélection de F toute application univoque $f : X_1 \longrightarrow X_2$ vérifiant :*

$$f(x) \in F(x), \quad \forall x \in X_1.$$

∘ *La multi-application inverse*

$$\begin{aligned} F^{-1} : X_2 &\rightrightarrows X_1 \\ y &\mapsto F^{-1}(y) \end{aligned}$$

avec

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

Définition 1.23. *[1] Soit (X, d) un espace métrique, et soit $A, B \in \mathfrak{CB}(X)$. On appelle distance de Hausdorff entre A et B la fonction numérique $H(.,.)$ définie par*

$$H(A, B) = \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\},$$

où

$$\delta(A, B) = \sup\{d(a, B), \quad a \in A\}, \qquad \delta(B, A) = \sup\{d(b, A), \quad b \in B\}.$$

Avec

$$d(a, C) = \inf\{d(a, x), \quad x \in C\}, \quad C \in \mathfrak{CB}(X).$$

Lemme 1.1. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique, pour tous $A, B, C \in \mathfrak{CB}(X)$ et tous $x, y \in X$, on a :*

1. $d(x, B) \leqslant d(x, b)$ *pour tout* $b \in B$
2. $\delta(A, B) \leqslant H(A, B)$
3. $d(x, B) \leqslant H(A, B)$ *pour tout* $x \in A$
4. $H(A, A) = 0$
5. $H(A, B) = H(B, A)$
6. $H(A, C) \leqslant s(H(A, B) + H(B, C))$
7. $d(x, A) \leqslant s(d(x, y) + d(y, A))$

Démonstration. On peut vérifier aisément 1, 2, 3, 4 et 5.
Pour prouver l'inégalité 6, il faut montrer que :

$$\delta(A, B) \leqslant s(\delta(A, C) + \delta(C, B)).$$

Pour $x \in A$ et $y \in B$ on a,
$d(x,C) = \inf_{z\in C} d(x,z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists z_\varepsilon \in C, \quad d(x,C) \leqslant d(x,z_\varepsilon) < d(x,C) + \frac{\varepsilon}{s}$,
d'autre part

$$d(x,B) \leqslant d(x,y) \leqslant s(d(x,z_\varepsilon) + d(z_\varepsilon, y)),$$

alors

$$\begin{aligned}
d(x,B) &\leqslant s(d(x,C) + \frac{\varepsilon}{s} + d(z_\varepsilon,y)) \qquad \forall y \in B\\
d(x,B) &\leqslant s(d(x,C) + \inf_{y\in B} d(z_\varepsilon,y) + \frac{\varepsilon}{s})\\
d(x,B) &\leqslant s(d(x,C) + d(z_\varepsilon,B) + \frac{\varepsilon}{s})\\
d(x,B) &\leqslant s(d(x,C) + \sup_{z\in C} d(z,B) + \frac{\varepsilon}{s}) \qquad \text{car} \quad z_\varepsilon \in C\\
d(x,B) &\leqslant s(d(x,C) + \delta(C,B) + \frac{\varepsilon}{s}) \qquad \forall x \in A\\
\sup_{x\in A} d(x,B) &\leqslant s\left(\sup_{x\in A} d(x,C) + \delta(C,B) + \frac{\varepsilon}{s}\right)\\
\delta(A,B) &\leqslant s(\delta(A,C) + \delta(C,B) + \frac{\varepsilon}{s}),
\end{aligned}$$

ε étant choisi arbitrairement, il vient que

$$\delta(A,B) \leqslant s(\delta(A,C) + \delta(C,B)).$$

Maintenant, on montre que $H(A,C) \leqslant s(H(A,B) + H(B,C))$.
En effet,

$$\begin{aligned}
H(A,C) &= \max(\delta(A,C), \delta(C,A))\\
&\leqslant \max(s(\delta(A,B) + \delta(B,C)), s(\delta(C,B) + \delta(B,A)))\\
&\leqslant s[\max(\delta(A,B), \delta(B,A)) + \max(\delta(B,C), \delta(C,B))]\\
&= s(H(A,B) + H(B,C).
\end{aligned}$$

Montrons que $d(x,A) \leqslant s(d(x,y) + d(y,A))$, pour tous $x, y \in X$.
On a, pour tout $z \in A$

$$\begin{aligned}
d(x,A) &= \inf_{u\in A} d(x,u)\\
&\leqslant d(x,z)\\
&\leqslant s(d(x,y) + d(y,z)),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
d(x,A) &\leqslant s(d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z))\\
&\leqslant s(d(x,y) + d(y,A)).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique, soit A et B dans $\mathfrak{CB}(X)$. Alors pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $b \in B$ il existe $a \in A$ tel que*

$$d(a, b) \leqslant H(A, B) + \alpha.$$

Lemme 1.3. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique, pour $A \in \mathfrak{CB}(X)$ et $x \in X$, on a*

$$d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A} = A.$$

Définition 1.24. *Un point $x \in X$ est dit un point fixe de la multi-application $F : X \rightrightarrows X$ si $x \in Fx$.*

Définition 1.25. *[1] Soit (X, d) un espace métrique. La multi-application $F : X \to \mathfrak{CB}(X)$ est dite une q-quasi-contraction multivoque (où une quasi-contraction de constante q) s'il existe $0 \leqslant q < 1$ tel que pour tous $x, y \in X$,*

$$H(Fx, Fy) \leqslant q \max\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), d(x, Fy), d(y, Fx)\}.$$

Théorème 1.6. *[1] Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons que $F : X \to \mathfrak{CB}(X)$ est une q-quasi-contraction multivoque, et supposons que $q < \frac{1}{2}$, alors F a un point fixe dans X, c'est à dire qu'il existe $u \in X$ tel que $u \in Fu$.*

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe univoque dans un espace b-métrique

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats de la théorie du point fixe, on commence par le théorème de Banach pour les applications contractantes dans un espace b-métrique, on étudie ensuite ceux de Kannan, Chatterjea, ainsi que d'autre théorèmes qui sont considérés comme une généralisation des théorèmes du premier chapitre.

Enfin, on termine par une application à la résolution d'un problème de Cauchy. Nous avons détaillé les articles [4, 7, 9, 12].

Définition 2.1. *Soit X un ensemble quelconque et $T : X \longrightarrow X$ une application. Pour tout $x \in X$ on définit $T^n(x)$ par*

$$\begin{cases} T^0(x) = x, \\ T^{n+1}(x) = T(T^n(x)). \end{cases}$$

Pour chaque $x_0 \in X$, la suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ donnée par

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

est appelée la suite d'approximations successives avec la valeur initiale x_0. Elle est aussi connue sous le nom d'itération de Picard à partir de x_0.

Lemme 2.1. *[7] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet et $T : X \to X$ une application, supposons que la suite (x_n) donnée par (2.1) vérifie :*

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant kd(x_{n-1}, x_n), \tag{2.2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [0, 1[$, alors (x_n) est une suite de Cauchy dans X.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, et $x_{n+1} = Tx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on distingue trois cas :

Cas 1 : si $k \in [0, \frac{1}{s}[$.

Par hypothèse, on trouve :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leqslant kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{aligned}$$

continuant ce processus, on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1).$$

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $m > n$, on a par application de l'inégalité triangulaire s-relaxée

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqslant s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)] \\ &\leqslant sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + ... + s^m d(x_{n+m-1}, x_m) \\ &\leqslant sk^n d(x_0, x_1) + s^2 k^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + s^m k^{n+m-1} d(x_0, x_1) \\ &\leqslant (sk^n) d(x_0, x_1)[1 + (sk) + (sk)^2 + ... + (sk)^{m-1}] \\ &\leqslant (sk^n) d(x_0, x_1) \left[\frac{1 - (sk)^m}{1 - sk}\right] \\ &\leqslant d(x_0, x_1) \left[\frac{sk^n}{1 - sk}\right], \end{aligned}$$

quand $n, m \to +\infty$, on trouve

$$\lim_{n,m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

par conséquent, $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Cas 2 : si $k \in]\frac{1}{s}, 1[$.

Dans ce cas, on a $k^n \to 0$ quand $n \to \infty$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k^{n_0} < \frac{1}{s}$.

Ainsi d'après le premier cas on trouve

$$\{(T^{n_0})^n x_0\}_{n=0}^{\infty} := \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ..., x_{n_0+n}, ..\}.$$

Donc $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Cas 3 : si $s = 1$, alors d'après le premier cas on a

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_0, x_1) \left[\frac{k^n}{1 - k}\right],$$

passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n,m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy. ■

2.1 Contraction de Banach

Théorème 2.1. *[9] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet de constante $s \geqslant 1$ et $T : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors T admet un point fixe unique.*

Démonstration. **Existence** :
Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans X définie comme suit :

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1, 2, ...$$

On a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leqslant kd(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1 la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. La complétude de (X, d, s) assure l'existence d'un certain $u \in X$ tel que $(x_n)_n$ est convergente vers u.
$\star$ Passons à montrer que u est un point fixe de T.
Utilisant le fait que T est continue, il résulte que

$$Tu = \lim_{n\to+\infty} Tx_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = u.$$

Unicité :
$\star$ On montre que u est le point fixe unique de T.
Supposons que $v \neq u$ est un autre point fixe de T, alors on a $Tv = v$ et

$$d(u, v) = d(Tu, Tv) \leqslant kd(u, v)$$

ce qui donne

$$(1 - k)d(u, v) \leqslant 0,$$

et comme $k \in [0, 1[$, alors :

$$d(u, v) \leqslant 0,$$

ce qui contredit la définition de la b-métrique. Donc

$$d(u, v) = 0,$$

implique que $u = v$. Ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

2.2 Théorème du point fixe de Kannan

Théorème 2.2. *[9] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet de constante $s \geqslant 1$, et soit $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante, pour tous $x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \mu[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \tag{2.3}$$

où $\mu \in [0, \frac{1}{2}[$ et $s\mu < 1$. Alors, T admet un point fixe unique.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire et définissons la suite $(x_n)_n$ par :

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1, 2, ...$$

grâce à (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leqslant \mu[d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)] \\ &= \mu[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &= \mu d(x_{n-1}, x_n) + \mu d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

alors

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{\mu}{1-\mu} d(x_{n-1}, x_n),$$

où $\mu \in [0, \frac{1}{2}[$. On peut vérifier aisément que $\frac{\mu}{1-\mu} \in [0, 1[$. On en déduit d'après le Lemme 2.1 que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. Comme (X, d, s) est complet, il existe $u \in X$ tel que $x_n \to u$.

