RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre :
№ de séries :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Analyse Fonctionnelles.

Thème

Etude d'une classe d'inclusions sous-différentielles avec perturbation non bornée

Présenté par
Lahoula Farida

Devant le jury :

Président	: D. Affane	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: A. Makhlouf	MCA. Université de Jijel
Examinateur	: A. Kicha	MCB. Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

REMARCIMENTS

Tout d'abord, je remercie **Allah** qui m'a béni avec diligence, détermination et une forte volonté de surmonter tous les obstacles et difficultés pour terminer toutes les années académiques et atteindre ce stade de l'éducation. Allah m'a aidé à compléter cette note et à éclairer le chemin pour moi. Allah m'a aidé dans ma mission scientifique pour mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements, mon appréciation et respect à mon encadreur Madame **Amira Makhlouf**, maître de conférence à l'université de Jijel, qui m'a accompagné tout au long de ce travail et m'a fourni des informations et des conseils précieux. Je la remercie également pour ses éclaircissements, sa rigueur et son vif intérêt qu'elle a apporté pour qu'on puisse arriver à cette forme finale de ce manuscrit. J'ai été très heureuse de travailler avec elle.

J'adresse également mes remerciements et ma gratitude à Madame **D. Affane**, professeur à l'université de Jijel, pour avoir accepté la responsabilité de présider le jury de ce travail et de l'évaluer.

Je voudrais également remercier Madame **A. Kicha**, maître de conférence à l'université de Jijel pour avoir accepté de faire partie du comité d'évaluation de ce travail.

Enfin, j'exprime ma gratitude à Monsieur **B. Bensouilah**, chef de département de Mathématiques à l'université de Jijel pour son intérêt constant à fournir les meilleures conditions pour obtenir mes résultats et à tous les enseignants qui ont contribué à notre acquisition de nouvelles expériences pour atteindre nos buts.

Farida

DÉDICACE

Je dédie ce travail :

A mon cher père **Messaoude** ;

A ma chère mère **Malika** ;

Et à tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de ces années de scolarité.

À mes soeurs **Souhila**, **Saida** et **Nassira** pour leur soutien et leur présence à mes côtés, je leur souhaite succès, bonté et bonheur.

Pour tous mes amies qui sont seules, le chemin n'était accompagné qu'avec elles.

Et à tous ceux qui m'ont réconforté, même d'un mot, lors de la préparation de ce mémoire,

A toute ma famille,

merci beaucoup.

Farida

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'étude de problèmes de mathématiques ou de physique conduit souvent à la résolution d'équations et d'inclusions différentielles, d'où l'importance de cette branche en mathématiques.

Objectif du mémoire

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence de solutions pour certaines classes d'inclusions d'évolution du premier ordre avec perturbation (bornée ou non bornée) de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + F(t,x(t)) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0), \end{cases}$$

où $F : [0,1] \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vides, fermées et pas nécessairement bornées dans un espace de Hilbert H séparable, vérifiant certaines conditions et pour tout $t \in I$, $\varphi^t : [0,1] \longrightarrow H$ est une application propre convexe et semi-continue inférieurement où $\partial\varphi^t$ est son sous-différentiel.
Aussi, nous étudions une approximation des solutions de l'inclusion d'évolution avec perturbation convexifiée suivante

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + \overline{co}(F(t,x(t))) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0), \end{cases}$$

par les solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$. Cette propritété est appelée relaxation.

Qu'elle est une inclusion différentielle ?

Nous fournissons quelques explications sur la façon dont les inclusions différentielles apparaissent et leur concept, qui se trouvent dans les références [1] et [22].

Les inclusions différentielles constituent une branche de la théorie générales des équations différentielles, actuellement en cours de développement actif.
Ayant émergé comme une généralisation naturelle de la notion d'équation différentielle ordinaire, les inclutions différentielles ont penètré différents domaines de la science grâce à leurs nombreuses applications.
Les inclusions différentielles representent des relations de la forme

$$(I) \;\; \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p \; sur \; I$$

où F est une multi-application sur $I \times E$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. Si F n'est pas à valeurs convexes, l'inclusion différentielle

$$(II) \;\; \dot{x}(t) \in \overline{co}(F(t, x(t))),$$

est appelée inclusion différentielle avec membre droit convexifié ou bien problème convexifié.

L'attention principale des chercheurs sur les inclusions différentielles ait été attiré par le lien entre les inclusions différentielles et les équations différentelles decrivant le comportement des objects de contrôle, c'est à dire des systèmes dynamiques contrôlés avec second membre discontinue de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad p.p \; sur \; I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

contrôlés par les paramètres $u(t)$ (les contrôles), où $u(t) \in U$ et U est l'ensembles des contôles.
Alors, les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{P})$ sont des solutions de l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}^*) \begin{cases} x(t) \in F(t, x(t)) \quad p.p \; sur \; I, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où F est définie par

$$F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in U\}.$$

Au cours des années soixante et soixante-dix, une classe spéciale d'inclusions différentielles à fait l'objet d'études approfondies, celles de la forme

$$(\mathcal{P}_A)\begin{cases}-\dot{x}(t)\in A(x(t)) \quad \textit{p.p sur } I,\\ x(0)=x_0,\end{cases}$$

où A est un operateur **"maximal monotone"**.

Cette classe d'inclusions contient la classe des inclusions **"sous-différentielle"**. Alors, si φ est une application convexe et semi-continue inférieurement, en remplaçant $A(x(t))$ par $\partial\varphi(x(t))$, le sous-différentiel de φ au point $x(t)$, dans $(\mathcal{P}_A)$, on obtient l'inclusion sous-différentielle suivante

$$(\mathcal{P}_\varphi)\begin{cases}-\dot{x}(t)\in \partial\varphi(x(t)) \quad \textit{p.p sur } I,\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

De plus, en combinant les deux problèmes $(\mathcal{P}_\varphi)$ et $(\mathcal{P}^*)$, on obtient une inclusion sous-différentielle avec perturbation de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_{\varphi,F})\begin{cases}-\dot{x}(t)\in \partial\varphi(x(t))+F(t,x(t)) \quad \textit{p.p sur } I,\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

Présentation de travail.

On présente le travail de Tolostonogov [21] où il donne un théorème d'existence de solutions pour le problème $(\mathcal{P}_F)$, ainsi qu'une approximation des solutions du problème convexifiée $(\mathcal{P}_{\overline{co}F})$ par celle de $(\mathcal{P}_F)$.

L'interêt de Tolstonogov dans [21] est de prouver l'existence de solutions et la densité de l'ensemble des solutions du problème d'origine $(\mathcal{P}_F)$ dans l'adhérence de l'ensemble des solutions du problème convexifié $(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)})$. Par une solution de $(\mathcal{P}_F)$, on entend un couple (x_u,u) tel que x_u est absolument continue et vérifie

$$-\dot{x}_u(t)\in\partial\varphi(x_u(t))+u(t) \quad \textit{p.p sur } [0,1],$$

$$u(t)\in F(t,x_u(t)) \quad \textit{p.p sur } [0,1],$$

avec $x_u(0)=x_0$, $x_u(0)\in dom(\partial\varphi^t)$ p.p sur $[0,1]$ et $u\in L^2([0,1],H)$ compte tenue de ces inclusion, le problème $(\mathcal{P}_F)$ peut être considérée comme un système de contrôle simple avec la contrainte de contrôles $F(t,x)$.

L'existance et la relaxation des solutions pour les inclusions sous-différentielles avec une perturbation F à valeurs bornées on été étudier dans plusieurs articles (voir par exemple [24]), ou, pour prouver les théorèmes de relaxations dans ces travaux, les auteurs supposent que les applications φ^t, $t \in [0,1]$ vérifient la condition suivante :
$\forall r \geq 0,\ t \in [0,1]$, l'ensemble

$$\{x \in H,\ \|x\| \leq r,\ |\varphi^t(x)| \leq r\},$$

est relativement compact.

L'existence de solution pour les inclutions d'évolution avec perturbation non bornée $F(t,x)$ dans un espace de dimension infinie a été étudiée dans plusieurs articles (voir par exemple [20]). D'autre part, l'existence et la relaxation de solution d'inclusions différentielles avec des perturbations non bornés dans un espace de dimention finie ont été prouvées dans plusieurs travaux (voir par exemple [13]).

Cependant, dans un espace de dimension infinie les questions de relaxation des solutions pour les inclusions différentielles avec membre droit non bornée et les inclusions d'évolution avec perturbation non bornée restent encore ouvertes. L'intérêt de telles questions provient du fait que la non bornétude des valeurs des multi-applications est une propriété assez naturelle pour les inclusions rencontrées dans la théorie du contrôle optimal (voir [15]). Dans le travail [20], pour prouver les théorèmes d'existence des solutions, l'auteur a utilisé un théorème du point fixe pour les applications à valeurs décomposables, non convexes et fermées dans l'espace des fonctions intégrables.

