République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre :
№ de série :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.
Option Analyse Fonctionnelle.

Thème

Inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones

par

Maoudj Yousra

Soutenu le **03/07/ 2023**

Devant le jury

Président	D. Affane	Prof. Université de Jijel
Encadreur	S. Izza	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	N. Fetouci	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

Avant tous, je remercie Allah le tout puissant qui m'a guidé tout au long de m'a vie, qui m'a permis de m'a instruire et d'arriver aussi loin dans mes études, qui m'a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui m'a permis d'achever ce travail.

C'est avec un grand honneur que je remercie ma directrice Madame ***Sabrina Izza***, Maitre de conférence à l'université de Jijel, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribués à alimenter mes réflexions

Je tiens à remercier Madame ***Doria Affane***, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté la présidence du jury de mon travail, qu'elle trouve ici toutes mes expressions respectueuses.

Je remercie également Madame ***Fetouci Nora*** Maitre de conférence à l'université de Jijel, de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent à ma famille pour son soutien sans faille, pour l'équilibre qu'elle m'a apportée et pour ses encouragements.

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur. Celui qui n'a pas pus voir l'aboutissement de ce travail. Je sais que tu aurais pu être fièr de moi. Que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi ***mon père*** *je t'aime.*

A la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ***ma mère*** *que j'adore.*

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à mes très chers frères : ***Nassim et Mouad****. A mes sœurs* ***Hanan, Nassiba et Meriem****.*

A à tous mes amis, et en particulier : ***Iman, Chaima et Kaouter.*** *Elles n'ont cessé d'être présentes pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection. Qu'elles m'ont donné la force de me consacrer entièrement et uniquement à mes études. Je vous souhaite du fond de mon cœur une belle vie pleine de joie, de bonheur et de succès. A toute personne qui a une place dans ma vie et que, j'estime.*

A toutes les personnes qui m'aiment et que j'aime.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs maximaux monotones (aussi celles gouvernées par des opérateurs de grandes classes comme les opérateurs accrétifs, m-accrétifs,...), ont été intensivement étudiées au milieu des années soixante. L'évolution des inclusions a fait l'objet de recherches dans la communauté mathématique à différentes époques. Les résultats connus dans le cas d'un opérateur maximal monotone avec domaine dépendant du temps [8],[12] comme généralisation du processus de la rafle, Vladimirov [12] a étudié les inclusions d'évolution où des domaines dépendants du temps ont été considérés, avec l'hypothèse que l'application $F(t,.)$ est juste maximale monotone pour chaque $t \geq 0$, sans autre hypothèse structurelle ou géométrique. Cependant, une hypothèse de régularité très forte a été imposée par rapport à la pseudo-distance définie par Vladimirov dans [11]. En particulier, l'application $F(t,.)$ doit être uniformément continue, c'est-à-dire ; qu'il existe une suite d'opérateurs constants par morceaux $F_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tels que pour chaque $t \in [0,T]$

$$\lim_{i \longrightarrow \infty} d_H(F_i(t,.), F(t,.)) = 0.$$

Kunze et Monteiro-Marques [8] ont ensuite généralisé cette ligne de travail pour considérer des systèmes où la régularité par rapport au temps peut être relaxée, de sorte que la pseudo-distance entre $F(t_1,.)$ et $F(t_2,.)$ soit bornée par $|\mu(t_1) - \mu(t_2)|$ pour certaines fonctions à variations bornées $\mu : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$. Certains résultats développés dans le contexte des processus de la rafle sont donc considérés dans ce cadre. L'oeuvre commencée par Vladimirov, et plus tard généralisée dans une certaine mesure par Kunze et Monteiro-Marques, est en effet une tentative de traiter les inclusions différentielles avec plus de généralités dans le cadre des opérateurs maximaux monotones dépendants du temps.

Cependant, ils imposent de très fortes hypothèses dans la dérivation de leurs résultats, ce qui rend leur applicabilité quelque peu restrictive.

Ce mémoire représente mes premiers pas dans le domaine de la recherche, ceci par la lecture, l'étudie et le détail de quelques résultats de l'article [6], portant sur les solutions des inclusions différentielles dépendant du temps et gouvernées par des opérateurs maximaux monotones.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres. Dans le **Chapitre** 1, on rappelle des notions de base sur l'analyse multivoque, l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle des résultats et des théorèmes fondamentaux utilisés tout au long de ce mémoire.

Dans le **Chapitre** 2 on introduit des résultats de convergences dans les espaces fonctionnels utilisés dans le **Chapitre** 3.

Dans le **Chapitre** 3 on s'intéresse à l'existence des solutions d'une inclusion différentielle gouvernée par un opérateurs maximal monotone, le problème concerne l'étude de l'existence de solutions et l'unicité de la solution sur $[0, T]$, pour l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in -F(t, x(t)), \;\; x(0) = x_0, \;\; t \in [0, T]$$

où $F(t, .) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est un opérateur maximal monotone pour tout $t \in [0, T]$.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre nous allons introduire les définitions et les théorèmes que nous avons utilisés dans ce mémoire

1.1 Notations

On note

- $\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- E : espace topologique muni de la norme $|.|_E$.
- E' : dual topologique de E.
- $\mathbb{B}$: La boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{B}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$: la boule fermée de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$.
- $co(A)$: l'enveloppe convexe de A.
- $\overline{co}(A)$: l'enveloppe convexe fermée de A.
- $cl(A)$: la fermeture de A.
- $\mathcal{N}_\infty^\#$: l'ensemble de toutes les sous-suites de $\mathbb{N}$.
- $p.p$: presque partout.
- $\sigma(E, E')$: la topologie faible de E.
- $x_n \to x$: exprime que la suite x_n converge fortement vers x.

- $x_n \rightharpoonup x$: exprime que la suite x_n converge faiblement vers x.
- $\vartheta(x_0)$: l'ensemble des voisinages de x.
- $int(A)$: l'intériur de l'ensemble A.
- $\| \,.\, \|_E$: norme sur l'espace E.
- $\| \,.\, \|_{E'}$: norme sur l'espace E'.
- $\langle x, y\rangle := x^\top y$: le produit scalaire de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ où $x^\top$ désigne la transposée de x.
- $|x| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$: la norme euclidienne d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$.
- I : l'opérateur d'identité.
- $AC([0,T], \mathbb{R}^n)$: l'espace des fonctions absolument continues définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
- $L^p([0,T], \mathbb{R}^n)$: l'espace des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, p^{ieme} intégrables $(1 \leq p < +\infty)$ muni de la norme définie par

$$\|u(.)\|_{L^p} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

- $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$: l'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme définie par

$$\|u(.)\|_{L^\infty} = \inf\left\{c \geq 0 : |u(t)| \leq c \;\; p.p. \; sur \; [0,T]\right\}.$$

1.2 Continuité des fonctions

Définition 1.2.1. *(**continuité simple**). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \longrightarrow F$ et $x_0 \in E$. On dit que f est continue au point x_0 si et seulement si ;*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in E, \; \|x - x_0\|_E \leq \delta, \; alors \; \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.2. *(**continuité uniforme**). Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour tous $x, y \in E$*

$$\|x - y\|_E < \delta(\varepsilon), \; alors \; \|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon.$$

La continuité uniforme est une propriété plus forte que la continuité simple. Le théorème qui suit assure que dans certains cas une fonction continue est uniformément continue.

Théorème 1.2.3. *(**Théorème de Heine**). Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur une partie compacte est uniformément continue.*

Définition 1.2.4. *[1] (**absolument continue**). Soit E espace de Banach. une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est dite absolument continue si est seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k; b_k]$ vérifiant,*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta \ \text{ on a } \ \sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\|_E < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.5. *[1] Soit E espace de Banach. Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Remarque 1.2.6.

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

Définition 1.2.7. *Soient E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

a) On dit que f est semicontinue inférieurement (s.c.i.) au point $x_0 \in E$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$ avec $h < f(x_0)$, il existe $V_{x_0} \in \vartheta(x_0)$ tel que $h < f(x), \forall\, x \in V_{x_0}$.

b) On dit que f est semicontinue supérieurement (s.c.s.) au point $x_0 \in E$, si pour tout $h \in \mathbb{R}$, avec $h > f(x_0)$, il existe $V_{x_0} \in \vartheta(x_0)$ tel que $h > f(x)$, $\forall\, x \in V_{x_0}$.

Remarque 1.2.8. *Soient E un espace topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Alors,*

1) f est s.c.i. au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x \in V_{x_0},\ f(x) - f(x_0) > -\epsilon$.

2) f est s.c.s. au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x \in V_{x_0},\ f(x) - f(x_0) < \epsilon$.

3) f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x \in V_{x_0},\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Définition 1.2.9. *Soient E un espace topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$.*

1) $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \sup\limits_{V \in \vartheta(x_0)} (\inf\limits_{x \in V} f(x))$.

2) $\limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \inf\limits_{V \in \vartheta(x_0)} (\sup\limits_{x \in V} f(x))$.

Proposition 1.2.10. *Soient E un espace topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in E$. Alors*

a) f est s.c.i. au point $x_0 \Leftrightarrow \liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

b) f est s.c.s. au point $x_0 \Leftrightarrow \limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$.

Proposition 1.2.11. *a) La limite supérieure d'une somme est inferieure ou égale à la somme des limites supérieures.*

b) La limite inferieure d'une somme est supérieure ou égale à la somme des limites inferieures.

Proposition 1.2.12. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$ tel que $\liminf\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une suite $x_n \longrightarrow x_0$ telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = l$.*

Proposition 1.2.13. *Soient E un espace vectoriel normé, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in E$ tel que $\limsup\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Alors, il existe une suite $x_n \longrightarrow x_0$ telle que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = l$.*

Définition 1.2.14. ***(équicontinue)**. Soit une collection $\mathcal{F}$ de fonctions $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$, pour chaque $f \in \mathcal{F}$ et chaque s, t satisfaisant $|t - s| < \delta$.*

Définition 1.2.15. *Soit une collection $\mathcal{F}$ de fonctions $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est bornée ponctuellement si pour tout $t \in [0, T]$, il existe un $M_t < \infty$ tel que $|f(t)| \leq M_t$, pour tout $f \in \mathcal{F}$.*

Théorème 1.2.16. ***(Arzelá-Ascoli)**. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{F}$ est équicontinue et bornée ponctuellement, alors toute suite (f_n) dans $\mathcal{F}$ a une sous-suite qui converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $[0, T]$.*

1.3 Multi-applications

On introduit dans cette section le concept d'une multi-application, aussi appelée application multivoque ou multifonction, ces définitions ont été prises de la référence [1].

Définition 1.3.1. *Soient X, T deux ensembles non vides. On dit que F est une multi-application ou application multivoque de T dans X si F est une application de T à valeurs dans 2^X où $2^X = P(X)$ l'ensemble de toutes les parties de X, et on note*

$$F : T \longrightarrow 2^X \ \ ou \ \ F : T \rightrightarrows X.$$

Donc pour tout $t \in T$, $F(t)$ est un sous ensemble de X. Si l'ensemble $F(t)$ contient au plus un élément $x \in X$ on dira que F est une application univoque.

