République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Saddik Benyahia de Jijel

Faculté des sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire

de fin d'étude pour l'obtention du diplôme

Master

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Sur quelques généralisations de la fonction gamma p-adique

Présenté par :

Sahali Nour El Houda

Encadré par :

Dr.Rafik Belhadef

Devant le jury

Président :	***F.Belhannache***	M.C.A Université de Jijel
Encadreur :	***R.Belhadef***	M.C.A Université de Jijel
Examinateur :	***A.Makhlouf***	M.C.A Université de Jijel

Année Universitaire **2022/2023**

Remerciements

Je remercie tout d'abord *Allah* le tout puissant de j'avoie donné la santé et la volonté de commencer et de terminer cette mémoire

Je tien à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur du mémoire, le maître de conférence *Belhadef Rafik*. Avec sa gentillesse et sa expérience, il m'a bien guidé et apporté son soutien tout au long de préparation de le mémoire. Je remercie vivement pour tout le temps qu'il ma consacré, pour ces encouragements et ses conseils activés.

Merci aux membres du jury qui ont bien voulu assister à la soutenance de ce mémoire.

Je voudrais adresser mes chaleureux remerciements à tous les enseignants de mathématiques de l'université de Jijel.

Je remercie chaleureusement toute ma famille pour leurs soutiens qui m'a été bien utile durant ma mémoire.

Merci également à tous mes amis et mes collègues.

Dédicace

Je dédie ce travail

À ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que dieu la garde

À mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que dieu la garde

À tous mes frères et sœurs

À tous mes amis et collègues

A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer ...

Table des matières

Notations

Nous utilisons les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$: un corps.
- $\mathbb{K}[x]$: l'ensemble de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs réels.
- $\mathbb{Z}^*$: l'ensemble des entiers relatifs réels non nuls.
- $\mathbb{Z}^*_-$: l'ensemble des entiers relatifs réels non nuls et négatives.
- $\mathbb{Z}_+$: l'ensemble des entiers relatifs réels positives.
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+$: l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complexes.
- p : un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7, 11, \cdots$
- $(a, b) = 1$: a et b sont premiers entre eux.
- $\mathbb{Z}_p$: l'ensemble des entiers p-adiques.
- $\mathbb{Z}_p^*$: l'ensemble des éléments inversible de $\mathbb{Z}_p$.
- $\mathbb{Q}_p$: l'ensemble des nombres p-adiques.
- $\overline{\mathbb{Q}_p}$: la clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$.
- $\mathbb{C}_p$: l'ensemble des nombres complexes p-adiques.

- $v_p(x)$: la valuation p-adique de x.
- $S_p(n)$: la somme des chiffres de l'écriture de n en base p.
- $[x]$: la partie entière réel de x.
- $|.|$: la valeur absolue usuelle.
- $|.|_p$: la valeur absolue p-adique,
- $\binom{n}{k}$: coefficient binomial.

Introduction générale

Les nombres p-adiques ont été introduits par ***Kurt Hensel*** en *1897*. Il a développé une extension des nombres rationnels en utilisant des séries formelles, les nombres p-adiques ont des applications en théorie des nombres, géométrie algébrique et cryptographie, c'est un domaine de recherche important en mathématiques.

Le nombre "factorielle s", défini par :

$$s! = s(s-1)(s-2)\cdots 1,$$

ne semble pas pouvoir être défini lorsque n n'est pas un entier naturel. Il existe toutefois une fonction qui prolonge naturellement la notion de factorielle aux réels, et même aux complexes.

La fonction gamma noté Γ a d'abord été introduie par ***Leonhard Euler*** en *1729* qui intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace où il a produit la *formule d'Euler*, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(z) > 0$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

La fonction gamma d'Euler est l'une des fonctions spéciales les plus importantes, en raison de son rôle dans divers domaines. La généralisation de cette fameuse fonction a attiré l'attention de nombreux mathématiciens et physiciens. Il y a des réalisations remarquables. En *1965*, la forme commune de la fonction gamma a été donnée par ***Artin*** avec un changement de variable :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x > 0).$$

Il est bien connu que la fonction Γ est une interpolation de la fonction factorielle $n!$, du façon que sur $\mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

La fonction gamma p-adique Γ_p est une fonction d'un entier p-adique analogue à la fonction gamma classique. En *1975*, ***Morita*** a donné la définition explicitement pour la première fois par :

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{1\leq j\leq n-1 \\ (p,j)=1}} j.$$

Bien que ***Barsky*** en *1980* ait souligné que ***Dwork*** (*1964*) utilisait implicitement la même fonction. En *1977*, ***Diamond*** a défini un analogue p-adique G_p de $\log_p \Gamma_p$. Il y avait plusieurs généralisations de la fonction gamma p-adique (Voir [13], [2] et [7]), l'une de ces généralisations a été introduire par ***Kaori Ota*** en *1994*. Pour étudier la fonction hypergéométrique généralisée, *Ota* a définit la fonction gamma généralisée Γ_q avec $q = p^t$ et $t \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\Gamma_q(x+1) = \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1),$$

avec $x \in \mathbb{Z}_p$ donnée pour sont développement p-adique $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j$, $x_j \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$, $x_0 \neq 0$, et pour $\ell \in \mathbb{N}^*$: $h_\ell(x) = \sum_{j\geq \ell} x_j p^{j-\ell}$.

Dans notre travail, nous avons détaillé les démonstrations de ***Ota***, tels que (Proposition 3.2.1, Proposition 3.2.4, Proposition 3.2.6, Proposition 3.2.7). Ainsi, on a proposé d'autres propriétés pour la fonction gamma p-adique généralisée, et nous les a démontré (Proposition 3.2.2, Proposition 3.2.3, Corollaire 3.2.5, Proposition 3.2.8).

Ce mémoire est réparti sur trois chapitres et quelques références précède par une introduction.

Dans le premier chapitre , on rappel les défnitions et les propriétés de la fonction gamma dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Dans le deuxième chapitre, on commence par donner quelques rappels des notions fondamentales du corps normés dans le cas général, puis on définit la valuation et la norme p-adique et on construit le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ et le corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$. On termine ce chapitre par une présentation des suites, des séries entières p-adiques et de la fonction logarithme et exponentielle p-adique, ainsi que la méthode d'interpolation p-adique et le développement de Mahler.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la fonction gamma p-adique et sa généralisation. On commence par un petit rappel sur la fonction Γ_p, puis on introduit la définition de Γ_q donné par Ota. On terminons ce chapitre par les propriétés de cette généralisation.

Chapitre 1

Rappel sur la fonction gamma réelle

Dans ce chapitre, nous rappolons la définition et les propriétés spécifiques de la fonction gamma classique sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
Nous utilisons les références suivantes : [1] et [5].

1.1 Fonction gamma sur $\mathbb{N}$

Définition 1.1.1. *On définit la fonction gamma noté Γ , par l'intégrale généralisée suivante :*

$$\Gamma_n = \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \qquad \forall n \geq 1. \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1. *Pour $n = 1$: $\Gamma(1) = 1$.*

Proposition 1.1.1.

i) *Γ_n converge pour tous $n \in \mathbb{N}^*$.*

ii) *On peut démontrer par récurrence que ona :*

$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{1.2}$$

et on a aussi l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \tag{1.3}$$

1.2 Fonction gamma sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1. *Pour $x \in]0, +\infty[$, on définit la fonction gamma par l'intégrale :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.4}$$

Exemple 1.2.1. *Pour $x = \frac{1}{2}$: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.*

Théorème 1.2.1. *La fonction gamma est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty]$, ses dérivées successives sont données par la formule :*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln(t))^k t^{x-1} dt, \tag{1.5}$$

et on a l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.6}$$

La fonction gamma sur $\mathbb{R}$ vérifie pour $x \in]0, +\infty]$ les formules suivantes :

Théorème 1.2.2. ***(Formule de Stirling)***
Pour $x \to +\infty$,nous avons l'équivalence suivante :

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}. \tag{1.7}$$

Théorème 1.2.3. ***(Formule de Gauss)***
Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n! n^x} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n} (x+j)}{n! n^x}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Théorème 1.2.4. ***(Formule de Weierstrass)***
Nous avons :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{x}{k} + 1 \right) e^{-\frac{x}{k}} \right), \tag{1.9}$$

avec, $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ s'appelle la constante d'Euler.

1.3 Fonction gamma sur $\mathbb{C}$

Définition 1.3.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on définit la fonction gamma par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.10}$$

Théorème 1.3.1. *L'intégrale $\Gamma(z)$ est absolument convergente pour $\mathcal{R}e(z) > 0$. Elle définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan. Pour $\mathcal{R}e(z) > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln(t))^k t^{z-1} dt. \tag{1.11}$$

Théorème 1.3.2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$,la fonction gamma $\Gamma(z)$ satisfait a l'équation fonctionnelle :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.12}$$

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+n) \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{z+k} \right). \tag{1.13}$$

La fonction gamma sur $\mathbb{C}$ vérifie aussi les formules de Gauss et de Weierstrass, ainsi que les formules des compléments et de multiplication de Legendre-Gauss :

Théorème 1.3.3. ***(Formule de Gauss)***
La fonction méromorphe Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, alors on a :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\prod_{j=0}^{n} (z+j)}{n! n^z}. \tag{1.14}$$

Théorème 1.3.4. ***(Formule de Weierstrass)***
La fonction méromorphe Γ vérifie la relation :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{xz}{k} + 1 \right) e^{-\frac{z}{k}} \right), \tag{1.15}$$

avec, $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \right)$ s'appelle la constante d'Euler.

Théorème 1.3.5. *La fonction $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est méromorphe sur $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_{-}$, on a :*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right). \tag{1.16}$$

Exemple 1.3.1. *Pour $z = 1$ on a :* $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Théorème 1.3.6. ***(Formule des compléments)***
Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\_$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{1.17}$$

Remarque 1.3.1. *On peut retrouver la valeur de $\Gamma(\frac{1}{2})$, en utilisant la formule des compléments.*
En effet, on a pour $z = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi\frac{1}{2})},$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \qquad\qquad (\textit{car}\, \Gamma(z) \geq 0, \forall z).$$

Théorème 1.3.7. ***(Formule de multiplication de Legendre-Gauss)***
Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\_$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(z) = p^{z-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}} \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{p}\right), \tag{1.18}$$

pour $p = 2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right). \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Notions de l'analyse p-adique

Le but de ce chapitre est de donner quelques définitions et résultats fondamentaux sur un corps normé et sur les nombres p-adiques. Ainsi que des résultats de l'analyse p-adiques.

2.1 Construction des nombres p-adiques

2.1.1 Corps normés

Définition 2.1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, on appelle norme sur $\mathbb{K}$ toute application $\|.\| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie les conditions suivantes :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{K}.$

ii) $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|, \qquad \forall x \in \mathbb{K}.$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$ *(Inégalité triangulaire).*

Dans ce cas, $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$ est un corps normé.

Exemple 2.1.1. *Soit $x \in \mathbb{K}$, on dit que la norme est triviale si :*
$\|0\| = 0$, et $\|x\| = 1$ pour tout $x \neq 0$, c'est à dire :

$$\|x\| = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0, \\ 1 & si \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Définition 2.1.2. ***(Norme non archimedienne)***
On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ est non archimedienne sur le corps $\mathbb{K}$ si elle vérifie l'inégalité triangulaire forte, c'est à dire :

$$\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|), \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}. \tag{2.1}$$

Si la norme $\|\cdot\|$ est non archimedienne, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps non archimedienne.