Dans son travail [21], Tolstonogov a appliqué le shema issu de l'article classique de Filippov [9] pour prouver les théorèmes d'existence et de relaxation pour les inclusions differentielles dans un espace de dimension finie, que nous modifions pour convenir à un espace de dimension infini et à la classe des inclusions d'évolution qu'il considère. Notons que pour démontrer l'existence de solutions, on a utilisé les résultats des travaux [14, 23] concernant les inclusions sous-différentielles avec perturbation univoque de la forme

$$(\mathcal{P}_u) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + u(t) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p\ sur\ [0,1], \\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0), \end{cases}$$

où $u : [0,1] \longrightarrow H$ est une application carré intégrable.

Organisation de mémoire

Ce mémoire comporte trois chapitres partagés de la façon suivante :

Dans le **premièr chapitre**, intitulé "Notations et préliminaires" on précisera quelques notations et on rappelera quelques résultats préliminaires qui sont utilisés pour la démenstration des théorèmes principaux de ce mémoire.

Dans le **dexième chapitre**, intitulé "Existence de solutions", on étudie l'existence de solutions de l'inclusion différentielle $(\mathcal{P}_F)$.

Le **troisième chapitre**, intitulé "Relaxation", est consacré au théorème de relaxation associé à l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$.

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On commence par ce chapitre, dans lequel nous précisons nos notations et nous rappelons certains définitions, propositions et théorèmes dont on aura besoin tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

Tout d'abord, nous introduisons les notations suivantes concernant les espaces auxquels on va se référer souvent le long de ce travail.
On note :

- $I = [0, 1]$ l'intervalle unité de $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Soit X un ensemble non vide. On note par

- (X, τ) un espace topologie.
- (X, d) un espace métrique.
- (X, Σ) un espace mesurable.
- (X, Σ, μ) un espace mésuré.
- $\mathcal{L}(I)$ la tribu sur I des ensembles mesurables au sens de Lebesgue et dans ce cas μ est la mesure de Lebesgue.

Soit X un espace topologique. On note :

- $\overline{A}$ l'adhérence d'un ensemble $A \subset X$.
- A° l'interieure d'un ensemble $A \subset X$.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne sur X.
- $\mathcal{P}_{cl}(X)$ la famille des parties fermées de X.
- $\mathcal{P}_k(X)$ la famille des parties compactes de X.
- $X \setminus A$ le complémentaire de A dans X.

Soit E un espace vectoriel. On note par

- 0_E l'élément neutre par rapport à la loi interne.
- $co(A)$ l'enveloppe convexe de $A \subset E$.

Soit E un espace vectoriel topologique. On note par

- $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermée de $A \subset E$.

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, E' son dual topologique et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ leur produit de dualité. On note par

- B la boule unité ouverte de E.
- $\overline{B}$ la boule unité fermée de E
- $\|A\| = \sup\limits_{x\in A}\|x\|$ la norme d'un ensemble $A \subset E$.
- $L^p(I,E) = \{u(\cdot) : I \longrightarrow E : u(\cdot)\ \textit{est mesurable et}\ \ \int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty\}$ muni de la norme $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.
- $L^p_w(I,E)$ l'espace $L^p(I,E)$ muni de la norme faible, $\|u(\cdot)\|_w = \max\limits_{0\leq a\leq b\leq 1} \|\int_I u(t)dt\|dt$.
- $C(I,E)$ l'espace de Banach de toutes les applications continues muni de la norme $\|u(\cdot)\|_C = \max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$.
- $W^{1,p}(I,E) = \{u(\cdot) : I \longrightarrow E : u(.)\ \textit{est absolument continue et}\ \dot{u}(\cdot) \in L^p(I,E)\}$ muni de la norme $\|u(\cdot)\|_{1,p} = (\|u(\cdot)\|_p^p + \|\dot{u}(\cdot)\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$.
- $\sigma(E,E')$ est la topologie faible dans E.
- $\sigma(E',E)$ est la topologie faible* dans E'.
- $\longrightarrow$ signifie la convergence forte dans E.
- $\rightharpoonup$ signifie la convergence faible dans E.
- $\rightharpoonup^*$ signifie la convergence faible* dans E'.

Soit H un espace de Hilbert muni la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note

- $\Gamma_0(H)$ l'ensemble des applications propores, convexes et s.c.i. $\varphi : I \longrightarrow H$.

On note par

- $1\!\!1_D$: la fonction caractéristique d'une partie D d'un ensemble donné, définie par

$$1\!\!1_D(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in D, \\ 0 & si \quad x \notin D. \end{cases}$$

1.2 Quelques notions sur la mesurabilité

Les résultats suivants sont pris des références [27] et [4].

Définition 1.2.1.
*Soit X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite **tribu** sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$;
2. $\forall A \in \Sigma,\ X \setminus A \in \Sigma$;
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma.$

- *Le couple (X, Σ) est appelé **espace mesurable**, et les éléments de Σ sont appelés **ensembles mesurables**.*

Définition 1.2.2. ***(Tribu borélienne)***
*Soit X un espace topologique. On appelle **tribu borélienne** la tribu engendrée par les ouverts de X, et on la note $\mathcal{B}(X)$.*
*Les éléments de la tribu borélienne sont appelés **ensembles boréliens**.*

Définition 1.2.3. ***(Fonction mesurable)***
*Soient $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)**-mesurable** si pour tout $A \in \Sigma_2,\ f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*
*Si X_2 est un espace topologique, une application $(\Sigma_1, \mathcal{B}(X_2))$-mesurable est dite **application borélienne** où Σ_1 **-mesurable**.*

Proposition 1.2.4.
Soient X_1, X_2 deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$ une application. Si f est continue alors $f : (X_1, \mathcal{B}(X_1)) \to (X_2, \mathcal{B}(X_2))$ est borélienne.

Définition 1.2.5.
*Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors l'application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une **mesure** si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *$\mu(\bigcup\limits_n A_n) = \sum\limits_n \mu(A_n)$, pour toute suite dénombrable (A_n) d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

- *Le triple (X, Σ, μ) est appelé **espace mesuré**.*
- *Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure positive** et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.*
- *Si $\mu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une **mesure finie** ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.*
- *μ est dit **σ-finie** s'il existe une famille $(A_n)_n \subset \Sigma$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ et $\bigcup\limits_n A_n = X$.*
- *Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est appelée **mesure borélienne**.*

Définition 1.2.6.
*Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré positif et A un sous ensemble de X. On dit que A est **μ-négligeable** ou **négligeable** (s'il n'y a pas de confusion), s'il existe $C \subset \Sigma$ tel que $A \subset C$ et $\mu(C) = 0$.*

- *On dit qu'une propriété sur X est vraie **μ-presque partout** (μ.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.*
- *La tribu μ-complète de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, c'est à dire*

$$\Sigma_\mu = \{A \cup Z : A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu\text{-négligeabe}\}.$$

- *La tribu Σ est dite **complète** si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est à dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.*

Définition 1.2.7. ***(Tribu de Lebesgue)***
La tribu de Lebesgue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ notée $\mathcal{L}(I)$ est la tribu μ-complète de la tribu borélienne $\mathcal{B}(I)$ pour la mesure de Lebesgue.

Définition 1.2.8. ***(Application simple)***
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace de Banach et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
*On dit que f est une **application simple** si elle est de la forme*

$$f = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i},$$

où les $A_i = f^{-1}(y_i)$, $i \in \{1, .., n\}$, *sont des éléments deux à deux disjoints de* Σ *et les* y_i, $i \in \{1, .., n\}$ *sont des éléments distincts de* Y.
Cette formule est appelée ***la représentation canonique*** *de* f.

Proposition 1.2.9.
Soient (X, Σ) *un espace mesurable,* E *un espace de Banach et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'application* Σ*-mesurables définies sur* X *à valeurs dans* E.
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement vers* f *alors* f *est* Σ*-mesurable.*

Théorème 1.2.10.
Soit (X, Σ, μ) *un espace mesuré fini et* E *un espace de Banach séparable. Si* $f : X \longrightarrow E$ *est* Σ*-mesurable, alors il existe une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *d'applications simples qui converge* μ*-presque partout tout vers* f, *et pour* μ*-presque tout* $x \in E$,

$$\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3 Fonctions intégrables au sens de Bochner

Les résultats suivants sont pris des références [10] et [16].
Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable.

Définition 1.3.1.
Si $f : X \longrightarrow E$ *est une application simple avec* $f = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i 1\!\!1_{A_i}$, *où* $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *sont données comme dans la Définition 1.2.8, alors* ***l'intégrale de Bochner*** *de* f *est défini par*

$$\int_X f(t)d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i).$$

Cette définition est indépendante des représentations.

