République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Sur un problème d'évolution du second-ordre

Présenté par :
Deffas Chahinaz

Devant le jury

Président	**D. Laouir**	Prof. Université de Jijel
Encadreur	**S. Saïdi**	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	**W. Boukrouk**	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

♡ *Remerciements*

Avant tout, je remercie ***Allah*** le tout puissant qui m'a guidé tout au long de ma vie, qui m'a permis de m'instruire et d'arriver aussi loin dans les études, qui m'a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui m'a permis d'achever ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur Madame ***Soumia Saïdi***, Maître de Conférences à l'université de Jijel, pour sa patience, surtout ses judicieux conseils et remarques, sa bienveillance et la confiance qu'elle m'a accordée pour réaliser ce travail.

Je remercie Madame ***Dalila Laouir***, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté la présidence du jury de notre travail, qu'elle trouve ici toutes mes expressions respectueuses.

Je remercie Madame ***Wafia Boukrouk***, Maître de Conférences à l'université de Jijel, de nous avoir fait l'honneur de faire partie des membres du jury et d'examiner ce travail. Je tiens la remercier.

Je voudrais aussi remercier tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématiques.

ℵ♡***Chahinaz*** .$\mathscr{D}$

Dédicace

♡♡♡

Je dédie ce travail de fin d'études :

A mon cher père Amor ;

A ma chère mère Yamina ;
Qui m'ont soutenu et encouragé pendant ces années d'études.

A mes frères Aissam, Ramzi et mes sœurs Maria, Nour elhouda qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite beaucoup de succès, de joie et du bonheur.

A mes chères amies, Faiza, Loubna, Soumia, Meriem, Asma, Youssra, Nadjiba, Selma, Amira. Elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leurs encouragements et leur profonde affection. Elles m'ont donné l'avantage de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je leurs souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès

A toute ma famille.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Notre but dans ce mémoire, est d'étudier une classe d'inclusions différentielles du second-ordre gouvernées par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps et de l'état, dans un espace de Hilbert H. Pour ce faire, on s'est intéressé à détailler le papier récent [13]. On réfère à quelques articles sur ce thème, voir par exemple [12], [13], [14],[18].

En général, la démonstration d'existence de solution pour les problèmes d'évolution repose sur l'une des méthodes : la discrétisation, le théorème du point fixe, la régularisée Moreau-Yosida (pour les opérateurs maximaux monotones), ... ect. Nous aurons l'occasion dans ce mémoire de procéder par l'approche de discrétisation. Le même problème a été traité dans le mémoire de Master [17], en appliquant le théorème du point fixe.

L'étude des inclusions différentielles s'est développée au cours des dernières années. On peut citer quelques références sur ce sujet, voir par exemple : [1], [2], [4], [5], [6], [7], [18].

Ce mémoire est composé essentiellement de trois chapitres ordonnés comme suit :
Dans le premier chapitre intitulé "Notations et Préliminaires", on rappelle quelques notions et résultats principaux que nous utiliserons tout au long de notre travail. Nous commençons par les notations et quelques espaces usuels. Aussi, ce chapitre réunit un ensemble de définitions, propositions et théorèmes sur l'analyse convexe, aussi des notions de l'analyse multivoque et quelques propriétés fondamentales des opérateurs maximaux monotones qui sont nécessaires pour les démonstrations de nos théorèmes principaux.

Dans le deuxième chapitre intitulé "Résultats d'existence de solution", nous étudions l'existence de solution absolument continue au problème du second-ordre suivant

$$(P_1)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad \forall t \in [0,T], \end{cases}$$

où $A_{(t,x)}$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et de l'état de domaine $D(A_{(t,x)})$.

Notre étude est menée dans un espace de Hilbert réel séparable H, où $f : [0,T] \times H \times H \to H$ est une perturbation univoque satisfaisant à des conditions appropriées. Notre approche consiste à diviser l'intervalle $[0,T]$ et approximer le problème pour passer ensuite aux différents modes de convergence assurant l'existence de solution à (P_1).

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous développons un résultat d'existence concernant le problème d'évolution

$$(P_2)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + F(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T] \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \in H, \quad u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}), \end{cases}$$

lorsque la perturbation multivoque $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ satisfait à des hypothèses convenables. À cette fin, nous procédons par l'approche de discrétisation ci-dessus, où l'élément de norme minimale $h(s, x_i^n, u_i^n)$ de $F(s, x_i^n, u_i^n)$ est impliqué au lieu de $f(s, x_i^n, u_i^n)$ et x_i^n, u_i^n seront construits pour tout i et n entiers naturels.

Dans le troisième chapitre, intitulé "Cas particulier du processus de la rafle", on remarque qu'à partir des théorèmes du chapitre précédent découlent des résultats d'existence correspondants aux problèmes suivants

$$(P_3)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) + f(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in [0,T] \\ u(t) \in C(t,x(t)), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0,x_0),\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

et

$$(P_4)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) + F(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T], \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in [0,T] \\ u(t) \in C(t,x(t)), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \in C(0,x_0),\ x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

où pour tout $(t,x) \in I \times H$, $N_{C(t,x)}$ est le cône normal de l'ensemble $C(t,x)$.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rassemblons des notions de base, quelques résultats fondamentaux utiles, notamment les définitions et les propriétés des multi-applications et celles des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert.

1.1 Notations générales et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire nous adoptons les notations suivantes :

- p.p. presque partout.
- resp. respectivement.
- i.e. ou c-à-d : c'est-à-dire.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $I := [0, T]$, $T > 0$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.
- I_H est l'identité de H.
- $\overline{S}$ est l'adhérence d'un ensemble S $(S \subset H)$.

- $co(S)$ est l'enveloppe convexe de S.
- $\overline{co}(S)$ est l'enveloppe convexe fermée de S.
- $\overline{B}_H(0,r)$ est la boule fermée dans H de centre 0 et de rayon r.
- $\overline{B}_H$ est la boule unité fermée dans H.
- $\mathcal{L}(I)$ est la tribu de Lebesgue sur I.
- $\mathcal{B}(H)$ est la tribu Borélienne sur H.
- $\mathcal{P}(X)$ où 2^X est l'ensemble des parties d'un ensemble X.
- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.
- $\to$ désigne la convergence forte.
- $\mathbf{1}_J$ est la fonction caractéristique d'un sous-intervalle J de I, définie par

$$\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in J, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

- $\mathcal{C}_H(I)$ est l'espace des fonctions continues de I dans H muni de la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} \|x(t)\|$.
- $\dot{x}$ (resp. $\ddot{x}$) est la dérivée première (resp. seconde) de $x : I \to H$ quand elles existent.
- $\delta(\cdot, A)$ est la fonction indicatrice à l'ensemble A définie sur H à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ par

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A, \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

- $\delta^*(\cdot, A)$ est la fonction polaire de $\delta(\cdot, A)$, appelée aussi fonction d'appui de l'ensemble A, définie sur H par

$$\delta^*(\cdot, A) : x \in H \longmapsto \delta^*(\cdot, A) = \sup_{z\in A} \langle x, z\rangle.$$

- $Proj_A(x)$ est la projection du point $x \in H$ dans l'ensemble A, définie par

$$Proj_A(x) = \{y \in A : d(x, A) = \|y - x\|\}.$$

Si de plus A est convexe la projection est unique et vérifie

$$y \in Proj_A(x) \Leftrightarrow y \in A \; et \; \langle x - y, y - a\rangle \geq 0 \quad \forall a \in A.$$

- $L^p_H(I)$, $p \in [1, +\infty[$, est l'espace des fonctions mesurables $x : I \to H$ telles que $\displaystyle\int_0^T \|x(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme $\|x\|_{L^p_H(I)} = \left(\displaystyle\int_0^T \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$.
Si $p = 2$ alors $L^2_H(I)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_H(I)}$ pour tous $f, g \in L^2_H(I)$
$$\langle f, g \rangle_{L^2_H(I)} = \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle dt.$$
- $L^\infty_H(I)$ est l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H muni de la norme
$$\|f\|_{L^\infty_H(I)} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|f(t)\| \leq c \ \ p.p.\}.$$
- $W^{1,2}(I, H)$ est l'espace des fonctions $x : I \to H$ absolument continues à dérivée dans $L^2_H(I)$ et on note $W^{1,2}(I)$ si $H = \mathbb{R}$.
- $W^{2,2}(I, H)$ est l'espace des fonctions $x : I \to H$ absolument continues à dérivée w absolument continue avec $\dot{w}$ dans $L^2_H(I)$.

Une bonne partie du contenu du chapitre 1 a été prise des références [3], [9], [10], [19].

1.2 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui suit X est un ensemble non-vide.

Définition 1.1. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$. Alors, Γ est dite topologie si*

1. $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.
2. *Toute intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*
3. *Toute réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X, Γ) est dit espace topologique.
Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.
Les sous-ensembles fermés de X *sont les complémentaires des ouverts.*

Caractérisation 1.2. *Soit (X, Γ) un espace topologique. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.*
On appelle adhérence de A notée $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.
On appelle intérieur de C noté $Int(C)$ le plus grand ouvert de X inclus dans C.

Définition 1.3. *On dit que X est un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.4. *On appelle tribu sur X toute famille Σ de parties de X telle que :*

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. *Σ est stable par passage aux complémentaires.*
3. *Σ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable.

Définition 1.5. ***(Application mesurable)***
Soient (X_1, Σ_1) et (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$, pour tout $A \in \Sigma_2$.

Définition 1.6. *Soit* $(\mathrm{X},\ \Sigma)$ *un espace mesurable. Une mesure sur* $(\mathrm{X},\ \Sigma)$ *est une application* $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ *vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset \quad$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété de σ-additive*

$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\mathrm{X},\ \Sigma,\ \mu)$ *est un espace mesuré.*
Lorsque $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, on dit que la mesure μ est finie.
Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.7. ***(Tribu de Borel)***
On appelle tribu de Borel ou tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A}); \quad \mathcal{A} = \{]a, b[; a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\}.$$

Définition 1.8. ***(Mesure de Lebesgue)***
Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ l'espace mesurable $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée λ sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :
(1) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) :\ \lambda(a + A) = \lambda(A)$.
(2) $\lambda([0, 1]) = 1$.
Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut montrer qu'elle coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles, c'est-à-dire que la mesure de Lebesgue d'un intervalle est égale à la longueur de cet intervalle.