Définition 1.3.2. *Soit $F : T \rightrightarrows X$ une multi-application. Alors*

1. *Le domaine de F qu'on note $D(F)$ est défini par*

$$D(F) = \{t \in T;\ F(t) \neq \emptyset\}.$$

2. *L'image de F qu'on note $Im(F)$ est définie par*

$$Im(F) = \{x \in X;\ \exists t \in T,\ x \in F(t)\}.$$

3. *La multi-application inverse $F^{-1} : X \rightrightarrows 2^T$ est définie par*

$$F^{-1}(x) = \{t \in T;\ x \in F(t)\},\ \forall x \in X.$$

4. *Le graphe de F qu'on note $gph(F)$ est le sous ensemble de $T \times X$ défini par*

$$gph(F) = \{(t, x) \in T \times X;\ x \in F(t)\}.$$

Définition 1.3.3. *Pour une suite d'ensembles $(S_l)_{l\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^n$, la limite extérieure est définie comme l'ensemble*

$$\limsup_{l\longrightarrow\infty} S_l := \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \exists N \in \mathcal{N}_\infty^{\#}\ \ et\ \ \xi_l \in S_l,\ \ \forall\, l \in N,\ \ t.q.\ \xi_l \xrightarrow{N} \xi\right\}.$$

Soit une multi-application $G : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ pour $T > 0$, nous définissons

$$\limsup_{t\searrow t^*} G(t) := \bigcup_{t_l\searrow t^*} \limsup_{l\longrightarrow\infty} G(t_l).$$

$$\limsup_{t\searrow t^*} G(t) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} \exists (t_l, y_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^n \ satisfaisante\ y_l \in G(t_l), \\ t_l \geq t,\ et\ \lim\limits_{l\longrightarrow\infty} (t_l, y_l) = (t^*, y) \end{cases} \right\}.$$

Définition 1.3.4. *Soit $G : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pour $T > 0$ on dit que G est semicontinue extérieurement à droite en $t^* \in [0, T]$ si*

$$\limsup_{t\searrow t^*} G(t) \subseteq G(t^*).$$

Dans le cas où G est semicontinue extérieurement à droite en chaque $t^* \in [0, T]$, on dit que G est semicontinue extérieurement à droite sur $[0, T]$.

1.4 Ensembles convexes et notions associées

Définition 1.4.1. *Soient E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. on dit que A est convexe si*

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in [0, 1],\ \lambda x + (1 - \lambda) y \in A.$$

Définition 1.4.2. ***(Enveloppe convexe)****. Soient E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. On appelle enveloppe convexe de A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E contenants A. C'est-a-dire le plus petit sous ensemble convexe de E contenant A.*

Définition 1.4.3. ***(Enveloppe convexe fermée)****. Soient E un espace vectoriel, A un sous ensemble de E. On appelle enveloppe convexe fermée de A qu'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de E contenant A. C'est donc le plus petit sous ensemble convexe fermé de E contenant A.*

1.5 Distance de Hausdorff

Nous allons donner dans cette section quelques résultats sur la distance de Hausdorff qui ont été prises de la référence [2].

Définition 1.5.1. ***(Espace métrique)*** *Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur X toute application d définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ et vérifiant les propriétés suivantes*

1. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y;$
2. $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x);$
3. $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);$

Le couple (X, d) s'appelle espace métrique.

Soit (X,d) un espace métrique, supposons dans la suite que $d(x, y) < +\infty$, pour tous $x, y \in X$.

Remarque 1.5.2. *Si X est un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$. On définit pour tout $x, y \in X$ la distance associée à $\|.\|_X$ par*

$$d(x, y) = \|x - y\|_X.$$

Définition 1.5.3.

1. *Soit A une partie de X, la distance d'un point $x \in X$ à A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

2. *Soient A et B deux sous ensembles de X, on appelle écart entre A et B qu'on note $e(A, B)$ la quantité définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A}(\inf_{y \in B} d(x, y)).$$

3. *On appelle distance de Hausdorff entre A et B qu'on note $d_H(A,B)$ la quantité définie par*
$$d_H(A,B) = \max\{e(A,B), e(B,A)\}.$$

Remarque 1.5.4. *Il est clair que $d_H(A,B) = d_H(B,A)$.*

Proposition 1.5.5. *Soient A, B, C trois sous ensembles de X.*

1. $e(A,\emptyset) = +\infty$ *(si $A \neq \emptyset$),*
   $e(\emptyset,B) = 0$.
2. $e(A,B) = 0 \iff A \subset \overline{B}$,
   $d_H(A,B) = 0 \iff \overline{A} = \overline{B}$.
3. $e(A,C) \leq e(A,B) + e(B,C)$,
   $d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C)$.

Remarque 1.5.6. *Par convention on pose :* $\sup \emptyset = 0$ *et* $\inf \emptyset = +\infty$.

Remarque 1.5.7. *On a $d(x,A) = d(x, cl(A))$ pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Alors la distance de Hausdorff est invariante par fermeture, c'est-à-dire ;*

$$d_H(A,B) = d_H(cl(A), cl(B)).$$

Définition 1.5.8. *(**Projection**).*
Soit S ensemble fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$, alors pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un point unique $y \in S$ tel que
$$|x - y| = d(x,S).$$
Un tel point est appelé la projection de x sur l'ensemble S et on noté proj (x,S).

Remarque 1.5.9. *Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Si $y = proj(x, cl(B))$ pour un certain point $x \in cl(A)$. Alors,*

$$|x - y| \leq e(A,B) = \sup_{z \in A} d(z,B) \leq d_H(A,B). \tag{1.1}$$

1.6 Topologie faible

Pour plus de résultats sur la topologie faible voir [5]
Soit $(E, |.|_E)$ un espace de Banach et E' son dual topologique défini par

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ linaire et continue}\},$$

muni de la norme

$$|f|_{E'} = \sup_{|x|\leq 1} |f(x)|.$$

Remarque 1.6.1. *Si la fonction f est définie par*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = (f, x),\ f \in E',\ x \in E. \end{aligned}$$

Alors

$$|f|_{E'} = \sup_{|x|\leq 1} |(f, x)|.$$

Définition 1.6.2. *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ où pour $f \in E'$ fixée, φ_f est définie par*

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = (f, x) \end{aligned}$$

et on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.6.3. *Pour tout $x \in E$ on a*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ |x|_E &= \sup_{|f|_{E'}\leq 1} |(f, x)|. \end{aligned}$$

Remarque 1.6.4. *Soit E un espace de Banach, et soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |x_n - x|_E = 0.$$

On note $x_n \to x$.

2. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (f, x_n - x) = 0,\ \forall f \in E'.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.6.5. *Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E, et soit $(f_n)_n \subset E'$. Alors*

1. *Si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.*
2. *$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow (f, x_n) \to (f, x)$ pour tout $f \in E'$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(\|x_n\|_E)_n$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|_E$.*
4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ et $f_n \longrightarrow f$ dans E' alors $(f_n, x_n) \to (f, x)$.*

1.7 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.7.1. *Soit $F : D(F) \subset \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application (opérateur multi-voque). On dit que F est monotone si, pour tous $x_1, x_2 \in D(F)$, $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$, nous avons*

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Définition 1.7.2. *Soit $F : D(F) \subset \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application monotone. F est dite maximale monotone si elle est maximale parmi les opérateurs monotones, ordonnés par l'inclusion des graphes dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. C'est-à-dire, s'il n'existe pas d'opérateur monotone G de $\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tel que $gph(F) \subset gph(G)$.*

Proposition 1.7.3. *Soit $F : D(F) \subset \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application maximale monotone, alors F est fermée et à valeurs convexes, c'est-à-dire ; $F(x)$ est un convexe fermé pour tout $x \in D(F)$. La section minimale d'une application maximale monotone F est définie par*

$$F^0(x) := proj\,(0, F(x))$$

pour $x \in D(F)$, la projection existe et est unique car $F(x)$ est un convexe fermé.

Définition 1.7.4. *Soit $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application maximale monotone, la résolvante J_λ et l'approximation de Yosida Y_λ de F sont définies par*

$$J_\lambda := (I + \lambda F)^{-1} \ \text{ et } \ Y_\lambda := \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

pour $\lambda > 0$.

Proposition 1.7.5. *Supposons que $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une multi-application maximale monotone. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées pour tout $\lambda > 0$:*

(i) $D(J_\lambda) = \mathbb{R}^n$.

(ii) J_λ *est univoque et non expansif, c'est-à-dire,*

$$|J_\lambda(x_1) - J_\lambda(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} J_\lambda(x) = x$ *pour tout $x \in D(F)$.*

(iv) Y_λ *est maximale monotone, lipschitzienne de rapport λ^{-1}.*

(v) $Y_\lambda(x) \in F(J_\lambda(x))$ *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

(vi) Pour tout $x \in D(F)$, $|Y_\lambda(x)|$ est décroissante par rapport à λ, $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} |Y_\lambda(x)| = |F^0(x)|$, et $|Y_\lambda(x)| \leq |F^0(x)|$.

Définition 1.7.6. *La pseudo-distance entre deux multi-applications maximales monotones F_1 et F_2 est définie par*

$$dis(F_1, F_2) := \sup_{\substack{x_1 \in D(F_1)\,,\, y_1 \in F_1(x_1) \\ x_2 \in D(F_2)\,,\, y_2 \in F_2(x_2)}} \frac{\langle y_1 - y_2, x_2 - x_1 \rangle}{1 + |y_1| + |y_2|}.$$

Lemme 1.7.7. *Soient deux applications maximales monotones F_1 et F_2, l'inégalité suivante est toujours vraie*

$$d_H(D(F_1), (D(F_2)) \leq dis(F_1, F_2).$$

Définition 1.7.8. *Soit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application dépendante du temps telle que $F(t, .)$ est maximale monotone pour chaque $t \in [0, T]$. On dit que $t \mapsto F(t, .)$ est absolument continue sur $[0, T]$, s'il existe une fonction absolument continue croissante $\varphi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que*

$$dis(F(t, .), F(s, .)) \leq \varphi(t) - \varphi(s) \quad \forall s, t \quad \textit{avec} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

1.8 Espaces mesurables

Pour plus de détails se référer à [4],[10].

1.8.1 Tribus et espaces mesurables

Définition 1.8.1. *Soit X un ensemble non vide. On appelle **tribu** ou $\sigma-$**algèbre** sur X toute famille Σ de parties de X possèdant les propriétés suivantes :*

1) $\emptyset \in \Sigma$.

2) si $A \in \Sigma$, alors $X \backslash A \in \Sigma$.

3) si $A_n \in \Sigma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.
*Le couple (X, Σ) est appelé **espace mesurable**.*

- Si la troisième relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur X.

- Si X est un espace topologique, la tribu Borélienne sur X notée $\mathcal{B}(X)$ est la plus petite tribu contenant la topologie de X.

Définition 1.8.2. ***(Fonction mesurable)*** *Soient* (X_1, Σ_1) *et* (X_2, Σ_2) *deux espaces mesurables et* f *une application définie sur* X_1 *à valeurs dans* X_2*, on dit que* f *est* (Σ_1, Σ_2)*-mesurable si pour tout* $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.

1.8.2 Mesures

Définition 1.8.3. *Soit* (X, Σ) *un espace mesurable. On appelle* ***mesure positive*** *une application* $\mu : \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *vérifiant*

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) μ *est* σ*-additive, c'est-à-dire ; pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* Σ *disjoints deux à deux (i.e.,* $A_n \cap A_m = \emptyset$*, si* $n \neq m$*), on a*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet (X, Σ, μ) *est appelé* ***espace mesuré.***

Définition 1.8.4. ***(Partie négligeable)*** *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré. Une partie* B *de* X *est dite* μ*-négligeable s'il existe un élément* $A \in \Sigma$ *tel que* $B \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$.