Définition 1.3.2.
Une application Σ*-mesurable* $f : X \longrightarrow E$ *est dite* ***intégrable au sens de Bochner*** *s'il existe une suite d'applications simples* $(f_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $f_n \longrightarrow f$ μ *p.p,* $\|f_n - f\|$ *est intégrable au sens de Lebesgue et*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \|f_n - f\| d\mu = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \|f\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|f\|(x) = \|f(x)\|. \end{aligned}$$

On pose alors

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Dans ce cas, on définit $\int\limits_A f d\mu$ *pour tout* $A \in \Sigma$ *par* $\int\limits_A f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu$.

Théorème 1.3.3.

Une application Σ*-mesurable* $f : X \longrightarrow E$ *est intégrable* ***au sens de Bochner*** *si et seulement si*

$$\int\limits_X \|f\| d\mu < \infty.$$

Corollaire 1.3.4.

Si $f : X \longrightarrow E$ *est une fonction intégrable au sens de Bochner et* $A \in \Sigma$*, alors*

$$\Big\| \int\limits_A f d\mu \Big\| \leqslant \int\limits_A \|f\| d\mu.$$

Corollaire 1.3.5.

Si $f, g : X \longrightarrow E$ *sont deux applications intégrables au sens de Bochner et pour tout* $A \in \Sigma$, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A g d\mu$, *alors*

$$f(x) = g(x) \quad \textit{pour } \mu\textit{-presque tout } x \in X.$$

Théorème 1.3.6. ***(Théorème de la convergence dominée)***

Soit $f : X \longrightarrow E$ *une application* Σ*-mesurable, et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'application mesurables de* X *dans* E *vérifiant*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \mu\textit{-presque partout sur } X.$$

S'il existe une application $h : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *intégrable au sens de Lebesgue telle que*

$$\|f_n(x)\| \leqslant h(x), \quad \mu\textit{-presque partout sur } X, \textit{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

alors, f_n, $n \geq 1$ *et* f *sont intégrables au sens de Bochner et*

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X f_n(x) d\mu.$$

On note $\mathscr{L}^1(X, E)$ l'ensemble des applications mesurables, f telles que $\|f\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des applictions Σ-mesurables $f : X \longrightarrow E$ telles que $f(x) = 0$ μ-p.p sur X. L'espace des classes d'équivalence $\mathscr{L}^1(X, E)\backslash\mathcal{N}$ est noté par $L^1(X, E)$ c'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int\limits_X \|f(x)\| d\mu.$$

1.4 Quelques résultats d'analyse convexe

Les resultats de cette section sont pris de la référence [19].

1.4.1 Fonctions semi-continues inférieurement

Définition 1.4.1. ***(Epigraphe)***
Soient X un ensemble et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. ***L'épigraphe*** *epi(f) de f est l'ensemble*

$$\{(x,\lambda) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}.$$

Soit E un espace vectoriel topologique.

Définition 1.4.2. ***(Fonction semi-continue inférieurement)***
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et $a \in E$. f est dite ***semi-continue inférieure*** *en a si pour tout $k \in \mathbb{R}$, $k < f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V) > k$.*

- *f est dite* ***semi-continue inférieure*** *sur E si f semi-continue inférieure en tout point de E.*

Théorème 1.4.3.
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est semi-continue inférieure.

b) $\{x \in E : f(x) > \lambda\}$ est ouvert pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\}$ est fermé pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) epi(f) est fermé (en tant que sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$).

1.4.2 Fonctions convexes

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.4.4. ***(Fonction convexe)***
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. f est dite ***convexe*** *si pour tous $x, y \in E$, et tous $\lambda, \mu, v \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \mu,\ f(y) < v,\ 0 < \lambda < 1$,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda\mu + (1-\lambda)v,$$

ou, d'une manière équivalente, si pour tous $x, y \in E$, et tout $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 1.4.5. ***(Domaine effectif)***

a) ***Le domaine effectif*** *d'une fonction convexe $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, noté dom$(f)$, est l'ensemble $\{x \in E : f(x) < +\infty\}$.*

b) Une fonction convexe propre sur E est une fonction convexe de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui n'est pas identiquement $+\infty$.

c) Une fonction convexe impropre sur E est une fonction convexe sur E qui n'est pas propre.

Théorème 1.4.6.

Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors, f est convexe si et seulement si epi(f) est convexe.

1.4.3 Ensembles convexes

Définition 1.4.7.

Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On dit que A est ***un ensemble convexe*** *si*

$$\forall u, v \in A, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Autrement dit si, pour tout $u, v \in A$, ***le segment de droite***

$$[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v : \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.4.8. ***(Simplexe de $\mathbb{R}^n$)***

On appelle ***Simplexe de*** *$\mathbb{R}^n$ l'ensemble Θ_n défini par*

$$\Theta_n = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0,\ i = \overline{1,n} \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.4.9.

Soit E un espace vectoriel et soient $x_1, x_2, .., x_n \in E$. On appelle ***combinaison convexe*** *des éléments $x_1, x_2, .., x_n$ tout élément x qui s'écrit comme suit*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ \ tel\ que\ \ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Theta_n.$$

Proposition 1.4.10.

Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On dit que A est ***convexe*** *si et seulement s'il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Définition 1.4.11. ***(Enveloppe convexe)***
Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. On appelle ***enveloppe convexe de*** *A qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E contenant A, c'est en fait le plus petit convexe qui contient A.*
Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle ***enveloppe convexe fermée de A*** *qu'on note $\overline{co}(A)$ le plus petit convexe fermé de E contenant A.*

Proposition 1.4.12.
Soient E un espace vectoriel, $A, B \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1). $co(\alpha.A) = \alpha.co(A)$.

2). $co(A + B) = co(A) + co(B)$.

Si E un espace vectoriel topologique. Alors,

4). si A est un sous ensemble convexe de X alors $\overline{A}$ et A° le sont aussi ;

5). $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.

6). $\overline{co}(\alpha.A) = \alpha.\overline{co}(A)$.

1.4.4 Sous différentiabilité d'une fonction convexe

Soit E un espace vectoriel normé et E' le dual de E.

Définition 1.4.13.
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et soit x_0 un point de E tel que $|f(x_0)| < +\infty$.

a) Soit $x_0^{'} \in E^{'}$. $x_0^{'}$ est dite ***sous-gradiant*** *de f en x_0 si*

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle x_0^{'}, x - x_0 \rangle,$$

pour tout $x \in E$.

b) L'ensemble de tous les sous-gradiants de f en x_0, est appelé ***le sous-différentiel*** *de f en x_0. Il est noté $\partial f(x_0)$.*
$\partial f(x_0)$ est un sous ensemble convexe de $E^{'}$.
On dit que f est ***sous-différentiable*** *en x_0, si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$. Si $f(x_0) = -\infty$ ou bien $f(x_0) = +\infty$, on définit $\partial f(x_0) = \emptyset$.*

c) Le sous-différentiel de f est la multi-application $\partial f : x \longmapsto \partial f(x)$ définie de E dans $E^{'}$ (voir Section 1.7).

d) Le domaine de ∂f est l'ensemble $dom(\partial f) = \{x \in E : \ \partial f(x) \neq \emptyset\}$.

Proposition 1.4.14.

Soit H un espace de Hilbert et $f \in \Gamma_0(H)$. Alors

$$dom(\partial f) \subset dom(f) \subset \overline{dom(f)} = \overline{dom(\partial f)}.$$

1.5 Distance de Hausdorff

Les resultats de cette section sont pris des références [3] et [17].

Définition 1.5.1.

Soient A et B deux sous ensembles d'un espace métrique (X, d). Posons

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

- *On appelle **écart** entre A et B que l'on note **e(A,B)** la quantité définie par*

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

- *On appelle **distance de Hausdorff** entre A et B et on la note $\mathcal{H}(A, B)$ la quantité définie par*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Remarquons que $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B, A)$.

Théorème 1.5.2.

Soient A, B et C trois sous ensembles d'un espace métrique (X, d).

1. $e(A, \emptyset) = \infty$ *si* $A \neq \emptyset$.
2. $e(\emptyset, B) = 0$.
3. $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \overline{B}$.
4. $e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C)$.
5. $\mathcal{H}(A, B) = 0 \Longleftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
6. $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.
7. $|d(x, A) - d(x, B)| \leq \mathcal{H}(A, B)$, $\forall x \in X$.

Remarque 1.5.3.

- $(P_{cl}(X), \mathcal{H})$ *est un espace métrique.*
- *Si (X,d) est un espace métrique complet, alors $(P_{cl}(X), \mathcal{H})$ est complet.*

- *Si X est séparable, $(P_k(X), \mathcal{H})$ est aussi séparable.*
- *Si $X = E$ un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|$, alors*

$$\mathcal{H}(A,B) \leq \sup_{x\in A}\|x\| + \sup_{x\in B}\|x\|.$$

1.6 Topologies faible et faible*

Les résultats de cette section sont pris des références [17] et [6].