Définition 1.9. ***(Propriété vraie μ-presque partout)***
On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout sur l'espace mesuré $(\mathrm{X},\, \Sigma,\, \mu)$ *si la propriété est fausse sur une partie μ-négligeable de X, on note μ p.p.*
Si μ est la mesure de Lebesgue, on écrit p.p. pour simplicité.

Définition 1.10. *L'application $d\,:\,\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to[0,\,+\infty[$ est une distance sur* X *si pour tous $x,\,y,\,z\in\mathrm{X}$, on a*

1. $d(x,\,y)=0$ *si et seulement si* $x=y$,
2. $d(x,\,y)=d(y,\,x)$,
3. $d(x,\,z)\leq d(x,\,y)+d(y,\,z)$ *(inégalité triangulaire).*

   Dans ce cas, on dit que $(\mathrm{X},\,d)$ *est un espace métrique.*

Exemple 1.11. *Tout espace métrique est séparé.*

Définition 1.12. *Soient (X,d) un espace métrique, $S\subset X$ et $x_0\in X$, alors*

$$d(x_0,S)=\inf_{x\in S}d(x_0,x),$$

$d(x_0,S)$ est la plus petite distance entre le point x_0 et les points de S.

Définition 1.13. *Soient S_1, S_2 deux sous-ensembles de H. La distance de Hausdorff entre S_1 et S_2 est définie par*

$$d_H(S_1,S_2)=\max\big(\sup_{x\in S_2}d(x,S_1),\sup_{x\in S_1}d(x,S_2)\big). \tag{1.1}$$

Définition 1.14. *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application $x\mapsto\|x\|$ de* X *dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions*

i) $\forall x\in\mathrm{X}:\ \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$,

ii) $\forall x\in\mathrm{X},\,\forall\lambda\in\mathbb{R}:\ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$,

iii) $\forall x,\,y\in\mathrm{X}:\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x,y)=\|x-y\|\quad\forall x,y\in X$.

Définition 1.15. ***(Produit scalaire)***
Soit H un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur H est une application de $H\times H$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout couple (x,y) le produit scalaire noté $\langle x,y\rangle$ telle que
(i) L'application $x\longmapsto\langle x,y\rangle$ est linéaire, i.e., pour tous $y,x_1,x_2\in H$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ on a

$$\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y\rangle=\alpha_1\langle x_1,y\rangle+\alpha_2\langle x_2,y\rangle.$$

(ii) Pour tous $x,y\in H$, on a : $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.
(iii) Pour tout $x\in H$, on a : $\langle x,x\rangle\geq0$ et $(\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0)$.

Définition 1.16. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* X.

Définition 1.17. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,\, q \in \mathbb{N},\, p > q \geq n_0 : \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.18. *Soit* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $\|\cdot\|$*, composée d'éléments de* X*, admet une limite dans* X*. On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.19. ***(Application Continue)***
Soit $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques et* $g : X \to Y$*, on dit que* g *est continue au point* $x_0 \in X$*, si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'(g(x), g(x_0)) < \varepsilon.$$

• *g est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.20. ***(Continuité séquentielle)***
Soient (X_1, Γ_1)*,* (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$*. La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors, on a* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$*.*
La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1*.*

Remarque 1.21. *Dans les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité.*

Théorème 1.22. ***(Théorème de différentiation de Lebesgue)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Pour toute fonction intégrable au sens de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$*, on a pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(\tau) d\tau = f(x).$$

Définition 1.23. *Soit* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *un espace topologique et soit* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$*. On dit que* A *est dense dans* X *si* $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{X}$*.*

Définition 1.24. *On dit qu'un espace topologique* $(\mathrm{X}, \mathit{\Gamma})$ *est séparable s'il existe un sous-ensemble* $A \subset \mathrm{X}$ *dénombrable et dense dans* X*.*

Définition 1.25. *Soit* (X, Γ) *un espace métrique.*

(1) *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i\in K}$ *de parties de* X *telle que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in K} A_i$.
Si de plus, K *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i\in K}$ *est un recouvrement fini de* X.

(2) *Soit* $(A_i)_{i\in K}$ *un recouvrement de* X. *Soit* $J \subset K$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, *on dit que* $(A_j)_{j\in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in K}$.

(3) *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i\in K}$ *tel que* $X \subset \bigcup\limits_{i\in K} U_i$.

Définition 1.26. *On dit que l'espace topologique* (X, Γ) *est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.27. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

(i) $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts de* X, *on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

(ii) $A \subset \mathrm{X}$ *(où* X *est séparé) est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

(iii) $D \subset \mathrm{X}$ *est compact si et seulement si* D *est fermé et relativement compact.*

Caractérisation 1.28. *Soit* X *un espace métrique.*

(i) Un sous-ensemble K *de* X *est dit relativement compact, si de toute suite dans* K *on peut extraire une sous-suite convergente dans* X.

(ii) Un sous-ensemble D *de* X *est dit compact, si de toute suite dans* D *on peut extraire une sous-suite convergente dans* D.

(iii) Un sous-ensemble F *de* X *est fermé si et seulement la limite de toute suite à valeurs dans* F *appartient à* F.

Définition 1.29. *Soit* X *un espace métrique. Un sous-ensemble* F *de* X *est dit boule-compact si l'intersection de* F *avec toute boule fermée de* X *est un ensemble compact.*

Proposition 1.30. *Tout fermé inclus dans un compact est compact.*
Tout compact d'un espace séparé est fermé.

Définition 1.31. ***(Convergence ponctuelle)***

Soient E, X *deux espaces normés,* $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications et* $f : X \to E$.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f *(sur* X*) si et seulement si, pour tout* $x \in X$, *la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *dans* E.

Définition 1.32. ***(Convergence uniforme)***

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f(sur X) si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in X, \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon).$$

2) Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'application f sont bornées, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X, si et seulement si

$$\sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0.$$

Définition 1.33. *Soient X un espace topologique et $X' = \{f : X \to \mathbb{R}/f$ linéaire continue$\}$ son dual topologique. Soit $f \in X'$ et soit*

$$\begin{aligned}\varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{X',X}.\end{aligned}$$

Où l'on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X,X'}$ les crochets de dualité.
Lorsque f parcourt $X^{'}$, on obtient une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$. On appelle topologie faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ continues sur X et on la note $\sigma(X, X')$.

Définition 1.34. ***(Convergence faible)***
Soit (x_n) une suite de points de X, alors on a (x_n) converge faiblement vers x, i.e, $x_n \xrightarrow{\sigma(X,X')} x$ (notée $x_n \rightharpoonup x$)

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X}\ \forall f \in X'.$$

On note que la convergence forte entraîne la convergence faible.

Définition 1.35. *Soient X un espace topologique et X' son dual topologique. Soit $x \in X$ et soit*

$$\begin{aligned}\varphi_x : X' &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \varphi_x(f) = \langle f, x\rangle_{X',X}.\end{aligned}$$

Lorsque x parcourt X, on obtient une famille d'applications $(\varphi_x)_{x\in X}$. On appelle topologie faible* sur X', la topologie la moins fine sur X' rendant les applications $(\varphi_x)_{x\in X}$ continues sur X' et on la note $\sigma(X', X)$.

Définition 1.36. ***(Convergence faible*)***
Soit (f_n) une suite de points de X', alors on a $f_n \xrightarrow{\sigma(X',X)} f$ (notée $f_n \rightharpoonup f$)

$$f_n \rightharpoonup^* f \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X}\ \forall x \in X.$$

Définition 1.37. *Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. *Sur cet espace, on définit une norme par* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in H$, *dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.38. *Un espace de Hilbert réel est un espace préhilbertien (réel) complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme induite.*

Théorème 1.39. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
Soit H *un espace préhilbertien, alors, on a pour tous* $x, y \in H$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle}. \tag{1.2}$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H *dans* $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ *et*
$y \longmapsto \langle x, y \rangle$.

Théorème 1.40. ***(Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki)***
Soit E *un espace de Banach, soit* E' *son dual topologique. La boule unité fermée dans* E' *notée* $\overline{B}_{E'}$ *est compacte pour la topologie* $\sigma^*(E', E)$.

Corollaire 1.41. *Soit* H *un espace de Banach. Alors*

- *Toute suite convergente de* H *est bornée.*
- *Toute suite bornée dans* H *admet une sous-suite faiblement convergente.*
- *Soit* $(x_n) \subset H$, *si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $(\|x_n\|)$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Définition 1.42. *Un ensemble* $S \subset H$ *est convexe si*

$$\forall x,\, y \,\in\, S, \forall t \,\in\, [0,\, 1] : \quad tx + (1-t)y \in S.$$

Exemple 1.43. *Pour tout* $x \in H$ *et* $r \geq 0$, *la boule centrée en* x *et de rayon* r *(ouverte ou fermée) est convexe.*

Définition 1.44. *Soit* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $\varphi : [a, b] \to H$ *est dite absolument continue si pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute suite finie* $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous-intervalles de* $[a, b]$ *d'intérieurs disjoints, c'est à dire*

$$\sum_{n\geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \|\varphi(b_n) - \varphi(a_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.45. *Soit* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $\varphi : [a, b] \to H$ *est dite absolument continue si et seulement si il existe une fonction* g *intégrable sur* $[a, b]$ *telle que pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x g(t)dt,$$

dans ce cas, $g \equiv \dot{\varphi}$ *p.p.*

Remarque 1.46. *Soit une fonction $\varphi : [a, b] \to H$.*

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*
3. *Toute fonction continue est mesurable, ici on considère $[a, b]$ muni de la tribu de Lebesgue et H muni de la tribu Borélienne.*

Définition 1.47. ***(Fonction de type Lipschitz)***
Soit $\varphi : I \to H$. On dit que φ est de type Lipschitz de rapport $L > 0$ si et seulement si

$$\forall\ x,\, y\ \in\ I :\ \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L|x - y|.$$

On dit que φ est une contraction si, elle est de type Lipschitz de rapport $0 < L < 1$.