Par récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leqslant \frac{\mu}{1-\mu} d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ \vdots &\leqslant \qquad \vdots \\ &\leqslant \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n d(x_0, x_1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\star$ On montre que u est un point fixe de T.

En utilisant l'inégalité triangulaire s-relaxée on trouve :

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &\leqslant s[d(u,x_{n+1})+d(x_{n+1},Tu)] \\ &= sd(u,x_{n+1})+sd(Tx_n,Tu) \\ &\leqslant sd(u,x_{n+1})+s\mu[d(x_n,Tx_n)+d(u,Tu)] \\ &= sd(u,x_{n+1})+s\mu d(x_n,x_{n+1})+s\mu d(u,Tu), \end{aligned}$$

par suite

$$(1-s\mu)d(u,Tu) \leqslant sd(u,x_{n+1})+s\mu d(x_n,x_{n+1}),$$

d'où

$$d(u,Tu) \leqslant \frac{s}{1-s\mu}d(u,x_{n+1})+\frac{s\mu}{1-s\mu}d(x_n,x_{n+1}).$$

Grâce à (2.4), on obtient

$$d(u,Tu) \leqslant \frac{s}{1-s\mu}d(u,x_{n+1})+\left(\frac{s\mu}{1-s\mu}\right)\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n d(x_0,x_1),$$

en prenant la limite quand $n \to +\infty$, il résulte

$$d(u,Tu)=0,$$

ce qui donne

$$u=Tu.$$

Donc u est un point fixe de T.

$\star$ Pour prouver l'unicité, supposons que $v \neq u$ est un autre point fixe de T, c'est à dire $Tv=v$, alors par hypothèse

$$\begin{aligned} d(v,u) &= d(Tv,Tu) \\ &\leqslant \mu[d(v,Tv)+d(u,Tu)] \\ &= \mu d(v,v)+\mu d(u,u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $v=u$, ce qui montre que u est un point fixe unique. ■

2.3 Théorème du point fixe de Chatterjea

Théorème 2.3. *[9] Soit (X,d,s) un espace b-métrique complet et soit $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant la condition suivante :*

$$d(Tx,Ty) \leqslant \lambda[d(x,Ty)+d(y,Tx)], \tag{2.5}$$

pour tout $x,y \in X$, $s\lambda \in [0,\frac{1}{2}[$ et $s^2\lambda < 1$. Alors T admet un point fixe unique.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire et (x_n) une suite dans X définie par :

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \qquad n = 1, 2, ...$$

d'après (2.5) on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leqslant \lambda[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})] \\ &= \lambda[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\ &\leqslant s\lambda[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ &= s\lambda d(x_{n-1}, x_n) + s\lambda d(x_n, x_{n+1}), \end{aligned}$$

et par suite

$$(1 - s\lambda)d(x_n, x_{n+1}) \leqslant s\lambda d(x_{n-1}, x_n),$$

il s'ensuit que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{s\lambda}{1 - s\lambda} d(x_{n-1}, x_n).$$

Comme $s\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $\frac{s\lambda}{1-s\lambda} \in [0, 1[$. En vertu du Lemme 2.1, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. La complétude de (X, d, s) implique que $(x_n)_n$ est convergente vers $u \in X$.

$\star$ Montrons que u est un point fixe de T.

Par application de l'inégalité triangulaire s-relaxée, on a

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leqslant s[d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tu)] \\ &= sd(u, x_{n+1}) + sd(Tx_n, Tu) \\ &\leqslant sd(u, x_{n+1}) + s\lambda[d(x_n, Tu) + d(u, Tx_n)] \\ &= sd(u, x_{n+1}) + s\lambda d(x_n, Tu) + s\lambda d(u, x_{n+1}) \\ &\leqslant sd(u, x_{n+1}) + s^2\lambda[d(x_n, u) + d(u, Tu)] + s\lambda d(u, x_{n+1}) \\ &= sd(u, x_{n+1}) + s^2\lambda d(x_n, u) + s^2\lambda d(u, Tu) + s\lambda d(u, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Ce qui entraine

$$(1 - s^2\lambda)d(u, Tu) \leqslant s(1 + \lambda)d(u, x_{n+1}) + s^2\lambda d(x_n, u),$$

et par suite

$$d(u, Tu) \leqslant \frac{s(1 + \lambda)}{1 - s^2\lambda} d(u, x_{n+1}) + \frac{s^2\lambda}{1 - s^2\lambda} d(x_n, u).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve

$$d(u, Tu) \leqslant 0,$$

d'où

$$d(u,Tu)=0.$$

On en déduit que $Tu=u$.

$\star$ Pour montrer l'unicité, supposons que $v\neq u$ et $Tv=v$, alors

$$\begin{aligned}
d(v,u)&=d(Tv,Tu)\\
&\leqslant \lambda[d(v,Tu)+d(u,Tv)]\\
&\leqslant \lambda[d(v,u)+d(u,v)]\\
&=2\lambda d(v,u),
\end{aligned}$$

ce qui implique que $d(u,v)=0$, d'où $v=u$. ■

2.4 Autres théorèmes du point fixe

Théorème 2.4. *[12] Soit (X,d,s) un espace b-métrique complet de coefficient $s\geqslant 1$ et $T:X\longrightarrow X$ une application vérifiant la condition suivante :*

$$d(Tx,Ty)\leqslant \alpha d(x,y)+\beta d(x,Tx)+\gamma d(y,Ty)+\mu[d(x,Ty)+d(y,Tx)]. \tag{2.6}$$

$\forall x,y\in X$, où $\alpha,\beta,\gamma,\mu\geqslant 0$, avec

$$s\alpha+s\beta+\gamma+(s^2+s)\mu<1 \text{ et } s\gamma+s^2\mu<1.$$

Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire dans X, définissons la suite $(x_n)_n$ dans X par

$$x_0,x_1=Tx_0,x_2=Tx_1,......,x_{n+1}=Tx_n.$$

En utilisant la condition (2.6) on a :

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+1})&=d(Tx_{n-1},Tx_n)\\
&\leqslant \alpha d(x_{n-1},x_n)+\beta d(x_{n-1},Tx_{n-1})+\gamma d(x_n,Tx_n)+\mu[d(x_{n-1},Tx_n)+d(x_n,Tx_{n-1})]\\
&=\alpha d(x_{n-1},x_n)+\beta d(x_{n-1},x_n)+\gamma d(x_n,x_{n+1})+\mu[d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n)]\\
&\leqslant \alpha d(x_{n-1},x_n)+\beta d(x_{n-1},x_n)+\gamma d(x_n,x_{n+1})+\mu s d(x_{n-1},x_n)+\mu s d(x_n,x_{n+1})\\
&\leqslant (\alpha+\beta+s\mu)d(x_{n-1},x_n)+(\gamma+s\mu)d(x_n,x_{n+1}),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(1-(\gamma+s\mu))d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (\alpha+\beta+s\mu)d(x_{n-1},x_n),$$

donc, on trouve

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{\alpha+\beta+s\mu}{1-(\gamma+s\mu)}d(x_{n-1},x_n)$$
$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \lambda d(x_{n-1},x_n),$$

où

$$\lambda = \frac{\alpha+\beta+s\mu}{1-(\gamma+s\mu)} < 1.$$

On a $0<\lambda<1$ car

$$s\alpha+s\beta+\gamma+s^2\mu+s\mu<1,$$

donne

$$s(\alpha+\beta+s\mu)<1-(\gamma+s\mu),$$

il s'ensuit que

$$s<\frac{1-(\gamma+s\mu)}{\alpha+\beta+s\mu},$$

d'où

$$\frac{\alpha+\beta+s\mu}{1-(\gamma+s\mu)}<\frac{1}{s},$$

en vertu du Lemme 2.1, on peut dire que (x_n) est une suite de Cauchy dans un espace b-métrique complet, donc il existe $u\in X$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = u$.

$\star$ Maintenant, on passe à montrer que u est un point fixe de T.