Définition 1.8.5. ***(Propriètè vraie*** μ***-presque partout)*** *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré. On dit qu'une propriété* $P(x); x \in X$ *est vraie* μ*-presque partout sur* X*, si l'ensemble* $\{x \in X; P(x) \text{ est fausse}\}$ *est une partie négligeable de* X*. On note* μ*-p.p.(* μ*-presque partout).*

Définition 1.8.6. *Soit* X *un espace topologique. La mesure* $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est appelée mesure borélienne.*

Définition 1.8.7. *Soit* (X, Σ, μ) *un espace mesuré.*

- *On dit que* μ *est finie (ou que* (X, Σ, μ) *est fini) si,* $\mu(X) < +\infty$.
- *On dit que* μ *est* σ*-finie (ou que* (X, Σ, μ) *est* σ*-fini), s'il existe une suite* $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ *d'éléments de* Σ *telle que*

$$\mu(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Définition 1.8.8. *Soient* X *un espace topologique séparé et* μ *une mesure Borélienne.*

- *On dit que μ est régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de X, tel que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
- *Toute mesure Borélienne finie et régulière est appelée mesure de Radon.*

Théorème 1.8.9. *Il existe une unique mesure λ de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie, pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$*

$$\lambda([a,b]) = b - a \ \ pour \ \ b > a.$$

λ s'appelle mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.8.10. *une mesure de Lebesque est une mesure de Rodon.*

1.8.3 Mesures absolument continues

Définition 1.8.11. *Soient ν et μ deux mesures de Radon. On dit que la mesure ν est absolument continue par rapport à μ si tout ensemble μ-négligeable est ν-négligeable.*

Proposition 1.8.12. *Soient ν et $\hat{\nu}$ deux mesures de Radon positives sur I. Notons*

$$I(t,r) = I \cap [t-r, t+r]$$

($r > 0$ et $t \in I$). Alors la limite

$$\frac{d\hat{\nu}}{d\nu}(t) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\hat{\nu}(I(t,r))}{\nu(I(t,r))}$$

(avec la convention $\frac{0}{0} = 0$) existe et finie pour ν-presque tout $t \in I$. La fonction positive $\frac{d\hat{\nu}}{d\nu}$ est appelé la dérivée de la mesure $\hat{\nu}$ par rapport à ν.

Définition 1.8.13. *Soient ν et $\hat{\nu}$ deux mesures de Radon positives sur I. La mesure $\hat{\nu}$ est absolument continue par rapport à ν si et seulement si $\hat{\nu} = \frac{d\hat{\nu}}{d\nu}(.)\nu$ (i.e., $\frac{d\hat{\nu}}{d\nu}(.)$ est une densité relative par rapport a ν).*

Définition 1.8.14. *Si deux mesures de Radon ν et $\hat{\nu}$ sont chacune absolument continue par rapport à l'autre, on dit que ν et $\hat{\nu}$ sont absolument continuement équivalentes.*

Définition 1.8.15. *Voir par exemple [5] L'espace des applications définies sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, p^{ieme} intégrables est définie par.*
Si $p = 1$

$$L^1([0,T], \mathbb{R}^n) = \{f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ f \ mesurable, \ et \ \int_0^T |f(x)|dx < +\infty\}.$$

Si $1 < p < \infty$

$$L^p([0,T],\mathbb{R}^n) = \{f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1([0,T],\mathbb{R}^n)\}.$$

On définie la norme sur $L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$, *pour tout* $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_0^T |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{P}}.$$

Définition 1.8.16. *[5]*
L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *est définie par*

$$L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n) = \{f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ f \text{ mesurable, } \exists\, C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } [0,T]\}.$$

On définie la norme sur $L^\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C;\ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } [0,T]\}.$$

1.9 Quelques théorèmes et définitions utiles

On va donner dans cette section quelques résultats et définitions que nous avons utilisés dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Définition 1.9.1. ***(Inégalité de Cauchy-schwartz)***.
Soient H *un espace préhilbertien. Alors,*

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_H \|y\|_H.$$

Définition 1.9.2. *Soit* $(x_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{R}$ *alors,*

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} (x_k)$$

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} (x_k).$$

Corollaire 1.9.3. *[9] Soit* $(C^\nu)_\nu$ *une suite d'ensembles dans* $\mathbb{R}^n$. *La condition* $C^\nu \longrightarrow \emptyset$ *(ou de manière équivalente,* $\limsup_\nu C^\nu = \emptyset$*), est vraie si et seulement si pour tout* $\rho > 0$ *il existe un ensemble d'indices* $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ *telle que* $C^\nu \cap \rho\mathbb{B} = \emptyset$ *pour tout* $\nu \in N$ *(ou, autrement dit,* $d(0, C^\nu) \longrightarrow \infty$*).*

Définition 1.9.4. *[3]*
Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$, b un scalaire, et H une partie de $\mathbb{R}^n$. H est dite hyperplan si elle s'écrit sous la forme

$$H = \{x | \langle a^\top, x\rangle = b\}$$

où $a^\top$ est le vecteur transposé de a.
Si $\overline{x}$ est un vecteur quelconque dans un hyperplan alors nous devons avoir $\langle a^\top, \overline{x}\rangle = b$, donc l'hyperplan peut être décrit de manière équivalente comme

$$H = \{x | \langle a^\top, x\rangle = \langle a^\top, \overline{x}\rangle\},$$

ou

$$H = \overline{x} + \{x | \langle a^\top, x\rangle = 0\}.$$

Ainsi, H est un ensemble affine parallèle au sous-espace $\{x | \langle a^\top, x\rangle = 0\}$.

Définition 1.9.5. *[3]*
Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$, b un scalaire, une partie H de $\mathbb{R}^n$ et C_1, C_2 deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vide. Alors C_1 et C_2 sont séparés par un hyperplan H, si chacun se trouve dans un demi-espace fermé différent associé à H, i.e.,

$$\langle a^\top, x_1\rangle \leq b \leq \langle a^\top, x_2\rangle, \ \ \forall x_1 \in C_1, \ \ \forall x_2 \in C_2,$$

ou

$$\langle a^\top, x_2\rangle \leq b \leq \langle a^\top, x_1\rangle, \ \ \forall x_1 \in C_1, \ \ \forall x_2 \in C_2.$$

Proposition 1.9.6. *[3]*
Soit C_1 et C_2 deux sous-ensembles convexes non vides de $\mathbb{R}^n$. Si C_1 et C_2 sont disjoints, il existe un hyperplan qui les sépare, c'est-à-dire ; qu'il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que

$$\langle a^\top, x_1\rangle \leq \langle a^\top, x_2\rangle, \quad \forall x_1 \in C_1, \ \ \forall x_2 \in C_2.$$

Remarque 1.9.7. *[3]*
L'hyperplan $H = \{x \mid \langle a^\top, x\rangle = b\}$ sépare strictement C_1 et C_2, c'est-à-dire ; que

$$\langle a^\top, x_1\rangle < b < \langle a^\top, x_2\rangle, \ \ \forall x_1 \in C_1, \ \ \forall x_2 \in C_2.$$

Théorème 1.9.8. *Soit E un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

CHAPITRE 2

QUELQUES RÉSULTATS DE CONVERGENCE DANS LES ESPACES FONCTIONNELS

Dans ce chapitre nous introduisons des résultats de convergences dans les espaces fonctionnels que nous avons utilisées dans les démonstrations du chapitre 3.

Lemme 2.0.1. *Soient $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $t^* \in [0,T]$ tel que $\dot{x}(t^*)$ existe. Supposons que $(t_k)_k$ et $(\tau_k)_k$ sont deux suites telles que $0 \leq t_k \leq t^* \leq \tau_k \leq T$ et $t_k < \tau_k$ pour tout k et $\lim_{k\to+\infty} t_k = \lim_{k\to+\infty} \tau_k = t^*$. Alors, il existe une sous-suite de la suite $\frac{x(\tau_k)-x(t_k)}{\tau_k-t_k}$ qui converge vers $\dot{x}(t^*)$.*

Démonstration. on a

$$\begin{aligned}\frac{x(\tau_k)-x(t_k)}{\tau_k-t_k} &= \frac{x(\tau_k)-x(t^*)}{\tau_k-t_k} + \frac{x(t^*)-x(t_k)}{\tau_k-t_k} \\ &= \left(\frac{x(\tau_k)-x(t^*)}{\tau_k-t^*}\right)\left(\frac{\tau_k-t^*}{\tau_k-t_k}\right) + \left(\frac{x(t^*)-x(t_k)}{t^*-t_k}\right)\left(\frac{t^*-t_k}{\tau_k-t_k}\right)\end{aligned}$$

et que $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} t_k = t^*$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \tau_k = t^*$. On a $\dot{x}(t^*)$ existe, alors

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \frac{x(\tau_k)-x(t^*)}{\tau_k-t^*} = \dot{x}(t^*) \\ \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \frac{x(t_k)-x(t^*)}{t_k-t^*} = \dot{x}(t^*) \end{cases}$$

sachant que

$$0 \leq \frac{\tau_k-t^*}{\tau_k-t_k} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{t^*-t_k}{\tau_k-t_k} \leq 1, \tag{2.1}$$

d'après (2.1), on a $\left(\frac{\tau_k - t^*}{\tau_k - t_k}\right)_k$ et $\left(\frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k}\right)_k$ admettent deux sous-suites convergentes. Alors il existe $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$, pour tout $k \in N$ on a

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{\tau_k - t^*}{\tau_k - t_k} \;\; et \;\; \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k} \;\; existent.$$

D'où pour $k \in N$,

$$\begin{aligned}\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{x(\tau_k) - x(t_k)}{\tau_k - t_k} &= \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{x(\tau_k) - x(t^*)}{\tau_k - t^*}\right) \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{\tau_k - t^*}{\tau_k - t_k}\right) \\ &\quad + \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{x(t^*) - x(t_k)}{t^* - t_k}\right) \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k}\right),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{x(\tau_k) - x(t_k)}{\tau_k - t_k} &= \dot{x}(t^*) \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{\tau_k - t^*}{\tau_k - t_k}\right) + \dot{x}(t^*) \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k}\right) \\ &= \dot{x}(t^*) \left[\lim_{k \longrightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k}\right) + \lim_{k \longrightarrow \infty} \left(\frac{t^* - t_k}{\tau_k - t_k}\right)\right] \\ &= \dot{x}(t^*).\end{aligned}$$

■

Lemme 2.0.2. *Soit une suite de fonctions $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers y dans $L^2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n)$, pour une fonction $\psi \in AC([0,T], \mathbb{R})$. Soient $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions absolument continues qui converge uniformément vers $x \in AC([0,T], \mathbb{R}^n)$ et vérifiant $\dot{x}_l(t) = \dot{\psi}(t) y_l(t)$, pour tout $t \in \Gamma$, avec*

$$\Gamma := \{t \in [0,T] \mid les\ fonction\ \ x_l, x\ et\ \psi\ sont\ différentiables\ en\ t\}.$$

Alors $\dot{x}(t) = \dot{\psi}(t) y(t)$ pour presque tout $t \in \Gamma$.