Proposition 2.1.1. *[11] Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) $\|\cdot\|$ *est non archimedienne.*

ii) $\|n\| \leq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

$i) \Rightarrow ii)$ On preuve cette implication par induction :

- Pour $n = 1$: $\|1\| = 1 \leq 1$
- Supposon que $\|k\| \leq 1$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, et montrons que $\|n\| \leq 1$

  On remarque que :

$$\|n\| = \|(n-1) + 1\| \leq \max\{\|n-1\|, 1\} = 1$$

  A partir de l'inégalité $\|1\| = 1 \leq 1$ et de l'hypothése d'induction, on a $\|n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\|-n\| = \|n\|$, on conclut que $\|n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$ii) \Rightarrow i)$ Comme $\|\cdot\|$ est une norme par l'hypothèse il suffit prouve l'inégalité triangulaire forte (2.1) :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k y^{n-k} \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left\| \binom{k}{n} \right\| \|x^k\| \|y^{n-k}\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \|x^k\| \|y^{n-k}\| \qquad \left(car : \left\| \binom{k}{n} \right\| \leq 1 \right) \\
&\leq (n+1)(\max(\|x\|, \|y\|))^n
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\|x+y\| \leq \sqrt[n]{n+1} \max(\|x\|, \|y\|)$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient :

$$\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|), \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}$$

■

Proposition 2.1.2. *[11] Les éléments a, x d'un corps non archimedienne $\mathbb{K}$, satisfont l'implication :*

$$\|x-a\| < \|a\| \Longrightarrow \|x\| = \|a\| \tag{2.2}$$

2.1.2 Norme p-adique sur $\mathbb{Q}$

Soit p un nombre premier ($p \geq 2$).

2.1.2.1 Valuation p-adique

Définition 2.1.3. *[16] On appelle valuation p-adique l'application $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ définie comme suit :*

i) $v_p(0) = +\infty$.

ii) Pour n un entier non nul : $v_p(n) = k$, si p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.

iii) Pour $n = \frac{a}{b}$ avec a et b des entiers non nuls alors : $v_p(n) = v_p(a) - v_p(b)$.

Exemple 2.1.2.

i) Si $n = 2 + p^3 + 2p^4 + \cdots$, et $p > 2$, alors : $v_p(n) = 0$.

ii) Si $n = p^4 + 2p^7 + \cdots$, et $p > 2$, alors : $v_p(n) = 4$.

iii) Si $n = \frac{3}{7}$, et $p = 2$, alors : $v_p(n) = 0$

iv) Si $n = \frac{3}{16}$, et $p = 5$, alors : $v_p(n) = 0$

Proposition 2.1.3. *[8] Soit $a, b \in \mathbb{Z}$:*

i) $v_p(1) = 0, \qquad \forall p$ *premier.*

ii) $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$.

iii) $v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.

Démonstration.

i) Pour tout p premier on a $1 = p^0$, donc $v_p(1) = 0$.

ii) On pose

$$a = p^{\alpha}(a_0 + a_1 p + a_2 p + \cdots), \quad a_0 \neq 0,$$

et

$$b = p^{\beta}(b_0 + b_1 p + b_2 p + \cdots), \quad b_0 \neq 0.$$

D'où

$$a.b = p^{\alpha+\beta}(n_1.n_2), \text{ où } p \text{ ne divise pas } (n_1.n_2),$$

avec

$$n_1 = (a_0 + a_1 p + a_2 p + \cdots) \quad et \quad n_2 = (b_0 + b_1 p + b_2 p + \cdots).$$

Donc

$$v_p(a.b) = \alpha + \beta.$$

iii) On pose

$$a = p^{\alpha}(a_0 + a_1 p + a_2 p + \cdots), \quad a_0 \neq 0,$$

et

$$b = p^{\beta}(b_0 + b_1 p + b_2 p + \cdots), \quad b_0 \neq 0.$$

En supposant que $\alpha \leq \beta$, on a :

$$a + b = p^{\alpha}(n_1 + p^{\beta - \alpha} n_2),$$

avec

$$n_1 = (a_0 + a_1 p + a_2 p + \cdots) \quad et \quad n_2 = (b_0 + b_1 p + b_2 p + \cdots).$$

D'où

$$v_p(a + b) \geq \alpha = \min(v_p(a), v_p(b)).$$

■

Lemme 2.1.4. *[11] On a :*

$$v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

où, $S_p(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, tel que : $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$ (le développement de n dans la base p)

2.1.2.2 Normes p-adiques

Définition 2.1.4. *On appelle norme p-adique l'application $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, définie comme suit :*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

$|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Proposition 2.1.5. *[11] L'application $|.|_p$ est une norme non archimedienne sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration.

i) $|x|_p = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \forall x \in \mathbb{Q}$:

Soit $x \in \mathbb{Q}$, on a :

$$\begin{aligned} |x|_p = 0 &\Longrightarrow p^{-v_p(x)} = 0 \\ &\Longrightarrow v_p(x) = +\infty \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

ii) $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$:

Soient $x, y \in \mathbb{Q}$, on a :

$$\begin{aligned} |x \cdot y|_p &= p^{-v_p(xy)} \\ &= p^{-(v_p(x)+v_p(y))} \\ &= p^{-v_p(x)} + p^{-v_p(y)} \\ &= |x|_p \cdot |y|_p \end{aligned}$$

iii) $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p, \ \forall x, y \in \mathbb{Q}$:

- Si $x = 0$ ou $y = 0$ la propriété (iii) est triviale.
- Si $x, y \neq 0$, on pose : $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, alors on a :

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd},$$

et

$$\begin{aligned} v_p(x+y) = v_p\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) &= v_p(ad+bc) - v_p(bd) \\ &\geq \min(v_p(ad), v_p(bc)) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \min((v_p(a) - v_p(b)), (v_p(c) - v_p(d))) \\ &= \min\left(v_p\left(\frac{a}{b}\right), v_p\left(\frac{c}{d}\right)\right) \\ &= \min(v_p(x), v_p(y)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |x+y|_p &= p^{-v_p(x+y)} \\ &\leq p^{-\min(v_p(x), v_p(y))} \\ &= p^{\max((-v_p(x)),(-v_p(y)))} \\ &= \max(p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}) \\ &= \max(|x|_p, |y|_p). \end{aligned}$$

D'où $|\cdot|_p$ est une norme non archimedienne sur $\mathbb{Q}$ ■

Théorème 2.1.1. *[11](**Ostrawski**)*
Toute norme $\|\cdot\|$ non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à $|\cdot|_p$ la norme p-adique, soit à la valeur absolue usuelle $|\cdot|$.

Proposition 2.1.6. *[11][10]**(Formule du produit)***
Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |x|_p = 1. \tag{2.5}$$

Démonstration. i) Si $n \in \mathbb{N}^*$: on a, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ alors :

$$\begin{cases} |n|_\infty = n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}, \\ |n|_{p_i} = p_i^{-\alpha_i}, & i = \{1, 2, \cdots, m\}, \\ |n|_p = 1, & p \notin \{p_1, \cdots, p_m\}. \end{cases}$$

D'où,

$$\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |n|_p = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}) \cdot (p_1^{-\alpha_1} \cdot p_2^{-\alpha_2} \cdots p_m^{-\alpha_m}) = 1.$$

ii) Si $n \in \mathbb{Z}_-^*$: on a, $n = -n'$, où $n \in \mathbb{N}^*$, par conséquente :

$$|n|_p = |-n'|_p = |n'|_p.$$

D'où,

$$\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |n|_p = \prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |n'|_p = 1.$$

iii) Si $x \in \mathbb{Q}^*$: on a, $x = \frac{n}{m}$ tel que $n, m \in \mathbb{Z}^*$, et comme $|x|_p = \frac{|n|_p}{|m|_p}$ tel que $p = \infty, p - premier$.

Donc,

$$\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |x|_p = \frac{\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |n|_p}{\prod_{\substack{p-premier \\ p=\infty}} |m|_p} = \frac{1}{1} = 1.$$

■

2.1.3 Corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$

Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet par rapport à la norme p-adique $|.|_p$, on le complétant, on obtient un corps complet qui est noté $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adiques. Le corps $\mathbb{Q}_p$ peut alors être défini comme la complétion de l'espace normé $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.1.2. *[4][8]**(Développement de Hensel)***

i) Tout élément $a \in \mathbb{Q}_p$ admet un développement unique sous forme d'une série convergente dans $\mathbb{Q}_p$:

$$a = \sum_{n \geq n_0} a_n p^n, \qquad a_n \in \mathbb{N},$$

où $n_0 = v_p(a)$ et $0 \leq a_n \leq p-1$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

ii) L'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$ est défini par :

$$\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p : a = \sum_{n \geq 0} a_n p^n, \text{ où } \quad a_n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq a_n \leq p-1\},$$

et dans ce cas, on a :

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : v_p(x) \geq 0\}.$$

Proposition 2.1.7. *$\mathbb{Z}_p^*$ est l'ensemble des entiers p-adiques inversibles dans $\mathbb{Z}_p$, on a :*

$$\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\} = \{x \in \mathbb{Z}_p : v_p(x) = 0\}.$$

Théorème 2.1.3. *[10] $\mathbb{Q}_p$ est complet.*

Définition 2.1.5. *On peut définir $\mathbb{Q}_p$ comme l'ensemble des fractions des élèments de $\mathbb{Z}_p$:*

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{b} \setminus a, b \in \mathbb{Z}_p,\ b \neq 0 \right\}.$$

2.1.4 Corps des nombres complexes p-adiques $\mathbb{C}_p$

Le corps $\mathbb{Q}_p$ est complet, et l'algèbre clôs de $\mathbb{Q}_p$ notée $\overline{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas complet, on le complétant, on obtient un corps complet noté $\mathbb{C}_p$ qui s'appelle le corps des nombres complexes p-adiques.

Définition 2.1.6. ***(Corps algèbriquement clôs)***
Un corps $\mathbb{K}$ est algèbriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ de degré n admet n racine dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.1.8. *[6] Le corps des nombres p-adique $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algèbriquement clôs. On note sa clôure algèbrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$.*

Démonstration. On considère le polynome $P(x) = x^3 - p \in \mathbb{Q}_p[x]$.
Supposons que les racines de $P(x)$ sont dans $\mathbb{Q}_p$, alors :

$$\begin{aligned} x^3 - p = 0 &\Leftrightarrow x^3 = p \\ &\Leftrightarrow |x|_p^3 = p^{-1} \\ &\Leftrightarrow |x|_p = p^{\frac{-1}{3}} \\ &\Leftrightarrow v_p(x) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Donc $v_p(x) = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ c'est une contradiction avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$.
D'où les racines de $P(x)$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}_p$, alors $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algèbriquement clôs. ■

Définition 2.1.7. ***(Norme p-adique dans $\mathbb{C}_p$)***
On prolonge la norme p-adique de $\mathbb{Q}_p$ à $\mathbb{C}_p$ en posant $\forall x \in \mathbb{C}_p$:

$$|x|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p, \tag{2.6}$$

avec $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}_p$ qui est dans la classe d'équivalence de x.

Proposition 2.1.9. *[10] Si $x \in \mathbb{C}_p$ avec $x \neq 0$, alors il existe un nombre rationnel $v \in \mathbb{Q}$ tel que :*

$$|x|_p = p^{-v}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.1.1. *[10] On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des élèments de $\mathbb{C}_p$, tel que :*

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{C}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

2.2 Suites et séries p-adiques

Les définitions et les propriétés dans cette section restent valables dans $\mathbb{Q}_p$.

2.2.1 Suites p-adiques

Théorème 2.2.1. *[10] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans le corps $\mathbb{C}_p$. On a :*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est une suite de Cauchy} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Proposition 2.2.1. *[10] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans le corps $\mathbb{C}_p$. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \text{ où } a \in \mathbb{C}_p \text{ et } a \neq 0,$$

alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } |a_n|_p = |a|_p, \ \forall n \geq n_0.$$

2.2.2 Séries p-adiques

Proposition 2.2.2. *[10] Une série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ avec $a_n \in \mathbb{C}_p$ est convergente dans $\mathbb{C}_p$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, dans ce cas :*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|_p \leq \max_n |a_n|_p. \tag{2.8}$$

2.2.3 Séries entières p-adiques

Une série entière complexe p-adique est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ où } a_n \in \mathbb{C}_p \text{ et } z \in \mathbb{C}_p.$$

L'ensemble des séries entières complexes sur $\mathbb{C}_p$ est notée par : $\mathbb{C}_p[[z]]$.