Soient X un ensemble, I un ensemble quelconque et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topoloqiques. Pour chaque $i \in I$ on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$. Le problème posé est de munir X par une topoloqie τ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rend continues toutes les applications $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Proposition 1.6.1.
Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j}\varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini d'indices quelconque de I et J est un ensemble quelconque. Alors, τ définit une topologie sur X. De plus, τ est la topologie la moins finie sur X qui rend continues toutes les applications $\varphi_i(i \in I)$.

1.6.1 Topologies faible

Soient E un espace de Banach et E' son dual topologique, c'est à dire

$$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ linaire continue}\} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R}),$$

muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in \overline{B}_E} |\langle f, x\rangle| = \sup_{x\in E\setminus\{0_E\}} \frac{|\langle f, x\rangle|}{\|x\|}.$$

Définition 1.6.2.
Soit $f \in E'$ et soit

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x\rangle. \end{aligned}$$

Lorsque f d'écrit E', nous obtenons une famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle ***la topologie faible*** *sur E, la topologie la moins fine sur E rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continues et on la note $\sigma(E,E')$.*
On note $w-E$, l'espace E muni de la topologie faible.

Proposition 1.6.3.
La topologie faible $\sigma(E,E')$ est séparée.

Proposition 1.6.4.
Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E, alors quand $n\to+\infty$ on a

1). $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f,x_n\rangle \longrightarrow \langle f,x\rangle,\ \forall f\in E'$;

2). $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$;

3). $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow (\|x_n\|)_{n\geq 1}$ *est bornée et nous avons*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

4). $x_n \rightharpoonup x$ *et* $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow \langle f,x_n\rangle \longrightarrow \langle f,x\rangle$.

Proposition 1.6.5.
Lorsque E est de dimension finie, la topologie forte de E et la topologie faible $\sigma(E,E')$ coïncident. En particulier, une suite $(x_n)_{n\geq 1}\subset E$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Théorème 1.6.6.
Soit K un sous ensemble convexe de E. Alors K est faiblement fermée si et seulement si K est fortement fermé.

1.6.2 Topologies faible*

Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique et E'' son bidual (c'est à dire le dual de E') ;

$$E''=\{\zeta : E'\longrightarrow \mathbb{R} : \zeta \text{ linéaire continue}\},$$

muni de la norme $\|\zeta\|_{E''} = \sup\limits_{f\in \overline{B}_{E'}} |\langle \zeta, f\rangle|$.
Il existe une injection canonique $J : E\longrightarrow E''$. En effet, pour tout $x\in E$ fixé, l'application

$$\begin{aligned} J_x : E' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto J_x(f)=\langle f,x\rangle, \end{aligned}$$

est linéaire continue sur E', c'est à dire, J_x est un élément de E'', et

$$J : E \longrightarrow E''$$
$$x \longmapsto J(x) = J_x,$$

est linéaire continue, de plus, elle est une isométrie, et on a

$$\langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}, \ \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Sur l'espace E' sont définies déjà deux topologies :

- La topologie forte associée à la norme de E'.
- La topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie sur E' qu'est **la topologie faible***, définie comme suit.

Définition 1.6.7.
La topologie faible sur E' est la topologie la moins fine sur E' qui rend continues toutes les applications $(J_x)_{x\in E}$. On la note $\sigma(E', E)$.*

Proposition 1.6.8.
Soit E un espace de Banach.

- *La topologie faible* $\sigma(E', E)$ est séparée.*
- *La boule unité fermée de E' est faiblement* compacte.*

Proposition 1.6.9.
Soit $(f_n)_{n\geq 1} \subset E'$ une suite d'éléments de E'. Alors quand $n \longrightarrow +\infty$ on a

1). $f_n \rightharpoonup^* f \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \ \forall x \in X.$

2). $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f.$

3). $f_n \rightharpoonup f \Longrightarrow f_n \rightharpoonup^* f.$

4). $f_n \rightharpoonup^* f \Longrightarrow (\|f_n\|_{E'})_{n\geq 1}$ *est bornée et nous avons*

$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

5). $f_n \rightharpoonup^* f$ *et* $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$

1.6.3 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.6.10.

On dit que E est ***réflexif*** *si $J(E) = E''$, c'est à dire, si J est bijective (on identifie alors E à E'' à l'aide de l'isomorphisme J).*

Théorème 1.6.11.

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1). E est réflexif.

2). $\overline{B}_E(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est $\sigma(E, E')$-compact.

3). Pour tout suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans E il existe une suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge pour $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.6.12.

- *Tout espace de Hilbert est réflexif.*
- *Tout espace de dimension finie est réflexif.*

Corollaire 1.6.13.

Soit E un espace réflexif et soit $C \subset E$ un convexe fermé borné. Alors C est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.6.14.

Si E est réflexif, alors les topologies faible et faible sur E' coïncident.*

Dans la suite, on donne comme cas particulier les espaces $L^p(I, H)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et où H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 1.6.15.

Soit $p \in]1, +\infty]$ et soit q son conjugué, i.e, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} J : L^p(I, H) &\longrightarrow (L^q(I, H))' \\ f &\longmapsto J(f) = \varphi_f, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_f : L^q(I, H) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \varphi_f(g) = \int_I \langle f(t), g(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

est une bijection. On identifie alors f avec $J(f) \in (L^q(I, H))'$. On a alors une notion de convergence faible dans $L^p(I, H)$. Si $1 < p < +\infty$ (on a alors aussi $1 < q < +\infty$), les notions de convergence faible et faible* dans $L^p(I, H)$ coïncident.*

Proposition 1.6.16. ***(Convergence faible dans*** $L^p(I,H)$***)***

Soient $p \in]1,+\infty[$ *et* q *le conjugué de* p*,* $(f_n)_{n\geq 1} \subset L^p(I,H)$ *et* $f \in L^p(I,H)$*. Alors, la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge faiblement vers* f *si et seulement si on a, pour tout* $g \in L^q(I,H)$

$$\langle f_n, g\rangle = \int_I \langle f_n(t), g(t)\rangle dt \longrightarrow \int_I \langle f(t), g(t)\rangle dt \ \text{ quand } \ n \longrightarrow +\infty.$$

Proposition 1.6.17.

Soit $p \in]1,+\infty[$*. Alors* $L^p(I,H)$ *est un espace réflexif.*

Soit E un espace de Banach. Dans l'espace $L^2(I,E)$ on considère la norme "faible"

$$\|x\|_w = \max_{0\leq a\leq b\leq 1} \Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\|, \tag{1.1}$$

cette norme est équivalente à la norme

$$|||x||| = \max_{0\leq t\leq 1} \Big\| \int_0^t x(s)ds\Big\|. \tag{1.2}$$

En effet, pour tout $t \in I$, et en prenant $a = 0$ et $b = t$,

$$\Big\| \int_0^t x(s)ds\Big\| \leq \max_{0\leq a\leq b\leq 1} \Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\| = \|x\|_w.$$

D'où,

$$|||x||| \leq \|x\|_w. \tag{1.3}$$

D'autre part, pour tout $a, b \in I$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned}\Big\| \int_a^b x(s)ds\Big\| &= \Big\| \int_0^b x(s)ds - \int_0^a x(s)ds\Big\| \\ &\leq \Big\| \int_0^b x(s)ds\Big\| + \Big\| \int_0^a x(s)ds\Big\| \\ &\leq 2|||x|||.\end{aligned}$$

D'où

$$\|x\|_w \leq 2|||x|||. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4), on déduit que $\|\cdot\|_w$ et $|||\cdot|||$ sont équivalentes. De plus, $\|\cdot\|_w \leq 2\|\cdot\|_p$. En effet, pour $x \in L^2(I,H)$

$$\begin{aligned}\|x\|_w &\leq 2|||x||| \\ &= 2\max_{t\in I} \Big\| \int_0^t x(s)ds\Big\| \\ &\leq 2\max_{t\in I} \int_0^t \|x(s)\|ds \\ &= 2\int_0^1 \|x(s)\|ds \\ &\overset{C.S}{\leq} 2\|x\|_p.\end{aligned}$$

On note par $L^p_w(I,E)$ l'espace $L^p(I,E)$ muni de la norme faible.

Lemme 1.6.18. *(Voir [18])*
Soit H un espace de Hilbert. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $L^2(I,H)$ et $f \in L^2(I,H)$ tels que $\sup\limits_n \|f_n\|_2 < \infty$ et $\|f_n - f\|_w \longrightarrow 0$.
Alors, (f_n) converge faiblement vers f dans $L^2(I,H)$.