Démonstration. Définissons la fonction $\xi : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ par

$$\xi(t) = x(0) + \int_0^t y(s) \dot{\psi}(s) ds, \tag{2.2}$$

pour $t \in [0,T]$. Pour chaque $\eta \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\langle \eta, x_l(t) \rangle = \langle \eta, x_0 \rangle + \int_0^t \langle \eta, y_l(s) \rangle \dot{\psi}(s) ds,$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$. Et

$$\langle \eta, \xi(t) \rangle = \langle \eta, x_0 \rangle + \int_0^t \langle \eta, y(s) \rangle \dot{\psi}(s) ds.$$

On a $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers y, alors pour tout $z \in L^2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n) = (L^2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n))'$ on a

$$(y_l(.), z(.)) \rightharpoonup (y(.), z(.)),$$

c'est-à-dire ;

$$\lim_{l\longrightarrow\infty}(y_l(.), z(.)) = (y(.), z(.))$$

par suite

$$\lim_{l\longrightarrow\infty}\int_0^T \langle y_l(s), z(s)\rangle d\psi(s) = \int_0^T \langle y_l(s), z(s)\rangle d\psi(s)$$

soit $\eta \in \mathbb{R}^n$, on a $|\eta| < +\infty \Longrightarrow |\eta|^2 < +\infty$. En particulier pour $z(\cdot) = \chi_{[0,t]}(\cdot)\eta \in L^2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n)$, car

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\chi_{[0,T]}\eta|^2 d\dot{\psi}(s) &= \int_0^T |\eta|^2\dot{\psi}ds \\
&\leq |\eta|^2\int_0^T \dot{\psi}(s)ds \\
&= |\eta|^2(\psi(T) - \psi(0)) \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}\int_0^T \langle y_l(s), \chi_{[0,t]}(s)\eta\rangle\dot{\psi}(s)ds = \int_0^T \langle y(s), \chi_{[0,t]}(s)\eta\rangle\dot{\psi}(s)ds.$$

D'où

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}\int_0^t \langle y_l(s)\dot{\psi}(s), \eta\rangle ds = \int_0^T \langle y(s)\dot{\psi}, \eta\rangle ds,$$

ainsi

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}\left[\langle\eta, x_0\rangle + \int_0^t \langle y_l(s)\dot{\psi}(s), \eta\rangle ds\right] = \langle\eta, x_0\rangle + \int_0^t \langle y(s)\dot{\psi}(s), \eta\rangle ds.$$

Enfin,

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}\langle\eta, x_l(t)\rangle = \langle\eta, \xi(t)\rangle.$$

En conclusion $(\langle\eta, x_l(t)\rangle)_l$ converge vers $\langle\eta, \xi(t)\rangle$ pour tout $t \in [0,T]$ pour tout $\eta \in \mathbb{R}^n$. Cela signifie que $(x_l(t))_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers $\xi(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors $\xi(t) = x(t)$ pour tous $t \in [0,T]$ car $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers x. Par conséquent, (2.2) donne

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(s)\dot{\psi}(s)ds.$$

Autrement dit,

$$\dot{x}(t) = \dot{\psi}(t)y(t)$$

pour presque tout $t \in \varGamma$. ■

Lemme 2.0.3. *Soit $f_l : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions avec $l \in \mathbb{N}$ telle que $|f_l(t)| \leq 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$. Supposons que la suite$(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers*

f dans $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ où $d\mu$ est absolument continûement équivalente à la mesure de Lebesgue. Alors,

$$f(t) \in [\liminf_{l\longrightarrow+\infty} f_l(t), \limsup_{l\longrightarrow+\infty} f_l(t)],$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Soit $k \geq 1$ et définissons

$$g_l^k(t) := \sup_{q\geq k} f_q(t) - f_{l+k}(t).$$

Notons que $(g_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ vers une fonction g^k définie par

$$g^k(t) := \sup_{q\geq k} f_q(t) - f(t),$$

pour tout $k \geq 1$ et p.p $t \in [0,T]$.

En effet, la suite $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers f dans $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$, alors pour tout $z \in L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ on a $(z,f_l) \to (z,f)$, c'est-à-dire ;

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}(z,f_l) = (z,f)$$

donc pour tout $k \geq 1$

$$\lim_{l\longrightarrow+\infty}(z,f_{l+k}) = (z,f).$$

Par suite

$$\begin{aligned}(z,\sup_{q\geq k} f_q) - \lim_{l\longrightarrow+\infty}(z,f_{l+k}) &= (z,\sup_{q\geq k} f_q) - (z,f)\\ \lim_{l\longrightarrow+\infty}(z,\sup_{q\geq k} f_q - f_{l+k}) &= (z,\sup_{q\geq k} f_q - f)\\ \lim_{l\longrightarrow+\infty}(z,g_l^k) &= (z,\sup_{q\geq k} f_q - f).\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $z \in L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ on a $(z,g_l^k) \rightharpoonup (z,g^k)$, avec g^k. Puisque g_l^k est positive pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, alors g^k doit être positive pour presque tout $t \in [0,T]$. Cela signifie que pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\sup_{q\geq k} f_q(t) - f(t) \geq 0, \forall k \geq 1 \Longrightarrow \quad & \sup_{q\geq k} f_q(t) \geq f(t), \forall k \geq 1\\ \Longrightarrow \quad & \inf_{k\geq 1}\sup_{q\geq k} f_q(t) \geq f(t)\\ \Longrightarrow \quad & \limsup_{q\longrightarrow+\infty} f_q(t) \geq f(t) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Appliquons les mêmes arguments à la suite $(-f_l)_{l\in\mathbb{N}}$, i.e.,

$$h_l^k(t) := \sup_{q\geq k}(-f_q)(t) + f_{l+k}(t).$$

De la même manière que pour la suite $(g_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ on montre que la suite $(h_l^k)_{l\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ vers h^k donné par

$$h^k(t) := \sup_{q\geq k}(-f_q)(t) + f(t),$$

pour tout $k \geq 1$ et p.p $t \in [0,T]$. Puisque h_l^k est positive pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$, alors h^k doit être positive pour presque tout $t \in [0,T]$. Cela signifie que pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\sup_{q\geq k}(-f_q)(t) + f(t) \geq 0, \forall k \geq 1 \Longrightarrow \quad & -\inf_{q\geq k}(f_q(t)) + f(t) \geq 0, \forall k \geq 1 \\
\Longrightarrow f(t) \geq \quad & \inf_{q\geq k}(f_q(t)), \forall k \geq 1 \\
\Longrightarrow f(t) \geq \quad & \sup_{k\geq 1} \quad \inf_{q\geq k} f_q(t) \\
\Longrightarrow f(t) \geq \quad & \liminf_{q\longrightarrow+\infty} f_q(t) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

p.p $t \in [0,T]$. Ainsi, d'après (2.3) et (2.4) on a

$$\liminf_{l\longrightarrow+\infty} f_l(t) \leq f(t) \leq \limsup_{l\longrightarrow+\infty} f_l(t).$$

■

Lemme 2.0.4. *Soit $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $|y_l(t)| \leq 1$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$. Soit aussi $(S_l(t))_{l\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles définie dans $\mathbb{R}^n$ avec $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$ tels que $y_l(t) \in S_l(t)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$. Supposons que $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers y dans $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R}^n)$ où $d\mu$ est absolument continûement équivalente à la mesure de Lebesgue. Alors,*

$$y(t) \in \overline{co}(\limsup_{l\longrightarrow+\infty} S_l(t))$$

pour presque tout $t \in [0,T]$.

Démonstration. Soit $S(t) = \overline{co}(\limsup_{l\longrightarrow+\infty} S_l(t))$ pour $t \in [0,T]$. On a

$$\begin{aligned}
y_l(t) \in S_l(t)\ ,\ |y_l(t)| \leq 1 &\Longrightarrow y_l(t) \in S_l(t), y_l(t) \in \mathbb{B} \\
&\Longrightarrow y_l(t) \in S_l(t) \cap \mathbb{B} \\
&\Longrightarrow S_l(t) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

D'après **corollaire** 1.9.3. on a

$$\limsup_{l\longrightarrow+\infty} S_l(t) \neq \emptyset.$$

Par suite

$$\overline{co}(\limsup_{l\longrightarrow+\infty} S_l(t)) \neq \emptyset,$$

donc $S(t) \neq \emptyset$ pour chaque $t \in [0,T]$. Soit

$$\varGamma = \{t \in [0,T] : y(t) \notin S(t)\}.$$

Définissons la fonction $z : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$z(t) = \begin{cases} \operatorname{proj}(y(t), S(t)) & si\ t \in \varGamma, \\ y(t) & si\ t \in [0,T]\backslash\varGamma. \end{cases}$$

Notons que $|y(t) - z(t)| > 0$ pour tout $t \in \varGamma$. De plus, on a $z \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^n)$ puisque $S(t)$ contient un élément dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0,T]$. En effet

$$S(t) \cap \mathbb{B} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists \overline{x} \in S(t)\ t.q.\ |\overline{x}| < 1,$$

d'une autre part

$$\begin{aligned} |z(t) - y(t)| &= d(y(t), S(t)) \\ &= \inf_{x\in S(t)} |y(t) - x| \\ &\leq |y(t) - \overline{x}| \\ &\leq |y(t)| + 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq |y(t)| + 1 + |y(t)| \\ &\leq 2|y(t)| + 1, \end{aligned}$$

comme $y(t) = \lim_{l\longrightarrow+\infty} y_l(t)$ et $|y_l(t)| \leq 1 \Longrightarrow |y(t)| \leq 1$ donc $|z(t)| \leq 3$. D'ou $z \in L^\infty$
Maintenant, définissons les fonctions $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $b : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(t) = \frac{y(t) - z(t)}{|y(t) - z(t)|}$$

et

$$b(t) = \left\langle \frac{y(t) - z(t)}{|y(t) - z(t)|}, \frac{y(t) + z(t)}{2} \right\rangle$$

pour tout $t \in \varGamma$ et $a(t) = 0$, $b(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]\backslash\varGamma$.
Pour tout $t \in \varGamma$, l'hyperplan $\mathcal{H}_t = \{\eta, \langle a(t), \eta\rangle = b(t)\}$ sépare strictement l'ensemble $S(t)$ et le point $y(t)$, c'est-à-dire,

$$\langle a(t), y(t)\rangle < b(t) < \langle a(t), z\rangle \tag{2.5}$$

pour tout $z \in S(t)$ (**Remarque** 1.9.7.).

Notons que

$$|a(t)| = \left|\frac{y(t)-z(t)}{y(t)-z(t)}\right| = 1 < +\infty$$

alors $a \in L^{\infty}([0,T],\mathbb{R}^n)$, aussi

$$\begin{aligned}|b(t)| &= \left|\left\langle \frac{y(t)-z(t)}{y(t)-z(t)}, \frac{y(t)+z(t)}{2}\right\rangle\right| \\ &\leq \left|\frac{y(t)-z(t)}{y(t)-z(t)}\right| . \left|\frac{y(t)+z(t)}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|y(t)+z(t)\right|,\end{aligned}$$

on a alors

$$\int_0^T |b|^2 d\mu \leq \frac{1}{2}\int_0^T \left|y(t)+z(t)\right|^2 d\mu.$$

On a $z \in L^{\infty}([0,T],\mathbb{R}^n) \subset L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ et $y \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ donc $(z+y) \in L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$ alors

$$\int_0^T \left|y(t)+z(t)\right|^2 d\mu < +\infty.$$

Par suite

$$\int_0^T |b(t)|^2 d\mu < +\infty.$$

Alors $b \in L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$. La fonction $t \longmapsto \langle a(t), w(t)\rangle$ appartient à $L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R})$ pour tout $w \in L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R}^n)$. En effet

$$\begin{aligned}\int_0^T \left|\langle a(t), w(t)\rangle\right|^2 d\mu &\leq \int_0^T \left|a(t)\right|^2 . \left|w(t)\right|^2 d\mu \\ &= \int_0^T \left|w(t)\right|^2 d\mu < +\infty\end{aligned}$$

car $w \in L^2(d\mu,[0,T],\mathbb{R}^n)$. Pour chaque $l \in \mathbb{N}$, définissons $\zeta_l : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec

$$\zeta_l(t) = \begin{cases}\langle a(t), y_l(t)\rangle & si\ t \in \mathit{\Gamma}, \\ 0 & si\ t \in [0,T]\backslash \mathit{\Gamma}.\end{cases}$$

Alors, on voit que $(\zeta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers ζ donné par

$$\zeta(t) = \langle a(t), y(t)\rangle, \ \ \forall t \in \Gamma,$$

et $\zeta(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]\backslash \mathit{\Gamma}$.