Théorème 2.2.2. *[14]*

i) Pour $z \in \mathbb{C}_p$ et $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge dans } \mathbb{C}_p \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n z^n|_p = 0.$$

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p r^n = 0$ pour $r > 0$, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| \leq r$.

Définition 2.2.1. ***(Le rayon de convergence)***
Le rayon de convergence d'une série entière complexe p-adique est le nombre $0 \leq r_f \leq +\infty$, défini par :

$$r_f = \sup\{r \geq 0, \ |a_n|_p r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}. \tag{2.9}$$

Proposition 2.2.3. *[14] Pour calculer le rayon de convergence d'une série $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ on applique la formule de Hadamar, c'est à dire :*

$$r_f = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup |a_n|_p^{\frac{1}{n}}}. \tag{2.10}$$

Proposition 2.2.4. *[10] Soit $z \in \mathbb{C}_p$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge si $|z|_p < r_f$, et diverge si $|z|_p > r_f$.*

Proposition 2.2.5. *[11] Le domaine de convergence de la série entière complexe p-adique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est le disque fermé :*

$$D = \{z \in \mathbb{C}_p : \ |z|_p \leq R\},$$

avec, $R \in \{p^k, k \in \mathbb{Q}_p\} \cup \{0\} \cup \infty$

Démonstration. Soit r_f le rayon de convergence de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on sait que (d'après la Proposition 2.2.4) la série converge si $|z|_p < r_f$ et diverge si $|z|_p > r_f$, d'où :

i) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge pour $|z|_p = r_f$, alors on a : $R = r_f$;

ii) si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge pour $|z|_p = r_f$ alors, $\forall z \in \mathbb{C}_p$ tel que : $|z|_p < r_f$ la série converge, d'où :

$$R = r_f \cdot p^{-1}.$$

■

Proposition 2.2.6. *[11] La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformement sur D.*

Exemple 2.2.1. *Soit $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ dans $C_p[[z]]$.*

On a : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, donc $|a_n|_p = p^{v_p(n)}$, d'où :

$$r_f = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|_p^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} p^{\frac{v_p(n)}{n}}} = 1 \qquad \left(car : \lim_{n\to\infty} \frac{v_p(n)}{n} = 0 \right).$$

Pour $z \in \mathbb{C}_p$ tel que : $|z|_p = 1$, on a :

$$|a_n z^n|_p = |a_n|_p |z|_p^n = |a_n|_p = p^{v_p(n)} \geq 1 \qquad (car : v_p(n) \geq 0, \ si\, n \in \mathbb{Z}),$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n z^n|_p \neq 0.$$

Donc la série diverge $\forall z \in \mathbb{C}_p$ tel que : $|z|_p = r_f = 1$.
Alors $R = r_f \cdot p^{-1} = p^{-1}$, c'est à dire :

$$D = \{z \in \mathbb{C}_p : \ |z|_p \leq p^{-1}\}.$$

Proposition 2.2.7. *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, une série entière complexe p-adique dont le domaine de convergence est le disque $D \subset \mathbb{C}_p$, alors la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est continue sur D*

Définition 2.2.2. ***(Différentiabilité des fonctions p-adiques)****[14]*
Soit $X \subset \mathbb{C}_p$ un sous-ensemble sans point isolé.
La fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}_p$ est différentiable au point $a \in X$ si la dérivée $f'(a)$ de f à a :

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \text{existe.}$$

Remarque 2.2.1.

i) f est différentiabile sur D si seulement si f est différentiabile en z, $\forall z \in D$

ii) Soit le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}_p[x],$$

alors la dérivée est :

$$P'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

Proposition 2.2.8. *[14] Le rayon de convergence de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et de sa dérivée $Df(z) = \sum_{n=1}^{n} n a_n z^{n-1}$ sont le même, c'est à dire : $r_f = r_{Df}$*

2.3 Fonction logarithme et exponentielle p-adique

Définition 2.3.1. *[10]****(Fonction logarithme p-adique)***

i) La série logarithme est définie par :

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}. \tag{2.11}$$

ii) La série logarithme p-adique noté :

$$\log_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad \in \mathbb{C}_p[[z]] \tag{2.12}$$

est convergente sur : $B_p = \{z \in \mathbb{D} : \ |z-1|_p < 1\}$.

Théorème 2.3.1. *[10] Si $|z-1|_p < 1$ et $|s-1|_p < 1$, on a :*

$$\forall z, s \in B_p : \ \log_p(z \cdot s) = \log_p(z) + \log_p(s). \tag{2.13}$$

Définition 2.3.2. *[10](**Fonction exponentielle p-adique**)*

i) La série exponentielle est définie par :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{2.14}$$

ii) La série exponentielle p-adique noté :

$$\exp_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ \in \mathbb{C}_p[[z]] \tag{2.15}$$

est convergente sur $D_p = \{z \in \mathcal{D} : \ |z|_p < r_p\}$ *où* $r_p = p^{\frac{-1}{p-1}}$.

Proposition 2.3.1. *[10] Si* $z, s \in D_p$*, alors :*

$$\exp_p(z + s) = \exp(z) \cdot \exp(s). \tag{2.16}$$

Lemme 2.3.2. *[8][10]*

i) On a pour $z \in D_p$ *:*

$$|\exp(z) - 1|_p = |z|_p,$$

et

$$|\log(1 + z)|_p = |z|_p.$$

ii) Si $z \in D_p$ *alors :* $|\exp(z)_p - 1|_p < r_p$*, en particulier,* $\exp(z) \in B_p$*, et on a :*

$$\log_p(\exp_p(z)) = z.$$

iii) Si $|z - 1|_p < r_p$ *(c-à-d :* $z \in 1 + D_p$*), alors* $\log_p(z) \in D$*, et on a :*

$$\exp_p(\log_p(z)) = z.$$

2.4 Interpolation p-adique

Soit $\mathbb{K}$ un corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.4.1. *[8] Une suite* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{K}$ *est dite une suite d'interpolation dans* $\mathbb{K}$*, s'il existe une fonction continue* $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ *telle que :* $f(n) = a_n$.

Lemme 2.4.1. *[8] La suite* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{K}$ *est une suite d'interpolation si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists m_\varepsilon > 0, \ \textit{tel que si}: \ k > 0, \ \textit{et}\, n = k + p^{m_\varepsilon}, \ \textit{on a}: \ |a_n - a_k| < \varepsilon.$$

Remarque 2.4.1. *Si* $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{K}$ *est une suite d'interpolation, on écrit parfois pour :* $s \in \mathbb{Z}_p,\ et\, n \in \mathbb{N}, f(s) = \lim\limits_{n\to s} a_n$

Proposition 2.4.2. *[11] Soit* a_n *une suite de Cauchy non constante de nombres p-adiques. Il ne peut alors pas être interpolé.*

Définition 2.4.2. ***(Développement de Mahler)****[8]*
Le développement de Mahler $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ *est donné par* $f(s) = \sum\limits_{j\geq 0} \alpha_j B_j(s)$*, où :*

$$B_j(s) = \frac{s(s-1)\cdots(s-j+1)}{j!} \quad et \quad \alpha_j = \Delta^j f(0)$$

Δ *étant l'opérateur aux différences défini par* $\Delta f(s) = f(s+1) - f(s) = \tau_1 f(s) - f(s)$*, alors* $\Delta = \tau_1 - id$*, avec* $\tau_1 f(s) = f(s+1)$ *d'où* $\tau_n f(s) = f(s+1)$*.*

Remarque 2.4.2. *[8] Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *une suite d'interpolation et soit* $f \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ *tel que* $f(n) = a_n$*. Alors :*

$$a_n = f(n) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \binom{n}{j} \Longleftrightarrow \alpha_n = \Delta^n f(0) = \sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{n}{j} a_j$$

car : $\Delta^n = \sum\limits_{i+j=n} (-1)^i \binom{n}{j} \tau_j$*.*

Proposition 2.4.3. *[8]**(Somme indéfinie)***
Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{K}$ *une fonction continue.*
L'équation aux différences :

$$\Delta F(s) = F(s+1) - F(s) = f(s),\ s \in \mathbb{Z}_p$$

admet une solution continue unique $F : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$*, tel que :* $F(0) = 0$
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, F(s) = \lim\limits_{n\to s} \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(j)$ *que l'on écrit aussi :*$Sf(s) = \sum\limits_{j=0}^{s-1} f(j), s \in \mathbb{Z}_p$*.*
La fonction Sf *est appelée la somme indéfinie de* f*.*

Exemple 2.4.1.

1) $S(B_n) = B_{n+1},\ n \geq 0$*.*

2) Soient : $\lambda \in \mathbb{K}, 0 < |\lambda| < 1$ *et* $f_\lambda(s) = (1+\lambda)^s = \sum\limits_{n\geq 0} \binom{s}{n} \lambda^n, s \in \mathbb{Z}_p$*, alors :*

$$Sf_\lambda(s) = \binom{s}{n+1} \lambda^n = \lambda^{-1}((1+\lambda)^s - 1)$$

Chapitre 3

Fonction gamma p-adique et sa généralisation

3.1 Rappel sur la fonction gamma p-adique

3.1.1 Fonction gamma p-adique sur $\mathbb{N}$

Définition 3.1.1. *[3] Soit $n \in \mathbb{N}$. La factorielle p-adique de n, noté $n!_p$ est définie par :*

$$n!_p = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (p,j)=1}} j, \tag{3.1}$$

avec $0!_p = 1$.
On définit la fonction gamma p-adique, notée Γ_p, par :

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ (p,j)=1}} j. \tag{3.2}$$

C'est-à-dire que : $\Gamma_p(n) = (-1)^n (n-1)!_p$.

Exemple 3.1.1.

i) Pour $n = 1$, on a : $\Gamma_p(1) = -1$ car : $0!_p = 1$

ii) Pour $n = 2$, on a : $\Gamma_p(2) = 1$ car : $1!_p = 1$

iii) Si $p = 2$, on a : $\begin{cases} \Gamma_2(3) = -1 \text{ car : } 2!_2 = 1 \\ \Gamma_2(8) = 105 \text{ car : } 7!_2 = 105 \end{cases}$

Proposition 3.1.1. *[14]*

i) Pour $p \neq 2$, soit a et $s \geq 1$ deux entiers. On a :

$$\prod_{\substack{j=a \\ (p,j)=1}}^{a+p^s-1} j \equiv -1 (\mod p^s) \tag{3.3}$$

ii) Pour $p = 2$, soit $s \geq 3$ on a :

$$\prod_{\substack{j=0 \\ (2,j)=1}}^{2^{s-1}} (n+j) \equiv -1(\mod 2^s). \tag{3.4}$$

Lemme 3.1.2. *[8] Soient $n, s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$:*

i) Si $p \neq 2$, on a :

$$\Gamma_p(n+p^s) = \Gamma_p(n)(\mod p^s). \tag{3.5}$$

ii) Si $p = 2$ et $s \neq 2$, on a :

$$\Gamma_2(n+2^s) = \Gamma_2(n)(\mod 2^s). \tag{3.6}$$

Le Lemme 3.1.2 confirme que la suite $(\Gamma_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions d'interpolation.