1.7 Multi-applications

1.7.1 Multi-applications et sélections

Les résultats suivant sont pris des références [3] et [26].

Définition 1.7.1.
*Soient X et Y deux ensembles non vides. On appelle **multi-application** (ou **fonction multivoque**) F définie sur X à valeurs dans Y toute application qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$.*

- *On appelle **domaine** (effectif) de la multi-application F qu'on note $dom(F)$, le sous ensemble de Y défini par*

$$D(F) := dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- *On appelle **graphe** de F, qu'on note $Gr(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$Gr(F) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

- *Si $A \subset X$, on appelle **image** de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup\limits_{x\in A} F(x)$, et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists x \in A,\ y \in F(x)\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle **image réciproque large** de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

- *Pour tout $V \subset X$, on appelle **image réciproque étroite** de F, le sous ensemble défini par*

$$F^{-1}_{+}(V) = \{x \in X : F(x) \subseteq V\}.$$

Définition 1.7.2.
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle ***sélection*** *de F toute application $f : dom(F) \longrightarrow Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in dom(F).$$

1.7.2 Continuité des multi-applications

Les résultats suivant sont pris des références [3], [11], [1] et [2].

Définition 1.7.3.
Soient X et Y deux espaces topologiques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

1). On dit que F est ***semi-continue supérieurement*** *(s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X contenant $F(x_0)$ c'est à dire $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset U$. Autrement dit $F_+^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.s sur X si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.*

2). On dit que F est ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de X vérifiant $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage de x_0 tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, $\forall z \in \Omega$. Autrement dit $F^{-1}(U)$ est un voisinage de x_0.*

- *F est s.c.i sur X si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.*

3). On dit que F est ***continue*** *au point x_0 si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0.*

Proposition 1.7.4.
Soient X et Y deux espaces topologiques et considérons la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$. Alors

(i) F est ***s.c.s*** *si et seulement si $F^{-1}(U)$ est fermé de X pour tout U fermé de Y.*

(ii) F est ***s.c.i*** *si et seulement si $F^{-1}(U)$ est ouvert de X pour tout U ouvert de Y.*

Lemme 1.7.5.
La multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue inférieurement si et seulement si la fonction $d_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $d_y(x) = d(y, F(x))$, $\forall x \in X$ est semi-continue supérieurement pour tout $y \in Y$.

Théorème 1.7.6.
Soit X et Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, F est semi-continue inférieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si pour tout suite (x_n) de point de X, telle que $x_n \longrightarrow x_0$ et pour tout $y_0 \in F(x)$, il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in F(x_n)$ et $y_n \longrightarrow y_0$.

Définition 1.7.7. ***(Continuité par rapport à la distance de Hausdorff)***
Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques, et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors

- *F est dite **$\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement** au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(B(x_0, \delta)) \subset V(F(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y : \ d(y, F(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

- *On dit que F est **$\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement** sur X si elle l'est en tout point de X.*
- *F est dite **$\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement** au point $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$F(x_0) \subset [V(F(x), \varepsilon)]^\circ \ ; \ \forall x \in B(x_0, \delta).$$

- *On dit que F est **$\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement** sur X si elle l'est en tout point de X.*
- *On dit que F est **$\mathcal{H}$-continue** si elle est $\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement et $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement.*

Proposition 1.7.8.
Soit X et Y deux espace métriques et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées. Alors,

- *F est **$\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} e(F(x_n), F(x_0)) = 0;$$

- *F est **$\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} e(F(x_0), F(x_n)) = 0;$$

- *F est $\mathcal{H}$-**continue** au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset X$ convergente vers x_0, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{H}(F(x_n), F(x_0)) = 0.$$

Proposition 1.7.9.
Si F est $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement au point x_0 alors F est semi-continue inférieurement au point x_0.

Proposition 1.7.10.
Si $F(x_0)$ est compact alors

- *F est $\mathcal{H}$-semi-continue supérieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue supérieurement au point x_0.*
- *F est $\mathcal{H}$-semi-continue inférieurement au point x_0 si et seulement si F est semi-continue inférieurement au point x_0.*

1.7.3 Mesurabilité des multi-applications

Les résultats suivant sont pris des références [3], [12], [8] et [22].

Définition 1.7.11.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.

*1). On dit que F est Σ-**mesurable** où **mesurable**, si pour tout ouvert O de Y on a $F^{-1}(O) \in \Sigma$.*

*2). On dit que F est **fortement mesurable**, si pour tout fermé V de Y on a $F^{-1}(V) \in \Sigma$.*

Proposition 1.7.12.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Si F est fortement mesurable, alors F est mesurable.

Proposition 1.7.13.
Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

1). F est Σ-mesurable.

2). Pour chaque $y \in Y$, la fonction $d_y : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $d_y = d(y, F(x))$ est Σ-mesurable.

Proposition 1.7.14.

Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable. Si $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable ou fortement mesurable, alors dom(F) est mesurable.

Proposition 1.7.15.

Soient X un espace topologique et Y un espace métrique séparable, alors la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ est mesurable si et seulement si $\overline{F} : X \rightrightarrows Y$ définie par $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$ est mesurable.

Théorème 1.7.16.

Soient (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach et soient $F : X \times E \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable et $u : X \rightrightarrows E$ une application Σ-mesurable. Alors, la multi-application $x \longmapsto F(x, u(x))$ est mesurable.

Lemme 1.7.17.

Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$ (La tribu engendrée par les ensembles $A \times B \in \Sigma \times \mathcal{B}(Y)$).

Lemme 1.7.18.

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré positive avec μ est σ-finie et Σ est μ-complète.
Soient Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs fermées, alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) F *est* Σ*-mesurable.*

(b) $Gr(F) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$.

(c) F *est fortement mesurable.*

Théorème 1.7.19. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)***

Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

Théorème 1.7.20.

Soient (X, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ est μ-complète et μ est σ-finie. Soit E un espace de Banach séparable et soient $f : X \longrightarrow E$ une application mesurable et $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors, $x \longmapsto \overline{B}_E(f(x), \rho(x))$ est une multi-application mesurable.

Proposition 1.7.21.

Soit X un espace métrique séparable et $F : I \times X \rightrightarrows X$ une multi-application à valeurs non vides et fermées telle que *(i)* $\forall x \in X, \quad t \longmapsto F(t,x)$ *est mesurable,*

(ii) $\forall t \in I, \quad x \longmapsto F(t,x)$ *est continue ou bien* $\mathcal{H}$*-continue.*

Alors F *est mesurable.*

1.7.4 Ensembles décomposables et L^p-sélections

Les résultats de cette section sont pris des références [16, 17] et [25].
Soit E un espace de Banach séparable.

Définition 1.7.22.
Soit K *un ensemble de* $L^p(I,E)$*. On dit que* K *est* ***décomposable*** *si pour tous* $u, v \in K$ *et pour tout sous ensemble* $A \in \mathcal{L}(I)$*, nous avons*

$$\mathbb{1}_A u + (1 - \mathbb{1}_A) v \in K.$$

Définition 1.7.23.
Soit $F : I \rightrightarrows E$ *une multi-application*

- *On définit l'ensemble des sélections mesurables par*

$$S_F = \Big\{ f : I \longrightarrow E \text{ mesurable } : f(t) \in F(t), \text{ p.p sur } I \Big\}.$$

- *Pour* $1 \leq p < +\infty$*, on définit l'ensemble de toutes les* L^p*-sélections de* F *par*

$$S_F^p = \Big\{ f \in L^p(I,E) : f(t) \in F(t), \text{ p.p sur } I \Big\}.$$

Lemme 1.7.24.
Soit $F : I \rightrightarrows E$ *une multi-application de graphe mesurable et* $1 \leq p < +\infty$*, alors* S_F^p *est non vide si et seulement si*

$$d(0_E, F(t)) = \inf_{x \in F(t)} \|x\| \leq h(t) \text{ p.p sur } I,$$

pour une certaine fonction $h(.) \in L^p(I, \mathbb{R})$*.*

Proposition 1.7.25.
Soit $F : I \rightrightarrows E$ *une multi-application. Alors les ensembles* S_F *et* S_F^p *sont décomposables. Si* F *est à valeurs non vides et fermées, alors l'ensemble* S_F^p *est fermé dans* $L^p(I,E)$*.*

Proposition 1.7.26.
Soit $F : X \rightrightarrows E$ *une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées. On*

définit la multi-application $co(F) : I \rightrightarrows E$ par $co(F)(t) = co(F(t))$ pour tout $t \in I$ et on définit la multi-application $\overline{co}(F) : I \rightrightarrows E$ par $\overline{co}(F)(t) = \overline{co}(F(t))$ pour tout $t \in I$. Alors, $co(F)$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides et $\overline{co}(F)$ est une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées. De plus, si $S_F^p \neq \emptyset$ $(1 \leq p < +\infty)$, alors

$$\overline{co}(S_F^p) = S^p_{\overline{co}(F)},\ (1 \leq p < +\infty).$$

Théorème 1.7.27.
Soit $F : I \rightrightarrows E$ une multi-application mesurable à valeurs non vides fermées et bornées. Supposons que F est intégrablement bornée, i. e., il existe une fonction positive et intégrable $\lambda : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\|F(t)\| \leq \lambda(t),\ \textit{p.p. sur } I.$$

Alors pour toute $u \in S_{\overline{co}(F)}$ et $\varepsilon \geq 0$, il existe $v \in S_F$ telle que

$$\|u - v\|_w < \varepsilon.$$

1.8 Operateurs maximaux monotones

Les resultats de cette section sont pris des références [7] et [5].