On a

$$\begin{aligned}
d(u,Tu) &\leqslant s(d(u,Tx_n)+d(Tx_n,Tu))\\
&\leqslant sd(u,x_{n+1})+sd(Tx_n,Tu))\\
&\leqslant sd(u,x_{n+1})+s\alpha d(x_n,u)+s\beta d(x_n,Tx_n)+s\gamma d(u,Tu)+s\mu[d(x_n,Tu)+d(u,Tx_n)]\\
&\leqslant sd(u,x_{n+1})+s\alpha d(x_n,u)+s\beta\lambda^n d(x_0,x_1)+s\gamma d(u,Tu)+s^2\mu d(x_n,u)+s^2\mu d(u,Tu)\\
&+s\mu d(u,Tx_n),
\end{aligned}$$

alors

$$(1-s\gamma-s^2\mu)d(u,Tu) \leqslant sd(u,x_{n+1})+s\alpha d(x_n,u)+s\beta\lambda^n d(x_0,x_1)+s^2\mu d(x_n,u)+s\mu d(u,Tx_n),$$

par passage à la limite quand $n\to+\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} d(Tu,u)\leqslant 0.$$

Alors, $d(Tu, u) = 0$, i.e, Tu = u.

$\star$ Pour l'unicité de point fixe, supposons que $v \neq u$ est un autre point fixe de T.

On a par hypothèse

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &\leqslant \alpha d(u,v) + \beta d(u,Tu) + \gamma d(v,tv) + \mu[d(u,Tv) + d(v,Tu)] \\ &\leqslant \alpha d(u,v) + \beta d(u,u) + \gamma d(v,v) + \mu[d(u,v) + d(v,u)] \\ &\leqslant \alpha d(u,v) + 2\mu d(u,v) \\ &= (\alpha + 2\mu)d(u,v), \end{aligned}$$

alors

$$(1 - (\alpha + 2\mu))d(u,v) \leqslant 0,$$

comme $1 - (\alpha + 2\mu) > 0$ donc $d(u, v) = 0$, et par suite $u = v$. ■

Théorème 2.5. *[12] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet de coefficient $s \geqslant 1$ et $T : X \to X$ une application satisfaisant la condition*

$$d(Tx,Ty) \leqslant h \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2s}[d(x,Ty) + d(y,Tx)]\right\}. \tag{2.7}$$

$\forall x, y \in X$, où $h \in [0, 1[$ et $sh < 1$. Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire dans X, on définit une suite $(x_n)_n$ dans X par

$$x_0, x_1 = Tx_0, ..., x_{n+1} = Tx_n.$$

En utilisant (2.7) on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leqslant h \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n), \frac{1}{2s}[d(x_{n-1}, Tx_n) + d(x_n, Tx_{n-1})]\} \\ &= h \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2s}[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)]\} \\ &\leqslant h \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]\} \\ &= h \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]\}. \end{aligned}$$

• Si $d(x_{n-1}, x_n) < d(x_n, x_{n+1})$:

implique que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant hd(x_n, x_{n+1}),$$

qui est une contradiction, puisque $h \in [0,1[$.

• Si $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n)$:

d'où

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant hd(x_{n-1}, x_n),$$

d'après le Lemme 2.1, on obtient que (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace b-métrique complet X, donc il existe $u \in X$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = u$.

⋆ Nous allons montrer que u est un point fixe de T.

$$\begin{aligned} d(u,Tu) &\leqslant s(d(u,Tx_n) + d(Tx_n,Tu)) \\ &\leqslant sd(u,Tx_n) + sh\max\{d(x_n,u), d(x_n,Tx_n), d(u,Tu), \frac{1}{2s}[d(x_n,Tu) + d(u,Tx_n)]\} \\ &\leqslant sd(u,x_{n+1}) + sh\max\{d(x_n,u), h^n d(x_0,x_1), d(u,Tu), \frac{1}{2}[d(x_n,u) + d(u,Tu)] \\ &+ \frac{1}{2s}d(u,Tx_n)\}, \end{aligned}$$

en prenant la limite quand $n \to +\infty$, on obtient :

$$d(u,Tu) \leqslant shd(u,Tu),$$

c'est une contradiction puisque $sh < 1$, par conséquent $d(Tu,u) = 0$ c'est à dire $Tu = u$.

⋆ **L'unicité :** soit u et v deux points fixes différents de T.

Par application de (2.7), on a

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &\leqslant hmax\{d(u,v), d(u,Tu), d(v,Tv), \frac{1}{2s}[d(u,Tv) + d(v,Tu)]\} \\ &= hmax\{d(u,v), d(u,u), d(v,v), \frac{1}{2s}[d(u,v) + d(v,u)]\} \\ &\leqslant hmax\{d(u,v), \frac{1}{s}d(u,v)\} \\ &\leqslant hd(u,v), \end{aligned}$$

et par suite $d(u,v) = 0$ d'où $u = v$,

ce qui montre que u est le point fixe unique. ■

Théorème 2.6. *[4] Soit (X,d,s) un espace b-métrique complet, et soit $T : X \longrightarrow X$ une application satisfaisant :*

$$d(Tx,Ty) \leqslant \varphi(d(x,y)), \tag{2.8}$$

pour tous $x, y \in X$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(t) = 0,$$

pour chaque $t > 0$, *alors* T *admet un point fixe unique* u *et*

$$\lim_{n\to+\infty} d(T^n(x), u) = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, et pour tout $t > 0$

$$[\lim_{n\to+\infty} \varphi^n(t) = 0] \Longleftrightarrow [\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Rightarrow |\varphi^n(t) - 0| < \varepsilon].$$

Alors $\varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2s}$.

On pose $F = T^n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on met $x_k = F^k(x)$.

Alors pour tous $x, y \in X$, on a

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leqslant \varphi(d(x,y)) \\ d(T^2x, T^2y) &= d(T(Tx), T(Ty)) \\ &\leqslant \varphi(d(Tx, Ty)) \\ &\leqslant \varphi^2(d(x,y)). \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve

$$\begin{aligned} d(T^nx, T^ny) &= d(F(x), F(y)) \\ &\leqslant \varphi^n(d(x,y)), \end{aligned}$$

donc pour $k \in \mathbb{N}$

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(F^{k+1}(x), F^k(x)) \leqslant \varphi^{nk}(d(F(x), x)),$$

ainsi $\lim_{k\to+\infty} d(x_{k+1}, x_k) = 0$.

On prend $k \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{k+1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2s}$.

Alors pour tout $z \in B(x_k, \varepsilon) := \{y \in X, d(x_k, y) \leqslant \varepsilon\}$, on a

$$d(F(z), F(x_k)) \leqslant \varphi^n(d(z, x_k)) \leqslant \varphi^n(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2s},$$

et

$$d(F(x_k), x_k) = d(x_{k+1}, x_k) < \frac{\varepsilon}{2s}.$$

Par l'inégalité triangulaire s-relaxée on trouve

$$\begin{aligned} d(F(z), x_k) &\leqslant s[d(F(z), F(x_k)) + d(F(x_k), x_k)] \\ &\leqslant s\left[\frac{\varepsilon}{2s} + \frac{\varepsilon}{2s}\right] \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

donc F est définie sur $B(x_k, \varepsilon)$ dans elle même, par conséquent pour $m, s \geqslant k$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_s) &\leqslant s[d(x_m, x_k) + d(x_k, x_s)] \\ &\leqslant s(2\varepsilon), \end{aligned}$$

On en déduit que $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy. La complétude de X implique qu'il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = u$.
Aussi, la continuité de T entraine la continuité de F, alors

$$u = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} F(x_k) = F(u).$$

u est un point fixe de F.
Pour monter l'unicité, supposons que $v \neq u$ un autre point fixe de F, on a

$$d(u, v) = d(F(u), F(v)) \leqslant \varphi^n(d(u, v)) < d(u, v),$$

d'où l'unicité.
par la continuité de T on a

$$T(u) = \lim_{k\to+\infty} T(x_k) = \lim_{k\to+\infty} T(F^k(x)) = \lim_{k\to+\infty} F^k(T(x)) = u.$$

donc, u est un point fixe unique de T.
Il résulte que pour tout $x \in X$ et $r \in \{0, 1, ..., n-1\}$

$$T^{nk+r}(x) = F^k(T^r(x)) \longrightarrow u, \qquad k \to +\infty$$

d'où $\lim\limits_{m\to+\infty} T^m(x) = u$, pour tout $x \in X$. ∎

Théorème 2.7. *[4] Soit Z un espace topologique et (X, d, s) un espace b-métrique complet, soit $T : X \times Z \to X$ une application continue qui satisfait pour chaque $z \in Z$*

$$d[T(x, z), T(y, z)] \leqslant \alpha d(x, y), \tag{2.9}$$

pour tous $x, y \in X$, où $0 \leqslant \alpha < 1$.
Alors pour chaque $z \in Z$, il existe un unique point fixe $x(z)$ de $T(., z)$, i.e, $T(x(z), z) = x(z)$ et la fonction $z \mapsto x(z)$ est continue sur Z.

Démonstration. Définissons la suite T^n comme suit :

$$\begin{aligned} T^1(x, z) &= T(x, z) \\ T^2(x, z) &= T(T(x, z), z) \\ &\vdots \\ T^{n+1}(x, z) &= T(T^n(x, z), z) = T^n(T(x, z), z) \qquad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

D'après (2.9) On a :

$$d(T^1(x,z),T^1(y,z)) \leqslant \alpha d(x,y)$$

$$\begin{aligned} d(T^2(x,z),T^2(y,z)) &= d(T(T(x,z),z),T(T(y,z),z)) \\ &\leqslant \alpha^2 d(x,y) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$d(T^n(x,z),T^n(y,z)) \leqslant \alpha^n d(x,y).$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \alpha^n x \end{aligned}$$

Il est clair que φ est une fonction croissante, on prend n tel que $\alpha^n < \frac{1}{s}$, d'après le Théorème 2.6 pour tout $z \in Z$, $T^n(.,z)$ a exactement un point fixe $x(z)$ i.e, $T^n(x(z),z) = x(z)$.