Proposition 3.1.3. *[14] Pour $n \in \mathbb{N}$, on a l'équation fonctionnelle par :*

$$\Gamma_p(n+1) = \begin{cases} -n\Gamma_p(n) & si \quad p \text{ ne divise pas } n, \\ -\Gamma_p(n) & si \quad p \text{ divise } n. \end{cases} \tag{3.7}$$

3.1.2 Fonction gamma p-adique sur $\mathbb{Z}_p$

Définition 3.1.2. *[3] Pour $x \in \mathbb{Z}_p$, on définit la fonction Γ_p par la formule :*

$$\Gamma_p(x) = \lim_{n\to x} (-1)^n \prod_{\substack{1\leq j\leq n-1 \\ (p,j)=1}} j. \tag{3.8}$$

Proposition 3.1.4. *[14] On a l'équation fonctionnelle de Γ_p suivante :*

$$\Gamma_p(x+1) = \begin{cases} -x\Gamma_p(x) & si \quad x \in \mathbb{Z}_p^*, \\ -\Gamma_p(x) & si \quad x \in p\mathbb{Z}_p. \end{cases} \tag{3.9}$$

Théorème 3.1.1. *[14] On a les propriétes suivantes :*

i) $|\Gamma_p(x)|_p = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_p.$

ii) $|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}_p.$

iii) $|\Gamma_p(x) - 1|_p \leq |x|_p, \qquad \forall x \in \mathbb{Z}_p.$

Proposition 3.1.5. *[8]La fonction Γ_p vérifie les propriété suivantes :*

i) Pour n un entier positif on a :

$$\Gamma_p(n+1) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{\left[\frac{n}{p}\right]! p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}. \tag{3.10}$$

ii) Pour $n = mp + \lambda$ tel que : $0 \leq \lambda \leq p-1$ et $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma_p(mp+\lambda+1) = (-1)^{mp+\lambda+1} \frac{(mp+\lambda)!}{m! p^m}. \tag{3.11}$$

iii) Pour $n = p^s - 1$ et $s \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma_p(p^s) = (-1)^{p^s} \frac{(p^s-1)!}{(p^{s-1}-1)! p^{p^{s-1}-1}}. \tag{3.12}$$

iv) Pour $n = p^s$ et $s \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma_p(p^s+1) = (-1)^{p^s+1} \frac{(p^s)!}{(p^{s-1})! p^{p^{s-1}}}. \tag{3.13}$$

D'après la Définition 2.4.2 chaque fonction continue admet un développment de Mahler sous la forme

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \binom{x}{k}.$$

Les coefficient $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ sont liés aux valeurs de f par la relation :

$$\sum_{k \geq 0} \alpha_k \frac{x^k}{k!} = e^{-x} \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}.$$

Donc on aura la proposition :

Proposition 3.1.6. *[14]**(Développement de Mahler de Γ_p)***
Soit le développment de Mahler de Γ_p :

$$f(x) = \Gamma_p(x+1) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \binom{x}{k}$$

Les cofficients α_k vérifient la relation suivante :

$$\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right) \frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^{k+1} \alpha_k \frac{x^k}{k!} \tag{3.14}$$

La fonction gamma p-adique Γ_p sur $\mathbb{Z}_p$ vérifie les formules de multiplication de Legendre Gauss et des compléments.

Remarque 3.1.1. *Pour $p \neq 2$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on note $R(x)$ le representant de x modulo $p\mathbb{Z}_p$, tel que : $R(x) \in \{1, ..., p\}$, $R(x) \equiv x(\mod p)$ et on note aussi $R_1(x) = \frac{x-R(x)}{p} \in \mathbb{Z}_p$.*

Théorème 3.1.2. *[8](Formule de multiplication de Legendre Gauss)*

i) Pour $p \neq 2$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, soit $m \in \mathbb{Z}_+$ tel que : $(m,p)=1$, on a :

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{x+j}{m}\right) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{j}{m}\right) m^{1-R(x)}(m^{p-1})^{-R(x)}\Gamma_p(x). \tag{3.15}$$

ii) Pour $p=2$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, posons $\sigma(x)=a_1$, donc pour $m \in \mathbb{Z}_p$ impair alors :

$$\prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2\left(\frac{x+j}{m}\right) = \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma_2\left(\frac{j}{m}\right) m^{-\sigma(x)}\Gamma_2(x). \tag{3.16}$$

Théorème 3.1.3. *[8](Formule des compléments)*

i) Si $p \neq 2$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{R(x)}. \tag{3.17}$$

ii) Si $p=2$ et $x = \sum\limits_{i \geq 0} a_i 2^i \in \mathbb{Z}_2$, $a_i \in \{0,1\}$, posons $\sigma(x)=a_1$, alors :

$$\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x) = (-1)^{\sigma(x)+1}. \tag{3.18}$$

Corollaire 3.1.7. *[8] Si $p \neq 2$, on a : $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}_p$ alors :*

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{\frac{p+1}{2}}. \tag{3.19}$$

Théorème 3.1.4. *[8][15]*

i) Pour $p \neq 2$, on a : Γ_p est analytique sur $p\mathbb{Z}_p$, et n'est pas analytique sur $\mathbb{Z}_p$.

ii) Pour $p=2$, on a : Γ_2 est localement analytique d'ordre 3 sur $2^3\mathbb{Z}_2$ et n'est pas analytique d'orde 2 sur $2^2\mathbb{Z}_2$.

De plus, on a la fonction G_2 définie en posant : $G_2(x)=\Gamma_2(x)$ lorsque $|x| \leq 4^{-1}$, et $G_2(x) = -\Gamma_2(x)$ pour $|x| = 4^{-1}$ est analytique sur $4\mathbb{Z}_2$

Corollaire 3.1.8. *[14][8] Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a :*

$$\frac{\Gamma_p'(x)}{\Gamma_p(x)} = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} \log(x+t)dt. \tag{3.20}$$

Et

$$(\log \Gamma_p)''(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p^*} \frac{1}{x+t}dt. \tag{3.21}$$

3.2 Fonction gamma p-adique généralisée

Dans cette section, on va introduire la définition de la fonction gamma p-adique généralisé et quelques propriétés données par **Kaori Ota** dans [13], puis on démontre d'autres propriétés de cette fonction.

Il y on a des propriétés qu'on les a démontré n'existent pas dans [13].

3.2.1 Définitions

Définition 3.2.1. *[13] Soit $x \in \mathbb{Z}_p$ donnée pour sont développement p-adique $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j$, $x_j \in \{0, 1, \cdots, (p-1)\}$,$x_0 \neq 0$.*

Pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, on définit une application $h_l : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ par :

$$h_\ell(x) = \sum_{j \geq \ell} x_j p^{j-\ell} = x_\ell + x_{l+\ell} p + \cdots \tag{3.22}$$

dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j &= x_0 + x_1 p + \cdots + x_{\ell-1} p^{\ell-1} + x_\ell p^\ell + \cdots \\ &= x_0 + x_1 p + \cdots + x_{\ell-1} p^{\ell-1} + p^\ell (x_\ell + x_{\ell+1} p + \cdots) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} x_j p^j + p^\ell h_\ell(x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour $\ell = 0$ on a : $h_0(x) = \sum_{j \geq 0} x_j p^j = x$.

Définition 3.2.2. *[13] Pour $x \in \mathbb{Z}_p$ et t un entier positif on pose $q = p^t$, on appele Γ_q la fonction gamma p-adique généralisée, qui est définit par $\Gamma_q : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p^*$ par :*

$$\Gamma_q(x+1) = \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x) + 1). \tag{3.24}$$

Remarque 3.2.1.

i) On appelle Γ_q la fonction gamma q-adique.

ii) Γ_q est continue sur $\mathbb{Z}_p$.

iii) Pour $t = 1$, Γ_q coinside avec Γ_p (c'est à dire : $\Gamma_q \equiv \Gamma_p$), et on a $h_0(x) = x$, d'où :

$$\Gamma_q(x+1) = \Gamma_p(h_0(x) + 1) = \Gamma_p(x+1). \tag{3.25}$$

Exemple 3.2.1. *On calcule pour $t = 2$, on a $q = p^2$ alors :*

$$\Gamma_q(x+1) = \Gamma_p(h_0(x)+1)\Gamma_p(h_1(x)+1) = \Gamma_p(x+1)\Gamma_p(h_1(x)+1),$$

où, $h_1(x) = \sum_{j\geq 1} x_j p^{j-\ell}$.
D'après la relation (3.25) on a : $\Gamma_q(x+1) = \Gamma_p(x+1)$, et d'aprés la relation (3.23) on a : $x = x_0 + ph_1(x)$ alors, $h_1(x) = \frac{x-x_0}{p}$, donc :

$$\Gamma_q(x+1) = \Gamma_p(x+1)\Gamma_p\left(\frac{x-x_0}{p}+1\right).$$

Par exemple, pour $x = 3$, $p = 3$, $t = 2$, $q = 3^2$, alors dans $\mathbb{Q}_3$, $x_0 = 1$

$$\Gamma_9(4) = \Gamma_3(4)\Gamma_3(2),$$

où

$$\Gamma_3(4) = 6 \quad \textit{et} \quad \Gamma_3(2) = 1,$$

alors

$$\Gamma_9(4) = 6.$$

3.2.2 Propriétés

Notation. *On note $n!_q$ la factorielle q-adique, définiée par :*

$$n!_q = \prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n} j. \tag{3.26}$$

Proposition 3.2.1. *[13]*

i) Pour un entier positif n, on a :

$$\Gamma_q(n+1) = (-1)^{A_n} p^{-B_n} n!_q, \tag{3.27}$$

où

$$A_n = t + \sum_{i=0}^{t-1} t\left[\frac{n}{p^i}\right], \quad B_n = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{n}{p^i}\right] - t\left[\frac{n}{p^t}\right]$$

ii) On a

$$\Gamma_q(x+1) = \begin{cases} (-1)^{k+1} h_k(x)\Gamma_q(x) & \text{si } x \notin q\mathbb{Z}_p \text{ et } k = v_p(x), \\ (-1)^t \Gamma_q(x) & \text{si } x \in q\mathbb{Z}_p. \end{cases} \tag{3.28}$$

Démonstration.

i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$
\begin{aligned}
n!_q = \prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{n} j = \prod_{\substack{j=1\\ p\nmid j}}^{n} j \prod_{\substack{j=1\\ p\nmid j}}^{\left[\frac{n}{p}\right]} (pj) \cdots \prod_{\substack{j=1\\ p\nmid j}}^{\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]} (p^{t-1}j) \\
= (-1)^{-(n+1)}\Gamma_p(n+1)\ (-1)^{\left[\frac{n}{p}\right]+1} p^{\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)}\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]+1\right) \\
(-1)^{-\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]+1\right)} p^{2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^3}\right]\right)}\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]+1\right)\cdots(-1)^{-\left(\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]+1\right)} \\
p^{(t-1)\left(\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^t}\right]\right)}\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]+1\right) \\
= (-1)^{-\left(\left(n+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]\right)+(1+1+\cdots+1)\right)} \\
p^{\left(\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^3}\right]\right)+\cdots+(t-1)\left(\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^t}\right]\right)} \\
\Gamma_p(n+1)\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p}\right]+1\right)\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]+1\right)\cdots\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^{t-1}}\right]+1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{-\left(\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{n}{p^i}\right]+t\right)} p^{\left(\sum_{i=0}^{t}\left[\frac{n}{p^i}\right]-t\left[\frac{n}{p^t}\right]\right)} \prod_{i=0}^{t-1}\Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]+1\right) \\
&= (-1)^{-A_n} p^{B_n} \prod_{i=0}^{t-1}\Gamma_p\left(h_i(n)+1\right) \\
&= (-1)^{-A_n} p^{B_n}\Gamma_q(n+1).
\end{aligned}
$$

Alors

$$\Gamma_q(n+1) = (-1)^{A_n} p^{-B_n} n!_q.$$

ii) D'après la relation3.9, la fonction Γ_p satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$
\Gamma_p(x+1) = \begin{cases} -x\Gamma_p(x) & si\ x \in \mathbb{Z}_p^*, \\ -\Gamma_p(x) & si\ x \in p\mathbb{Z}_p. \end{cases}
$$