Soit E un espace de Banach, E' son dual topologique. Soit $A : E \rightrightarrows E'$ une multi-application. Alors, le domaine de A est donné par

$$dom(A) = \{x \in E : A(x) \neq \emptyset\},$$

et l'image de A par

$$R(A) = \{y \in E' :\ \text{il existe } x \in dom(A) \text{ tel que } y \in A(x)\}.$$

Définition 1.8.1. ***(Opérateur monotone)***
Soit $A : dom(A) \subseteq E \rightrightarrows E'$ une multi-application (opérateurr multivoque).
*On dit que A est un **opérateur monotone**, si $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle \geq 0$ pour tous $x_i \in dom(A)$, et $y_i \in A(x_i)$, $i = 1, 2$.*
*Si $\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2\rangle = 0$ implique que $x_1 = x_2$, on dit que A est **strictement monotone**.*

L'ensemble des opérateurs multivoques est ordonné par l'inclusion des graphes, i.e, $A \subset B$ est équivalent à, pour tout $x \in H$, $A(x) \subset B(x)$.

Proposition 1.8.2. ***(Opérateurs maximaux monotones)***
Un opérateur monotone A est dit ***maximal*** *si A ne peut pas être proprement contenu dans d'autres opérateurs monotones.*

En explicitant cette définition, nous aurons la proposition suivante.

Proposition 1.8.3.
Un opérateur monotone $A : E \rightrightarrows E'$ est dit ***maximal monotone*** *si et seulement si pour tout $(x, y) \in E \times E'$ tel que*

$$\langle y - v, x - u \rangle \geq 0, \ \textit{pour tout}\ (u, v) \in Gr(A),$$

on a $y \in A(x)$.

Théorème 1.8.4.
Si φ est une fonction propre convexe s.c.i. définie sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\partial\varphi$ est un opérateurs maximal monotone sur E à valeurs dans E'.

1.9 Fonctions absolument continues

Les résultats suivants sont pris des références [10] et [3].

Définition 1.9.1.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : I \longrightarrow E$ une application. f est dite ***absolument continue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\zeta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts disjoints de I ; $(]a_i, b_i[)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, nous avons*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \zeta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.9.2.
Soient E un espace réflexif et $f \in C(I, E)$. Alors f est absolument continue si et seulement s'il existe une application $g \in L^1(I, E)$ telle que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Dans ce cas, $\dot{f}(t) = g(t)$ p.p sur I.

Proposition 1.9.3.
Si E est réflexif et $f : I \longrightarrow E$ est absolument continue, alors f est dérivable pour presque tout $t \in I$, et on a

$$f(t) - f(0) = \int_0^t \dot{f}(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Proposition 1.9.4.
Soit E un espace de Banach et $f, g \in W^{1,2}(I, E)$. Alors la fonction $t \longmapsto \langle u(t), v(t)\rangle$ est absolument continue et

$$\frac{d}{dt}\langle f(t), g(t)\rangle = \langle \dot{f}(t), g(t)\rangle + \langle \dot{g}(t), f(t)\rangle \ \ p.p \ sur \ I.$$

1.10 Lemme de Gronwell

Le lemme suivant est pris de la référence [7].

Lemme 1.10.1.
Soit $m \in L^1(I, \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$. p.p sur $]0.1[$, et soit $\alpha \geq 0$. Soit $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\frac{1}{2}\phi^2(t) \leq \frac{1}{2}\alpha^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Alors,

$$|\phi(t)| \leq \alpha + \int_0^t m(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS

Ce chapitre sera consacré à l'étude de l'existence de solutions pour les inclusions d'évolution du premier ordre de la forme suivante

$$(\mathcal{P}_F)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + F(t, x(t)) \quad p\, p\ sur\ I,\\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p.\ sur\ I,\\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0),\end{cases}$$

où $F : I \times H \rightrightarrows H$ est une multi-application à valeurs non vide, fermées et pas nécessairement bornées, et $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$.

Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $u \in L^2(I, H)$. On considére l'inclusion d'évolution suivante

$$(\mathcal{P}_u)\begin{cases}-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + u(t) \quad p.p\ sur\ I,\\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p.\ t \in I,\\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0).\end{cases}$$

Définition 2.1. *(Voir [21])*

a) Pour $u \in L^2(I, H)$ une application, $x_u \in W^{1,2}(I, H)$ est dite solution du problème

$(\mathcal{P}_u)$, si $x_u(t) \in dom(\partial\varphi^t)$ p.p sur I et il existe $g \in L^2(I,H)$ telle que

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) = g(t) + u(t) \\ et \\ g(t) \in \partial\varphi^t(x_u(t)) \quad p.p.\ sur\ I. \end{cases}$$

b) On appelle solution du problème $(\mathcal{P}_F)$, le couple (x_u, u) tel que $u \in L^2(I,H)$, x_u est solution du problème $(\mathcal{P}_u)$ et

$$u(t) \in F(t, x_u(t))\ p.p.\ sur\ I.$$

Considérons l'hypothèse suivante

Hypothèse H(φ).

Les applications $\varphi^t \in \Gamma_0(H),\ \forall t \in I$ vérifient la propriété suivante :

Pour tout $r \geq 0$, il existe des fonctions $a_r \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$, $b_r \in W^{1,1}(I,\mathbb{R})$ telles que pour tous $s,t \in I$, $s \leq t$ et tout $x \in dom(\varphi^s)$, $\|x\| \leq r$ il existe un élément $y \in dom(\varphi^t)$ satisfaisant les inégalités

$$\|x - y\| \leq |a_r(t) - a_r(s)| \left(|\varphi^s(x)|^{\frac{1}{2}} + 1\right), \tag{2.1}$$

$$\varphi^t(y) - \varphi^s(x) \leq |b_r(t) - b_r(s)| \left(|\varphi^s(x)| + 1\right). \tag{2.2}$$

Par les Théorèmes 1.1.1 et 1.5.1 de [14], on a le Théorème suivant :

Théorème 2.2.

Supposons que les applications $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$ vérifient l'hypothèse $H(\varphi)$. Alors, pour tous $x_0 \in dom(\varphi^0)$ et $u \in L^2(I,H)$, le probléme

$$(\mathcal{P}_u) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + u(t) \quad p.p.\ sur\ I, \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t) \quad p.p\ sur\ I, \\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0) \quad p.p.\ t \in I, \end{cases}$$

admet une solution unique $x_u \in W^{1,2}(I,H)$.

Proposition 2.3. *(Voir[21])*

Soit $u_1, u_2 \in L^2(I,H)$ et soit x_{u_1}, x_{u_2} les solutions uniques des problèmes $(\mathcal{P}_{u_1})$ et $(\mathcal{P}_{u_2})$ réspéctivement avec $x_{u_i}(0) = x_0^i \in dom(\varphi^0)$, $i = 1,2$, alors

$$\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\| \leq \|x_0^1 - x_0^2\| + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.3}$$

Preuve.

Par la définition du Problème $(\mathcal{P}_u)$, on a

$-\dot{x}_{u_1}(t) - u_1(t) \in \partial\varphi^t(x_{u_1}(t))$ et $-\dot{x}_{u_2}(t) - u_2(t) \in \partial\varphi^t(x_{u_2}(t))$, *p.p sur* I.