Remarque 1.48. *Toute fonction de type Lipschitz est absolument continue.*

1.3 Outils d'analyse convexe

Ces notions ont été pris des références [8], [15], [19].

Définition 1.49. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et soit $B \subset E$.*
On dit que B est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in B, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in B.$$

Définition 1.50. *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n, défini par*

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \ /\alpha_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.51. *Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$.*
On appelle ***combinaison convexe*** *des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tout élément de la forme*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad tel\ que \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n.$$

Définition 1.52. ***(Enveloppe convexe)***
Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel topologique E.

- *L'enveloppe convexe de S noté $co(S)$ est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de E contenant S. En plus, c'est le plus petit convexe de E qui contient S.*

- *On appelle enveloppe convexe fermée de S que l'on note $\overline{co}(S)$ l'intersection de tous les sous-ensembles convexes fermés de E contenant S. C'est le plus petit convexe fermé de E qui contient S.*

Théorème 1.53. *Soit E un espace vectoriel et $S \subset E$. Alors*

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i; \quad n \geq 1,\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Delta_n,\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in S \right\}.$$

Théorème 1.54. ***(Banach-Mazur)***
Soit E un espace de Banach. Soit $(x_n)_n \subset E$ et $x \in E$. Si $(x_n)_n$converge faiblement vers x dans E, alors, il existe une suite $(y_n)_n$ de combinaison convexe des $(x_k)_{k\geq n}$ (i.e. $y_n \in co\{x_k, k \geq n\}$) qui converge fortement vers x telle que

$$x \in \bigcap_n \overline{co}\{x_k, k \geq n\}.$$

Théorème 1.55. ***(Théorème de séparation)***
Soit E un espace vectoriel normé, alors pour tout ensemble $B \subset E$ non vide

$$\overline{co}(B) = \{x \in E : \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', B) \quad \forall\, x' \in E'\}$$

et $\delta^*(x', B) = \delta^*(x', co(B)) = \delta^*(x', \overline{co}(B)), \forall\, x' \in E'$.

1.4 Multi-applications et sélections

Pour commencer, nous définissons les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-fonctions. Pour plus de détails sur les propriétés des multi-applications, on peut se référer par exemple à [3] et [15].

Définition 1.56. *Soient X, Y deux ensembles non-vides, on appelle multi-application définie sur X à valeurs dans Y toute application de X ayant ses valeurs dans 2^Y. On note*

$$F : X \rightrightarrows Y \quad \text{où} \quad F : X \to 2^Y,$$

c'est à dire pour tout x dans X : $F(x)$ est un sous-ensemble de Y.

Définition 1.57. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On appelle domaine de F noté $D(F)$ l'ensemble

$$D(F) = \{x \in X :\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

On définit l'image de F notée $R(F)$ par

$$R(F) = \{y \in Y : \exists x \in X, y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

On définit le graphe de F noté $Gr(F)$ par

$$Gr(F) = \{(x, y) \in D(F) \times Y : y \in F(x)\}.$$

Définition 1.58. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non-vides. On appelle sélection de F toute application $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant $f(x) \in F(x), \forall x \in X$.*

Définition 1.59. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X,\ F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Exemple 1.60. *Toute multi-application constante est mesurable.*

Théorème 1.61. ***(Théorème de sélection mesurable)***
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs non-vides fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Définition 1.62. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, E un espace vectoriel normé. Soit $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F est scalairement mesurable si pour tout $x' \in E'$, l'application $t \longmapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.*

Théorème 1.63. *Supposons que H est un espace de Hilbert séparable. Soit $\Phi : I \rightrightarrows H$ une multi-application scalairement Lebesgue mesurable à valeurs convexes faiblement compactes, alors la multi-application $\Phi^0 : t \longmapsto P_{\Phi(x)}(0)$ est Lebesgue mesurable.*

Définition 1.64. ***(Semi-continuité supérieure)***
Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

- *On dit que F est semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage $\Omega \in V(x_0)$, tel que $F(\Omega) \subset U$, i.e., $F(X) \subset U$, $\forall x \in \Omega$.*
- *F est semi-continue supérieurement sur X si seulement si F est semi-continue supérieurement en tout point $x_0 \in X$.*

On rappelle un cas particulier du Théorème VI-4 [15].

Théorème 1.65. *Soit H un espace de Hilbert séparable. On considère une multi-application ϕ définie sur $[0,T] \times H$ à valeurs compactes convexes non vides dans H telle que pour $t \in [0,T]$, $\phi(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement. Soient Y_n et Y, pour tout n, des applications scalairement intégrables de $[0,T]$ dans H. Soient $X_n, X : [0,T] \longrightarrow H$ pour tout n. On suppose les hypothèses suivantes :*

a) $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t)$ p.p.

b) *Pour tout $x \in H$ fixé, la suite $(Y_n)_n$ converge vers Y par rapport à la topologie faible* $\sigma(L^1_H([0,T]), L^\infty_H([0,T]))$.

c) $Y_n(t) \in \phi(t, X_n(t))$ p.p.

Alors $Y(t) \in \phi(t, X(t))$ p.p.

1.5 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.66. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$ et tous $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, on a*

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0. \tag{1.3}$$

Définition 1.67. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*

Proposition 1.68. ***(Théorème de Minty)***
Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$. On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + \lambda A) = H$, pour tout $\lambda > 0$.*

Définition 1.69. *Soit S un sous-ensemble de H. Le cône normal de S en $x \in H$, est défini par*

$$N_S(x) = \{y \in H : \langle y, z - x \rangle \leq 0 \ \forall z \in S\}. \tag{1.4}$$

Si S est convexe fermé, alors N_S est un opérateur maximal monotone. Il est à noter que $D(N_S) = S$.

Définition 1.70. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $x \in D(A)$, Ax est non-vide convexe fermé.*

Proposition 1.71. *Il existe* $y \in Ax$ *unique appelé élément de norme minimale de* Ax*, noté* A^0x *tel que* $\|y\| = Proj_{Ax}(0)$.

Définition 1.72. *Un opérateur* $A : H \rightrightarrows H$ *est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite : si* $x_n \in D(A), y_n \in Ax_n$ *tels que* $x_n \to x$ *et* $y_n \rightharpoonup y$ *dans* H *alors* $x \in D(A)$ *et* $y \in Ax$.

Proposition 1.73. *Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.*

Définition 1.74. *Soit* $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$*. On appelle l'opérateur* $J_\lambda^A : H \to H$ *défini par*

$$J_\lambda^A = (I_H + \lambda A)^{-1}, \tag{1.5}$$

la résolvante de A*, et l'opérateur* $A_\lambda : H \to H$ *défini par*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda^A), \tag{1.6}$$

l'approximation de Yosida de A*, pour tout* $\lambda > 0$.
Les opérateurs A_λ, J_λ^A *sont univoques et définis sur l'espace* H *tout entier. On a*

$$J_\lambda^A x \in D(A) \text{ et } A_\lambda(x) \in A(J_\lambda^A x), \text{ pour tout } x \in H, \tag{1.7}$$

$$\|A_\lambda(x)\| \leq \|A^0 x\|, \text{ pour tout } x \in D(A). \tag{1.8}$$

On rappelle les résultats suivants (voir [20]).

Définition 1.75. *Soient* $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ *et* $B : D(B) \subset H \rightrightarrows H$ *deux opérateurs maximaux monotones, alors on note* $dis(A, B)$ *la pseudo-distance entre* A *et* B *définie par*

$$dis(A, B) = \sup \left\{ \frac{\langle y - y', x' - x \rangle}{1 + \|y\| + \|y'\|} : \ (x, y) \in gph(A), \ (x', y') \in gph(B) \right\}. \tag{1.9}$$

On a $dis(A, B) \in [0, +\infty]$, $dis(A, B) = dis(B, A)$ *et* $dis(A, B) = 0$ *si et seulement si* $A = B$.

Remarque 1.76. *Si* S_1, S_2 *sont deux ensembles convexes fermés non-vides de* H*, alors on a*

$$dis(N_{S_1}, N_{S_2}) = d_H(S_1, S_2), \tag{1.10}$$

où la distance de Hausdorff entre S_1 *et* S_2 *est donnée par* (1.1).

1.6 Quelques résultats utiles

Théorème 1.77. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)***
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions dans* $L^p_H(I)$, $1 \leq p < +\infty$. *On suppose que*

1) $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ *p.p sur* I.

2) *Il existe une fonction* $g \in L^p_{\mathbb{R}_+}(I)$ *telle que pour tout* n : $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ *p.p sur* I.

Alors, on a $f \in L^p_H(I)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p_H(I)} \longrightarrow 0$.

Théorème 1.78. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soit (I, d) *un espace métrique compact et* (X, d') *un espace métrique complet. Alors, une partie* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{C}_X(I)$ *est relativement compacte pour la topologie de la convergente uniforme, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\mathcal{H}$ *est équicontinue, i.e.,*

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in \mathcal{H}, \forall y \in I,\ (d(x,y) < \delta) \Rightarrow (d'(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

2. *Pour tout* $x \in I$, *l'ensemble* $\mathcal{H}(x) = \{f(x), f \in \mathcal{H}\}$ *est relativement compact.*

CHAPITRE 2

RÉSULTATS D'EXISTENCE DE SOLUTION

2.1 Résultats préparatoires

Pour démontrer le résultat d'existence de solutions pour le problème (P_1), nous avons besoin de rappeler les lemmes suivants (voir [16]).