Pour $k = v_p(x+1) < \infty$, soit le développement p-adique de $x+1$:

$$x+1 = \sum_{j\geq k} \alpha_j p^j, \qquad \alpha_k \neq 0.$$

Alors pour $\ell \leq k$, on a :

$$\begin{aligned}
x &= -1 + \sum_{j \geq k} \alpha_j p^j \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i + \sum_{j \geq k} \alpha_j p^j \\
&= ((p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{k-1} + (p-1)p^k + (p-1)p^{k+1} \\
&+ (p-1)p^{k+2} + \cdots) + (\alpha_k p^k + \alpha_{k+1} p^{k+1} + \cdots) \\
&= ((p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{k-1} + (p^{k+1} - p^k) + (p^{k+2} - p^{k+1}) \\
&+ (p^{k+3} - p^{k+2}) + \cdots) + (\alpha_k p^k + \alpha_{k+1} p^{k+1} + \cdots) \\
&= (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{k-1} + (\alpha_k - 1)p^k + \alpha_{k+1} p^{k+1} + \cdots
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
h_\ell(x) &= \sum_{j \geq \ell} x_j p^{j-\ell} \\
&= (p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{k-1-\ell} + (\alpha_k - 1)p^{k-\ell} + \alpha_{k+1} p^{k+1-\ell} + \cdots \\
&= -1 + h_\ell(x+1).
\end{aligned}$$

Pour $\ell > k$, on a :

$$x = \alpha_{k+1} p^{k+1} + \alpha_{k+2} p^{k+2} + \cdots$$

alors

$$\begin{aligned}
h_\ell(x) &= \alpha_{k+1} p^{k+1-\ell} + \alpha_{k+2} p^{k+2-\ell} + \cdots \\
&= \sum_{j \geq k+1} \alpha_j p^{j-\ell} \\
&= h_\ell(x+1).
\end{aligned}$$

D'où

1. Si $t \leq k$, alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma_q((x+1)+1) &= \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x+1)+1) \\
&= (-1)^t \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x+1)) \\
&= (-1)^t \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \\
&= (-1)^t \Gamma_q(x+1).
\end{aligned}$$

2. Si $t > k$, alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma_q((x+1)+1) &= \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x+1)+1) \\
&= \prod_{\ell=0}^{k} \Gamma_p(h_\ell(x+1)+1) \prod_{\ell=k+1}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x+1)+1) \\
&= (-1)^{k+1} h_k(x+1) \prod_{\ell=0}^{k} \Gamma_p(h_\ell(x+1)) \prod_{\ell=k+1}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x+1)+1) \\
&= (-1)^{k+1} h_k(x+1) \prod_{\ell=0}^{k} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \prod_{\ell=k+1}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \\
&= (-1)^{k+1} h_k(x+1) \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \\
&= (-1)^{k+1} h_k(x+1) \Gamma_q(x+1).
\end{aligned}$$

En remplacant $x-1$ par x, alors :

$$\Gamma_q(x+1) = \begin{cases} (-1)^{k+1} h_k(x) \Gamma_q(x) & si\ x \notin q\mathbb{Z}_p\ et\ k = v_p(x), \\ (-1)^t \Gamma_q(x) & si\ x \in q\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

■

Dans ce qui suit, on démontre des propriétés de la fonction gamma p-adique généralisée qui n'existent pas dans l'article de ***Kaori Ota*** [13] (Proposition 3.2.2, Proposition 3.2.3, Corollaire 3.2.5, Proposition 3.2.8)

Proposition 3.2.2. *La fonction Γ_q vérifie les propriétés suivantes :*

i) Pour n un entier positif on a :

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(-1)^{A_n} p^{-B_n} n!}{\left[\frac{n}{q}\right]! p^{t\left[\frac{n}{q}\right]}}. \tag{3.29}$$

ii) Pour $n = mq + \lambda$, tel que : $\lambda \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$ et $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma_q(mq+\lambda+1) = \frac{(-1)^{A_{mq+\lambda}}(mq+\lambda)!}{m! p^{tm}}, \tag{3.30}$$

tel que pour $v_p(\lambda!) = \sum_{i=1}^{t-1} \left[\frac{\lambda}{p^i}\right] = \sum_{i=1}^{t} \left[\frac{\lambda}{p^i}\right]$ *:*

$$A_{mq+\lambda} = t + \lambda + mp^t + v_p(\lambda!), \qquad B_{mq+\lambda} = m\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tm - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right] + v_p(\lambda!)$$

iii) Pour $n = q^s - 1$ et $s \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Gamma_q(q^s) = \frac{(-1)^{A_{q^s-1}} p^{-B_{q^s-1}}(q^s-1)!}{(q^{s-1})! p^{tq^{s-1}}}, \tag{3.31}$$

tel que

$$A_{q^s-1} = t - 1 + \sum_{i=0}^{t-1} p^{ts-i}, \quad B_{q^s-1} = \sum_{i=1}^{t} p^{ts-i} - tp^{t(s-1)}$$

iv) Pour $n = q^s$ et $s \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_q(q^s+1) = \frac{(-1)^{A_{q^s}} p^{-B_{q^s}}(q^s)!}{(q^{s-1})! p^{tq^{s-1}}}, \tag{3.32}$$

tel que

$$A_{q^s} - 1 = A_{q^s-1} \quad B_{q^s} = B_{q^s-1}$$

Démonstration.

i) On sait que :

$$n! = \prod_{j=1}^{n} j = \prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n} j \prod_{\substack{j=1 \\ q\mid j}}^{n} j = (-1)^{-A_n} p^{B_n} \Gamma_q(n+1) \prod_{\substack{j=1 \\ q\mid j}}^{n} j$$

et

$$card\{1 \leq j \leq n \;/\; q \mid j\} = \left[\frac{n}{q}\right] = \left[\frac{n}{p^t}\right].$$

Ainsi

$$\prod_{\substack{j=1 \\ q\mid j}}^{n} j = \prod_{j=1}^{\left[\frac{n}{p^t}\right]} (p^t j) = \left[\frac{n}{p^t}\right]! p^{t\left[\frac{n}{p^t}\right]},$$

donc

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(-1)^{A_n} p^{-B_n} n!}{\left[\frac{n}{q}\right]! p^{t\left[\frac{n}{q}\right]}}.$$

ii) Pour $n = mq + \lambda$, tel que : $\lambda \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$
on a : $\left[\frac{n}{q}\right] = \left[\frac{mq+\lambda}{q}\right] = m + \left[\frac{\lambda}{q}\right] = m$, alors :

$$\Gamma_q(mq + \lambda + 1) = \frac{(-1)^{A_{mq+\lambda}} p^{-B_{mq+\lambda}} (mq + \lambda)!}{m! p^{tm}},$$

tel que

$$\begin{aligned}
A_{mq+\lambda} &= t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{mq + \lambda}{p^i}\right] \\
&= t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{mp^t + \lambda}{p^i}\right] \\
&= t + [mp^t + \lambda] + \left[\frac{mp^t + \lambda}{p}\right] + \left[\frac{mp^t + \lambda}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{mp^t + \lambda}{p^{t-1}}\right] \\
&= t + \lambda + mp^t + mp^{t-1} + \left[\frac{\lambda}{p}\right] + mp^{t-2} + \left[\frac{\lambda}{p^2}\right] + \cdots + mp + \left[\frac{\lambda}{p^{t-1}}\right] \\
&= t + \lambda + mp^t + m \sum_{i=1}^{t-1} \left(\frac{1}{p}\right)^i + \sum_{i=1}^{t-1} \left[\frac{\lambda}{p^i}\right] \\
&= t + \lambda + mp^t + m \left(\frac{p^t - 1}{p - 1}\right) + \sum_{i=1}^{t-1} \left[\frac{\lambda}{p^i}\right]
\end{aligned}$$

et on a $v_p(\lambda!) = \sum_{i=1}^{t-1} \left[\frac{\lambda}{p^i}\right]$ alors :

$$\begin{aligned}
(-1)^{A_{mq+\lambda}} &= (-1)^{t+\lambda+mp^t+mp^t\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right)+v_p(\lambda!)} \\
&= (-1)^{t+\lambda+mp^t} (-1)^{mp^t\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right)+\sum_{i=1}^{t-1}\left[\frac{\lambda}{p^i}\right]} \\
&= (-1)^{t+\lambda+mp^t+v_p(\lambda!)},
\end{aligned}$$

alors,

$$A_{mq+\lambda} = t + \lambda + mp^t + v_p(\lambda!).$$

et aussi

$$\begin{aligned}
B_{mq+\lambda} &= \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{mq+\lambda}{p^i}\right] - t\left[\frac{mq+\lambda}{p^t}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{mp^t+\lambda}{p^i}\right] - t\left[\frac{mp^t+\lambda}{p^t}\right] \\
&= \left[\frac{mp^t+\lambda}{p}\right] + \left[\frac{mp^t+\lambda}{p^2}\right] + \cdots + \left[\frac{mp^t+\lambda}{p^t}\right] - t\left[\frac{mp^t+\lambda}{p^t}\right] \\
&= mp^{t-1} + \left[\frac{\lambda}{p}\right] + mp^{t-2} + \left[\frac{\lambda}{p^2}\right] + \cdots + m + \left[\frac{\lambda}{p^t}\right] - tm - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right] \\
&= m\sum_{i=1}^{t-1}\left(\frac{1}{p}\right)^i - tm + \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{\lambda}{p^i}\right] - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right] \\
&= m\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tm + \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{\lambda}{p^i}\right] - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right] \\
&= m\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tm + \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{\lambda}{p^i}\right] - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]
\end{aligned}$$

et on a aussi $v_p(\lambda!) = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{\lambda}{p^i}\right]$ alors :

$$B_{mq+\lambda} = m\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tm - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right] + v_p(\lambda!).$$

iii) Pour $n = q^s - 1$, on a : $\left[\frac{n}{q}\right] = \left[\frac{q^s-1}{q}\right] = q^{s-1}$, alors :

$$\Gamma_q(q^s) = \frac{(-1)^{A_{q^s-1}} p^{-B_{q^s-1}} (q^s-1)!}{(q^{s-1})! p^{tq^{s-1}}}$$

tel que

$$\begin{aligned}
A_{q^s-1} = t + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{q^s-1}{p^i}\right] &= t + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{p^{ts}-1}{p^i}\right] \\
&= t + (p^{ts}-1) + p^{ts-1} + \cdots + p^{ts-(t-1)} \\
&= t - 1 + \sum_{i=0}^{t-1} p^{ts-i} \\
&= t - 1 + p^{ts}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{1}{p}\right)^i \\
&= t - 1 + p^{ts}\left(\frac{\frac{1}{p^t}-1}{\frac{1}{p}-1}\right) \\
&= t - 1 + p^{t(s-1)+1}\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B_{q^s-1} = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{q^s-1}{p^i}\right] - t\left[\frac{q^s-1}{p^t}\right] &= \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{p^{ts}-1}{p^i}\right] - t\left[\frac{p^{ts}-1}{p^t}\right] \\
&= (p^{ts}-1) + p^{ts-2} + \cdots + p^{ts-t} - tp^{ts-t} \\
&= \sum_{i=1}^{t} p^{ts-i} - tp^{t(s-1)} \\
&= p^{ts-1}\left(\frac{\frac{1}{p^t}-1}{\frac{1}{p}-1}\right) - tp^{ts-t} \\
&= p^{t(s-1)}\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tp^{t(s-1)}.
\end{aligned}$$

iv) Pour $n = q^s$, on a : $\left[\frac{n}{q}\right] = \left[\frac{q^s}{q}\right] = q^{s-1}$, alors :

$$\Gamma_q(q^s+1) = \frac{(-1)^{A_{q^s}} p^{-B_{q^s}} (q^s)!}{(q^{s-1})! p^{tq^{s-1}}},$$

tel que

$$\begin{aligned}
A_{q^s} = t + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{q^s}{p^i}\right] &= t + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{p^{ts}}{p^i}\right] \\
&= t + p^{ts} + p^{ts-1} + \cdots + p^{ts-(t-1)} \\
&= t + \sum_{i=0}^{t-1} p^{ts-i} \\
&= t + p^{t(s-1)+1}\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) \\
&= A_{q^{s-1}} + 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B_{q^s} = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{q^s}{p^i}\right] - t\left[\frac{q^s}{p^t}\right] &= \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{p^{ts}}{p^i}\right] - t\left[\frac{p^{ts}}{p^t}\right] \\
&= p^{ts-1} + p^{ts-2} + \cdots + p^{ts-t} - tp^{ts-t} \\
&= \sum_{i=1}^{t} p^{ts-i} - tp^{t(s-1)} \\
&= p^{t(s-1)}\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tp^{t(s-1)} \\
&= B_{q^{s-1}}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.3.