D'après le **lemme** 2.0.3., on voit que

$$\zeta(t) \in [\liminf_{l\longrightarrow+\infty} \zeta_l(t), \limsup_{l\longrightarrow+\infty} \zeta_l(t)] \tag{2.6}$$

p.p $t \in [0,T]$. D'où

$$\langle a(t), y(t)\rangle \in [\langle a(t), \liminf_{l \longrightarrow +\infty} y_l(t)\rangle, \langle a(t), \limsup_{l \longrightarrow +\infty} y_l(t)\rangle]$$

puisque les limites inférieures supérieure peuvent être obtenues comme limites de sous-suite de (y_l), posons alors

$$\begin{cases} \underline{y}(t) = \liminf_{l \longrightarrow +\infty} y_l(t), \\ \overline{y}(t) = \limsup_{l \longrightarrow +\infty} y_l(t). \end{cases}$$

(2.6) implique que pour presque tout $t \in \mathit{\Gamma}$

$$\langle a(t), y(t)\rangle \in [\langle a(t), \underline{y}(t)\rangle, \langle a(t), \overline{y}(t)\rangle] \tag{2.7}$$

où $\underline{y}(t)$ et $\overline{y}(t)$ appartiennent à $S(t)$. D'après (2.7), on a

$$\langle a(t), \underline{y}(t)\rangle < \langle a(t), y(t)\rangle < \langle a(t), \overline{y}(t)\rangle.$$

En particulier pour $z = \underline{y}(t)$ dans (2.5) car $\underline{y}(t) \in S(t)$ on a

$$\langle a(t), y(t)\rangle < b(t) < \langle a(t), \underline{y}(t)\rangle < \langle a(t), y(t)\rangle \Longrightarrow b(t) = \langle a(t), y(t)\rangle$$

p.p $t \in \mathit{\Gamma}$. Par suite

$$\begin{aligned}
\langle a(t), y(t)\rangle - b(t) = 0 &\Longleftrightarrow \langle a(t), y(t)\rangle - \left\langle a(t), \frac{y(t)+z(t)}{2}\right\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle a(t), y(t) - \frac{y(t)+z(t)}{2}\right\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle a(t), \frac{2y(t)-y(t)-z(t)}{2}\right\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle a(t), \frac{y(t)-z(t)}{2}\right\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\langle \frac{y(t)-z(t)}{|y(t)-z(t)|}, \frac{y(t)-z(t)}{2}\right\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2|y(t)-z(t)|}\langle y(t)-z(t), y(t)-z(t)\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{|y(t)-z(t)|^2}{2|y(t)-z(t)|} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{|y(t)-z(t)|}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow |y(t)-z(t)| = 0 \\
&\Longleftrightarrow y(t) = z(t)
\end{aligned}$$

et comme $z(t) \in S(t)$ et $z(t) := \text{proj}(y(t), S(t))$ alors $y(t) \in S(t)$. C'est une contradiction avec $y(t) \notin S(t)$ car $t \in \mathit{\Gamma}$, cela signifie que $\mathit{\Gamma}$ est un ensemble de mesure nulle. Ainsi, pour presque tout $t \in [0, T]$

$$y(t) \in S(t).$$

■

CHAPITRE 3

INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC APPLICATIONS MAXIMALES MONOTONES

Dans ce chapitre nous allons étudier l'existence de solutions de l'inclusion différentielle

$$\dot{x}(t) \in -F(t, x(t)),\ x(0) = x_0,\ t \in [0, T], \tag{3.1}$$

où $F(t, .) : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est un opérateur maximal monotone pour tout $t \in [0, T]$.

Définition 3.0.1. *On dit que la fonction $x \in AC([0, T], \mathbb{R}^n)$ est une solution de* (3.1) *si $x(t) \in D(F(t, .))$ et x satisfait (3.1) p.p $t \in [0, T]$.*

3.1 Existence et unicité des solutions

Le résultat principal de notre chapitre est considéré sous les hypothèses suivantes, où

$$T > 0 \text{ et } \mathbb{B}^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}.$$

(A1) Pour chaque $t \in [0, T]$, l'opérateur $F(t, .)$ est maximal monotone.

(A2) La multi-application $t \longmapsto \text{gph } F(t, .)$ est semicontinue extérieurement à droite sur $[0, T]$.

(A3) Il existe une fonction croissante $\varphi \in \mathrm{AC}([0, T], \mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{z \in D(F(s,.))} d(z, D(F(t, .))) \leq \varphi(t) - \varphi(s), \quad \forall s, t \text{ avec } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

(LG) Il existe $\sigma \in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|F^0(t,x)| \leq \sigma(t)(1+|x|)$$

pour tout $x \in D(F(t,.))$ et $t \in [0,T]$.

(YB) Il existe une fonction croissante $\theta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, et un scalaire $\varLambda > 0$ tels que pour tout $0 < \lambda < \varLambda$, on a

$$|Y_\lambda(s+\lambda,x)| \leq \theta(s+\lambda) - \theta(s) + |F^0(s,x)|,$$

pour tout s avec $0 \leq s \leq T-\lambda$, et tout $x \in D(F(s,.))$ où $Y_\lambda(t,.)$ désigne l'approximation de Yosida de $F(t,.)$.

Théorème 3.1.1. *considérons le système* (3.1) *et supposons que* (*A*1),(*A*2) *et* (*A*3) *soient vérifiées. Si l'hypothèse de croissance linéaire (LG) est vérifiée, alors il existe une solution unique de* (3.1) *pour chaque* $x_0 \in cl(D(F(0,.)))$. *Dans le cas où l'hypothèse liée à l'approximation de Yosida (YB) est vérifiée, alors il existe une unique solution de* (3.1) *pour tout* $x_0 \in D(F(0,.))$.

Démonstration. L'unicité de la solution de (3.1) découle directement l'hypothèse (A1).
Étape 1 : **Discrétisation de** (3.1)**.**
Soit

$$\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_K : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < t_{k+1} < ... < t_K = T\}$$

une partition de l'intervalle $[0,T]$. Posons

$$0 < h_k := t_k - t_{k-1}$$

pour $k \in \{1,2,...,K\}$. Notons que $\sum_{k=1}^{K} h_k = T$. On définit la taille de la partition Δ par $K(\Delta)$ et $|\Delta| = \max_{k\in\{1,2,...,K\}} h_k$. Pour simplifier, on écrit $K = K(\Delta)$. Considérons ensuite la discrétisation de (3.1) basée sur la partition Δ donnée par

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}} \in -F(t_{k+1}, x_{k+1}) \tag{3.2}$$

pour $k \in \{0,1,...,K-1\}$. Alternativement, nous avons

$$x_{k+1} = (I + h_{k+1}F(t_{k+1},.))^{-1}(x_k). \tag{3.3}$$

Si $D(F(t,.))$ est fermé pour chaque $t \geq 0$, alors il résulte de (3.3) que x_{k+1} est une projection de x_k sur l'ensemble $D(F(t_{k+1},.))$. plus simplement, dans le cas où le domaine de la multi-application $F(t,.)$ est fermée, la suite de points x_k est obtenue en appliquant l'opérateur proximal associée à l'application $h_k F(t_k,.)$, c'est-à-dire ;

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1}-x_k}{h_{k+1}} \in -F(t_{k+1},x_{k+1}) &\Longrightarrow x_{k+1}-x_k \in -h_{k+1}F(t_{k+1},x_{k+1})\\ &\Longrightarrow x_k \in x_{k+1}+h_{k+1}F(t_{k+1},x_{k+1})\\ &\Longrightarrow x_k \in I(x_{k+1})+h_{k+1}F(t_{k+1},.)(x_{k+1})\\ &\Longrightarrow x_k \in (I+h_{k+1}F(t_{k+1},.))(x_{k+1}),\end{aligned}$$

donc

$$x_{k+1}=(I+h_{k+1}F(t_{k+1},.))^{-1}(x_k).$$

Étape 2 : **Bornes sur les valeurs x_k.**
Nous visons à établir des bornes sur x_k qui soient indépendantes de la partition Δ.

Lemme 3.1.2. *Sous l'hypothèse (LG), il existe une suite de partitions $\{\Delta_l\}$ avec $|\Delta_l| \longrightarrow 0$, telle que pour chacune de ces partitions, on ait*

$$|x_k| \leq \beta, \tag{3.4}$$

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \psi(t_k)-\psi(t_{k-1}), \tag{3.5}$$

pour chaque $k \in \{1,2,...,K\}$; la constante $\beta \geq 0$, et la fonction $\psi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont définis comme

$$\beta = \alpha + \varphi(T)-\varphi(0)+(1+\alpha)\int_0^T \sigma(s)\,ds, \tag{3.6}$$

$$\psi(t) := t + 2\varphi(t) + (1+\gamma)\int_0^t \sigma(s)\,ds, \ \ \forall\ t\in[0,T], \tag{3.7}$$

avec φ satisfaisant (A3), σ satisfaisant (LG), et

$$\alpha = |x_0| + \varphi(T)-\varphi(0) \tag{3.8}$$

$$\gamma = \beta + \varphi(T)-\varphi(0). \tag{3.9}$$

Démonstration. Pour obtenir les bornes données en (3.4) et (3.5), posons

$$F_k := F(t_k,.)\ \ ,\ \ J_k := (I+h_kF_k)^{-1}\ \ ,\ \ et\ \ Y_k := \frac{1}{h_k}(I-J_k). \tag{3.10}$$

Il résulte de (3.3) que

$$x_{k+1}=(I+h_{k+1}F(t_{k+1},.))^{-1}(x_k)$$

et comme $x_{k+1}\in D(F_{k+1})$, alors

$$x_{k+1} = J_{k+1}(x_k) \tag{3.11}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$, Pour établir (3.4), on introduit d'abord les points $\overline{x}_k$ donnés par $\overline{x}_0 = x_0$ et comme $cl(D(F_{k+1}))$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$, on peut poser par construction

$$\overline{x}_{k+1} := \text{ proj } (\ \overline{x}_k, cl(D(F_{k+1}))\ )$$

pour $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$. Il est évident que

$$\overline{x}_k \in cl(D(F_k)) \tag{3.12}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$. Alors, il découle de l'hypothèse $(A3)$ et **Remarque** 1.5.9. que

$$\begin{aligned} |\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}| &\leq \sup_{z \in D(F(t_K,.))} d(z, D(F(t_{k-1}, .))) \\ &\leq d_H(D(F(t_K, .)), D(F(t_{k-1}, .))) \\ &\leq dis(F(t_K, .), F(t_{k-1}, .)) \\ &\leq \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \end{aligned} \tag{3.13}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$. On obtient ainsi, pour chaque $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$

$$\begin{aligned} |\overline{x}_k| &\leq |\overline{x}_{k-1}| + |\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}| \\ &\leq |\overline{x}_{k-1}| + \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \end{aligned} \tag{3.14}$$

par suite ;

$$\begin{aligned} |\overline{x}_{k-1}| &\leq |\overline{x}_{k-2}| + \varphi(t_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}) \\ |\overline{x}_{k-2}| &\leq |\overline{x}_{k-3}| + \varphi(t_{k-2}) - \varphi(t_{k-3}) \\ &\vdots \\ |\overline{x}_2| &\leq |\overline{x}_1| + \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \\ |\overline{x}_1| &\leq |\overline{x}_0| + \varphi(t_1) - \varphi(t_0). \end{aligned}$$

Alors on fait la somme membre à membre puis on simplifie, on obtient

$$|\overline{x}_k| \leq |\overline{x}_0| + \varphi(t_k) - \varphi(t_0), \tag{3.15}$$

comme $\varphi(T) > \varphi(t_k)$ et $t_0 = 0$ donc on a

$$|\overline{x}_k| \leq |\overline{x}_0| + \varphi(T) - \varphi(0). \tag{3.16}$$

D'après (3.8) on a

$$|\overline{x}_k| \leq \alpha \tag{3.17}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. D'après (3.12) on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \{1, 2, .., K\}$, il existe un point $\overline{x}_k^\varepsilon$ satisfaisant

$$\overline{x}_k^\varepsilon \in D(F_k)$$

et

$$|\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{x}_k| \leq \varepsilon, \tag{3.18}$$

d'où $|\overline{x}_k^\varepsilon| \leq |\overline{x}_k| + \varepsilon$, donc d'après (3.17) on a

$$|\overline{x}_k^\varepsilon| \leq \alpha + \varepsilon \tag{3.19}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Ensuite, introduisons la suite de points $\overline{y}_k^\varepsilon$ définie par

$$\overline{y}_k^\varepsilon := J_k(\overline{x}_k^\varepsilon) \tag{3.20}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Notons que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon}{h_k} &= \frac{1}{h_k}(\overline{x}_k^\varepsilon - J_k(\overline{x}_k^\varepsilon)) \\ &= \frac{1}{h_k}(I - J_k)(\overline{x}_k^\varepsilon) \\ &= Y_k(\overline{x}_k^\varepsilon). \end{aligned}$$