Comme

$$T[x(z),z] = T[T^n(x(z),z),z] = T^n[T(x(z),z),z].$$

donc $T[x(z),z]$ est aussi un point fixe de $T^n(.,z)$.

d'où $T[x(z),z] = x(z)$, c-à-d $x(z)$ est un point fixe de T.

$\star$ Montrons que $z \mapsto x(z)$ est continue.

Soit $\varepsilon > 0$, la continuité de T implique celle de T^n.

Soit $z_2 \in Z$ un point arbitraire, il existe donc un voisinage U de z_2 tel que :

$$d[T^n(x(z_2),z_1),T^n(x(z_2),z_2)] \leqslant \varepsilon\frac{1}{s}(1-s\alpha^n) \qquad z_1 \in U.$$

Par conséquent, pour $z_1 \in U$ et par application de (2.9) et l'inégalité triangulaire s-relaxée on obtient

$$\begin{aligned} d(x(z_1),x(z_2)) &= d[T^n(x(z_1),z_1),T^n(x(z_2),z_2)] \\ &\leqslant s[d[T^n(x(z_1),z_1),T^n(x(z_2),z_1)] + d[T^n(x(z_2),z_1),T^n(x(z_2),z_2)]] \\ &\leqslant s\alpha^n d[x(z_1),x(z_2)] + \varepsilon(1-s\alpha^n), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(1-s\alpha^n)d(x(z_1),x(z_2)) \leqslant \varepsilon(1-s\alpha^n),$$

et par suite

$$d(x(z_1),x(z_2)) \leqslant \varepsilon.$$

d'où $z \mapsto x(z)$ est continue. ∎

Théorème 2.8. *[4] Soit α $:]0,\infty[\longrightarrow [0,\frac{1}{2}[$ une fonction décroissante, soit (X,d,s) un espace b-métrique complet et soit $T : X \longrightarrow X$ une application vérifiant*

$$d(T(x),T(z)) \leqslant \alpha[d(x,z)](d(x,T(x))+d(z,T(z))), \tag{2.10}$$

pour tout $x,z \in X$, $x \neq z$. Alors, si de plus T est continue où α est une fonction constante avec $s\alpha < 1$, alors T a un unique point fixe $u \in X$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(T^n(x),u) = 0$, pour chaque $x \in X$.

Démonstration. Soit (y_n) la suite définie par

$$y_n = d(T^n(x),T^{n+1}(x)), \qquad n = 1,2,.., \quad x \in X.$$

Supposons que $y_n \neq 0$, alors d'après (2.10),

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= d(T^{n+1}(x),T^{n+2}(x)) \\ &\leqslant \alpha(d(T^n(x),T^{n+1}(x))(d(T^n(x),T^{n+1}(x))+d(T^{n+1}(x),T^{n+2}(x))) \\ &= \alpha(y_n)(y_n+y_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2}(y_n+y_{n+1}), \end{aligned}$$

d'où

$$y_{n+1} < y_n,$$

donc (y_n) est une suite décroissante.

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, nous allons montrer que $y = 0$.

Supposons que $y > 0$, alors

$$\begin{aligned} y_{n+1} &\leqslant \alpha(y_n)(y_n+y_{n+1}) \\ &\leqslant \alpha(y)(y_n+y_{n+1}), \end{aligned}$$

en prenant la limite quand $n \to +\infty$, il résulte que

$$y \leqslant \alpha(y)(2y),$$

Ceci implique que

$$\alpha(y) \geqslant \frac{1}{2},$$

qui est une contradiction, puisque $\alpha(y) < \frac{1}{2}$. Alors $y = 0$.

Maintenant, nous allons montrer que $(T^n(x))_n$ est une suite de Cauchy.

pour tout $x \in X$, d'après (2.10) nous obtenons pour $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &= d(T(T^{n-1}(x)), T(T^{m-1}(x))) \\ &\leqslant \alpha(d(T^{n-1}(x), T^{m-1}(x))(d(T^{n-1}(x), T^n(x)) + d(T^{m-1}(x), T^m(x))) \\ &< \frac{1}{2}(d(T^{n-1}(x), T^n(x)) + d(T^{m-1}(x), T^m(x))) \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

alors, $(T^n(x))_n$ est une suite de Cauchy, il existe $u \in X$ tel que $T^n(x) \to u$.
On peut vérifier que $T(u) = u$.
En effet, si T est continue, alors d'après l'inégalité triangulaire s-relaxée on a :

$$\begin{aligned} d(u, T(u)) &\leqslant s(d(u, T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T(u))) \\ &= sd(u, T^{n+1}(x)) + sd(T(T^n(x)), Tu), \end{aligned}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leqslant sd(u, u) + sd(Tu, Tu) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $T(u) = u$.
D'autre part, si α est une constante, alors :

$$\begin{aligned} d(u, Tu) &\leqslant s(d(u, T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T(u))) \\ &\leqslant sd(u, T^{n+1}(x)) + s\alpha(d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(u, Tu)) \\ &\leqslant sd(u, T^{n+1}(x)) + s\alpha y_n + s\alpha d(u, Tu), \end{aligned}$$

par passage à la limite

$$d(u, Tu) \leqslant s\alpha d(u, Tu),$$

contradiction, car $s\alpha < 1$ donc $d(u, Tu) = 0$ c'est à dire $Tu = u$.
Enfin, pour prouver la dernière partie du théorème, supposons que

$$Tu_1 = u_1, \qquad Tu_2 = u_2 \qquad u_1, u_2 \in X$$

alors,

$$\begin{aligned} d(u_1, u_2) &= d(Tu_1, Tu_2) \\ &\leqslant \alpha(d(u_1, u_2))(d(u_1, Tu_1) + d(u_2, Tu_2)) \\ &\leqslant \alpha(d(u_1, u_2))(d(u_1, u_1) + d(u_2, u_2)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $u_1 = u_2$, ce qui prouve l'unicité du point fixe. $\blacksquare$

Théorème 2.9. *[7] Soit (X,d,s) un espace b-métrique complet de coefficient $s \geqslant 1$ et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tous $x, y \in X$*

$$d(Tx,Ty) \leqslant \lambda_1 d(x,y) + \lambda_2 \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)} + \lambda_3 \frac{d(x,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)} + \lambda_4 \frac{d(x,Tx)d(x,Ty)}{1+d(x,y)} \tag{2.11}$$
$$+ \lambda_5 \frac{d(y,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et λ_5 sont des constantes non négatives dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1.$$

Alors, T admet un unique point fixe dans X, et la suite $(T^n x)_n \in \mathbb{N}$ converge vers le point fixe.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire, on définit une suite itérative de Picard $(x_n)_n$ par :

$$x_{n+1} = Tx_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, alors

$$x_{n_0} = x_{n_0+1} = Tx_{n_0},$$

i.e, x_{n_0} est un point fixe de T.
Ensuite, supposons que $x_n \neq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de (2.9), on a :

$$\begin{aligned}
d(x_n,x_{n+1}) &= d(Tx_{n-1},Tx_n) \\
&\leqslant \lambda_1 d(x_{n-1},x_n) + \lambda_2 \frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_n,Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_3 \frac{d(x_{n-1},Tx_n)d(x_n,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&+ \lambda_4 \frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_{n-1},Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_5 \frac{d(x_n,Tx_n)d(x_n,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&= \lambda_1 d(x_{n-1},x_n) + \lambda_2 \frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_3 \frac{d(x_{n-1},x_{n+1})d(x_n,x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&+ \lambda_4 \frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_5 \frac{d(x_n,x_{n+1})d(x_n,x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&\leqslant \lambda_1 d(x_{n-1},x_n) + \lambda_2 d(x_n,x_{n+1}) + \lambda_4 d(x_{n-1},x_{n+1}) \\
&\leqslant \lambda_1 d(x_{n-1},x_n) + \lambda_2 d(x_n,x_{n+1}) + \lambda_4 s(d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,x_{n+1})),
\end{aligned}$$

et par suite

$$(1-\lambda_2 - s\lambda_4) d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (\lambda_1 + s\lambda_4) d(x_{n-1},x_n). \tag{2.12}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_n) &= d(Tx_n,Tx_{n-1}) \\
&\leqslant \lambda_1 d(x_n,x_{n-1}) + \lambda_2\frac{d(x_n,Tx_n)d(x_{n-1},Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_3\frac{d(x_n,Tx_{n-1})d(x_{n-1},Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&+ \lambda_4\frac{d(x_n,Tx_n)d(x_n,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_5\frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_{n-1},Tx_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&= \lambda_1 d(x_n,x_{n-1}) + \lambda_2\frac{d(x_n,x_{n+1})d(x_{n-1},x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_3\frac{d(x_n,x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&+ \lambda_4\frac{d(x_n,x_{n+1})d(x_n,x_n)}{1+d(x_{n-1},x_n)} + \lambda_5\frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)} \\
&\leqslant \lambda_1 d(x_n,x_{n-1}) + \lambda_2 d(x_n,x_{n+1}) + \lambda_5 s(d(x_{n-1},x_n)+d(x_n,x_{n+1})),
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$(1-\lambda_2-s\lambda_5)d(x_n,x_{n+1}) \leqslant (\lambda_1+s\lambda_5)d(x_{n-1},x_n). \tag{2.13}$$