i) On a :

$$\Gamma_q(0) = 1. \tag{3.33}$$

ii) Pour $x \in \mathbb{Z}_p$ on a :

$$|\Gamma_q(x)|_p = 1. \tag{3.34}$$

iii) Si $|x-y|_p = 1$ ou $|x-y|_p = \frac{1}{p^s}$ avec $s \geq t$ et pour $x, y \in \mathbb{Z}_p$ on a :

$$|\Gamma_q(x) - \Gamma_q(y)|_p \leq |x-y|_p. \tag{3.35}$$

iv) Pour $x \in \mathbb{Z}_p$ on a :

$$|\Gamma_q(x) - 1|_p \leq |x|_p. \tag{3.36}$$

Démonstration.

i) Pour $x = -1$:

$$\Gamma_q(0) = \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(-1)+1),$$

tel que

$$\begin{aligned}
-1 &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^\ell + (p-1)p^{\ell+1} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} (p-1)p^k + p^\ell \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (p-1)p^i \right),
\end{aligned}$$

donc

$$h_\ell(-1) = \sum_{i=0}^{+\infty} (p-1)p^i = -1, \quad \forall \ell, \forall p.$$

Alors

$$\Gamma_q(0) = \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(-1+1) = \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(0) = \prod_{\ell=0}^{t-1} 1 = 1.$$

ii) D'aprés la relation 3.24

$$|\Gamma_q(x+1)|_p = \left| \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \right|_p = \prod_{\ell=0}^{t-1} |\Gamma_p(h_\ell(x)+1)|_p = \prod_{\ell=0}^{t-1} 1 = 1.$$

iii) Soit $m, n \in \mathbb{N}$

- Si $|m-n|_p = 1$ alors :

$$|\Gamma_q(m) - \Gamma_q(n)| \leq \max(|\Gamma_q(m)|_p, |\Gamma_q(n)|_p) \leq 1 = |m-n|_p.$$

- Si $|m-n|_p = \frac{1}{p^s} < 1$ tel que $s \in \mathbb{N}$ alors : $\exists \mu \in \mathbb{N}, m = n + \mu p^s$ et $(\mu, p) = 1$, donc :

$$\Gamma_q(m) = \Gamma_q(n+\mu p^s) = (-1)^A p^{-B} \prod_{\substack{j=1 \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j = (-1)^A p^{-B} \prod_{\substack{j=1 \\ q \nmid j}}^{n-1} j \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j.$$

Pour $s \geq t$, on a :

$$A = t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{n+\mu p^s}{p^i}\right] = \left(t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{n}{p^i}\right]\right) + \left(\sum_{i=0}^{t-1} \frac{\mu p^s}{p^i}\right) = A_1 + A_2,$$

avec

$$A_1 = t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{n}{p^i}\right] \quad A_2 = \sum_{i=0}^{t-1} \frac{\mu p^s}{p^i}$$

et

$$B = \sum_{i=1}^{t} \left[\frac{n+\mu p^s}{p^i}\right] - t\left[\frac{n+\mu p^s}{p^t}\right] = \left(\sum_{i=1}^{t} \left[\frac{n}{p^i}\right] - t\left[\frac{n}{p^t}\right]\right) + \left(\sum_{i=1}^{t} \left[\frac{\mu p^s}{p^i}\right] - t\left[\frac{\mu p^s}{p^t}\right]\right)$$
$$= B_1 + B_2,$$

avec

$$B_1 = \sum_{i=1}^{t} \left[\frac{n}{p^i}\right] - t\left[\frac{n}{p^t}\right] \quad B_2 = \sum_{i=1}^{t} \frac{\mu p^s}{p^i} - t\frac{\mu p^s}{p^t}.$$

Donc

$$\Gamma_q(m) = \left((-1)^{A_1} p^{-B_1} \prod_{\substack{j=1 \\ q \nmid j}}^{n-1} j\right) \left((-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j\right)$$
$$= \Gamma_q(n) \left((-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j\right),$$

d'où,

$$\Gamma_q(m) - \Gamma_q(n) = \Gamma_q(n) \left(\left((-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j\right) - 1\right),$$

par suite :

$$|\Gamma_q(m)-\Gamma_q(n)|_p = |\Gamma_q(n)|_p \left| \left((-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j \right) - 1 \right|_p$$
$$= \left| \left((-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j \right) - 1 \right|_p ,$$

par définition de Γ_q et d'après la relation (3.3) pour $p=q$:

$$\prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j = \prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+p^s-1} j \prod_{\substack{j=n+p^s \\ q\nmid j}}^{n+2p^s-1} j \cdots \prod_{\substack{j=n+(\mu-1)p^s \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j,$$

on a

$$\prod_{\substack{j=n+(\mu-1)p^s \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j = \prod_{\substack{i=0 \\ q\nmid j}}^{p^s-1} (n+(\mu-1)p^s+i) \equiv -1(\mod p^s) \qquad \forall \mu \geq 1,$$

donc

$$\prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j \equiv (-1)(-1)(-1)\cdots(\mod p^s) \equiv (-1)^{\mu}(\mod p^s),$$

d'où

$$(-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q\nmid j}}^{n+\mu p^s-1} j \equiv (-1)^{A_2+k} p^{-B_2}(\mod p^s),$$

tel que

$$\begin{aligned}
A_2+\mu &= \sum_{i=0}^{t-1} \frac{\mu p^s}{p^i} + \mu \\
&= \mu p^s \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{t-1}}\right)+\mu \\
&= \mu p^s \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{p}\right)^i + \mu \\
&= \mu p^{s+1} \left(\frac{p^t-1}{(p-1)p^t}\right)+\mu \\
&= 2\mu \left(p^{s+1}\left(\frac{p^t-1}{2(p-1)p^t}\right)+\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

et

$$B_2 = \sum_{i=1}^{t} \frac{\mu p^s}{p^i} - t\frac{\mu p^t}{p^t}$$
$$= \mu p^s \left(\sum_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{p}\right)^i - \frac{t}{p^t} \right)$$
$$= \mu p^s \left(\frac{p^t - 1}{(p-1)p^t} - \frac{t}{p^t} \right).$$

Si

$$(-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j = 1 + \xi p^s,$$

on a

$$\left| (-1)^{A_2} p^{-B_2} \prod_{\substack{j=n \\ q \nmid j}}^{n+\mu p^s - 1} j - 1 \right|_p = |\xi p^s|_p \leq \frac{1}{p^s} = |m-n|.$$

Donc la propriété est vrai pour les éléments de $\mathbb{Z}_p$ par passage à la limite.

iv) Il suffit de prendre $y = 0$, on oura :

$$|\Gamma_q(x) - 1|_p = |\Gamma_q(x) - \Gamma_q(0)|_p \leq |x - 0|_p = |x|_p.$$

■

Exemple 3.2.2.

i) Pour $t = 2$ et d'après l'exemple 3.2.1

On pose $x = -1$ et $p = 2$, $q = 4$ alors :

$$\Gamma_4(0) = \Gamma_2(0)\Gamma_2(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

On pose $x = -1$ et $p = 3$, $q = 9$ alors :

$$\Gamma_9(0) = \Gamma_3(0)\Gamma_3(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

ii) Pour $t = 3$, on pose $x = -1$ et $p = 5$, $q = 125$ alors :

$$\Gamma_{125}(0) = \Gamma_5(0)\Gamma_5(0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Remarque 3.2.2. *Pour $t = 1$ les propriétés de Γ_q sont identiques à celles de Γ_p.*

Proposition 3.2.4. ***(Formule des compléments)*** *[13]*

i) Pour $p \neq 2$, on a $\forall x \in \mathbb{Z}_p$:

$$\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x) = (-1)^{t-1+R_t(x)}, \tag{3.37}$$

où, $R_t(x) \in \{1, 2, \cdots, q\}$, tel que : $R_t(x) \equiv x(\mod q)$.

ii) Pour $p = 2$:

$$\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x) = \begin{cases} (-1)^{t+1+x_t} & si\ x \notin q\mathbb{Z}_2\ et\ x \notin \mathbb{Z}_2^*, \\ (-1)^{t+x_t} & si\ x \in q\mathbb{Z}_2\ ou\ x \in \mathbb{Z}_2^*, \end{cases} \tag{3.38}$$

où x_t est le coefficient de 2^t dans le développment 2-adique de x.

Démonstration. D'aprés le Théorème 3.1.3 (Formule des compléments), Γ_p satisfait la propriété suivante (pour $t = 1$) :

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = \begin{cases} (-1)^{R_1(x)} & si \quad p > 2, \\ \varepsilon(x) & si \quad p = 2, \end{cases}$$

où $R_1(x) = R(x)$, et :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \equiv a(\mod 4), \quad tq:\ a \in \{0, 1\}, \\ 1 & si \quad x \equiv b(\mod 4), \quad tq:\ b \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Soient $k = v_p(x) < \infty$ et le développement p-adique de x :

$$x = \sum_{j=k}^{\infty} x_j p^j.$$

Pour $\ell \leq k$, on a :

$$\begin{aligned} -x &= -\sum_{j=k}^{\infty} x_j p^j \\ &= \left(\sum_{i \geq 0}(p-1)p^i\right)\left(\sum_{j=k}^{\infty} x_j p^j\right) \\ &= ((p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^{k-1} + (p-1)p^k + (p-1)p^{k+1} \\ &+ (p-1)p^{k+2} + \cdots)(x_k p^k + x_{k+1}p^{k+1} + \cdots) \\ &= ((p-1) + (p^2 - p) + (p^3 - p^2) + \cdots + (p^k - p^{k-1}) + (p^{k+1} - p^k) \\ &+ (p-1)p^{k+1} + (p-1)p^{k+2} + \cdots)(x_k p^k + x_{k+1}p^{k+1} + \cdots) \\ &= (p - x_k)p^k + \sum_{j \geq k+1}(p - x_j - 1)p^j, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} h_\ell(-x) &= (p - x^k)p^{k-\ell} + \sum_{j\geq k+1}(p - x_j - 1)p^{j-\ell} \\ &= p^{k+1} - x_k p^{k-\ell} + p^{k+2-\ell} - x_{k+1}p^{k+1-\ell} - p^{k+1-\ell} + p^{k+3-\ell} - x_{k+2}p^{k+2-\ell} - p^{k+2-\ell} + \cdots \\ &= -\sum_{j\geq k} x_j p^{j-\ell} \\ &= -h_\ell(x). \end{aligned}$$

Pour $\ell > k$, on a :

$$\begin{aligned} -x &= \sum_{j\geq l}(p - x_j - 1)p^j \\ &= (p - x_\ell - 1)p^\ell + (p - x_{\ell+1} - 1)p^{\ell+1} + \cdots \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} h_\ell(-x) &= (p - x_\ell - 1) + (p - x_{\ell+1} - 1)p + \cdots \\ &= ((p-1) + (p-1)p + \cdots) - (x_l + x_{l+1}p + \cdots) \\ &= -1 - h_\ell(x). \end{aligned}$$

i) Si $t \leq k$, on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_q(x+1)\Gamma_q(1-x) &= \prod_{\ell=0}^{t-1}((\Gamma_p(h_\ell(x)+1)\Gamma_p(1+h_\ell(-x))) \\ &= (-1)^t\prod_{\ell=0}^{t-1}(\Gamma_p(h_\ell(x))\Gamma_p(1-h_\ell(x))) \\ &= \begin{cases} (-1)^t\prod_{\ell=0}^{t-1}(-1)^p = 1 & \textit{pour } p > 2 \\ (-1)^t\prod_{\ell=0}^{t-1}\varepsilon(h_\ell(x)) & \textit{pour } p = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

puisque, $\Gamma_q(x+1) = (-1)^t\Gamma_q(x)$, on a :

$$\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x) = \begin{cases} (-1)^t & \textit{si } p > 2, \\ (-1)^{t+x_t} & \textit{si } p = 2. \end{cases}$$

ii) Si $t > k$, alors :