Il découle de $\overline{x}_k^\varepsilon \in D(F_k)$ et de la **proposition** 1.7.5. (vi) que

$$\left| \frac{\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon}{h_k} \right| = |Y_k(\overline{x}_k^\varepsilon)| \leq |F^0(\overline{x}_k^\varepsilon)|$$

alors

$$\left| \frac{\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon}{h_k} \right| \leq |F^0(\overline{x}_k^\varepsilon)| \tag{3.21}$$

Pour obtenir une borne sur le membre de droite de (3.21), nous utilisons l'hypothèse (LG). Soit une partition Δ_l, et supposons pour le moment que σ est une fonction constante. D'après l'hypothèse (LG) et (3.21) on a

$$\left| \frac{\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon}{h_k} \right| \leq \sigma(1 + |\overline{x}_k^\varepsilon|)$$

et d'après (3.19) on a

$$\left| \frac{\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon}{h_k} \right| \leq \sigma(1 + \alpha + \varepsilon).$$

D'où

$$|\overline{x}_k^\varepsilon - \overline{y}_k^\varepsilon| \leq h_k \sigma(1 + \alpha + \varepsilon) \tag{3.22}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$ et $\varepsilon > 0$. d'après (3.11), (3.20) et la **proposition** 1.7.5. on a

$$|x_k - \overline{y}_k^\varepsilon| = |J_k(x_{k-1}) - J_k(\overline{x}_k^\varepsilon)| \leq |x_{k-1} - \overline{x}_k^\varepsilon|.$$

c'est-a-dire ;

$$|x_k - \overline{y}_k^\varepsilon| \leq |x_{k-1} - \overline{x}_k^\varepsilon|. \tag{3.23}$$

Ainsi, en utilisant (3.22) et (3.23), on obtient

$$|x_k - \overline{x}_k^\varepsilon| \leq |x_k - \overline{y}_k^\varepsilon| + |\overline{y}_k^\varepsilon - \overline{x}_k^\varepsilon| \leq |x_{k-1} - \overline{x}_k^\varepsilon| + h_k\sigma(1+\alpha+\varepsilon), \tag{3.24}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$ et $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers zéro dans (3.24) et on a $\overline{x}_k^\varepsilon \longrightarrow \overline{x}_k$, alors

$$|x_k - \overline{x}_k| \leq |x_{k-1} - \overline{x}_k| + h_k\sigma(1+\alpha),$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Par suite, d'après (3.13) on a

$$\begin{aligned}
|x_k - \overline{x}_k| &\leq |x_{k-1} - \overline{x}_k| + h_k\sigma(1+\alpha) \\
&\leq |x_{k-1} - \overline{x}_{k-1}| + |\overline{x}_{k-1} - \overline{x}_k| + h_k\sigma(1+\alpha) \\
&\leq |x_{k-1} - \overline{x}_{k-1}| + \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) + h_k\sigma(1+\alpha).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|x_{k-1} - \overline{x}_{k-1}| &\leq |x_{k-2} - \overline{x}_{k-2}| + \varphi(t_{k-1}) - \varphi(t_{k-2}) + h_{k-1}\sigma(1+\alpha) \\
|x_{k-2} - \overline{x}_{k-2}| &\leq |x_{k-3} - \overline{x}_{k-3}| + \varphi(t_{k-2}) - \varphi(t_{k-3}) + h_{k-2}\sigma(1+\alpha) \\
&\vdots \\
|x_2 - \overline{x}_2| &\leq |x_1 - \overline{x}_1| + \varphi(t_2) - \varphi(t_1) + h_2\sigma(1+\alpha) \\
|x_1 - \overline{x}_1| &\leq |x_0 - \overline{x}_0| + \varphi(t_1) - \varphi(t_0) + h_1\sigma(1+\alpha).
\end{aligned}$$

Alors on fait la somme membre à membre puis on simplifie, on obtient

$$|x_k - \overline{x}_k| \leq |x_0 - \overline{x}_0| + \varphi(t_k) - \varphi(t_0) + \left(\sum_{l=1}^{k} h_k\right)\sigma(1+\alpha),$$

donc, comme $x_0 = \overline{x}_0$, et φ croissante, on a

$$|x_k - \overline{x}_k| \leq \varphi(T) - \varphi(0) + T\sigma(1+\alpha). \tag{3.25}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Puisque la constante σ est finie, on peut conclure de (3.17) et (3.25) que

$$\begin{aligned}
|x_k| &\leq |\overline{x}_k| + \varphi(T) - \varphi(0) + T\sigma(1+\alpha) \\
&\leq \alpha + \varphi(T) - \varphi(0) + T\sigma(1+\alpha) \\
&\leq \alpha + \varphi(T) - \varphi(0) + (1+\alpha)\,\sigma \int_0^T ds \\
&\leq \alpha + \varphi(T) - \varphi(0) + (1+\alpha) \int_0^T \sigma\, ds = \beta.
\end{aligned}$$

Donc

$$|x_k| \leq \beta. \tag{3.26}$$

Pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Ceci établit (3.4). Pour établir (3.5), nous continuons à utiliser les notations introduites en (3.10), et introduisons une suite de points ξ_k tels que

$$\xi_k := \text{proj}(x_{k-1}, cl(D(F_k)))$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Il est évident que

$$\xi_k \in cl(D(F_k)),$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points ξ_k^ε satisfaisant

$$\xi_k^\varepsilon \in D(F_k) \tag{3.27}$$

$$|\xi_k^\varepsilon - \xi_k| \leq \varepsilon. \tag{3.28}$$

Il découle de **Remarque** 1.5.9. et de l'hypothèse $(A3)$ que

$$\begin{aligned} |x_{k-1} - \xi_k| &\leq \sup_{z \in D(F(t_k,.))} (z, D(F(t_{k-1}, .))) \\ &\leq d_H(D(F(t_K, .)), D(F(t_{k-1}, .))) \\ &\leq dis(F(t_K, .), F(t_{k-1}, .)) \\ &\leq \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. D'après (3.26), (3.29) et (3.9) et du fait que φ est croissante,

$$\begin{aligned} |\xi_k| &\leq |x_{k-1}| + \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \\ &\leq \beta + \varphi(T) - \varphi(0) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. D'après (3.28) on a

$$|\xi_k^\varepsilon| \leq |\xi_\varepsilon| + \varepsilon$$

d'où

$$|\xi_k^\varepsilon| \leq \gamma + \varepsilon, \tag{3.30}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Maintenant, définissons

$$\zeta_k^\varepsilon := J_k(\xi_k^\varepsilon),$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Notons que

$$|x_k - x_{k-1}| \leq |x_k - \zeta_k^\varepsilon| + |\zeta_k^\varepsilon - \xi_k^\varepsilon| + |\xi_k^\varepsilon - x_{k-1}|.$$

Or

$$|x_k - \zeta_k^\varepsilon| = |J_k(x_{k-1}) - J_k(\xi_k^\varepsilon)| \leq |x_{k-1} - \xi_k^\varepsilon|.$$

Donc

$$|x_k - x_{k-1}| \leq 2 \mid \xi_k^\varepsilon - x_{k-1}| + |\zeta_k^\varepsilon - \xi_k^\varepsilon|. \tag{3.31}$$

Puisque $\xi_k^\varepsilon \in D(F_k)$,

$$\frac{\xi_k^\varepsilon - \zeta_k^\varepsilon}{h_k} = \frac{1}{h_k}(\xi_k^\varepsilon - J_k(\xi_k^\varepsilon)) = \frac{1}{h_k}(I - J_k)(\xi_k^\varepsilon) = Y_k(\xi_k^\varepsilon).$$

D'après la **proposition** 1.7.5. on a

$$\mid Y_k(\xi_k^\varepsilon) \mid = \left| \frac{\xi_k^\varepsilon - \zeta_k^\varepsilon}{h_k} \right| \leq \mid F_k^0(t_k, \xi_k^\varepsilon)|.$$

Alors d'après l'hypothèse (LG) et (3.30) on a

$$\begin{aligned} \mid \xi_k^\varepsilon - \zeta_k^\varepsilon \mid &\leq h_k \mid F_k^0(t_k, \xi_k^\varepsilon)| \\ &\leq h_k \ \sigma(1 + \mid \xi_k^\varepsilon \mid) \\ &\leq h_k \ \sigma(1 + \gamma + \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$ et $\varepsilon > 0$. D'après (3.31) et (3.28), (3.29) et (3.32)

$$\begin{aligned} \mid x_k - x_{k-1} \mid &\leq 2 \mid \xi_k^\varepsilon - x_{k-1}| + \mid \zeta_k^\varepsilon - \xi_k^\varepsilon| \\ &\leq 2 \ \ (\mid \xi_k^\varepsilon - \xi_k| + \mid \xi_k - x_{k-1}|) + \mid \zeta_k^\varepsilon - \xi_k^\varepsilon| \\ &\leq 2(\varepsilon + \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) + h_k\sigma(1 + \gamma + \varepsilon). \end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque ε tend vers zéro on a

$$|x_k - x_{k-1}| \leq 2 \ \ (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) + h_k\sigma(1 + \gamma). \tag{3.33}$$

En fin, d'après (3.33) et (3.7) on a

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &\leq 2 \ \ (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) + (t_k - t_{k-1}) \ \sigma(1 + \gamma) \\ &\leq 2 \ \ (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) + (1 + \gamma) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(s) ds \\ &\leq (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})). \end{aligned}$$

Ceci établit la borne donnée en (3.5) pour σ constante et la partition Δ_l arbitraire.

■

Lemme 3.1.3. *Sous l'hypothèse (YB), pour toute partition* Δ*, avec* $|\Delta| < \Lambda$ *on a*

$$|x_k| \leq \beta \tag{3.34}$$

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}), \tag{3.35}$$

pour tout $k \in \{1, 2, ..., K\}$*, la constante* $\beta \geq 0$ *et la fonction* $\psi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *sont définis par*

$$\begin{aligned} \beta &:= |x_0| + \alpha T \\ \psi(t) &:= \alpha t, \end{aligned} \tag{3.36}$$

avec $\alpha := 2(\theta(T) - \theta(0)) + F^0(0, x_0)$.