Par l'addition (2.12) et (2.13) on obtient

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{2\lambda_1+s\lambda_4+s\lambda_5}{2-2\lambda_2-s\lambda_4-s\lambda_5}d(x_{n-1},x_n),$$

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \gamma d(x_{n-1},x_n),$$

où

$$\gamma = \frac{2\lambda_1+s\lambda_4+s\lambda_5}{2-2\lambda_2-s\lambda_4-s\lambda_5},$$

comme $0 \leqslant \gamma < 1$ (cela découle de la condition $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+s\lambda_4+s\lambda_5 < 1$), alors d'après le Lemme 2.1 la suite (x_n) est de Cauchy dans X, et comme (X,d,s) est complet, alors il existe un point $u \in X$ tel que $x_n \to u$ quand $n \to +\infty$.
D'après (2.9), il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
d(u,Tu) &\leqslant s(d(u,x_n)+d(x_n,Tu)) \\
&= s(d(u,x_n)+d(Tx_{n-1},Tu)) \\
&\leqslant sd(u,x_n) + s\lambda_1 d(x_{n-1},u) + s\lambda_2\frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(u,Tu)}{1+d(x_{n-1},u)} + s\lambda_3\frac{d(x_{n-1},Tu)d(u,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},u)} \\
&+ s\lambda_4\frac{d(x_{n-1},Tx_{n-1})d(x_{n-1},Tu)}{1+d(x_{n-1},u)} + s\lambda_5\frac{d(u,Tu)d(u,Tx_{n-1})}{1+d(x_{n-1},u)} \\
&= sd(u,x_n) + s\lambda_1 d(x_{n-1},u) + s\lambda_2\frac{d(x_{n-1},x_n)d(u,Tu)}{1+d(x_{n-1},u)} + s\lambda_3\frac{d(x_{n-1},Tu)d(u,x_n)}{1+d(x_{n-1},u)} \\
&+ s\lambda_4\frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},Tu)}{1+d(x_{n-1},u)} + s\lambda_5\frac{d(u,Tu)d(u,x_n)}{1+d(x_{n-1},u)},
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$

$$d(u,Tu) \leqslant 0,$$

d'où

$$d(u, Tu) = 0,$$

c'est à dire $Tu = u$, donc u est le point fixe de T.

Enfin, nous montrons l'unicité du point fixe. Supposons qu'il existe un autre point fixe $v \neq u$, alors par (2.9) on a

$$\begin{aligned} d(u,v) &= d(Tu,Tv) \\ &\leqslant \lambda_1 d(u,v) + \lambda_2 \frac{d(u,Tu)d(v,Tv)}{1+d(u,v)} + \lambda_3 \frac{d(u,Tv)d(v,Tu)}{1+d(u,v)} \\ &+ \lambda_4 \frac{d(u,Tu)d(u,Tv)}{1+d(u,v)} + \lambda_5 \frac{d(v,Tv)d(v,Tu)}{1+d(u,v)} \end{aligned}$$

$$d(u,v) \leqslant \lambda_1 d(u,v) + \lambda_3 d(u,v)$$

$$(1 - (\lambda_1 + \lambda_3)) d(u,v) \leqslant 0,$$

comme $0 < \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$, alors $0 < \lambda_2 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1 - (\lambda_1 + \lambda_3)$ donc $d(u,v) = 0$ implique que $u = v$. ■

2.5 Application à la résolution d'un problème de Cauchy

Dans cette section, nous appliquons le Théorème 2.9 à la résolution du problème de Cauchy du premier ordre suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

où $f : [t_0 - (\frac{1}{k})^{r-1}, t_0 + (\frac{1}{k})^{r-1}] \times [x_0 - \frac{k}{2}, x_0 + \frac{k}{2}] \to \mathbb{R}$ est une application continue et $k > 1, r > 2, t_0, x_0$ sont des constantes réelles.

Théorème 2.10. *[7] On considère le problème* (2.14) *et supposons que*

1. *$f(t,.)$ est une application lipschitzienne, i.e ;*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant k|x - y|, \tag{2.15}$$

pour tous $(t,x), (t,y) \in R$, où

$$R = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant (\frac{1}{k})^{r-1}, |x - x_0| \leqslant \frac{k}{2}\}.$$

2. f est bornée sur R, i.e ;

$$|f(t,x)| \leqslant \frac{k^r}{2} \qquad \forall (t,x) \in R. \tag{2.16}$$

Alors (2.14) admet une solution unique dans l'intervalle $I = [t_0 - (\frac{1}{k})^{r-1}, t_0 + (\frac{1}{k})^{r-1}]$, de plus, la solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_n(\tau))d\tau,$$

où

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0, \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau \quad (n = 1, 2, ...). \end{cases}$$

Démonstration. Soit $C(I)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues sur I, soit $X = \{x \in C(I) : |x(t) - x_0| \leqslant \frac{k}{2}\}$. On définit une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ par

$$d(x,y) = \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|^2. \tag{2.17}$$

On montre que $(C(I), d, s)$ est un espace b-métrique complet de constante s = 2.

1) • Soit $x, y \in X$. On a :

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Longleftrightarrow \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow |x(t) - y(t)| = 0 \quad \forall t \in I \\ &\Longleftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall t \in I \\ &\Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

• $d(x,y) = \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|^2 = \max_{t\in I} |y(t) - x(t)|^2 = d(y,x)$.

• Soit $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max_{t\in I} |x(t) - y(t)|^2 \\ &= \max_{t\in I} |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)|^2 \\ &\leqslant \max_{t\in I} (|x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|)^2 \\ &= \max_{t\in I} (|x(t) - z(t)|^2 + |z(t) - y(t)|^2 + 2|x(t) - z(t)||z(t) - y(t)|) \\ &\leqslant \max_{t\in I} (|x(t) - z(t)|^2 + |z(t) - y(t)|^2 + |x(t) - z(t)|^2 + |z(t) - y(t)|^2) \\ &= \max_{t\in I} (2|x(t) - z(t)|^2 + 2|z(t) - y(t)|^2) \\ &= 2(\max_{t\in I} |x(t) - z(t)|^2 + \max_{t\in I} |z(t) - y(t)|^2) \\ &= 2(d(x,z) + d(z,y)), \end{aligned}$$

on en déduit que d est une b-métrique de constante $s = 2$.

2) $(C(I), d, 2)$ est complet, on montre que toute suite de Cauchy d'éléments de $C(I)$ est convergente.

Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(C(I), d, 2)$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, tq \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \forall m > n \geqslant n_0,\ d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

et montrons que (x_n) est convergente.

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$d(x_n, x_m) = \max_{t \in I} |x_n(t) - x_m(t)|^2,$$

alors

$$|x_n(t) - x_m(t)|^2 \leqslant d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

ce qui implique que, $\forall t \in I$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \sqrt{\varepsilon},$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, tq : \forall n, m \in \mathbb{N},\ \forall m \geqslant n_0 \quad et \quad \forall t \in I, |x_n(t) - x_m(t)| < \sqrt{\varepsilon}. \tag{2.18}$$

Il s'ensuit que la suite $(x_n(t))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet, ce qui assure l'existence d'un nombre réel $x(t) \in \mathbb{R}$ tel que $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ dans $\mathbb{R}$.

Par passage à la limite quand $m \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité (2.18) il vient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad et \quad \forall t \in I, |x_n(t) - x(t)| < \sqrt{\varepsilon}$$

et par suite

$$\max_{t \in I} |x_n(t) - x(t)|^2 < \varepsilon,$$

alors

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Ce qui montre que (x_n) est convergente dans $(C(I), d, s)$.

Reste à montrer que x est continue, c'est à dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \text{si} \quad t_0 \in I \quad \text{et} \quad |t - t_0| < \delta, \quad \text{alors} \quad |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon.$$

Pour ce faire, on utilise la continuité de $(x_n)_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \delta > 0$, *tq si* $t_0 \in I$ et $|t - t_0| < \delta, |x_n(t) - x_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

On a

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &= |x(t) - x_n(t_0) + x_n(t_0) - x_n(t) + x_n(t) - x(t_0)| \\ &\leqslant |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où $x \in C(I)$, ce qui prouve que $(C(I), d, s)$ est un espace b-métrique complet.

En intégrant (2.14), on a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Par conséquent, trouver une solution de (2.14) équivaut à trouver un point fixe pour l'application $T : X \longrightarrow X$, définie par :

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad \forall t \in I. \tag{2.19}$$

$\star$ Montrons que T est bien définie.

Notons que si $\tau \in I$ alors $|\tau - t_0| \leqslant (\frac{1}{k})^{r-1}$, et $x \in X$ donc $|x(\tau) - x_0| \leqslant \frac{k}{2}$, d'où $(\tau, x(\tau)) \in R$. Comme f est continue sur R, alors l'intégrale (2.19) existe et T est bien définie pour tout $x \in X$.

D'autre part, d'après (2.16) et (2.19), on a pour tout $x \in X$ et $t \in I$,

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - x_0| &= |\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau))|d\tau \\
&\leqslant \frac{k^r}{2}|t - t_0| \\
&\leqslant \frac{k^r}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^{r-1} \\
&= \frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

On conclut que T est une application de X dans lui même.