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x+1)\Gamma_q(1-x) &= \prod_{\ell=0}^{t-1} \left(\Gamma_p(h_\ell(x)+1)\Gamma_p(1-h_\ell(x))\right) \\
&= \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1) \prod_{\ell=0}^{k} \Gamma_p(-h_\ell(x)+1) \prod_{\ell=k+1}^{t-1} \Gamma_p(-h_\ell(x)) \\
&= \left(\prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(h_\ell(x)+1)\right) (-1)^{k+1}(-h_k(x)) \prod_{\ell=0}^{t-1} \Gamma_p(-h_\ell(x)) \\
&= \begin{cases} (-1)^k h_k(x)(-1)^{k+(p-x_k)+\cdots+(p-x_{t-1})} & si\ p > 2 \\ (-1)^k h_k(x) \prod_{\ell=0}^{t-1} \varepsilon(-h_\ell(x)) & si\ p = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

puisque, $\Gamma_q(x+1) = (-1)^{k+1}h_k(x)\Gamma_q(x)$, on a :

$$\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x) = \begin{cases} (-1)^{t-1+R_t(x)} & si\ p > 2, \\ (-1)^{t-1+x_t} & si\ p = 2. \end{cases}$$

■

Corollaire 3.2.5. *Pour $p \neq 2$, on a :*

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^t. \tag{3.39}$$

Démonstration. D'après la relation 3.37, pour $p \neq 2$ et $x = \frac{1}{2}$, on a :

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_q\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{t-1+R_t\left(\frac{1}{2}\right)},$$

tel que

$$R_t\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{1}{2}(\mod q),$$

comme

$$q+1 \equiv 1(\mod q) \implies \frac{q+1}{2} \equiv \frac{1}{2}(\mod q),$$

d'où

$$R_t\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{q+1}{2}.$$

Donc

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{t-1+\left(\frac{q+1}{2}\right)},$$

où

$$(-1)^{-1+\left(\frac{q+1}{2}\right)} = 1,$$

alors,

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^t.$$

■

Proposition 3.2.6. ***(Formule de multiplication de Legendre Gauss)*** *[13]*
Soit N un entier et $N \geq 2$, et $(N, P) = 1$. Soit :

$$g_N(x) = \Gamma_q(x) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{i}{N}\right) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+i}{N}\right)^{-1}. \tag{3.40}$$

Alors $g_N(x) = N^{R_t(x)-1} N^{(q-1)xR_t'(x)}$, avec $R_t'(x) = \frac{(x-R_t(x))}{q}$.

Démonstration. On a,

$$g_N(x) = \Gamma_q(x) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{i}{N}\right) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+i}{N}\right)^{-1}.$$

Alors pour x non nul,

$$\begin{aligned}
\frac{g_N(x+1)}{g_N(x)} &= \frac{\Gamma_q(x+1) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{i}{N}\right) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+1+i}{N}\right)^{-1}}{\Gamma_q(x) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{i}{N}\right) \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+i}{N}\right)^{-1}} \\
&= \frac{\Gamma_q(x+1)}{\Gamma_q(x)} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+i}{N}\right)}{\prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{x+1+i}{N}\right)} \\
&= \frac{\Gamma_q(x+1)}{\Gamma_q(x)} \frac{\Gamma_q\left(\frac{x}{N}\right)}{\Gamma_q\left(\frac{x}{N}\right)} \\
&= \begin{cases} \frac{h_k(x)}{h_k\left(\frac{x}{N}\right)} & si\ x \notin q\mathbb{Z}_p \ et\ k = v_p(x), \\ 1 & si\ x \in q\mathbb{Z}_p. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $v_p(x) = k$, alors $h_k\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{h_k(x)}{N}$, donc :

$$\frac{g_N(x+1)}{g_N(x)} = \begin{cases} N & si\ x \notin q\mathbb{Z}_p, \\ 1 & si\ x \in q\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

Par continuité en x, il suffit de traiter le cas des entiers positifs. Ainsi, pour $x = n-1$ ona :

$$\begin{aligned} g_N(n) &= \begin{cases} N g_N(n-1) & si\ n-1 \notin q\mathbb{Z}_p \\ g_N(n-1) & si\ n-1 \in q\mathbb{Z}_p \end{cases} \\ &= N^{n-1-\left[\frac{(n-1)}{q}\right]} g_N(1). \end{aligned}$$

Comme $g_N(1) = 1$ et $\left[\frac{(n-1)}{q}\right] = R'_t(n)$, on obtient le résultat. ■

Remarque 3.2.3. *[13] Comme pour Γ_p, on a :*

$$\prod_{j=1}^{N-1} \Gamma_q\left(\frac{j}{N}\right) = \begin{cases} \pm 1 & si \quad N\ impair, \\ \pm 1\ ou\ \pm i & si \quad N\ pair. \end{cases}$$

Le nombre $i \in \mathbb{Z}_p$, tel que : $i^2 = -1$ (c'est à dire : $i = \sqrt{-1}$)

Proposition 3.2.7. *[13] Soient a et b des entiers satisfaisant $0 < a < b < q-1$, pour $r \geq 0$, on pose :*

$$n_r = b\frac{q^r - 1}{q-1} \quad et \quad m_r = a\frac{q^r-1}{q-1}.$$

Alors pour $r > 0$,

$$\frac{\binom{n_r}{m_r}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}} = (-1)^t(-p)^{v_p(\binom{b}{a})} \frac{\Gamma_q(1+n_r)}{\Gamma_q(1+m_r)\Gamma_q(1+n_r-m_r)} \tag{3.41}$$

$$= (-p)^{v_p(\binom{b}{a})} \frac{\Gamma_q(-m_r)\Gamma_q(m_r-n_r)}{\Gamma_q(-n_r)}. \tag{3.42}$$

Démonstration. D'aprés la relation 3.27, on a

i) Pour $n = n_r$:

$$\Gamma_q(1+n_r) = (-1)^{A_{n_r}} p^{-B_{n_r}} \prod_{\substack{j=1 \\ q \nmid j}}^{n_r} j,$$

avec

$$A_{n_r} = t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{n_r}{p^i}\right], \quad B_{n_r} = \sum_{i=1}^{t} \left[\frac{n_r}{p^i}\right] - \left[\frac{n_r}{p^t}\right]$$

D'autre part

$$\prod_{j=1}^{n_r} j = \left(\prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{n_r} j\right)\left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}}(qj)\right)$$
$$= \left(\prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{n_r} j\right)\left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}} q\right)\left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}} j\right),$$

alors

$$\frac{n_r!}{n_{r-1}!} = q^{n_{r-1}} \prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{n_r} j.$$

D'où

$$\Gamma_q(1+n_r) = (-1)^{A_{n_r}} p^{-B_{n_r}} \ \frac{n_r!}{n_{r-1}!}\ q^{-n_{r-1}}.$$

ii) Pour $n = m_r$:

$$\Gamma_q(1+m_r) = (-1)^{A_{m_r}} p^{-B_{m_r}} \prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{m_r} j,$$

avec

$$A_{m_r} = t + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{m_r}{p^i}\right], \quad B_{m_r} = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{m_r}{p^i}\right] - \left[\frac{m_r}{p^t}\right]$$

D'autre part

$$\prod_{j=1}^{m_r} j = \left(\prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{m_r} j\right)\left(\prod_{j=1}^{m_{r-1}}(qj)\right)$$
$$= \left(\prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{m_r} j\right)\left(\prod_{j=1}^{m_{r-1}} q\right)\left(\prod_{j=1}^{m_{r-1}} j\right),$$

alors

$$\frac{m_r!}{m_{r-1}!} = q^{m_{r-1}} \prod_{\substack{j=1\\ q\nmid j}}^{m_r} j.$$

D'où

$$\Gamma_q(1+m_r) = (-1)^{A_{m_r}} p^{-B_{m_r}} \ \frac{m_r!}{m_{r-1}!}\ q^{-m_{r-1}}.$$

iii) Pour $n = n_r - m_r$:

$$\Gamma_q(1 + n_r - m_r) = (-1)^{A_{n_r-m_r}} p^{-B_{n_r-m_r}} \prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n_r-m_r} j,$$

avec

$$A_{n_r-m_r} = t + \sum_{i=0}^{t-1} \left[\frac{n_r - m_r}{p^i}\right], \quad B_{n_r-m_r} = \sum_{i=1}^{t} \left[\frac{n_r - m_r}{p^i}\right] - \left[\frac{n_r - m_r}{p^t}\right].$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n_r-m_r} j &= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n_r-m_r} j\right) \left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}-m_{r-1}} (qj)\right) \\ &= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n_r-m_r} j\right) \left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}-m_{r-1}} q\right) \left(\prod_{j=1}^{n_{r-1}-m_{r-1}} j\right), \end{aligned}$$

alors

$$\frac{(n_r - m_r)!}{(n_{r-1} - m_{r-1})!} = q^{n_{r-1}-m_{r-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ q\nmid j}}^{n_r-m_r} j.$$

D'où

$$\Gamma_q(1 + n_r - m_r) = (-1)^{A_{n_r-m_r}} p^{-B_{n_r-m_r}} \ \frac{(n_r - m_r)!}{(n_{r-1} - m_{r-1})!} \ q^{-(n_{r-1}-m_{r-1})}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n_r}{m_r}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}} &= \frac{\dfrac{n_r!}{(n_r - m_r)!m_r!}}{\dfrac{n_{r-1}!}{(n_{r-1} - m_{r-1})!m_{r-1}!}} \\ &= \frac{n_r!}{n_{r-1}!} \ \frac{m_{r-1}!}{m_r!} \ \frac{(n_{r-1} - m_{r-1})!}{(n_r - m_r)} \\ &= \left(\frac{\Gamma_q(1 + n_r)}{\Gamma_q(1 + m_r)\Gamma_q(1 + n_r - m_r)}\right) \left(\frac{q^{n_r}}{q^{m_r} q^{n_r-m_r}}\right) \\ &\quad \left(\frac{\left((-1)^{A_{m_r}} p^{-B_{m_r}}\right) \left((-1)^{A_{n_r-m_r}} p^{-B_{n_r-m_r}}\right)}{(-1)^{A_{n_r}} p^{-B_{n_r}}}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\binom{n_r}{m_r}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}} = (-1)^{e_1} p^{e_2} \frac{\Gamma_q(1+n_r)}{\Gamma_q(1+m_r)\Gamma_q(1+n_r-m_r)},$$

où

$$e_1 = -\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{n_r}{p^i}\right] + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{m_r}{p^i}\right] + \sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{n_r-m_r}{p^i}\right] + t,$$

$$e_2 = \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{n_r}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{m_r}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{t}\left[\frac{n_r-m_r}{p^i}\right] - t\left[\frac{n_r}{p^t}\right] + t\left[\frac{m_r}{p^t}\right] + t\left[\frac{n_r-m_r}{p^t}\right].$$

D'autre part, on a : $e_1 \equiv v_p\left(\binom{b}{a}\right) + t(\mod 2)$ et $e_2 = v_p\left(\binom{b}{a}\right)$.