Lemme 2.1. *Soit A un opérateur maximal monotone sur H. Si $x \in \overline{D(A)}$ et $y \in H$ sont tels que*

$$\langle A^0 z - y, z - x\rangle \geq 0 \;\; \forall z \in D(A),$$

alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Lemme 2.2. *Soient A_n $(n \in \mathbb{N})$, A des opérateurs maximaux monotones sur H tels que $dis(A_n, A) \to 0$. Supposons aussi que $x_n \in D(A_n)$ avec $x_n \to x$ et $y_n \in A_n(x_n)$ avec $y_n \rightharpoonup y$ pour certains $x, y \in H$. Alors, on a $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Lemme 2.3. *Soient A, B des opérateurs maximaux monotones sur H. Alors, on a*
(1) *Pour $\lambda > 0$ et $x \in D(A)$*

$$\|x - J_\lambda^B(x)\| \leq \lambda\|A^0 x\| + dis(A, B) + \sqrt{\lambda\big(1 + \|A^0 x\|\big)dis(A, B)}.$$

(2) *Pour $\lambda > 0$ et $x, x' \in H$*

$$\|J_\lambda^A(x) - J_\lambda^A(x')\| \leq \|x - x'\|. \tag{2.1}$$

Lemme 2.4. *Soient A_n ($n \in \mathbb{N}$), A des opérateurs maximaux monotones sur H tels que dis$(A_n, A) \to 0$ et $\|A_n^0 x\| \leq c(1 + \|x\|)$ pour $c > 0$, tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D(A_n)$. Alors, pour tout $z \in D(A)$ il existe une suite (z_n) telle que*

$$z_n \in D(A_n), \quad z_n \to z \ \text{ et } \ A_n^0 z_n \to A^0 z. \tag{2.2}$$

Lemme 2.5. ***(Lemme de Gronwall)***
Soient $(\alpha_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ et (η_i) des suites de nombres réels positifs tels que

$$\eta_{j+1} \leq \alpha_j + \beta_j(\eta_0 + ... + \eta_{j-1}) + (1 + \gamma_j)\eta_j \quad \textit{pour } j \in \mathbb{N}.$$

Alors, on a

$$\eta_j \leq \Big(\eta_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k\Big) \exp\Big(\sum_{k=0}^{j-1} (k\beta_k + \gamma_k)\Big) \quad \textit{pour } j \in \mathbb{N}^*.$$

2.2 Étude du problème du second-ordre (P_1)

Nous sommes intéressés dans cette section par l'étude du problème (P_1).

Théorème 2.6. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout $(t, x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfaisant :*
$(\mathcal{H}_1)$ il existe un nombre réel positif c tel que

$$\|A^0_{(t,x)} y\| \leq c(1 + \|x\| + \|y\|) \text{ pour tout } (t, x, y) \in I \times H \times D(A_{(t,x)}),$$

$(\mathcal{H}_2)$ il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur I et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que

$$dis(A_{(t,u)}, A_{(\tau,v)}) \leq a(t) - a(\tau) + r\|u - v\|, \ \text{ pour tous } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \ \text{ pour tous } u, v \in H.$$

$(\mathcal{H}_3)$ pour tout sous ensemble borné B de H, l'ensemble $D(A(I \times B))$ est un boule-compact.
Soit $f : I \times H \times H \to H$ une fonction qui est mesurable sur I, continue sur $H \times H$ telle que

$$\exists m > 0 : \|f(t, x, y)\| \leq m(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \textit{pour tout } (t, x, y) \in I \times H \times H. \tag{2.3}$$

Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times D(A_{(0,x_0)})$, le problème d'évolution

$$(P_1) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))} u(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T] \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad \forall t \in [0, T], \end{cases}$$

admet une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$.

En d'autres termes, l'inclusion différentielle du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in A_{(t,x(t))}\dot{x}(t) + f(t, x(t), \dot{x}(t)) \text{ p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad t \in I \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}), \end{cases}$$

admet au moins une solution $x(\cdot)$ *dans* $W^{2,2}(I, H)$.

De plus, l'inégalité suivante

$$\|\ddot{x}(t)\| = \|\dot{u}(t)\| \leq \xi(1 + \dot{a}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \tag{2.4}$$

est vraie pour une constante réelle positive ξ*, dépendant de* $c, m, T, r, a(T), \|u_0\|, \|x_0\|$.

Démonstration. La démonstration du théorème repose sur une méthode de discrétisation. Elle comprend trois parties.

Partie 1 : ***Construction des suites*** $(u_n)_n$ ***et*** $(x_n)_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une partition de l'intervalle $I := [0, T]$ par

$$0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_i^n < t_{i+1}^n < \cdots < t_n^n = T.$$

Pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, \cdots, n-1$, on pose

$$h_{i+1}^n = t_{i+1}^n - t_i^n, \quad a_{i+1}^n = a(t_{i+1}^n) - a(t_i^n), \tag{2.5}$$

et on suppose que

$$h_i^n \leq h_{i+1}^n, \quad a_i^n \leq a_{i+1}^n. \tag{2.6}$$

Définissons la fonction γ par $\gamma(t) = t + a(t)$ pour tout $t \in I$. On peut choisir la partition ci-dessus de telle sorte que pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$\sigma_{i+1}^n = h_{i+1}^n + a_{i+1}^n \leq l_n, \tag{2.7}$$

où $l_n = \frac{\gamma(T)}{n}$, car $a \in W^{1,2}(I)$ avec $a(0) = 0$ par hypothèse. Il est clair que $l_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On définit $x_0^n = x_0, u_0^n = u_0 \in D(A_{(0,x_0)})$ et pour $i = 0, 1, \cdots, n-1$,

$$x_{i+1}^n = x_i^n + h_{i+1}^n u_i^n, \tag{2.8}$$

$$u_{i+1}^n = J_{i+1}^n\left(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n) ds\right) \in D(A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)}), \tag{2.9}$$

par (1.7) où

$$J_{i+1}^n = J_{h_{i+1}^n}^{A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)}} = \Big(I_H + h_{i+1}^n A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)}\Big)^{-1}.$$

Combinons cela avec (2.9), il résulte

$$u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds \in u_{i+1}^n + h_{i+1}^n A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)} u_{i+1}^n. \tag{2.10}$$

Cette dernière inclusion peut être réécrite comme suit :

$$-\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h_{i+1}^n} \in A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)} u_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i+1}^n} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds. \tag{2.11}$$

Notons que par construction (voir (2.8)), on a pour tout $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\|x_i^n - x_{i-1}^n\| &= \|x_{i-1}^n + h_i^n u_{i-1}^n - x_{i-1}^n\| \\
&= h_i^n \|u_{i-1}^n\|.
\end{aligned}$$

Ensuite, par (2.7) et (2.8), il en résulte que $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\|x_i^n\| &= \|x_{i-1}^n + h_i^n u_{i-1}^n\| \\
&= \|x_{i-2}^n + h_{i-1}^n u_{i-2}^n + h_i^n u_{i-1}^n\| \\
&= \|x_{i-3}^n + h_{i-2}^n u_{i-3}^n + h_{i-1}^n u_{i-2}^n + h_i^n u_{i-1}^n\| \\
&= \|x_0 + h_1^n u_0^n + h_2^n u_1^n + \dots + h_i^n u_{i-1}^n\| \\
&\le \|x_0\| + h_1^n \|u_0^n\| + \dots + h_i^n \|u_{i-1}^n\| \\
&\le \|x_0\| + l_n(\|u_0^n\| + \|u_1^n\| + \dots + \|u_{i-1}^n\|).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Par le lemme 2.3, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &= \|J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\Big) - u_i^n\| \\
&= \|J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\Big) - J_{i+1}^n(u_i^n) + J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\le \|J_{i+1}^n\Big(u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\Big) - J_{i+1}^n(u_i^n)\| + \|J_{i+1}^n(u_i^n) - u_i^n\| \\
&\le \|u_i^n - \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds - u_i^n\| + \|u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n)\| \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, x_i^n, u_i^n)\|ds + \|u_i^n - J_{i+1}^n(u_i^n)\| \\
&\le \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, x_i^n, u_i^n)\|ds + h_{i+1}^n \|A^0_{(t_i^n, x_i^n)} u_i^n\| + dis(A_{(t_i^n, x_i^n)}, A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)}) \\
&+ \Big(h_{i+1}^n (1 + \|A^0_{(t_i^n, x_i^n)} u_i^n\|) dis(A_{(t_i^n, x_i^n)}, A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)})\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2), (2.3), (2.5), (2.7), (2.8)$ et le fait que $(ab)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ pour des nombres réels positifs a, b, pour tout $n \geq 1$ et $i = 0, 1, ..., n-1$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| &\leq h_{i+1}^n m(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) + h_{i+1}^n c\,(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) \\
&\quad + a_{i+1}^n + r\|x_{i+1}^n - x_i^n\| + \frac{h_{i+1}^n}{2}\,(1 + c(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|)) + \frac{1}{2}a_{i+1}^n + \frac{r}{2}\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \\
&\leq \sigma_{i+1}^n m\,(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) + \sigma_{i+1}^n c\,(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) + \sigma_{i+1}^n + \frac{1}{2}\sigma_{i+1}^n + r\sigma_{i+1}^n\|u_i^n\| \\
&\quad + \frac{r}{2}\sigma_{i+1}^n\|u_i^n\| + \frac{1}{2}\sigma_{i+1}^n\,(1 + c(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|)) \\
&= \sigma_{i+1}^n m\,(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) + \frac{3}{2}\sigma_{i+1}^n c(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|) + \frac{3}{2}r\sigma_{i+1}^n\|u_i^n\| + 2\sigma_{i+1}^n.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n &\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\|x_i^n\| \\
&+ \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right),
\end{aligned} \tag{2.13}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\|x_i^n\| \\
&\quad + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right) \\
&\leq \left(1 + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\right)\|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\|x_i^n\| \\
&\quad + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right).
\end{aligned}$$

En combinant ceci avec (2.12), on trouve

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \left(1 + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\right)\|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right) \\
&\quad + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\left(\|x_0\| + l_n\big(\|u_0^n\| + \cdots + \|u_{i-1}^n\|\big)\right) \\
&= \left(1 + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\right)\|u_i^n\| + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right) \\
&\quad + \sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\|x_0\| + l_n\sigma_{i+1}^n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\left(\|u_0^n\| + \cdots + \|u_{i-1}^n\|\right).
\end{aligned}$$

De (2.7), il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1}^n\| &\leq \left(1 + l_n\left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right)\right)\|u_i^n\| + l_n\left(m + \frac{3c}{2}\right)\|x_0^n\| \\
&\quad + l_n\left(m + \frac{3c}{2} + 2\right) + l_n^2\left(m + \frac{3c}{2}\right)\left(\|u_0^n\| + \|u_1^n\| + \cdots + \|u_{i-1}^n\|\right).
\end{aligned}$$