$\star$ Montrons que T admet un point fixe unique.

En utilisant (2.15), (2.17) et (2.19), on obtient pour tous $x, y \in X$ et $t \in I$,

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)|^2 &= |\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))]d\tau|^2 \\
&\leqslant \left[\int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))|d\tau\right]^2 \\
&\leqslant \left[\int_{t_0}^{t} k|x(\tau) - y(\tau)|d\tau\right]^2 \\
&\leqslant k^2 \left[\int_{t_0}^{t} \max_{\tau \in I}|x(\tau) - y(\tau)|d\tau\right]^2 \\
&= k^2 \max_{\tau \in I}|x(\tau) - y(\tau)|^2 |t - t_0|^2 \\
&\leqslant k^2 d(x, y) \left(\frac{1}{k}\right)^{2r-2} \\
&= \left(\frac{1}{k}\right)^{2r-4} d(x, y),
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
|Tx(t)-Ty(t)|^2 &\leqslant \max|Tx(t)-Ty(t)|^2 \\
&= d(Tx,Ty) \\
&\leqslant \left(\frac{1}{k}\right)^{2r-4} d(x,y) \\
&\leqslant \lambda_1 d(x,y) + \lambda_2 \frac{d(x,Tx)d(y,Ty)}{1+d(x,y)} + \lambda_3 \frac{d(x,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)} + \lambda_4 \frac{d(x,Tx)d(x,Ty)}{1+d(x,y)} \\
&+ \lambda_5 \frac{d(y,Ty)d(y,Tx)}{1+d(x,y)}.
\end{aligned}$$

Où $\lambda_1 = \left(\frac{1}{k}\right)^{2r-4}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Comme $k > 1$ et $r > 2$ cela signifie que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$. Ainsi toutes les conditions du Théorème 2.9 sont satisfaites, alors T a un unique point fixe, c'est à dire qu'il existe une solution unique de (2.14).
Maintenant, en utilisant la méthode des approximations successives, nous prouvons l'unicité de la solution de (2.14). Pour cela on définit la suite (x_n) comme suit :

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0, \\ x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau. \end{cases} \tag{2.20}$$

Il est facile de voir :

$$x_{n-1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-2}(\tau))d\tau. \tag{2.21}$$

Combinant (2.20) et (2.21) en obtient :

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = \int_{t_0}^{t} \left[f(\tau, x_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x_{n-2}(\tau))\right] d\tau. \tag{2.22}$$

En posant :

$$\begin{cases} y_0(t) = x_0, \\ y_n(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t). \end{cases} \tag{2.23}$$

Alors,

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i(t),$$

en utilisant (2.15), (2.22) et (2.23), on a

$$\begin{aligned}
|y_n(t)| &= |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \\
&= \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x_{n-2}(\tau))| d\tau \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} k|x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)| \\
&= k\int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(\tau)|d\tau,
\end{aligned}$$

de plus, nous avons
$$|y_n(t)| \leqslant \frac{|x_0|k^n}{n!}|t-t_0|^n.$$
Par application du critère de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_0|k^n}{n!}|t-t_0|^n$ est convergente dans I, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)$ converge vers la fonction $x(t)$, c'est à dire $x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i(t)$ converge vers $x(t)$ quand $n \to +\infty$.

Dans la suite, nous montrons que $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$ est aussi une solution de (2.14), pour cette raison supposons que
$$x(t) = x_n(t) + \Delta_n(t), \tag{2.24}$$
il est clair que $\lim_{n\to+\infty} |\Delta_n(t)| = 0$, combinant (2.20) et (2.24), on trouve :
$$x(t) - \Delta_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau) - \Delta_{n-1}(\tau))d\tau.$$
donc
$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau = \Delta_n(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau) - \Delta_{n-1}(\tau))d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau,$$
de (2.15), on obtient
$$\begin{aligned} |x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau| &= |\Delta_n(t) + \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau) - \Delta_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))]|d\tau \\ &\leqslant |\Delta_n(t)| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau) - \Delta_{n-1}(\tau)) - f(\tau, x(\tau))|d\tau \\ &\leqslant |\Delta_n(t)| + \int_{t_0}^{t} k|x(\tau) - \Delta_{n-1}(\tau) - x(\tau)|d\tau \\ &\leqslant |\Delta_n(t)| + k\max_{\tau\in I}|\Delta_{n-1}(\tau)| \left(\frac{1}{k}\right)^{r-1}, \end{aligned} \tag{2.25}$$
par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ et le fait que $\lim_{n\to+\infty} |\Delta_n(t)| = 0$, on trouve :
$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau = 0,$$
soit
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$
Alors $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$ est une solution de l'équation (2.20), autrement dit, $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$ est la solution du problème de Cauchy.

Enfin, cherchons l'expression mathématique de la solution du problème de Cauchy.

Utilisant le fait que f est continue, on obtient
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \lim_{n\to+\infty} x(\tau))d\tau \\ &= x_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \end{aligned}$$
Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 3

Autres types des théorèmes du point fixe dans un espace b-métrique

Dans ce chapitre, nous vous proposons de découvrir le théorème du point fixe commun et du point fixe pour les applications multivoques définies sur un espace b-métrique.

3.1 Théorème du point fixe commun

Soit $\mathcal{B}_s$ la classe des fonctions, $\beta : [0, +\infty[\longrightarrow [0, \frac{1}{s}[$ ayant la propriété

$$\beta(t_n) \longrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{implique} \quad t_n \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

où $s > 1$.

Définition 3.1. ***"Point fixe commun"*** *Soient T et S deux applications d'un espace b-métrique (X, d, s) dans lui même. On appelle point fixe commun de T et S tout point $x \in X$ tel que $Tx = Sx = x$.*

Définition 3.2. *[10] Soient T et S deux applications d'un espace b-métrique (X, d, s) dans lui même. Si $y = Tx = Sx$ pour un certain x dans X, alors x est appelé un point de coïncidence de T et S.*

Définition 3.3. *[10] Les applications $T, S : X \longrightarrow X$ sont faiblement compatibles, si pour tout $x \in X$,*

$$T(Sx) = S(Tx) \quad \text{\textit{chaque fois que}} \quad Sx = Tx.$$

Proposition 3.1. *[10] Soient S et T deux applications faiblement compatibles de X dans lui même. Si S et T ont un unique point de coïncidence, alors x est un unique point fixe commun de S et T.*

Lemme 3.1. *[5] Soit (X, d, s) un espace b-métrique de coefficient $s \geqslant 1$, et $(x_n)_n$ une suite dans X vérifiant*

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{3.2}$$

Si (x_n) n'est pas de Cauchy, alors il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(m(k))$ et $(n(k))$ d'entiers positifs tels que les quatre suites suivantes :

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}), \quad d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}), \quad d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1})$$

vérifient :

$$\varepsilon \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant s\varepsilon \tag{3.3}$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leqslant s^2\varepsilon \tag{3.4}$$

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leqslant s^2\varepsilon \tag{3.5}$$

$$\frac{\varepsilon}{s^2} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leqslant s^3\varepsilon \tag{3.6}$$

Démonstration. [11] Supposons $(x_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy, alors il existe $\varepsilon > 0$ et deux suites $(m(k))$ et $(n(k))$ d'entiers positifs tels que

$$n(k) > m(k) > k, \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geqslant \varepsilon \quad et \quad d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon \tag{3.7}$$

pour tout entier positif k.

Maintenant, en utilisant (3.7) et l'inégalité triangulaire s-relaxée, nous avons

$$\begin{aligned} \varepsilon \leqslant d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant s[d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})] \\ &< s\varepsilon + sd(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}), \end{aligned}$$

en prenant les limites supérieure et inférieure quand $k \to +\infty$, de (3.2) nous obtenons

$$\varepsilon \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leqslant s\varepsilon. \tag{3.8}$$

En appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire s-relaxée, on trouve

$$\begin{aligned} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) &\leqslant s[d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})] \\ &< s^2[d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})] + sd(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}), \end{aligned}$$

par passage aux limites supérieure et inférieure quand $k \to +\infty$, et en utilisant (3.2) et (3.8), on trouve

$$\varepsilon \leqslant s \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leqslant s^3\varepsilon,$$

équivalent à

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \liminf_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leqslant \limsup_{n\to+\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leqslant s^2\varepsilon.$$

De la même façon, on démontre (3.5) et (3.6). ■

Théorème 3.1. *[5] Soit (X, d, s) un espace b-métrique et soient $f, g : X \to X$ deux applications vérifiant $f(X) \subseteq g(X)$, l'un de ces deux sous-ensembles de X étant complet. Si pour une fonction $\beta \in \mathcal{B}_s$*

$$d(fx, fy) \leqslant \beta(d(gx, gy))d(gx, gy), \tag{3.9}$$

pour tous $x, y \in X$, alors f et g admettent un unique point de coïncidence w. Si de plus f et g sont faiblement compatibles, alors ils ont un unique point fixe commun.

Démonstration. • Montrons que le point de coïncidence de f et g est unique (s'il existe). Supposons que w_1 et w_2 soient deux points de coïncidences distincts de f et g, il en résulte qu'il existe deux points u_1 et u_2 tels que :

$$fu_1 = gu_1 = w_1 \quad et \quad fu_2 = gu_2 = w_2,$$

alors (3.9) implique que

$$\begin{aligned} d(w_1, w_2) &= d(fu_1, fu_2) \\ &\leqslant \beta(d(gu_1, gu_2))d(gu_1, gu_2) \\ &= \beta(d(w_1, w_2))d(w_1, w_2) \\ &\leqslant \frac{1}{s}d(w_1, w_2) \\ &< d(w_1, w_2), \end{aligned}$$

contradiction, d'où l'unicité.