Or, Par le Théorème 1.8.4, $\partial\varphi^t$ est monotone, donc, en utilisant la Proposition 1.9.4, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}
& \langle -\dot{x}_{u_1}(t) - u_1(t) + \dot{x}_{u_2}(t) - u_2(t), x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\rangle \geq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \dot{x}_{u_1}(t) + u_1(t) - \dot{x}_{u_2}(t) - u_2(t), x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\rangle \leq 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \langle \dot{x}_{u_1}(t) - \dot{x}_{u_2}(t), x_{u_1}(t) - x_{u_{2}(t)}\rangle \leq \langle u_2(t) - u_1(t), x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\rangle \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\|^2 \leq \langle u_2(t) - u_1(t), x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\rangle \leq \|u_1(t) - u_2(t)\|\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\|.
\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t, étant donné que $x_{u_1}(0) = x_0^1$ et $x_{u_2}(0) = x_0^2$, on trouve

$$\frac{1}{2}\Big(\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\|^2 - \|x_{u_1}(0) - x_{u_2}(0)\|^2\Big) \leq \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\|x_{u_1}(s) - x_{u_2}(s)\|ds,$$

qu'est equivalent à

$$\frac{1}{2}\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_0^1 - x_0^2\|^2 \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|\|x_{u_1}(s) - x_{u_2}(s)\|ds.$$

Par le Lemme de Gronwalle (Lemme 1.10.1), on obtient

$$\|x_{u_1}(t) - x_{u_2}(t)\| \leq \|x_0^1 - x_0^2\| + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.4}$$

■

Remarque 2.4.

Considérons $\Theta : I \longrightarrow H$ *l'application définie par* $\Theta(t) = 0_H$, $\forall t \in I$, *et soit* x_Θ *la solution unique du problème*

$$(\mathcal{P}_\Theta)\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) \quad p.p\ sur\ I, \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t), \quad p.p\ sur\ I, \\ x(0) = x_0^\Theta \in dom(\varphi^0). \end{cases}$$

Alors, de (2.4) *il s'ensuit que pour tout soulution* x_u *du problème* $(\mathcal{P}_u)$, *on a*

$$\|x_u(t) - x_\Theta(t)\| \leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t \|u(s)\|ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.5}$$

Théorème 2.5. *(Voir [23])*

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1} \subset L^2(I, H)$ *telle que*

$$u_n \rightharpoonup u \ \ dans \ \ L^2(I, H),$$

et l'ensemble $(u_n(t))_{n\geq 1}$ *est relativement compact dans* H *p.p. sur* I*. Alors, la suite* $(x_{u_n})_{n\geq 1}$ *admet les proporiétés suivantes quand* $n \to +\infty$*.*

$$x_{u_n} \to x_u \ \ dans \ \ C(I,H).$$
$$\dot{x}_{u_n} \rightharpoonup \dot{x}_u \ \ dans \ \ L^2(I,H).$$

Faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse H(F).

La multi-application $F : I \times H \rightrightarrows H$ est à valeurs non vides et fermées et vérifie les propriétés suivantes :

1) Pour tout $x \in H$, la multi-application $t \longmapsto F(t,x)$ est mesurable.
2) Il existe une fonction strictement positive $k \in L^2(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $x, y \in H,\ x \neq y$,
$$\mathcal{H}(F(t,x),F(t,y)) < k(t)\|x-y\|, \quad \forall t \in I. \tag{2.6}$$
3) Il existe une fonction strictement positive $a \in L^2(I,\mathbb{R})$, telle que pour presque tout $t \in I$, on a
$$d(0_H, F(t, x_\Theta(t))) < a(t). \tag{2.7}$$

Considérons l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = a(t) + k(t)r(t), \quad p.p\ sur\ I, \\ r(0) = r_0 \geq \|x_0 - x_0^\Theta\|. \end{cases} \tag{2.8}$$

Lemme 2.6.

L'équation (2.8) *admet une solution unique* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$r(t) = r_0 e^{m(t)} + \int_0^t e^{m(t)-m(s)} a(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

avec, $m(t) = \int\limits_0^t k(s)ds,\ \forall t \in I$*.*

Preuve.

On résout l'équation homogène associée à l'équation (2.8), i.e, l'équation

$$\dot{r}(t) - k(t)r(t) = 0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme

$$r_h(t) = ce^{\int_0^t k(s)ds}, \ \ \forall t \in I, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on trouve la solution particulière de la forme

$$r_p(t) = c(t)e^{\int_0^t k(s)ds}, \quad \forall t \in I,$$

avec c est une fonction dérivable. En dérivant r_p, on obtient

$$\dot{r}(t) = \dot{c}(t)e^{\int_0^t k(s)ds} + c(t)k(t)e^{\int_0^t k(s)ds}.$$

En remplaçant dans l'équation (2.8) on obtient

$$\dot{c}(t)e^{\int_0^t k(s)ds} = a(t).$$

D'où,

$$\dot{c}(t) = a(t)e^{-\int_0^t k(s)ds}.$$

En intégrant $\dot{c}(t)$ entre 0 et t, on trouve

$$c(t) = \int_0^t a(s)e^{-\int_0^s k(\tau)d\tau}ds + c_1, \quad \forall c_1 \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$r_p(t) = c_1 e^{m(t)} + \int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

Alors, la solution générale de l'équation (2.8) est

$$r(t) = r_p(t) + r_h(t).$$

En utilisant la condition iniciale, $r(0) = r_0 = c_1$, il s'ensuit que

$$r(t) = r_0 e^{m(t)} + \int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds, \quad m(t) = \int_0^t k(s)ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.9}$$

■

On donne maintenant le théorème principal de ce chapitre (voir [21]).

Théorème 2.7.
Soit $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$ des applications vérifiant l'hypothèse $H(\varphi)$ et soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides et fermées vérifiant l'hypothèse $H(F)$. Alors, pour tout $x_0 \in dom(\varphi^0)$ l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ admet une solution (x_u, u), satisfaisant les inégalités suivantes :

$$\|x_u(t) - x_\Theta(t)\| \leq r(t),\ \forall t \in I, \quad \|u(t)\| \leq \dot{r}(t) \ \ p.p\ sur\ I. \tag{2.10}$$

Preuve.

Etape 1.

Considérons la multi-application $U : I \times H \rightrightarrows H$, définie par

$$U(t,x) = F(t, x + x_\Theta(t)), \quad \forall x \in H, \; \forall t \in I. \tag{2.11}$$

De l'hypothèse $H(F)$, il s'ensuit que la multi-application U est à valeurs non vides et fermées et vérifie les propriétés suivantes.

a) La multi-application $t \longmapsto U(t,x)$ est mesurable.

b) $\mathcal{H}(U(t,x), U(t,y)) < k(t)\|x-y\|, \quad \forall t \in I, \; \forall x, y \in H, \; x \neq y.$

c) $d(0_H, U(t, 0_H)) < a(t) \quad p.p \; sur \; I.$

Montrons ces propriétés.

a) Soit $x \in H$ fixé et posons $y(\cdot) = x + x_\Theta(\cdot) \in C(I,H)$.
Considérons la multi-application $G : t \longmapsto F(t, y(t))$ définie sur I.
De l'hypothèse $H(F)(2)$, la multi-application $z \longmapsto F(t,z)$ est $\mathcal{H}$-continue sur I. En effet, pour toute suite $(z_n) \subset H$ telle que $z_n \longrightarrow z_0$ quand $n \longrightarrow \infty$, on a, pour tout $t \in I$

$$0 \leq \mathcal{H}(F(t,z_n), F(t,z_0)) < k(t)\|z_n - z_0\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(F(t,z_n), F(t,z_0)) = 0.$$

Donc, par la Proposition 1.7.8, la multi-application $z \longmapsto F(t,z)$ est $\mathcal{H}$-continue, $\forall t \in I$.
De l'hypothèses $H(F)(1)$ et la Proposition 1.7.21 on déduit que F est mesurable et puisque $y(\cdot)$ est mesurable, par le Théorème 1.7.16, G est mesurable, donc $t \longmapsto U(t,x)$ l'est aussi.

b) De $H(F)(2)$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(U(t,x), U(t,y)) &= \mathcal{H}(F(t, x + x_\Theta(t)), F(t, y + x_\Theta(t))) \\
&< k(t)\|x + x_\Theta(t) - y - x_\Theta(t)\| \\
&= k(t)\|x-y\|, \quad \forall t \in I, \; \forall x, y \in H, \; x \neq y.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{H}(U(t,x), U(t,y)) < k(t)\|x-y\| \quad \forall t \in \; I, \; \forall x, y \in H, \; x \neq y; \tag{2.12}$$

c) De (2.7), on a

$$d(0_H, U(t, 0_H)) = d(0_H, F(t, x_\Theta(t))) < a(t).$$

D'où

$$d(0_H, U(t, 0_H)) < a(t) \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.13}$$

Montrons que

1). $d(0_H, U(t, x)) < a(t) + k(t)\|x\| \quad p.p \ sur \ I, \ \forall x \in H,$

2). $U(t, x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad p.p \ sur \ I, \quad \|x\| \leq r(t),$

3). $U(t, x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset U(t, y) + k(t)\|x - y\|B \quad p.p \ sur \ I, \quad \|x\| \leq r(t), \ \|y\| \leq r(t), \ \forall t \in I.$