En appliquant Lemme 2.5, il résulte que

$$\begin{aligned}\|u_i^n\| &\leq \left(\|u_0\| + \sum_{k=0}^{i-1}\left[l_n\left(m+\frac{3c}{2}+2\right)+l_n\left(m+\frac{3c}{2}\right)\|x_0\|\right]\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1}\left(kl_n^2\left(m+\frac{3c}{2}\right)+l_n\left(m+\frac{3c}{2}+\frac{3r}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq \left(\|u_0\| + il_n\left(m+\frac{3c}{2}+2\right)+il_n\left(m+\frac{3c}{2}\right)\|x_0\|\right) \\ &\quad \exp\left(\sum_{k=0}^{i-1}kl_n^2\left(m+\frac{3c}{2}\right)+\sum_{k=0}^{i-1}l_n\left(m+\frac{3c}{2}+\frac{3r}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Or, on a

$$il_n \leq (n-1)l_n \leq \gamma(T)$$

et

$$\sum_{k=0}^{i-1} k = \frac{i}{2}(i-1).$$

D'où

$$\begin{aligned}\|u_i^n\| &\leq \left(\|u_0\| + \gamma(T)\left(m+\frac{3c}{2}+2\right)+\gamma(T)\left(m+\frac{3c}{2}\right)\|x_0\|\right) \\ &\quad \exp\left(\frac{i}{2}(i-1)l_n^2\left(m+\frac{3c}{2}\right)+il_n\left(m+\frac{3c}{2}+\frac{3r}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$\|u_i^n\| \leq M,$$

où M est la constante réelle positive définie par

$$\begin{aligned}M &:= \left(\|u_0\| + \gamma(T)\left(m+\frac{3c}{2}+2\right)+\gamma(T)\|x_0\|\left(m+\frac{3c}{2}\right)\right) \\ &\quad \exp\left(\left(\frac{m}{2}+\frac{3c}{4}\right)\gamma^2(T)+\left(m+\frac{3c}{2}+\frac{3r}{2}\right)\gamma(T)\right).\end{aligned}$$

En vertu de (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\|x_i^n\| &\leq \|x_0\| + l_n\left(\|u_0^n\|+\|u_1^n\|+\cdots+\|u_{i-1}^n\|\right) \\ &= \|x_0\| + l_n\sum_{k=0}^{i-1}\|u_k^n\| \\ &\leq \|x_0\| + Mil_n \\ &\leq \|x_0\| + \gamma(T)M.\end{aligned}$$

De retour à (2.8), on écrit

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| = h_{i+1}^n\|u_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n M.$$

Ce qui entraîne

$$\|x_i^n\| \leq M_1, \quad \|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n M_1, \tag{2.14}$$

où $M_1 := \max(M, \|x_0\| + \gamma(T)M)$.
Maintenant, en vertu de (2.7) et (2.13) il existe une constante réelle positive L telle que

$$\|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n L,$$

où

$$L := \left(m + \frac{3c}{2} + \frac{3r}{2}\right) M + \left(m + \frac{3c}{2}\right) M_1 + \left(m + \frac{3c}{2} + 2\right).$$

Donc

$$\|u_i^n\| \leq L_1, \ \|u_{i+1}^n - u_i^n\| \leq \sigma_{i+1}^n L_1, \tag{2.15}$$

avec $L_1 := \max(L, M)$.
On définit les fonctions u_n, x_n pour tout $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ par

$$\begin{aligned} u_n(t) &= u_i^n + \frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n) ds \right) - \int_{t_i^n}^{t} f(s, x_i^n, u_i^n) ds, \\ u_n(T) &= u_n^n, \end{aligned} \tag{2.16}$$

et

$$x_n(t) = x_i^n + (t - t_i^n) \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}, \quad x_n(T) = x_n^n, \tag{2.17}$$

on remarque que $u_n(t_{i+1}^n) = u_{i+1}^n$ et $x_n(t_{i+1}^n) = x_{i+1}^n$. Alors, les fonctions $u_n, x_n : I \to H$ sont absolument continues sur I.
De plus, pour tout $t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[$, de (2.16) on a,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{1}{t_{i+1}^n - t_i^n} \left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n) ds \right) - f(t, x_i^n, u_i^n), \tag{2.18}$$

et de (2.8) et (2.17), on trouve

$$\dot{x}_n(t) = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} = u_i^n, \tag{2.19}$$

l'inclusion différentielle (2.11) s'écrit alors sous la forme

$$-\dot{u}_n(t) - f(t, x_i^n, u_i^n) \in A_{(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)} u_{i+1}^n. \tag{2.20}$$

De (2.7), (2.14), (2.15) et (2.16), en tenant-compte de (2.3), on a

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_i^n\| &= \|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\right) - \int_{t_i^n}^{t} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\| \\
&\leq \|\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\left(u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\right)\| + \|\int_{t_i^n}^{t} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\| + \|\int_{t_i^n}^{t} f(s, x_i^n, u_i^n)ds\| \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, x_i^n, u_i^n)\|ds + \int_{t_i^n}^{t} \|f(s, x_i^n, u_i^n)\|ds \\
&\leq \|u_{i+1}^n - u_i^n\| + h_{i+1}^n m\left(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|\right) + h_{i+1}^n m\left(1 + \|x_i^n\| + \|u_i^n\|\right) \\
&\leq \sigma_{i+1}^n L_1 + 2h_{i+1}^n m(1 + M_1 + L_1) \\
&\leq \sigma_{i+1}^n L_1 + 2\sigma_{i+1}^n m(1 + M_1 + L_1) \\
&\leq (L_1 + 2m(1 + M_1 + L_1))l_n = L_2 l_n,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

avec $L_2 = L_1 + 2m(1 + M_1 + L_1)$.
Remarquons que pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\|u_n(t) - u_n(s)\| \leq L_1(\gamma(t) - \gamma(s)) + (L_1 + 2L_2)l_n. \tag{2.22}$$

En effet, fixons $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$ et $t \in [t_j^n, t_{j+1}^n[$ avec $j > i$. Alors, de (2.7), (2.15) et (2.21), on écrit

$$\begin{aligned}
\|u_n(t) - u_n(s)\| &= \|u_n(t) - u_j^n + u_j^n - u_i^n + u_i^n - u_n(s)\| \\
&\leq \|u_n(t) - u_j\| + \|u_j^n - u_i^n\| + \|u_i^n - u_n(s)\| \\
&\leq L_2 l_n + \|u_j^n - u_i^n\| + L_2 l_n \\
&= 2L_2 l_n + \|u_j^n - u_i^n\| \\
&\leq \sum_{l=0}^{j-i-1} \|u_{i+l+1}^n - u_{i+l}^n\| + 2L_2 l_n \\
&\leq \sum_{l=0}^{j-i-1} L_1 \sigma_{i+l+1}^n + 2L_2 l_n = L_1\left(\sigma_{i+1}^n + \sigma_{i+2}^n + \cdots + \sigma_j^n\right) + 2L_2 l_n \\
&= L_1\left(h_{i+1}^n + a_{i+1}^n + h_{i+2}^n + a_{i+2}^n + \cdots + h_j^n + a_j^n\right) + 2L_2 l_n \\
&= L_1((t_j^n - t_i^n) + (a(t_j^n) - a(t_i^n))) + 2L_2 l_n \\
&= L_1(\gamma(t_j^n) - \gamma(t_i^n)) + 2L_2 l_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)-u_n(s)\| &= L_1(\gamma(t_j^n)+\gamma(t_{i+1}^n)-\gamma(t_i^n)-\gamma(t_{i+1}^n))+2L_2l_n\\
&\leq L_1(\gamma(t)+\sigma_{i+1}^n-\gamma(s))+2L_2l_n\\
&= L_1(\gamma(t)-\gamma(s))+L_1\sigma_{i+1}^n+2L_2l_n\\
&\leq L_1(\gamma(t)-\gamma(s))+(L_1+2L_2)l_n.
\end{aligned}$$

En vertu des inclusions (2.3), (2.7), (2.14), (2.15) et (2.18), on obtient
pour tout $t\in[t_i^n,t_{i+1}^n[$

$$\begin{aligned}
\|\dot u_n(t)\| &= \left\|\frac{1}{h_{i+1}^n}(u_{i+1}^n-u_i^n+\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}f(s,x_i^n,u_i^n)ds)-f(t,x_i^n,u_i^n)\right\|\\
&\leq \frac{1}{h_{i+1}^n}(\|u_{i+1}^n-u_i^n\|+h_{i+1}^n\|f(s,x_i^n,u_i^n)\|)+\|f(s,x_i^n,u_i^n)\|\\
&= \frac{1}{h_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n-u_i^n\|+2\|f(s,x_i^n,u_i^n)\|\\
&\leq \frac{1}{h_{i+1}^n}\|u_{i+1}^n-u_i^n\|+2m(1+\|x_i^n\|+\|u_i^n\|)\\
&\leq \frac{1}{h_{i+1}^n}\sigma_{i+1}^nL_1+2m(1+L_1+M_1),
\end{aligned}$$

ce qui donne en tenant compte de la construction des suites (σ_i^n), (h_i^n), (a_i^n) (voir (2.5) et (2.7))

$$\begin{aligned}
\|\dot u_n(t)\| &\leq L_1\left(\frac{h_{i+1}^n+a_{i+1}^n}{h_{i+1}^n}\right)+2m(1+L_1+M_1)\\
&= L_1\left(1+\frac{a_{i+1}^n}{h_{i+1}^n}\right)+2m(1+L_1+M_1)\\
&= L_1\left(1+\frac{a(t_{i+1}^n)-a(t_i^n)}{t_{i+1}^n-t_i^n}\right)+2m(1+L_1+M_1). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de dérivation de Lebesgue (voir Théorème 1.22), il existe un sous-ensemble de mesure de Lebesgue nul $J\subset I$, tel que pour tout $t\in I\backslash J$ qui est différent du noeud t_i^n, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(t_{i+1}^n)-a(t_i^n)}{t_{i+1}^n-t_i^n}=\dot a(t).$$