• On va prouver que f et g ont un point de coïncidence.

Soit x_0 un point arbitraire et en utilisant que $f(X) \subseteq g(X)$, choisissons les suites (x_n) et (y_n) dans X telles que :

$$y_n = fx_n = gx_{n+1} \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, ... \tag{3.10}$$

Si $y_{n_0} = y_{n_0+1}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, $gx_{n_0+1} = y_{n_0} = y_{n_0+1} = fx_{n_0+1}$ alors f et g ont un point de coïncidence.

Supposons que $y_n \neq y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en posant $x = x_{n+1}, y = x_n$ dans (3.9) on trouve

$$\begin{aligned}
d(y_{n+1}, y_n) &= d(fx_{n+1}, fx_n) \\
&\leqslant \beta(d(gx_{n+1}, gx_n))d(gx_{n+1}, gx_n) \\
&\leqslant \frac{1}{s} d(y_n, y_{n-1}),
\end{aligned}$$

puis poursuivons cette procédure, on aura

$$d(y_{n+1}, y_n) \leqslant \left(\frac{1}{s}\right)^n d(y_1, y_0),$$

par passage à la limite dans l'inégalité précédente

$$\lim_{n\to+\infty} d(y_{n+1}, y_n) = 0.$$

• Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy :

En vertu de Lemme 3.1, si $(y_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy, alors il existe $\varepsilon > 0$, et deux suites $(m(k))$ et $(n(k))$ d'entiers positifs tels que : $n(k) > m(k) > k$

$$d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) \geqslant \varepsilon \quad et \quad d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) < \varepsilon,$$

d'après (3.9) on a pour tout k positif

$$\begin{aligned}
d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)}) &= d(fx_{m(k)+1}, fx_{n(k)}) \\
&\leqslant \beta(d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)}))d(gx_{m(k)+1}, gx_{n(k)}) \\
&= \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}))d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) \\
&\leqslant \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}))\varepsilon,
\end{aligned}$$

alors :

$$\frac{d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)})}{\varepsilon} \leqslant \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})) < \frac{1}{s}. \tag{3.11}$$

Ainsi, grâce à (3.5) du Lemme 3.1 et (3.11) nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{s} < \liminf_{n\to+\infty} \frac{d(y_{m(k)+1}, y_{n(k)})}{\varepsilon} &\leqslant \liminf_{n\to+\infty} \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})) \\
&\leqslant \limsup_{n\to+\infty} \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})) \leqslant \frac{1}{s},
\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\lim_{k\to+\infty} \beta(d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1})) = \frac{1}{s},$$

on déduit que $d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) \to 0$ quand $k \to +\infty$.
D'après (3.3) du Lemme 3.1, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{s} \leqslant \frac{1}{s} d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) \leqslant d(y_{m(k)}, y_{n(k)-1}) + d(y_{n(k)-1}, y_{n(k)}),$$

implique que $d(y_{m(k)}, y_{n(k)}) \to 0$, alors la suite (y_n) est de Cauchy.
Maintenant, supposons par exemple que le sous espace $g(X)$ est complet (le cas de $f(X)$ est complet est similaire), alors (y_n) tend vers un certain $w \in g(X)$, c'est à dire $w = gz$ où $z \in X$.
Pour prouver que $fz = gz$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} d(fz, gz) &\leqslant d(fz, fx_n) + d(fx_n, gz) \\
&= d(fz, fx_n) + d(gx_{n+1}, gz) \\
&\leqslant \beta(d(gz, gx_n)) d(gz, gx_n) + d(gx_{n+1}, gz) \\
&< \frac{1}{s} d(gz, gx_n) + d(gx_{n+1}, gz) \\
&= \frac{1}{s} d(gz, y_{n-1}) + d(y_n, gz),
\end{aligned}$$

par passage à la limite

$$\lim_{n \to +\infty} d(fz, gz) = 0,$$

d'où $fz = gz = w$ est un unique point de coïncidence de f et g.
Si f et g sont faiblement compatibles, alors f et g ont un point fixe unique. ■

3.2 Théorème du point fixe pour des applications multivoques

Lemme 3.2. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique et $(y_n)_n$ une suite dans X vérifiant :*

$$d(y_{n+1}, y_{n+2}) \leqslant \gamma d(y_n, y_{n+1}) \qquad n = 0, 1, ...$$

où $0 \leqslant \gamma < 1$ et $s\gamma < 1$ alors, (y_n) est une suite de Cauchy dans X.

Définition 3.4. *Soit (X, d) un espace b-métrique, la multi-application à valeurs non vides $F : X \longrightarrow \mathfrak{CB}(X)$ est dite une q-quasi-contraction multivoque si pour tous $x, y \in X$*

$$H(Fx, Fy) \leqslant qM(x, y) \qquad 0 \leqslant q < 1 \tag{3.12}$$

et

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), d(x, Fy), d(y, Fx)\}.$$

Théorème 3.2. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique complet, supposons que F est une q-quasi-contraction multivoque, avec $q < \frac{1}{s^2+s}$ alors, F admet un point fixe dans X, c-à-d, il existe $u \in X$ tel que $u \in Fu$.*

Démonstration. Si $M(x, y) = 0$ alors $x = y$, est un point fixe de F.
Supposons que $M(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$.
Prenons

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+s} - q\right) \qquad et \qquad \beta = q + \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+s} + q\right).$$

On a par hypothèse $q < \frac{1}{s^2+s}$, alors $\varepsilon > 0$ et $0 < \beta < 1$.
Soit $x_0 \in X$ et $x_1 \in Fx_0$, d'après le Lemme 1.2, il existe $x_2 \in Fx_1$ tel que :

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leqslant H(Fx_0, Fx_1) + \varepsilon M(x_0, x_1) \\ &\leqslant qM(x_0, x_1) + \varepsilon M(x_0, x_1) \\ &\leqslant \beta M(x_0, x_1). \end{aligned}$$

De même, il existe $x_3 \in Fx_2$ tel que :

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leqslant H(Fx_1, Fx_2) + \varepsilon M(x_1, x_2) \\ &\leqslant qM(x_1, x_2) + \varepsilon M(x_1, x_2) \\ &= \beta M(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence il existe une suite (x_n) dans X vérifiant $x_{n+1} \in Fx_n$ et

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leqslant H(Fx_{n-1}, Fx_n) + \varepsilon M(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant qM(x_{n-1}, x_n) + \varepsilon M(x_{n-1}, x_n) \\ &= \beta M(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

On met $d_n = d(x_n, x_{n+1})$, alors

$$d_n = d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \beta M(x_{n-1}, x_n). \tag{3.13}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $d_{n_0} = 0$, $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ alors $x_{n_0} \in Fx_{n_0}$, la preuve est donc terminée.
Pour le reste, pour chaque n supposons que $d_n \neq 0$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} M(x_{n-1}, x_n) &= \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, Fx_{n-1}), d(x_n, Fx_n), d(x_{n-1}, Fx_n), d(x_n, Fx_{n-1})\} \\ &\leqslant \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_{n+1}), d(x_n, x_n)\} \\ &= \max\{d_{n-1}, d_{n-1}, d_n, d(x_{n-1}, x_{n+1})\} \\ &\leqslant \max\{d_{n-1}, d_n, s(d_{n-1} + d_n)\}. \end{aligned}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\max\{d_{n-1}, d_n, s(d_{n-1}+d_n)\} = d_n$, alors (3.13) devient : $d_n \leqslant \beta d_n$ qui est une contradiction puisque $0 < \beta < 1$.
On en déduit que

$$\max\{d_{n-1}, d_n, s(d_{n-1}+d_n)\} = \max\{d_{n-1}, s(d_{n-1}+d_n)\}.$$

Par conséquent, (3.13) devient :

$$d_n \leqslant \beta \max\{d_{n-1}, s(d_{n-1}+d_n)\}.$$

Soit $d_n \leqslant \beta d_{n-1}$ où $d_n \leqslant \frac{s\beta}{1-s\beta} d_{n-1}$. On pose $\gamma = \max\{\beta, \frac{s\beta}{1-s\beta}\}$,
d'où

$$d_n \leqslant \gamma d_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.14}$$

On a : $s\beta = \frac{s}{2}(\frac{1}{s^2+s} + q) \leqslant \frac{s}{2}(\frac{1}{s^2+s} + \frac{1}{s^2+s}) = \frac{s}{s^2+s} \leqslant \frac{1}{s+1} < 1$.

et $s^2 \frac{\beta}{1-s\beta} = \frac{\frac{s^2}{2}(\frac{1}{s^2+s}+q)}{1-s(\frac{1}{s^2+s}+q)} \leqslant \frac{s}{1+s} \times \frac{1+s}{s} = 1$.