Démonstration. Soit $x_0 \in D(F(0, .))$. Puisque $x_{k+1} = J_{k+1}(x_k) \in D(F_{k+1})$, alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}}\right| &= \left|\frac{1}{h_{k+1}}(J_{k+1}(x_k) - x_k)\right| \\ &= \left|\frac{-1}{h_{k+1}}(I - J_{k+1})(x_k)\right| \\ &= |Y_{k+1}(x_k)|\,. \end{aligned}$$

d'après (YB) on obtient

$$\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}}\right| = |Y_{k+1}(x_k)| \leq \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) + |F_k^0(x_k)|. \tag{3.37}$$

D'une autre part, d'après (3.2) on a

$$Y_{k+1}(x_k) \in F_{k+1}(J_{k+1}(x_k)) = F_{k+1}(x_{k+1}),$$

alors

$$|Y_{k+1}(x_k)| \geq |F_{k+1}^0(x_{k+1})|.$$

Nous avons donc

$$|F_{k+1}^0(x_{k+1})| \leq |Y_{k+1}(x_k)| \leq \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) + |F_k^0(x_k)|,$$

c'est-à-dire,

$$|F_{k+1}^0(x_{k+1})| \leq \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) + |F_k^0(x_k)|.$$

En particulier, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|F_k^0(x_k)| &\leq \theta(t_k) - \theta(t_{k-1}) + |F_{k-1}^0(x_{k-1})| \\
|F_{k-1}^0(x_{k-1})| &\leq \theta(t_{k-1}) - \theta(t_{k-2}) + |F_{k-2}^0(x_{k-2})| \\
|F_{k-2}^0(x_{k-2})| &\leq \theta(t_{k-2}) - \theta(t_{k-3}) + |F_{k-3}^0(x_{k-3})| \\
&\vdots \\
|F_2^0(x_2)| &\leq \theta(t_2) - \theta(t_1) + |F_1^0(x_1)| \\
|F_1^0(x_1)| &\leq \theta(t_1) - \theta(t_0) + |F_0^0(x_0)|
\end{aligned}$$

on fait la somme membre à membre puis on simplifie, et comme $\varphi(t_k) < \varphi(t_{k+1})$ alors

$$\begin{aligned}
|F_k^0(x_k)| &\leq \theta(t_k) - \theta(t_0) + |F_0^0(x_0)| \\
&\leq \theta(t_{k+1}) - \theta(0) + |F_0^0(x_0)|.
\end{aligned}$$

En insérant cette borne dans (3.37), et en utilisant le fait que θ est croissante, c'est-à-dire ; $\theta(t_{k+1}) < \theta(t_K)$, comme $\theta(t_k) > \theta(0)$ alors $-\ \theta(t_k) < -\ \theta(0)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}}\right| &\leq \theta(t_{k+1}) - \theta(t_k) + \theta(t_{k+1}) - \theta(0) + |F_0^0(x_0)| \\
&\leq 2\ \theta(t_K) - 2\ \theta(0) + |F_0^0(x_0)|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}}\right| \leq 2(\ \theta(T) -\ \theta(0)) + |F_0^0(x_0)|.$$

Posons $\alpha := 2(\theta(T) - \theta(0)) + |F_0^0(x_0)|$, alors

$$\left|\frac{x_{k+1} - x_k}{h_{k+1}}\right| \leq \alpha \Longrightarrow |x_{k+1} - x_k| \leq \alpha\ h_{k+1},$$

et comme $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$, on obtient

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \alpha\ (t_{k+1} - t_k)\ .$$

Alors (3.35) est vérifié avec $\psi(s) = \alpha s$. Pour tout $k \in \{1, 2, ..., K\}$ on a

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \alpha\ (t_k - t_{k-1}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|x_k| &\leq |x_{k-1}| + \alpha t_k - \alpha t_{k-1} \\
|x_{k-1}| &\leq |x_{k-2}| + \alpha t_{k-1} - \alpha t_{k-2} \\
|x_{k-2}| &\leq |x_{k-3}| + \alpha t_{k-2} - \alpha t_{k-3} \\
&\vdots \\
|x_2| &\leq |x_1| + \alpha t_2 - \alpha t_1 \\
|x_1| &\leq |x_0| + \alpha t_1 - \alpha t_0.
\end{aligned}$$

Alors on fait la somme membre à membre puis on simplifie, donc

$$\begin{aligned}
|x_k| &\leq |x_0| + \alpha(t_k - t_0) \\
&\leq |x_0| + \alpha T.
\end{aligned}$$

Alors (3.34) est vérifiée avec $\beta := |x_0| + \alpha T$ donc

$$|x_k| \leq \beta.$$

■

Étape 3 : **Construction d'une suite de solutions approchées.**
Sur la base des valeurs x_k, nous construisons une suite de fonctions absolument continues (dans le temps) qui se rapprochent de la solution réelle du système. A cet effet, notons que la fonction ψ définie dans (3.7) est strictement croissante et absolument continue. Maintenant, définissons la fonction continue par morceaux x_Δ par

$$x_\Delta(t) := \left(\frac{\psi(t_{k+1}) - \psi(t)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right) x_k + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t_k)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right) x_{k+1} \tag{3.38}$$

où $t \in [t_k, t_{k+1}]$ et $k \in \{0, 1, ..., K-1\}$. Par définition, x_Δ est une fonction continue avec

$$x_\Delta(t_k) = x_k \tag{3.39}$$

pour tout $k \in \{0, 1, ..., K\}$. Nous allons montrer que

$$x(t) := \lim_{|\Delta| \longrightarrow 0} x_\Delta(t)$$

est la solution recherchée à l'inclusion (3.1). Une étape intermédiaire importante dans l'étude de la convergence de la suite x_Δ consiste à obtenir la borne uniforme suivante.

Lemme 3.1.4. *Soient* $\underline{\tau}$ *et* $\overline{\tau}$ *tels que* $0 \leq \underline{\tau} < \overline{\tau} \leq T$. *Pour toute partition* Δ, *l'inégalité suivante est toujours vérifiée*

$$|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| \leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}). \tag{3.40}$$

Démonstration. D'après la définition de x_Δ pour une partition fixe Δ, il existe des entiers q et r avec $q+1 \leq r$ tel que $t_q \leq \underline{\tau} < t_{q+1}$ et $t_{r-1} < \overline{\tau} \leq t_r$.
Cas 1 : Si $q+1 = r$ i.e., $\underline{\tau}$ et $\overline{\tau}$ sont dans le même intervalle $[t_q, t_{q+1}[$, alors on a d'après (3.38)

$$\begin{aligned}
x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau}) &= \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{q+1}) + \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)}\right) x_q + \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_q) - \psi(\underline{\tau}) + \psi(t_q)}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)}\right) x_{q+1} \\
&= \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)}\right) x_{q+1} - \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)}\right) x_q \\
&= \frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} (x_{q+1} - x_q).
\end{aligned}$$

D'après (3.35) on a

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| &\leq \frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} (\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)) \\
&\leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}). \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Cas 2 : Si $q+1 < r$ alors on a $t_{r-1} < \overline{\tau} \leq t_r$ et $t_q \leq \underline{\tau} < t_{q+1}$
$(t_q < \underline{\tau} < t_{q+1} < t_{q+2} < ... < t_{r-1} < \overline{\tau} < t_r)$ alors

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| &\leq |x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1}) + x_\Delta(t_{r-1}) - x_\Delta(\underline{\tau})| \\
&\leq |x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1})| + |x_\Delta(t_{r-1}) - x_\Delta(\underline{\tau})| \\
&\leq |x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1})| + |x_\Delta(t_{r-1}) - x_\Delta(t_{q+1}) + x_\Delta(t_{q+1}) - x_\Delta(\underline{\tau})| \\
&\leq |x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1})| + |x_\Delta(t_{r-1}) - x_\Delta(t_{q+1})| + |x_\Delta(t_{q+1}) - x_\Delta(\underline{\tau})|.
\end{aligned}$$

On a $t_{q+1} < t_{q+2} < ... < t_{r-2} < t_{r-1}$ alors

$$|x_\Delta(t_{r-1}) - x_\Delta(t_{q+1})| \leq \sum_{q+1 \leq i \leq r-2} |x_\Delta(t_{i+1}) - x_\Delta(t_i)|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| &\leq |x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1})| \\
&\quad + \sum_{q+1 \leq i \leq r-2} |x_\Delta(t_{i+1}) - x_\Delta(t_i)| + |x_\Delta(t_{q+1}) - x_\Delta(\underline{\tau})|. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

D'après (3.38), (3.39) et (3.41) et $t_{r-1} < \overline{\tau} \leq t_r$ on a

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(t_{r-1})| &= \left| \left(\frac{\psi(t_r) - \psi(\overline{\tau})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_{r-1} + \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_r - x_{r-1} \right| \\
&= \left| \left(\frac{\psi(t_r) - \psi(\overline{\tau}) - \psi(t_r) + \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_{r-1} + \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_r \right| \\
&= \left| - \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_{r-1} + \left(\frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} \right) x_r \right| \\
&= \left| \frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} (x_r - x_{r-1}) \right| \\
&= \frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} |x_r - x_{r-1}| \\
&\leq \frac{\psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1})}{\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})} (\psi(t_r) - \psi(t_{r-1})) \\
&\leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1}). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

D'une autre part d'après (3.38), (3.39) et (3.41) et $t_q \leq \underline{\tau} < t_{q+1}$ on a

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(t_{q+1}) - x_\Delta(\underline{\tau})| &= \left| x_{q+1} - \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_q - \left(\frac{\psi(\underline{\tau}) + \psi(t_q)}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_{q+1} \right| \\
&= \left| \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q) - \psi(\underline{\tau}) + \psi(t_q)}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_{q+1} - \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_q \right| \\
&= \left| \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_{q+1} - \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) x_q \right| \\
&= \left| \left(\frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} \right) (x_{q+1} - x_q) \right| \\
&= \frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} |x_{q+1} - x_q| \\
&\leq \frac{\psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau})}{\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)} (\psi(t_{q+1}) - \psi(t_q)) \\
&\leq \psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau}). \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Remplaçons par (3.43) et (3.44) dans (3.42) nous obtenons

$$|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| \leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1}) + \sum_{t_{q+1} \leq i \leq t_{r-2}} |x_\Delta(t_{i+1}) - x_\Delta(t_i)| + \psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau}),$$

et d'après (3.41) on a,

$$|x_\Delta(t_{i+1}) - x_\Delta(t_i)| \leq \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i),$$

par suite

$$\begin{aligned}
|x_\Delta(\overline{\tau}) - x_\Delta(\underline{\tau})| &\leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(t_{r-1}) + \psi(t_{q+2}) - \psi(t_{q+1}) + ... + \psi(t_{r-1}) - \psi(t_{r-2}) + \psi(t_{q+1}) - \psi(\underline{\tau}) \\
&= \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}).
\end{aligned}$$

Ainsi, (3.40) est établi.

■

Étape 4 : **Limite de la suite.**
Les bornes établies dans la section précédente permettent d'étudier le comportement limite de la suite $(x_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}}$.

Lemme 3.1.5. *Considérons une suite de partitions $(\Delta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ avec $|\Delta_l| \longrightarrow 0$ lorsque l tend vers l'infini. La suite $(x_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.*

Démonstration. Notons tout d'abord que ψ introduit dans (3.7) (ou, (3.36)) est uniformément continue sur l'intervalle compact $[0, T]$ car elle est absolument continue sur le même intervalle. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre positif $\delta > 0$ tel que pour tout $\underline{\tau}, \overline{\tau} \in [0, T]$ tel que $|\overline{\tau} - \underline{\tau}| < \delta$. On a

$$|\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau})| < \varepsilon,$$

d'après (3.40), on a

$$|x_{\Delta_l}(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\underline{\tau})| < \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}) < \varepsilon$$

donc

$$|x_{\Delta_l}(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\underline{\tau})| < \varepsilon$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\underline{\tau}, \overline{\tau} \in [0, T]$ tels que $|\overline{\tau} - \underline{\tau}| < \delta$. par conséquent, la suite $(x_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.

■

Soit $(\Delta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions avec $|\Delta_l| \longrightarrow 0$ quand l tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned}
|x_{\Delta_l}(t)| &= \left| \left(\frac{\psi(t_{k+1}) - \psi(t)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right) x_k + \left(\frac{\psi(t) - \psi(t_k)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right) x_{k+1} \right| \\
&= \left| \frac{\psi(t_{k+1})\, x_k - \psi(t)\, x_k + \psi(t)\, x_{k+1} - \psi(t_k)\, x_{k+1}}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right| \\
&\leq \frac{\psi(t)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} |x_{k+1} - x_k| + \left| \frac{\psi(t_{k+1})\, x_k - \psi(t_k)\, x_{k+1}}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \right| \\
&\leq \frac{\psi(t)\, (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} + A_k \\
&\leq \psi(t) + A_k \\
&= M(t).
\end{aligned}$$

où A_k est une constante positive alors la suite $(x_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}}$ est ponctuellement bornée. D'où d'après le **Théorème** 1.2.16.