On conclut alors que pour presque tout $t\in I$, l'existence d'une constante finie $a_t<+\infty$ telle que

$$\|\dot u_n(t)\|\leq a_t. \qquad (2.24)$$

Il est facile de remarquer que par (2.23)

$$\|\dot u_n(t)\|\leq\frac{L_1}{t_{i+1}^n-t_i^n}\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}r(s)ds+L_3,$$

où r est la fonction définie par $r(t) = 1 + \dot{a}(t), r \in L^2_{\mathbb{R}_+}(I)$, $L_3 = 2m(1 + L_1 + M_1)$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{L_1}{(t^n_{i+1} - t^n_i)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} + L_3,$$

et alors

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n\|^2_{L^2_H(I)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \|\dot{u}_n(t)\|^2 dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \left(\frac{L_1}{(t^n_{i+1} - t^n_i)^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} + L_3 \right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Comme $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_n\|^2_{L^2_H(I)} &\leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} \left(\frac{L_1^2}{t^n_{i+1} - t^n_i} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s) ds + L_3^2 \right) dt, \\
&\leq 2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{L_1^2}{t^n_{i+1} - t^n_i} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s) ds + L_3^2 \right) (t^n_{i+1} - t^n_i), \\
&= 2L_1^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t^n_i}^{t^n_{i+1}} r^2(s) ds + 2L_3^2 T,
\end{aligned}$$

car $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (t^n_{i+1} - t^n_i) = T$ par construction.
D'où, il existe une constante réelle positive S telle que

$$\|\dot{u}_n\|_{L^2_H(I)} \leq S = \left(2L_1^2 \int_0^T r^2(s) ds + 2L_3^2 T \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{2.25}$$

Posons pour tout $n \geq 1$

$$\theta_n(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t = 0 \\ t^n_i \quad si \quad t \in]t^n_i, t^n_{i+1}] \quad pour\ i \in \{0, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

et

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t = 0 \\ t^n_{i+1} \quad si \quad t \in]t^n_i, t^n_{i+1}] \quad pour \quad i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Rappelons que par construction (voir (2.5) et (2.7)) pour tout $t \in I$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(t) = t \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = t. \tag{2.26}$$

Maintenant, définissons, pour tout $t \in I$, la suite (y_n) par

$$y_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(\theta_n(s)) ds, \tag{2.27}$$

qui est affine par morceaux.

Par (2.8), on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
y_n(t) &= x_0 + \int_0^{t_1^n} u_n(\theta_n(s))ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} u_n(\theta_n(s))ds + \cdots + \int_{t_i^n}^{t} u_n(\theta_n(s))ds \\
&= x_0 + \int_0^{t_1^n} u_n(t_0^n)ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} u_n(t_1^n)ds + \cdots + \int_{t_i^n}^{t} u_n(t_i^n)ds \\
&= x_0 + \int_0^{t_1^n} u_0^n ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} u_1^n ds + \cdots + \int_{t_i^n}^{t} u_i^n ds \\
&= x_0 + (t_1^n - 0)u_0^n + (t_2^n - t_1^n)u_1^n + \cdots + (t - t_i^n)u_i^n \\
&= x_0^n + h_1^n u_0^n + h_2^n u_1^n + \cdots + (t - t_i^n)u_i^n \\
&= x_1^n + h_2^n u_1^n + \cdots + (t - t_i^n)u_i^n \\
&= x_i^n + (t - t_i^n)u_i^n \\
&= x_i^n + (t - t_i^n)\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n} = x_n(t).
\end{aligned}$$

On définit la suite (g_n) par

$$g_n(t) = f(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))), \textit{ pour tout } t \in I.$$

En vertu des inclusions (2.9), (2.20) et (2.27), on obtient

$$-\dot{u}_n(t) \in A_{(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))} u_n(\delta_n(t)) + g_n(t), \quad t \in I, \tag{2.28}$$

$$x_n(t) = x_0 + \int_0^t u_n(\theta_n(s))ds, \quad t \in I \tag{2.29}$$

$$u_n(\delta_n(t)) \in D(A_{(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))}), \quad t \in I. \tag{2.30}$$

<u>Partie 2</u> : ***Convergence des suites*** $(u_n)_n$ ***et*** $(x_n)_n$.

On remarque de (2.25) et la continuité absolue de $(u_n)_n$ que pour tout $s, t \in I$, $t \leq s$

$$\begin{aligned}
\|u_n(s) - u_n(t)\| = \|\int_t^s \dot{u}_n(\tau)d\tau\| &\leq \int_t^s \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \\
&\leq \|\dot{u}_n\|_{L^2_H(I)}(s-t)^{\frac{1}{2}} \\
&= (s-t)^{\frac{1}{2}} S, \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

c-à-d que $\{u_n(\cdot) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est équicontinue.

D'après (2.30), (2.14), on remarque que pour tout $t \in I$

$$(u_n(\delta_n(t))) \subset D(A(I \times M_1\overline{B}_H)).$$

De plus, de (2.15) on a $(u_n(\delta_n(t))) \subset L_1\overline{B}_H$, pour tout $t \in I$.
Ces inclusions, en tenant compte de l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ entraînent que l'ensemble $\{u_n(\delta_n(t)) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact dans H pour tout $t \in I$.
Il résulte de (2.26) et (2.31), que pour tout $t \in I$

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \to 0 \quad et \quad \|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\| \to 0 \quad lorsque \quad n \to \infty. \tag{2.32}$$

On en déduit que l'ensemble $\{u_n(t) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est relativement compact pour tout $t \in I$. En combinant ceci avec l'équicontinuité de (u_n) d'après le Théorème d'Ascoli (voir Théorème 1.78), il existe une fonction $u \in \mathcal{C}_H(I)$ telle que $(u_n)_n$ converge uniformément vers $u(\cdot)$.
D'après (2.25), on remarque que la suite $(\dot{u}_n)$ est bornée dans $L^2_H(I)$. Donc, on peut extraire une sous-suite de $(\dot{u}_n)$ notée $(\dot{u}_n)$ telle que

$$\dot{u}_n \rightharpoonup w \quad dans \quad L^2_H(I).$$

Rappelons que la fonction u_n est absolument continue pour tout n. Pour tout $z \in H$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$, on a

$$\begin{aligned}\langle z, \int_s^t \dot{u}_n(\tau)d\tau\rangle &= \int_0^T \langle z1_{]s,t]}(\tau), \dot{u}_n(\tau)\rangle d\tau \\ &= \langle z, u_n(t) - u_n(s)\rangle.\end{aligned}$$

Un passage à la limite dans l'égalité précédente entraîne

$$\langle z, \int_s^t w(\tau)d\tau\rangle = \langle z, u(t) - u(s)\rangle.$$

D'où, pour tous $s, t \in I$ tel que $s \leq t$, on obtient

$$\int_s^t w(\tau)d\tau = u(t) - u(s),$$

alors u est absolument continue et w coïncide presque par tout sur I avec $\dot{u}$,

$$\dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u} \quad dans \quad L^2_H(I). \tag{2.33}$$

En observant que

$$\begin{aligned}\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &= \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t) + u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\|.\end{aligned}$$

De (2.32) et de la convergence uniforme de $(u_n)_n$ vers u, on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0 \quad pour\ tout \quad t \in I, \tag{2.34}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\| = 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in I. \tag{2.35}$$

Des relations et convergence (2.29), (2.15) et (2.34), le théorème de la convergence dominée de Lebesgue donne pour $t \in I$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \|u_n(\theta_n(s)) - u(s)\| ds = 0.$$

Or

$$\| \int_0^t (u_n(\theta_n(s)) - u(s)) ds\| = \| \int_0^t u_n(\theta_n(s)) ds - \int_0^t u(s) ds\| \leq \int_0^t \|u_n(\theta_n(s)) - u(s)\| ds,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \| \int_0^t u_n(\theta_n(s)) ds - \int_0^t u(s) ds\| = 0.$$

De (2.27), il s'en suit que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n(t) &= \lim_{n\to\infty} x_0 + \int_0^t u_n(\theta_n(s)) ds \\ &= x_0 + \int_0^t u(s) ds = x(t). \end{aligned} \tag{2.36}$$

On conclut que $\dot{x} \equiv u(\cdot)$ p.p., $x(0) = x_0$ et $x(\cdot)$ est absolument continue.

D'après (2.15), (2.26), (2.27), (2.29) et (2.36), on trouve pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &= \lim_{n\to\infty} \|y_n(\theta_n(t)) - x(t)\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|y_n(\theta_n(t)) - y_n(t) + y_n(t) - x(t)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\|y_n(\theta_n(t)) - y_n(t)\| + \|y_n(t) - x(t)\|) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\|x_0 + \int_0^{\theta_n(t)} u_n(\theta_n(s)) ds - x_0 - \int_0^t u_n(\theta_n(s)) ds\| \\ &+ \|y_n(t) - x(t)\|) \\ &= \lim_{n\to\infty} \| \int_{\theta_n(t)}^t u_n(\theta_n(s)) ds\| + \|y_n(t) - x(t)\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (L_1|t - \theta_n(t)| + \|y_n(t) - x(t)\|). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n(t) - x(t)\| = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} L_1|t - \theta_n(t)| = 0.$$

Il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| = 0. \tag{2.37}$$

De même, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| = 0. \tag{2.38}$$

De (2.34), (2.37) et la continuité de $f(t,\cdot,\cdot)$, pour $t \in I$, il s'en suit que

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))) - f(t, x(t), u(t))\| = 0.$$

En combinant (2.3), (2.14) et (2.15), il résulte que pour tout $t \in I$,

$$\|f(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t)))\| \le m(1 + M_1 + L_1) = M_2 < +\infty.$$

Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|f(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))) - f(t, x(t), u(t))\|^2 dt = 0,$$

d'où

$$(f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot)), u_n(\theta_n(\cdot)))) \text{ converge dans } L^2_H(I) \; vers \; f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)).$$

De cette convergente, on déduit que

$$f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot)), u_n(\theta_n(\cdot))) \text{ converge faiblement dans } L^2_H(I) \; vers \; f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)), \tag{2.39}$$

i.e., pour tout $g \in L^2_H(I)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle g(t), f(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t)))\rangle dt = \int_0^T \langle g(t), f(t, x(t), u(t))\rangle dt.$$

<u>**Partie 3**</u> : ***Établir les inclusions au problème*** (P_1).

$$-\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in I, \tag{2.40}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in I,$$

$$u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad t \in I, \tag{2.41}$$

$$u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}),\; x(0) = x_0 \in H.$$

Nous montrons d'abord (2.41). Rappelons que $u_n(\delta_n(t)) \in D(A_{(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))})$ pour tout $t \in I$ (voir (2.30)).