De (3.14) et le Lemme 3.2, la suite (x_n) est une suite de Cauchy, et comme l'espace (X, d, s) est complet alors $\exists u \in X$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, u) = 0 \tag{3.15}$$

Montrons que u est un point fixe de F c'est à dire $u \in Fu$.
De (3.12), on a

$$H(Fx_n, Fu) \leqslant qM(x_n, u),$$

où

$$\begin{aligned} M(x_n,u) &= \max\{d(x_n,u), d(x_n,Fx_n), d(u,Fu), d(x_n,Fu), d(u,Fx_n)\} \\ &\leqslant \max\{d(x_n,u), d(x_n,x_{n+1}), d(u,Fu), d(x_n,Fu), d(u,x_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Par récurrence de (3.14) on peut écrire

$$d_n < \gamma^n d_0,$$

comme $\gamma < 1$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \tag{3.16}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire s-relaxée on a

$$d(x_{n+1}, u) \leqslant s(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, u)),$$

passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_{n+1}, u) = 0. \tag{3.17}$$

D'autre part on a

$$d(x_n, Fu) \leqslant s(d(x_n, u) + d(u, Fu)),$$

alors quand $n \to +\infty$

$$\limsup_{n \to +\infty} d(x_n, Fu) \leqslant sd(u, Fu), \tag{3.18}$$

utilisant (3.15)-(3.18), passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on trouve

$$\limsup_{n \to +\infty} M(x_n, u) \leqslant sd(u, Fu). \tag{3.19}$$

De plus, comme $x_{n+1} \in Fx_n$, donc d'après le Lemme 1.1 on a

$$d(x_{n+1}, Fu) \leqslant H(Fx_n, Fu).$$

De même

$$d(u, Fu) \leqslant s(d(u, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Fu)),$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} d(u, Fu) &\leqslant d(x_{n+1}, u) + d(x_{n+1}, Fu) \\
&\leqslant d(x_{n+1}, u) + H(Fx_n, Fu) \\
&\leqslant d(x_{n+1}, u) + qM(x_n, u),
\end{aligned}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$

$$\frac{1}{s} d(u, Fu) \leqslant qsd(u, Fu),$$

c'est à dire

$$d(u, Fu) \leqslant qs^2 d(u, Fu), \tag{3.20}$$

par suite

$$(1 - qs^2) d(u, Fu) \leqslant 0,$$

or $qs^2 < \frac{s}{1+s} < 1$ car $q < \frac{1}{s^2+s}$, il en résulte que $d(u, Fu) = 0$.
En vertu du Lemme 1.3 et du fait que Fu est fermé dans X, on déduit que $u \in Fu$.
Ce qui achève la démonstration. ■

Dans le cas où $F : X \longrightarrow X$ est une q-quasi-contraction univoque sur un espace b-métrique, on a le corollaire suivant (c'est une conséquence du Théorème 3.2).

Corollaire 3.1. *[1] Soit (X, d, s) un espace b-métrique et $T : X \longrightarrow X$, une application. Supposons qu'il existe $0 \leqslant q < 1$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leqslant q \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Supposons que $q < \frac{1}{s^2+s}$ alors T a un point fixe, c'est à dire qu'il existe $u \in X$ tel que $u = Tu$.

Démonstration. En appliquant le Théorème 3.2 et le fait que $H(Tx, Ty) = d(Tx, Ty)$ pour chaque $x, y \in X$. ■

Exemple 3.1. *[1] Soit $X = [0, 1]$ et $d(x, y) = |x - y|^2$ pour tous $x, y \in X$. il est évident que (X, d, s) est un espace b-métrique complet avec $s = 2$, de plus, d n'est pas une métrique sur X*

Définissons la multi-application $F : X \to \mathfrak{CB}(X)$ par

$$Fx = \begin{cases} \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} & si \quad 0 \leqslant x < 1, \\ \{\frac{1}{3}\} & si \quad x = 1. \end{cases}$$

Nous allons vérifier que (3.12) est satisfaite pour tous $x, y \in X$. Prenons $x \leqslant y$.

Si $x = y$ où $x, y \in [0, 1[$, alors $Fx = Fy$, d'où $H(Fx, Fy) = 0$, et (3.12) est vérifiée.

Sinon pour tout $x < y$

I) $0 \leqslant x < 1$ et $\quad y = 1$: on a

$$H(Fx, Fy) = \max(\delta(Fx, Fy), \delta(Fy, Fx)),$$

tel que

$$\delta(Fx, Fy) = \sup\{d(a, Fy), a \in Fx\}.$$

$$\delta(Fy, Fx) = \sup\{d(b, Fx), b \in Fy\}.$$

i) $a \in Fx \Longrightarrow a \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ alors

$$\begin{aligned} \delta(Fx, Fy) &= \sup\{d(\frac{1}{2}, Fy), d(\frac{1}{3}, Fy)\} \\ &= \sup\{d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), d(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\} \\ &= d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \\ &= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right|^2 \\ &= \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\delta(Fy, Fx) &= \sup\{d(b, Fx), b \in Fy\}\\ &= d(\frac{1}{3}, Fx)\\ &= \inf\{d(\frac{1}{3}, z), z \in Fx\}\\ &= \inf\{d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), d(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}\\ &= \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|^2\\ &= \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

II) $\quad 0 \leqslant x < 1 \quad$ *et* $\quad 0 \leqslant y < 1$

$$\delta(Fx, Fy) = \sup\{d(\frac{1}{2}, Fy), d(\frac{1}{3}, Fy)\}$$

i)

$$\begin{aligned}d(\frac{1}{2}, Fy) &= \inf\{d(\frac{1}{2}, z), z \in Fy\}\\ &= \inf\{d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}\\ &= \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|^2\\ &= \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}d(\frac{1}{3}, Fy) &= \inf\{d(\frac{1}{3}, z), z \in Fy\}\\ &= \inf\{d(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})\}\\ &= \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|^2\\ &= \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

et

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), d(x, Fy), d(y, Fx)\} = \frac{4}{9},$$

donc

$$H(Fx, Fy) = \frac{1}{36} \leqslant \frac{4}{63} = \frac{1}{7}.\frac{4}{9} = qd(y, Fy) \leqslant qM(x, y).$$

Où $q = \frac{1}{7} < \frac{1}{6} = \frac{1}{s^2+s}$, *on en déduit que* (3.12) *est vraie pour tous* $x, y \in X$. *Ainsi toutes les hypothèses du Théorème 3.2 sont satisfaites. Ici,* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{3}$ *sont les deux points fixes de* F.

CONCLUSION

Notre étude s'est intéressée à la théorie de point fixe dans des espaces b-métriques, cette théorie offre des outils pour la résolution de nombreux problèmes émergeant de divers domaines. On a commencé notre étude par la généralisation de quelques théorèmes classiques, on a démontré l'existence et l'unicité de point fixe pour des applications univoques, ainsi que l'une de ses applications les plus importantes à la résolution d'un problème de Cauchy du premier ordre. A la fin de notre étude, on a présenté des théorèmes de point fixe pour des applications multivoques et le point fixe commun.

Récemment, des auteurs ont introduit de nouvelles classes d'applications, citons entre-autres : les applications faiblement contractives, les applications contractives du type intégral...etc. D'autres résultats ont été obtenus dans des structures métriques plus générales comme les espaces b-métriques rectangulaires, complexes, avec graphe, partiels... etc.

Bibliographie

[1] **H. Aydi, M. Bota, E. Karapinar, S. Mitroxić**, *«A Fixed Point Theorem for Set-Valued Quasi-Contractions in b-Metric Spaces»*, Fixed Point Theory Appl. 2012, 88, (2012), 1-8.

[2] **I. A. Bakhtin**, *«The contraction mapping principle in quasimetric spaces»*, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst. 30 (1989), 26-37.

[3] **S. Cobzaş**, *«B-Metric Spaces, Fixed Points and Lipschitz Functions»*, arXiv :1802.02722v3 [math.FA], 25 mars (2019).

[4] **S. Czerwik**, *«Contraction Mappings in b-Metric Space»*, Acta Math inf Univ Ostraviensis, 1 (1993), 5-11.

[5] **H. S. Ding, M. Imdad, S. Radenovic, and J. Vujaković**, *«On Some Fixed Point Results in B-Metric, Rectangular and b-Rectangular Metric Spaces»*, Arab J. Math. Sci. 22(2), (2016), 151-164.

[6] **A. H. Frink**, *«Distance functions and the metrization problem»*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 133–142.

[7] **H. Huang, G. Deng, and S. Radenović**, *«Fixed Point Theorems in B-Metric Spaces with Applications to Differential Equations»*, J. Fixed Point Theory Appl. 20(1) (2018), 1-24.

[8] **G. Jungck**, *«Common fixed Point for non-continuous non-self maps on non-metric spaces»,* Far East J. Math. Sci. 4(2) (1996), 199-215.

[9] **M. Kir et H. Kiziltune**, *«On Some Well Known Fixed Point Theorems in b-Metric Spaces»*, Turk. J. Anal. Numb. Theory. Vol 1, No 1, 2013, 13-16.

[10] **S. M. Mohanta**, *«Coincidence Points and Common Fixed Points for Expansive Type Mappings in b-Metric Spaces»*, J. Math. Sci. Inform, Vol 11, No. 1 (2016), 101-113.

[11] **J. R. Roshan, V. Parvaneh, Z. Kadelburg**, *«Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces»*, J. Nonlinear Sci. Appl. 7 (2014), 229-245.

[12] **M. Sarwar and M. Rahman**, *«Fixed Point Theorems For Ciric's And Generalized Contractions in b-Metric Spaces»*, Int. J. Anal. Appl. Vol 7, No 1 (2015), 70-78.

[13] **Y. Sonntag**, *«Topologie et Analyse Fonctionnell»*, Berlin 23-4-1880, 1997.