D'après la relation (3.37) :

$$\Gamma_q(1+n_r) = (-1)^{t-1+R_t(-n_r)}\Gamma_q(-n_r)^{-1} = (-1)^{t-1+q-b}\Gamma_q(-n_r)^{-1}$$

et

$$\Gamma_q(1+m_r) = (-1)^{t-1+R_t(-m_r)}\Gamma_q(-m_r)^{-1} = (-1)^{t-1+q-a}\Gamma_q(-m_r)^{-1}$$

et

$$\Gamma_q(1+n_r-m_r) = (-1)^{t-1+R_t(m_r-n_r)}\Gamma_q(m_r-n_r)^{-1} = (-1)^{t-1+q-b+a}\Gamma_q(m_r-n_r)^{-1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n_r}{m_r}}{\binom{n_{r-1}}{m_{r-1}}} &= (-1)^{v_p\left(\binom{b}{a}\right)+t} p^{v_p\left(\binom{b}{a}\right)} \frac{\Gamma_q(1+n_r)}{\Gamma_q(1+m_r)\Gamma_q(1+n_r-m_r)} \\ &= (-p)^{v_p\left(\binom{b}{a}\right)} \frac{(-1)^t(-1)^{t-1+q-b}}{(-1)^{t-1+q-a}(-1)^{t-1+q-b+a}} \frac{\Gamma_q(-m_r)\Gamma_q(m_r-n_r)}{\Gamma_q(-n_r)} \\ &= (-p)^{v_p\left(\binom{b}{a}\right)} \frac{\Gamma_q(-m_r)\Gamma_q(m_r-n_r)}{\Gamma_q(-n_r)}.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.8. ***(Développement de Mahler)***
Posons $\Gamma_q(x+1) = \sum_{\eta\geq 0} a_\eta \binom{x}{k}$ *alors les coefficient* $(a_\eta)_{\eta\in\mathbb{N}}$ *vérifient la relation :*

$$\sum_{\eta\geq 0}(-1)^{\eta+t} a_\eta \frac{x^\eta}{\eta!} = \exp_p\left(\frac{x^q}{q}+x\right)\ \delta_q, \tag{3.43}$$

où

$$\delta_q = \sum_{\lambda=0}^{p^t-1}(-x)^\lambda(-1)^t(-1)^{v_p(\lambda!)}\ p^{v_p(\lambda!)-t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]}.$$

Démonstration. Si on mets $\varphi(x) = \Gamma_q(x+1) = \sum_{\eta \geq 0} a_\eta \binom{x}{k}$, les (a_η) vérifiants :

$$\sum_{\eta \geq 0} a_\eta \frac{x^\eta}{\eta!} = e^{-x} \sum_{\eta \geq 0} \Gamma_q(\eta+1) \frac{x^\eta}{\eta!},$$

on cherche une expression de $f(x)$, où la série génératrice de la suite $(\Gamma_q(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est :

$$f(x) = \sum_{\eta \geq 0} \Gamma_q(\eta+1) \frac{x^\eta}{\eta!}.$$

On fait la division euclidienne de η sur $q = p^t$:

$$\eta = mq + \lambda, \quad tel\,que: \ \lambda \in \{0, 1, \cdots, q-1\},$$

donc, nous avons les cas suivants :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Longrightarrow \eta = mq \\ \lambda = 1 &\Longrightarrow \eta = mq + 1 \\ \lambda = 2 &\Longrightarrow \eta = mq + 2 \\ &\vdots \\ \lambda = q-1 &\Longrightarrow \eta = mq + (q-1) \end{aligned}$$

Maintenaut, on sommons selon les cas précedents :

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(mq+1)}{(mq)!} x^{mq} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(mq+2)}{(mq+1)!} x^{mq+1} + \cdots + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(mq+q)}{(mq+(q-1))!} x^{mq+(q-1)}$$

alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma_q(mq+j+1)}{(mp^t+j)!} x^{mq+j}$$

on peut utilisé la relation (3.29) :

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(-1)^{A_n} p^{-B_n} n!}{\left[\frac{n}{q}\right] p^{t\left[\frac{n}{q}\right]}}$$

et d'aprés la relation (3.30) pour $n = mq + \lambda$, tel que : $\lambda \in \{0, 1, \cdots, q-1\}$
on a : $\left[\frac{n}{q}\right] = \left[\frac{mq+\lambda}{q}\right] = m + \left[\frac{\lambda}{q}\right] = m$, alors pour $0 \leq \lambda \leq p$:

$$\begin{aligned} \Gamma_q(mq+\lambda+1) &= \frac{(-1)^{A_{mq+\lambda}} p^{-B_{mq+\lambda}} (mq+\lambda)!}{m! p^{tm}} \\ &= \frac{(-1)^{t+\lambda+mp^t+v_p(\lambda!)} p^{m\left(\frac{p^t-1}{p-1}\right) - tm + v_p(\lambda!) - t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]} (mq+\lambda)!}{m! p^{tm}} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\lambda=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma_q(mq+\lambda+1)}{(mq+\lambda)!}x^{mq+\lambda} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{p^t-1}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{A_{mq+\lambda}}\,(-1)^{mp^t-mp^t}\,(-1)^{\lambda-\lambda}\,(-1)^{t-t}\,p^{-B_{mq+\lambda}}\,(mp^t+\lambda)!}{m!\,p^{tm}\,(mp^t+\lambda)!}x^{mp^t+\lambda} \\
&= \sum_{\lambda=0}^{p^t-1}\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\left(\frac{(-1)^{p^t}x^{p^t}}{p^t}\right)^m \frac{1}{m!}\right)(-x)^\lambda(-1)^t(-1)^{v_p(\lambda!)}\;p^{v_p(\lambda!)-t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]} \\
&= \exp_p\left(\frac{(-x)^{p^t}}{p^t}\right)(-1)^t\sum_{\lambda=0}^{p^t-1}(-x)^\lambda(-1)^t(-1)^{v_p(\lambda!)}\;p^{v_p(\lambda!)-t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]} \\
&= \exp_p\left(\frac{(-x)^{q}}{q}\right)(-1)^t\sum_{\lambda=0}^{p^t-1}(-x)^\lambda(-1)^t(-1)^{v_p(\lambda!)}\;p^{v_p(\lambda!)-t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]}
\end{aligned}$$

posons

$$\delta_q = \sum_{\lambda=0}^{p^t-1}(-x)^\lambda(-1)^t(-1)^{v_p(\lambda!)}\;p^{v_p(\lambda!)-t\left[\frac{\lambda}{p^t}\right]}$$

d'où

$$e^{-x}f(x) = \exp_p\left(\frac{(-x)^q}{q}-x\right)(-1)^t\;\delta_q$$

alors

$$\sum_{\eta\geq 0} a_\eta\frac{x^\eta}{\eta!} = \exp_p\left(\frac{(-x)^q}{q}-x\right)(-1)^t\;\delta_q$$

on remplace $(-x)$ par x, il vient :

$$\sum_{\eta\geq 0}(-1)^\eta a_\eta\frac{x^\eta}{\eta!} = \exp_p\left(\frac{x^q}{q}+x\right)(-1)^t\;\delta_q$$

enfin,

$$\sum_{\eta\geq 0}(-1)^{\eta+t} a_\eta\frac{x^\eta}{\eta!} = \exp_p\left(\frac{x^q}{q}+x\right)\;\delta_q$$

■

Remarque 3.2.4. *[13] D'après la Proposition 3.2.7, on a :*

$$n_r = b\frac{q^r-1}{q-1} \quad et \quad m_r = a\frac{q^r-1}{q-1}$$

avec $0 < a < b < q-1$

$$v_p\left(\binom{n_r}{m_r}\right) = r\cdot v_p\left(\binom{b}{a}\right).$$

Notons aussi que : $v_p(n!) = \frac{(n-s(n))}{p-1}$, *donc :*

$$v_p\left(\binom{b}{a}\right) = 0 \Longleftrightarrow s(b) = s(a)+s(b-a).$$

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, on définit α' et μ_α comme suit (voir [9], [17]) :

$$p\alpha' - \alpha = \mu_\alpha \in \{0, 1, \cdots, p-1\},$$

d'où pour $i \geq 1$, on définit :

$$\alpha^{(i)} = (\alpha^{(i-1)})' \text{ et } \mu_\alpha^{(i)} = \mu_\alpha(i).$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) Si $-\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ est la développement p-adique de $-\alpha$, alors :

$$\mu_\alpha^{(i)} = a_i \quad et \quad \alpha^{(i)} = -\sum_{j=i}^{\infty} a_j p^{j-i} = -h_i(-\alpha).$$

ii) Pour $\alpha = \frac{a}{(q-1)}$ avec $0 \leq a = \sum_{i=0}^{t-1} a_i p^i \leq q-1$,

$$\mu_\alpha^{(i)} = a_j \quad et \quad \alpha^{(i)} = \frac{a_j + a_{j+1}p + \cdots + a_{j-1}p^{t-1}}{q-1} \quad i \equiv j(\mod t).$$

avec $j \in \{0, 1, \cdots, t-1\}$ et $\alpha^{(t)} = \alpha$

iii) Pour $n_r = b\frac{q^r-1}{q-1}$ avec $0 \leq a \leq q-1$, on a :$(-n_r)^{(t)} = -n_{r-1}$.

Dans se qui suit, on va donner la définition de la fonction hypergéométrique généralisée, puis on utilisera la fonction gamma généralisée pour démontrer quelque propriété.

Définition 3.2.3. ***(La fonction hypergéométrique généralisée)**[13]*
La fonction hypergéométrique généralisée ${}_kF_l(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X)$ est défini par :

$${}_kF_l(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_s(\alpha_2)_s \cdots (\alpha_k)_s}{(\beta_1)_s(\beta_2)_s \cdots (\beta_l)_s},$$

où $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ pour $n > 0$ et $(\alpha)_0 = 1$.
Pour $i \geq 0$, définir :

$${}_kF_l^{(i)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X) =_k F_l(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \cdots, \alpha_k^i; \beta_1^i, \beta_2^i, \cdots, \beta_l^i; X).$$

On note (voir [17]) :

$${}_k\mathcal{F}_l^{(t)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X),$$

on trouve

$$\frac{{}_kF_l(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X)}{{}_k\mathcal{F}_l^{(t)}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_l; X)}.$$

Pour une série $F(x) = \sum_{s=0}^{\infty} A(s)X^s$, poser $F_n(X) = \sum_{s=0}^{p^n-1} A(s)X^s$.

Proposition 3.2.9. *[13] Soient α et β des éléments de $\mathbb{Z}_p$ tel que : si $-\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ et $-\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i$ sont des développments p-adique, alors :*

$$a_i + b_i < p \qquad \textit{pour tout } i.$$

Alors

$$_2\mathcal{F}^{(t)}(\alpha, \beta; 1; 1) = \frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}.$$

Bibliographie

[1] **E. Artin** *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York(1964).

[2] **M. Asakura** *New p-adic hypergeometric functions and syntomic regulators*. Algebraic Geometry (2019)

[3] **R. Belhadef** *A Generalization of p-Adic Factorial*. Journal of New Theory. 39 (2022) 94-103.

[4] **R. Belhadef, H-A. Esbelin** *Periodicity of p-adic expansion of rational number*. J. Math. Comput. Sci. 11 (2021), No. 2, 1704-1713.

[5] **W.W. Bell** *Special functions for scientists and engineers*. Van Nostrad Company LTD(1968).

[6] **J.P. Bézevin** *Dynamique des fractions rationnels p-adique*. 23 mai 2005.

[7] **U. Duran, M. Acikgoz** *A Study on Novel Extensions for the p-adic Gamma and p-adic Beta Functions*. Mathematical and Computational Applications. 2019 ; 24(2) :53

[8] **B. Diarra** *Analyse p-adique Cours de DEA, Algébre commutative FAST*, Université du Mali, Décembre 1999 - Mars 2000 - Décembre 2000.

[9] **B. Dwork** *p-adic cycles*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 37 (1969), 27–115.

[10] **F.Q. Gouvea** *p-adic numbers, An introduction*, Second Edition, Springer(1997).

[11] **S. Katock** *p-adic analysis compared with real*-American Mathematical Society(2007).

[12] **N. Kobliz** *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta function*, springer-Verlag(1996)

[13] **K. Ota** *On special values of generalized p-adic hypergeometric functions*. ACTA ARITHMETICA LXVII.2 (1994).

[14] **A.M. Robert** *A cours in p-adic Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 198, Springer-Verlag New York (2000).

[15] **W.H. Schikhof** *Ultrametric Calculus, An introduction to p-adic Analysis*, Cambridge University Press (1985).

[16] **B. Winckler** *Introduction à l'analyse p-adique*, Notes pour le séminaire λ, 11 octobre 2012.

[17] **P.T. Young** *Apéry numbers, Jacobi sums, and special values of generalized p-adic hypergeometric functions*, J. Number Theory 41 (1992), 231–255.