De $(\mathcal{H}_2)$, (2.5), (2.7) et (2.38), on obtient

$$\begin{aligned} dis\left(A_{(\delta_n(t), x_n(\delta_n(t)))}, A_{(t,x(t))}\right) &\le |a(\delta_n(t)) - a(t)| + r\|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| \\ &\le l_n + r\|x_n(\delta_n(t)) - x(t)\| \to 0 \quad lorsque\ n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Remarquons, par $(\mathcal{H}_1)$, (2.14) et (2.15) que la suite $(w_n)_n = \Big(A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}u_n\big(\delta_n(t)\big)\Big)_n$ est bornée. Alors, on peut extraire une sous-suite de (w_n) qui converge faiblement vers $w \in H$.
Comme la suite $(u_n(\delta_n(t)))_n$ converge vers $u(t)$ dans H (voir (2.35)), alors appliquant Lemme 2.2, on conclut que $u(t) \in D(A_{(t,x(t))})$, $\forall\, t \in I$.
Maintenant, démontrons (2.40). Rappelons que par (2.33) et (2.39), on déduit que $(\dot{u}_n + g_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{u}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ dans $L^2_H(I)$.
Par le Théorème de Banach Mazur (Théorème 1.54), il existe une suite $(\eta_j)_j$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}, \eta_j \in co\{\dot{u}_k + g_k, k \geq j\}$ et $(\eta_j)_j$ converge fortement vers $\dot{u}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ dans $L^2_H(I)$.
Alors, on peut extraire une sous-suite de (η_j) qui converge p.p. vers $\dot{u}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$.
En d'autre termes, il existe un sous-ensemble Y de I de mesure de Lebesgue nulle et une sous-suite $(j_p)_p$ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $t \in I\backslash Y$, $(\eta_{j_p}(t))$ converge vers $\dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t))$.
Par conséquent, pour $t \in I\backslash Y$

$$\dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)) \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{co}\{\dot{u}_k(t) + g_k(t), k \geq j_p\} \subset \overline{co}\{\dot{u}_k(t) + g_k(t), k \geq j_p\},$$

par le Théorème de séparation 1.55, on obtient pour tout $t \in I\backslash Y$ et tout $w \in H$

$$\langle \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)), w\rangle \leq \limsup_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), w\rangle. \tag{2.43}$$

Rappelons que

$$u(t) \in D(A_{(t,x(t))}),\ \forall\, t \in I.$$

Pour démontrer que

$$-\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in I$$

il suffit de montrer que

$$\langle \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)), u(t) - z\rangle \leq \langle A^0_{(t,x(t))}z, z - u(t)\rangle \text{ p.p. } t \in I,$$

pour tout $z \in D(A_{(t,x(t))})$, par Lemme 2.1.
Soit $z \in D(A_{(t,x(t))})$. Nous allons appliquer Lemme 2.4 aux opérateurs maximaux monotones $A_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}$ et $A_{(t,x(t))}$ qui satisfont (2.42). Alors il existe une suite (z_n) tel que $z_n \in D(A_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))})$

$$z_n \to z \ et\ A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n \to A^0_{(t,x(t))}z. \tag{2.44}$$

Pour $n \geq 1$, soit $I\backslash Y_n$ l'ensemble sur lequel (2.28) est vérifiée.
Comme l'opérateur $A_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}$ est monotone (voir Définition 1.66) et

$A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n \in A_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n$, alors en particulier pour $t \in I\backslash Y_n$

$$\langle A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n + \dot{u}_n(t) + g_n(t), z_n - u_n(\delta_n(t))\rangle \geq 0,$$

et

$$\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), \dot{u}_n(\delta_n(t)) - z_n\rangle \leq \langle A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n, z_n - u_n(\delta_n(t))\rangle. \tag{2.45}$$

D'où, pour $t \in I\backslash(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n \cup Y \cup J)$

$$\begin{aligned}\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u(t) - z\rangle =& \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u_n(\delta_n(t)) - z_n + z_n - u_n(\delta_n(t)) + u(t) - z\rangle \\ =& \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u_n(\delta_n(t)) - z_n\rangle \\ &+ \langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u(t) - u_n(\delta_n(t)) - (z - z_n)\rangle.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en tenant compte de (2.24), (2.45), (2.3) avec (2.14) et (2.15) il résulte

$$\begin{aligned}\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u(t) - z\rangle \leq& \langle A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n, z_n - u_n(\delta_n(t))\rangle \\ &+ \|\dot{u}_n(t) + g_n(t)\|\|u(t) - u_n(\delta_n(t)) - (z - z_n)\| \\ \leq& \langle A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n, z_n - u_n(\delta_n(t))\rangle \\ &+ (\|\dot{u}_n(t)\| + \|g_n(t)\|)(\|u(t) - u_n(\delta_n(t))\| + \|z - z_n\|) \\ \leq& \langle A^0_{(\delta_n(t),x_n(\delta_n(t)))}z_n, z_n - u_n(\delta_n(t))\rangle \\ &+ (a_t + m(1 + M_1 + L_1))(\|u(t) - u_n(\delta_n(t))\| + \|z - z_n\|).\end{aligned}$$

Par (2.35) et (2.44), on obtient

$$\limsup_{n\to\infty}\langle \dot{u}_n(t) + g_n(t), u(t) - z\rangle \leq \langle A^0_{(t,x(t))}z, z - u(t)\rangle.$$

Cette dernière inégalité avec (2.43) donne

$$\langle \dot{u}(t) + f(t, x(t), u(t)), u(t) - z\rangle \leq \langle A^0_{(t,x(t))}z, z - u(t)\rangle \text{ p.p. } t \in I.$$

L'inclusion différentielle (2.40) est donc vraie et le problème considéré a au moins une solution absolument continue $(u, x) : I \to H \times H$.
De plus, par (2.22) pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a par passage à la limite quand $n \to +\infty$

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L_1(t - s + a(t) - a(s)).$$

Par suite,

$$\frac{\|u(t) - u(s)\|}{t - s} \leq L_1\left(1 + \frac{a(t) - a(s)}{t - s}\right),$$

lorsque s tend vers t, on trouve

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \xi\,(1+\dot{a}(t)) \text{ p.p. } t \in I,$$

où ξ est la constante réelle positive définie par $\xi = L_1$.
Ceci achève la démonstration du théorème. ■

2.3 Étude du problème du second-ordre (P_2)

Théorème 2.7. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Supposons que pour tout $(t,x) \in I \times H, A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone satisfait $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$. Soit $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes telle que*

(j) F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable sur H, c-à-d, pour tout $t \in I$ pour tout $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t,\cdot,\cdot))$ est $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable,

(jj) Pour tout $t \in I, F(t,\cdot,\cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement, c-à-d, pour tout $t \in I$ pour tout $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t,\cdot,\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $H \times H$,

(jjj) F satisfait à la condition suivante

$$\exists m > 0 : \|P_{F(t,x,y)}(0)\| \leq m(1+\|x\|+\|y\|) \quad \textit{pour tout } (t,x,y) \in I \times H \times H.$$

Alors, pour tout $(x_0,u_0) \in H \times D(A_{(0,x_0)})$ le problème d'évolution

$$(P_2)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}u(t) + F(t,x(t),u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0,T] \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T] \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad \forall t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \in H, \quad u(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}), \end{cases}$$

admet une solution absolument continue $(x,u) : I \to H \times H$.
En d'autres termes, l'inclusion différentielle du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in A_{(t,x(t))}\dot{x}(t) + F(t,x(t),\dot{x}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ \dot{x}(t) \in D(A_{(t,x(t))}),\ t \in I \\ x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0, \end{cases}$$

a au moins une solution $x(\cdot) \in W^{2,2}(I,H)$.

Démonstration. Nous allons utiliser la mesurabilité de l'élément de norme minimale. Définissons pour tout $(t, x, y) \in I \times H \times H$, l'élément de norme minimale de $F(t, x, y)$ par $h(t, x, y) = P_{F(t,x,y)}(0)$ où $P_{F(t,x,y)}(0)$ est la projection de 0 sur l'ensemble $F(t, x, y)$ pour tout $(t, x, y) \in I \times H \times H$.
Du Théorème 1.63, pour tout $(x, y) \in H \times H$, $t \longmapsto h(t, x, y)$ est Lebesgue mesurable et satisfait (par (jjj))

$$\|h(t, x, y)\| \leq m(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \textit{pour tout} \quad (t, x, y) \in I \times H \times H. \tag{2.46}$$

En utilisant la partition de l'intervalle I et la construction des suites $(u_n)_n$ et $(x_n)_n$ comme dans la démonstration du Théorème 2.6 (voir **<u>Partie 1</u>**) avec $h(\cdot, \cdot, \cdot)$ au lieu de $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, on considérant l'inclusion différentielle suivante

$$-\dot{u}_n(t) \in A_{(\delta_n(t), x(\delta_n(t)))} u_n(\delta_n(t)) + h_n(t) \quad \text{p.p. } t \in I,$$

où

$$h_n(t) = h(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))), \text{ pour tout } t \in I.$$

De (2.46), (2.14) et (2.15), on a

$$\|h_n(t)\| \leq m(1 + M_1 + L_1) \quad \textit{pour} \quad t \in I \text{ p.p. } n \geq 1.$$

Ensuite, on remarque que

$$\sup_n \int_0^T \|h_n(s)\|^2 ds \leq m^2 T(1 + M_1 + L_1)^2 < +\infty.$$

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite notée encore (h_n) qui converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers une fonction g.
De plus, en procédant de manière analogue aux **<u>Parties 2</u> et 3**, on obtient l'inclusion différentielle

$$-\dot{u}(t) \in A_{(t, x(t))} u(t) + g(t) \quad \text{p.p. } \ t \in I. \tag{2.47}$$

Enfin, il reste à montrer que

$$g(t) \in F(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } \ t \in I.$$

Remarquons par construction que $h_n(t) \in F(t, x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t)))$ pour tout $t \in I$ et tout $n \geq 1$.
Puisque $(x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t)))$ converge ponctuellement vers $(x(t), u(t))$ pour tout $t \in I$ et $(g_n)_n$ converge faiblement dans $L^2_H(I)$ vers g, par (jj) $F(t, \cdot, \cdot)$ est scalairement semi-continue

supérieurement sur $H \times H$. Pour tout $t \in I$, par le Théorème 1.65, on obtient l'inclusion cherchée.