(d'Arzelá-Ascoli) il existe $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ tel que $(x_{\Delta_l})_{l\in N}$ converge uniformément vers une fonction continue x. Pour voir que x est uniformément continue, soit $\underline{\tau}, \overline{\tau} \in [0,T]$ avec $\underline{\tau} \leq \overline{\tau}$, alors

$$\begin{aligned}|x(\overline{\tau}) - x(\underline{\tau})| &= |x(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\overline{\tau}) + x_{\Delta_l}(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\underline{\tau}) + x_{\Delta_l}(\underline{\tau}) - x(\underline{\tau})| \\ &\leq |x(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\overline{\tau})| + |x_{\Delta_l}(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\underline{\tau})| + |x_{\Delta_l}(\underline{\tau}) - x(\underline{\tau})|,\end{aligned}$$

d'après (3.40)

$$|x(\overline{\tau}) - x(\underline{\tau})| \leq |x(\overline{\tau}) - x_{\Delta_l}(\overline{\tau})| + \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}) + |x_{\Delta_l}(\underline{\tau}) - x(\underline{\tau})|.$$

Comme $x(t) := \lim\limits_{|\Delta|\longrightarrow 0} x_\Delta(t)$ c'est-à-dire ; $x(\overline{\tau}) := \lim\limits_{|\Delta_l|\longrightarrow 0} x_{\Delta_l}(\overline{\tau})$, alors par passage à la limite quand, $|\Delta_l| \longrightarrow 0$ on a

$$\begin{aligned}|x(\overline{\tau}) - x(\underline{\tau})| &\leq |x(\overline{\tau}) - \lim_{|\Delta_l|\longrightarrow 0} x_{\Delta_l}(\overline{\tau})| + \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}) + |\lim_{|\Delta_l|\longrightarrow 0} x_{\Delta_l}(\underline{\tau}) - x(\underline{\tau})| \\ &\leq |x(\overline{\tau}) - x(\overline{\tau})| + \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}) + |x(\underline{\tau}) - x(\underline{\tau})| \\ &\leq \psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}). \end{aligned} \tag{3.45}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que si $\overline{\tau} - \underline{\tau} < \delta(\varepsilon)$ on a

$$\psi(\overline{\tau}) - \psi(\underline{\tau}) < \varepsilon.$$

D'où (3.45) donne que

$$|x(\overline{\tau}) - x(\underline{\tau})| < \varepsilon.$$

Donc x est uniformément continue.

Maintenant, nous voulons montrer que x est une solution de (3.1), c'est-à-dire ;

$$x(t) \in D(F(t,.)) \ \text{ et } \ \dot{x}(t) \in -F(t, x(t)) \tag{3.46}$$

p.p $t \in [0,T]$. Soit $\mathit{\Gamma} \subseteq [0,T]$ défini par

$$\mathit{\Gamma} = \{t \in (0,T) : \psi \ \text{ et } \ x \ \text{ sont toutes les deux différentiables en } t \text{ et } t \notin \cup_{l\in\mathbb{N}}\Delta_l\}.$$

Puisque ψ et x sont tous les deux absolument continus et $\cup_{l\in\mathbb{N}}\Delta_l$ est dénombrable, il suffit de montrer que (3.46) est vérifieé pour presque tout $t \in \mathit{\Gamma}$.

Pour une partition Δ, définissons

$$y_\Delta(t) = \frac{x_{k+1} - x_k}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)},$$

pour $t \in (t_k, t_{k+1})$ et $y_\Delta(t_k) = 0$ pour $t_k \in \Delta$. D'après (3.38),

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\Delta_l}(t) &= \frac{-\dot{\psi}(t)\, x_k}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} + \frac{\dot{\psi}(t)\, x_{k+1}}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \\ &= \dot{\psi}(t)\frac{x_{k+1} - x_k}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \\ &= \dot{\psi}(t) y_\Delta(t),\end{aligned}$$

pour tout $t \in \Gamma$. D'après **lemme** 3.1.4., on a

$$\begin{aligned}|y_{\Delta_l}(t)| &= \left|\frac{x_{k+1} - x_k}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)}\right| \\ &= \left|\frac{x_\Delta(t_{k+1}) - x_\Delta(t_k)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)}\right| \\ &\leq \frac{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} \\ &= 1, \end{aligned} \tag{3.47}$$

donc $|y_{\Delta_l}|_{L_\infty} \leq 1$ pour tout l. Par conséquent, la suite $(y_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}}$ est contenue dans la boule fermée de rayon $\sqrt{\psi(T) - \psi(0)}$ de espace de Hilbert $L_2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n)$, en effet

$$\begin{aligned}\|y_{\Delta_l}\|_{L^2} &= \left(\int_0^T |y_{\Delta_l}(t)|^2 d\dot{\psi}(t)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^T d\dot{\psi}(t)\right)^{1/2} \\ &= \left(\left[\psi(t)\right]_0^T\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\psi(T) - \psi(0)}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la **Théorème** 1.9.8. il existe une sous-suite N' de $N_\infty^\#$ telle que

$$(y_{\Delta_l})_{l\in\mathbb{N}'} \text{ converge faiblement vers } y \text{ dans } L_2(d\psi, [0,T], \mathbb{R}^n). \tag{3.48}$$

Alors on a

$$\dot{x}_{\Delta_l}(t) = \dot{\psi}(t) y_{\Delta_l}(t),$$

et d'après **Lemme** 2.0.2.

$$\dot{x}(t) = \dot{\psi}(t) y(t), \tag{3.49}$$

p.p $t \in \Gamma$.

Maintenant, soit $t^* \in \Gamma$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}$ il doit exister $k_l \in \{1, 2, ..., K(\Delta_l)\}$ avec la propriété que $t_k < t^* < t_{k+1}$. Notons que $\lim\limits_{l\longrightarrow\infty} t_k = \lim\limits_{l\longrightarrow\infty} t_{k_l+1} = t^*$, $|\Delta_l|$ converge vers zéro quand l tend vers l'infini. Par construction, on a

$$\left(x_{t_{k_l+1}}, -\frac{x_{t_{k_l+1}} - x_{t_{k_l}}}{t_{k_l+1} - t_{k_l}}\right) \in \ \text{gph}(F(t_{k_l+1}, .)).$$

De manière équivalente, nous avons

$$\left(x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}), -\frac{(x_{t_{k_l+1}} - x_{t_{k_l}})(\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))}{(t_{k_l+1} - t_{k_l})(\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))}\right) \in \operatorname{gph}(F(t_{k_l+1}, .))$$

donc

$$\left(x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}), -\frac{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)}{t_{k_l+1} - t_{k_l}} y_{\Delta_l}(t)\right) \in \operatorname{gph}(F(t_{k_l+1}, .)). \tag{3.50}$$

D'après la définition de gph et (3.50) on a

$$-\frac{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)}{t_{k_l+1} - t_{k_l}}\, y_{\Delta_l}(t) \in F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1})).$$

D'où

$$y_{\Delta_l}(t) \in -\frac{t_{k_l+1} - t_{k_l}}{\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1})). \tag{3.51}$$

Posons

$$S_l(t^*) := -\frac{t_{k_l+1} - t_{k_l}}{\psi(t_{k_l+1}) - \psi(t_{k_l})} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1})). \tag{3.52}$$

D'après (3.51), on a que

$$y_l(t^*) \in S_l(t^*).$$

D'après (3.47), (3.48) et (3.52) et le **lemme** 2.0.4. on a

$$y(t^*) \in \overline{co}(\limsup_{l \longrightarrow +\infty} S_l(t^*)).$$

En raison de l'hypothèse de semicontinuité extérieure de F, nous avons

$$\limsup_{l \longrightarrow +\infty} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1})) \subseteq F(t^*, x(t^*)),$$

alors

$$\begin{aligned} \overline{co}(\limsup_{l \longrightarrow +\infty} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}))) &\subseteq \overline{co}(F(t^*, x(t^*))) \\ &= F(t^*, x(t^*)). \end{aligned}$$

Car l'ensemble $F(t^*, x(t^*))$ est fermé et convexe en raison de la propriété de maximale monotonie, **(Proposition** 1.7.3.**)**. D'autre par d'après (3.7) on a

$$\psi(t^*) = t^* + 2\varphi(t^*) + (1+\gamma)\int_0^{t^*} \sigma(s)ds$$

$$\text{alors } \dot{\psi}(t^*) = 1 + 2\dot{\varphi}(t^*) + (1+\gamma)\sigma(t^*)$$

comme φ est croissante alors $\dot{\varphi}$ est positive , aussi σ est positive donc $\forall t^* \in \Gamma$, $\dot{\psi}(t^*) \geq 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\overline{co}(\limsup_{l \longrightarrow +\infty} S_l(t^*)) &= \overline{co}\left(\limsup_{l \longrightarrow +\infty}\left[-\frac{t_{k_l+1}-t_{k_l}}{\psi(t_{k_l+1})-\psi(t_{k_l})}F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}))\right]\right)\\
&= \overline{co}\left(\limsup_{l \longrightarrow +\infty} -\frac{t_{k_l+1}-t_{k_l}}{\psi(t_{k_l+1})-\psi(t_{k_l})}\limsup_{l \longrightarrow +\infty} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}))\right)\\
&= -\frac{1}{\dot{\psi}(t)}\ \overline{co}\left(\limsup_{l \longrightarrow +\infty} F(t_{k_l+1}, x_{\Delta_l}(t_{k_l+1}))\right)\\
&\subseteq -\frac{1}{\dot{\psi}(t)}\ F(t^*, x(t^*)).
\end{aligned}$$

$$y(t^*) \in \frac{-1}{\dot{\psi}(t^*)}F(t^*, x(t^*)).$$

$$\dot{x}(t^*) = \dot{\psi}(t^*)y(t^*)$$

et

$$y(t^*) \in \frac{-1}{\dot{\psi}(t^*)}F(t^*, x(t^*))$$

donc

$$\dot{x}(t^*) = \dot{\psi}(t^*)y(t^*) \in -F(t^*, x(t^*))$$

pour chaque $t^* \in \Gamma$.

ce qui achève le démonstration du théorème.

■

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J.P. Aubin and A. Cellina,** *Differential inclusions set-valued maps and viability theory.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New york Tokyo (1984).

[2] **G. Beer,** *Topologies on closed and closed convex sets.* Kluwer Academic Publishers, (1993).

[3] **D.P. Bertsekas,** *Convex Optimization Theory.* Athena Scientific, Nashua (2009).

[4] **A. Bouzid et J. Calbux,** *Théorie de la mesure et de l'intégration.* Publication de l'université de Rouen, (1993).

[5] **H. Brézis,** *Analyse fonctionnelle théorie et applications.* Masson, (1993).

[6] **M.K. Camlibel et L. Iannelli et A. Tanwani,** *Convergence of proximal solutions for evolution inclusions with time-dependent maximal monotone operators.* Mathematical programming, 194 :1017-1059 (2022).

[7] **N. Parikh et S. Boyd,** *Proximal algorithms.* Found. Trends Optim. 1(3), 123–231 (2013).

[8] **M. Kunze et M.D.P. Monteiro Marques,** *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains.* Set-Valued Anal. 5, 57–72 (1997).

[9] **R.T. Rockafellar et J.-B. Wets,** *Variational Analysis.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, p. 317. Springer, New York (1998).

[10] **W. Rudin,** *Analyse réelle et complexe.* Hermann, Paris, (1997).

[11] **A.A. Vladimirov,** *Differential Inclusions With Nonstationary Maximal Monotone Operators.* Institute for Control Problems. Vol. 24, pp. 14-24, October-December, 1990.

[12] **A.A. Vladimirov,** *Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space.* Nonlinear Anal.17, 499–518 (1991).