En combinant ceci avec (2.47). On déduit que le problème (P_2) admet au moins une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$. ■

CHAPITRE 3

CAS PARTICULIER DU PROCESSUS DE LA RAFLE

Nous allons d'abord appliquer le résultat d'existence du Théorème 2.6 au cas du processus de la rafle correspondant (P_3).

Corollaire 3.1. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application telle que*
$(\mathcal{H}'_1)$ *pour tout $(t,y) \in I \times H$, $C(t,y)$ est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de H.*
$(\mathcal{H}'_2)$ *il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1.2}(I)$ qui est positive sur $[0,T[$ et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que*

$$|d(x, C(t,u)) - d(x, C(s,v))| \leq |a(t) - a(s)| + r\|u - v\|, \quad \forall t, s \in I, \forall x, v, u \in H.$$

$(\mathcal{H}'_3)$ *pour tout sous-ensemble borné $B \subset H$, l'ensemble $C(I \times B)$ est boule-compact.*
Soit $f : I \times H \times H \to H$ une fonction satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.6. Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times C(0, x_0)$, l'inclusion différentielle des théorèmes du chapitre précédent découlent les résultats d'existence correspondants aux problèmes suivants

$$(P_3) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))}u(t) + f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. } t \in I, \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad t \in I \\ u(t) \in C(t, x(t)), \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \in C(0, x_0), \; x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

admet une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$.

Plus précisément, le processus de la rafle perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))}\dot{x}(t) + f(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in C(t, x(t)), \quad t \in I \\ x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = u_0 \in C(0, x_0), \end{cases}$$

admet au moins une solution dans $W^{2,2}(I, H)$.

Démonstration. On pose $A_{(t,x)} = N_{C(t,x)}$, pour tout $(t, x) \in I \times H$. Alors, on remarque pour tout $(t, x) \in I \times H$, $A_{(t,x)} : D(A_{(t,x)}) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone (en tenant compte de (1.4) et $(\mathcal{H}'_1)$).
La condition $(\mathcal{H}_3)$ découle immédiatement de $(\mathcal{H}'_3)$, en notant que $D(A_{(t,x)}) = C(t, x)$.
De (1.4) on remarque que $A^0_{(t,x)}y = 0$ (car $0 \in N_{C(t,x)}$) pour tout $(t, x, y) \in I \times H \times H$, alors l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée.
Il nous reste à vérifier $(\mathcal{H}_2)$.
De (1.9), les ensembles $C(t, u)$, $C(s, v)$ sont convexes fermés, alors on a

$$dis(N_{C(t,u)}, N_{C(s,v)}) = d_H(C(t, u), C(s, v)). \tag{3.1}$$

En vertu de $(\mathcal{H}'_2)$ et (3.1), la condition $(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite.
D'où, toutes les conditions du Théorème 2.6 sont vérifiées. Ce dernier garantit l'existence d'une solution au processus de la rafle considéré (P_3).
La démonstration du corollaire est terminée. ∎

Du Théorème 2.7 découle le résultat d'existence correspondant au cas du processus de la rafle (P_4).

Corollaire 3.2. *Soit H un espace de Hilbert réel séparable. Soit $C : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application telle que*
$(\mathcal{H}'_1)$ *Pour tout $(t, y) \in I \times H$, $C(t, y)$ est un sous-ensemble convexe fermé non-vide de H.*
$(\mathcal{H}'_2)$ *Il existe une constante réelle positive r, et une fonction $a \in W^{1,2}(I)$ qui est positive sur $[0, T[$ et croissante avec $a(T) < \infty$ et $a(0) = 0$ telle que*

$$|d(x, C(t, u)) - d(x, C(s, v))| \leq |a(t) - a(s)| + r\|u - v\|, \quad \forall t, s \in I, \forall x, v, u \in H.$$

$(\mathcal{H}'_3)$ *Pour tout sous-ensemble borné $B \subset H$, l'ensemble $C(I \times B)$ est une boule compacte.*
Soit $F : I \times H \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs convexes faiblement compactes telle que

(j) F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H)$-mesurable sur H, c-à-d, pour tout $t \in I$ pour tout $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t, \cdot, \cdot))$ est $(\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(H) \otimes \mathcal{B}(H))$-mesurable,

(jj) Pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot, \cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement, c'est-à-dire, pour tout $t \in I$ pour tout $e \in H$, l'application d'appui $\delta^*(e, F(t, \cdot, \cdot))$ est semi-continue supérieurement sur H.

(jjj) F satisfait à la condition suivante

$$\exists m > 0 : \|P_F(t, x, y)(0)\| \leq m(1 + \|x\| + \|y\|) \quad \textit{pour tout } (t, x, y) \in I \times H \times H.$$

Alors, pour tout $(x_0, u_0) \in H \times C(0, x_0)$, le problème

$$(P_4) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,x(t))} u(t) + F(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds, \ t \in I \\ u(t) \in D(A_{(t,x(t))}) \subset C(t, x(t)), \quad t \in I \\ u(0) = u_0 \in D(A(0, x_0)) \subset C(0, x_0), \quad x(0) = x_0 \in H, \end{cases}$$

a une solution absolument continue $(x, u) : I \to H \times H$.
Plus précisément, le processus de la rafle perturbé du second-ordre

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))} \dot{x}(t) + F(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{p.p. } t \in I \\ \dot{x}(t) \in D(A_{(t,x(t))}), \quad t \in I \\ x(0) = x_0, \ \dot{x}(0) = u_0 \in D(A_{(0,x_0)}) \subset C(0, x_0), \end{cases}$$

admet au moins une solution $x \in W^{2,2}(I, H)$.

Démonstration. Soit $A_{(t,x)} = N_{C(t,x)}$, pour tout $(t, x) \in I \times H$. Alors, d'après la démonstration du Corollaire 3.1, l'opérateur $A_{(t,x)}$ vérifient les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$-$(\mathcal{H}_2)$-$(\mathcal{H}_3)$ du Théorème 2.7. Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 2.7 sont satisfaites. Ce dernier assure l'existence d'une solution au processus de la rafle considéré (P_4). ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées à établir un résultat d'existence de solution en dimension infinie pour une inclusion différentielle du second-ordre dans le cadre d'un espace de Hilbert séparable régi par des opérateurs maximaux monotones (voir [13]).

Le problème considéré est exprimé sous forme d'un problème couplé par une inclusion différentielle du premier ordre et une équation différentielle. D'autres problèmes couplés par des équations fractionnaires existent dans le même papier (voir [13]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Aizicovici, S., Staicu, V.** : *Multivalued evolution equations with nonlocal intial conditions in Banach spaces*, NoDEA, Nolinear Diff. Equ. Appl. 14 (3), 361-376 (2007).

[2] **Aubin, J.P., Cellina, A.** : *Differential Inclusions*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 264., Springer, (1984).

[3] **Aubin, J.P. Frankowska, H.** *Set valued analysis*, Birkouiser, Boston, (1990).

[4] **Azzam-Laouir, D., Belhoula, W., Castaing C. and Monteiro Marques, M.D.P.** : *Perturbed evolution problems with absolutely continuous variation in time and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. 21 (2), 1-32 (2019).

[5] **Azzam-Laouir, D., Belhoula, W., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P.** : *Multivalued perturbation to evolution problems involving time dependent maximal monotone operators*, Evol. Equ. Control Theory 9(1), 219-254 (2020).

[6] **Azzam-Laouir, D., Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P.** : *Perturbed evolution problems with continuous bounded variation in time and applications*, Set-Valued Var. Anal. 26, 693-728 (2018).

[7] **Barbu, V.** : *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff Int. Publ., Leyden (1976).

[8] **Barbu, V., Precupanu, T.** : *Convexity and optimisation in Banach space*, Springer, Romania (2012).

[9] **Brézis, H.** : *Opérateurs maximaux monotone et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amesterdam, London (1973).

[10] **Brézis, H.** : *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Masson (1993).

[11] **Castaing, C.** : *Quelques résultats de compacité liés a l'intégration*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), 1732-1735 and Bull. Soc. Math. France, 31, 73-81 (1972).

[12] **Castaing, C., Godet-Thobie, C., Truong, L.X.** : *Fractional order of evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator*, Mathematics (2020).

[13] **Castaing, C., Godet-Thobie, C., Saïdi, S.** :*On fractional evolution inclusion coupled with a time and state dependent maximal monotone operator*, Set-Valued Var. Anal. 30(2), 621-656 (2022).

[14] **Castaing, C., Monteiro Marques, M.D.P., Raynaud de Fitte, P.** : *Second-order evolution problems with time-dependent maximal monotone operator and applications*, Adv. Math. Econ. 22, 25-77 (2018).

[15] **Castaing, C., Valadier, M.** : *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math, 580, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1977).

[16] **Kunze, M., Monteiro Marques, M.D.P.** : *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains*, Set-Valued Anal. 5, 57-72 (1997).

[17] **Latli, H.** : *Étude d'une inclusion différentielle régie par des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps et de l'état*, mémoire de master, Université MSB Jijel, 2022.

[18] **Saïdi, S.** : *A perturbed second-order problem with time and state-dependent maximal monotone operators*, Discuss. Math., Differ. Incl. Control Optim. 41, 61-86 (2021).

[19] **Sonntag, Y.** : *Topologie et analyse fonctionnelle*, ellipses, édition marketing S.A, (1998).

[20] **Vladimirov, A.A.** : *Nonstationary dissipative evolution equations in Hilbert space*, Nonlinear Anal. 17, 499-518 (1991).