1). Soit $x \in H$ et soit $y \in U(t, 0_H)$. On a

$$\begin{aligned}
d(0_H, U(t, x)) &= \inf_{z \in U(t,x)} d(0_H, z) \\
&\leq \inf_{z \in U(t,x)} (d(0_H, y) + d(y, z)) \\
&= d(0_H, y) + \inf_{z \in U(t,x)} d(y, z) \\
&= d(0_H, y) + d(y, U(t, x)) \\
&\leq d(0_H, y) + e(U(t, 0_H), U(t, x)) \\
&\leq d(0_H, y) + \mathcal{H}(U(t, 0_H), U(t, x)) \\
&< d(0_H, y) + k(t)\|x\|.
\end{aligned}$$

Puisque y est arbitraire dans $U(t, 0_H)$, on obtient

$$\begin{aligned}
d(y, U(t, x)) &\leq \inf_{y \in U(t,0)} d(0_H, y) + k(t)\|x\| \\
&= d(0_H, U(t, 0_H)) + k(t)\|x\|.
\end{aligned}$$

De (2.13), on obtient

$$d(0_H, U(t, x)) < a(t) + k(t)\|x\|, \quad p.p \ sur \ I, \ \forall x \in H. \tag{2.14}$$

2). D'après (2.14) on a, pour tout $x \in H$

$$d(0_H, U(t, x)) < a(t) + k(t)\|x\| \quad p.p \ sur \ I.$$

Soit $t \in I$ tel que (2.14) soit vérifiée et soit $x \in H$ tel que $\|x\| \leq r(t)$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(0_H, U(t,x)) \leq a(t) + k(t)\|x\| - \varepsilon,$$

et il existe $v_\varepsilon \in U(t,x)$ tel que

$$\|v_\varepsilon\| < d(0_H, U(t,x)) + \varepsilon \leq a(t) + k(t)\|x\| - \varepsilon + \varepsilon,$$

Donc

$$\|v_\varepsilon\| \leq a(t) + k(t)\|x\| \leq a(t) + k(t)r(t).$$

Il s'ensuit de (2.8) que

$$\|v_\varepsilon\| \leq \dot{r}(t).$$

Alors

$$v_\varepsilon \in U(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B}.$$

Par conséquent

$$U(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \neq \emptyset \quad \textit{p.p. sur } I, \quad \|x\| \leq r(t). \tag{2.15}$$

3). Soit $t \in I$, tel que (2.15) soit vérifiée. Soit $x, y \in H$, tels que $\|x\| \leq r(t)$ et $\|y\| \leq r(t)$. On a

$$\mathcal{H}(U(t,x), U(t,y)) = \max\{e(U(t,x), U(t,y)), e(U(t,y), U(t,x))\}.$$

Soit $v \in U(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B}$. D'après (b) on a

$$\begin{aligned} d(v, U(t,y)) &\leq e(U(t,x), U(t,y)) \\ &\leq \mathcal{H}(U(t,x), U(t,y)) \\ &< k(t)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(v, U(t,y)) \leq k(t)\|x-y\| - \varepsilon,$$

et il existe $w_\varepsilon \in U(t,y)$ tel que :

$$\begin{aligned} \|v - w_\varepsilon\| &< d(v, U(t,y)) + \varepsilon \\ &\leq k(t)\|x-y\|. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$v - w_\varepsilon \in k(t)\|x-y\|B.$$

Alors

$$v \in w_\varepsilon + k(t)\|x-y\|B \subset U(t,y) + k(t)\|x-y\|B.$$

Donc

$$U(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset U(t,y) + k(t)\|x-y\|B.$$

On obtient

$$U(t,x) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \subset U(t,y) + k(t)\|x-y\|B. \quad p.p\ sur\ I, \tag{2.16}$$

pour $x, y \in H$ tel que $\|x\| \leq r(t),\ \|y\| \leq r(t)$, et $x \neq y$.

Etape 2.

On construit par réccurence des suites y_{i+1}, u_i, $i = 0, 1, 2, ...$, avec les propriétés

$$y_0(t) = 0_H, \quad y_{i+1}(t) = x_{u_i}(t) - x_\Theta(t), \quad \forall t \in I, \tag{2.17}$$

où x_{u_i} est la solution unique de l'inclusion $(\mathcal{P}_u)$ avec $u = u_i \in L^2(I, H)$,

$$u_i(t) \in U(t, y_i(t)) \quad p.p\ sur\ I, \tag{2.18}$$

$$\|u_i(t)\| \leq \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I, \quad \|y_{i+1}(t)\| \leq r(t),\ \forall t \in I, \tag{2.19}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \leq k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| \quad p.p\ sur\ I,\ i \geq 1, \tag{2.20}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \leq k(t)\left(r_0\frac{[m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right) \quad p.p\ sur\ I,\ i \geq 1, \tag{2.21}$$

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \leq r_0\frac{[m(t)]^i}{i!} + \int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^i}{i!}a(s)ds. \tag{2.22}$$

De (2.13) et (2.17) on a

$$d(0_H, U(t, y_0(t))) = d(0_H, U(t, 0_H)) < a(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.23}$$

On définit la multi-application $K : I \rightrightarrows H$ par

$$K(t) = U(t, y_0(t)),\ \forall t \in I,$$

et on définit l'application $\alpha_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\alpha_0(t) = d(0_H, K(t)), \quad \forall t \in I.$$

Par a) K est mesurable, donc par la Proposition 1.7.13. α_0 est mesurable et

$$\alpha_0(t) = \frac{\alpha_0(t)+\alpha_0(t)}{2} < \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} < \frac{a(t)+a(t)}{2} = a(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.24}$$

Considérons la multi-application $H_0 : I \rightrightarrows H$ définie par, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} H_0(t) &= K(t) \cap \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\overline{B} \\ &= \Big\{x \in K(t) : \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\Big\}, \quad p.p \ sur \ I. \end{aligned}$$

Comme K est à valeurs fermées, on voit que H_0 est à valeurs fermées.

Soit $t \in I$. On a

$$\alpha_0(t) = d(0_H, U(t, y_0(t))) < \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}.$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(0_H, U(t, y_0(t))) \leq \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2} - \varepsilon,$$

et il existe $v_\varepsilon \in U(t, y_0(t))$ tel que

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\| &< d(0_H, U(t, y_0(t))) + \varepsilon \\ &\leq \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$v_\varepsilon \in U(t, y_0(t)) \cap \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\overline{B} = H_0(t).$$

D'où $H_0(t) \neq \emptyset$, c'est à dire que H_0 est à valeurs non vides. De plus, on a

$$\begin{aligned} Gr(H_0) &= \{(t,x) \in I \times H : x \in H_0(t)\} \\ &= \Big\{(t,x) \in I \times H : x \in K(t) \ et \ \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\Big\} \\ &= \{(t,x) \in I \times H : x \in K(t)\Big\} \cap \Big\{(t,x) \in I \times H : \|x\| \leq \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\Big\} \\ &= \{(t,x) \in I \times H : x \in K(t)\} \cap \Big\{(t,x) \in I \times H : x \in \overline{B}\Big(0_H, \frac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\Big)\Big\} \\ &= Gr(K) \cap Gr(\overline{B}(\Theta(\cdot), \rho(\cdot))), \end{aligned}$$

où $\rho(t) = \dfrac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}$.

Puisque K est mesurable à valeurs non vides et fermées dans H, par le Lemme 1.7.17, $Gr(K)$ est mesurable.

De plus, puisque α_0 et a sont mesurables, $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ l'est aussi, donc d'après le Théorème 1.7.20, on conclut que $Gr(\overline{B}(\Theta(\cdot), \rho(.))) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$ et donc $Gr(H_0) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(E)$, c'est à dire H_0 est mesurable (voir le Lemme 1.7.18).

Par conséquent, d'après le théorème d'existence de sélection mesurable (Théorème 1.7.19), il existe une application mesurable $u_0 : I \longrightarrow H$ telle que $u_0(t) \in H_0(t) = U(t, y_0(t)) \cap \dfrac{\alpha_0(t)+a(t)}{2}\overline{B}$, pour tout $t \in I$, et par (2.24), on a

$$\|u_0(t)\| \leq a(t) \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.25}$$

De plus,

$$u_0(t) \in U(t, y_0(t)). \tag{2.26}$$

D'après (2.8) et (2.25), on trouve que

$$\begin{aligned} \|u_0(t)\| &\leq a(t) + k(t)r(t) \\ &= \dot{r}(t), \quad p.p\ sur\ I, \end{aligned} \tag{2.27}$$

et par (2.17), il s'ensuit que $\|y_0(t)\| \leq r(t),\ \forall t \in I$.
Puisque $a \in L^2(I, \mathbb{R})$ de (2.25), on déduit que $u_0 \in L^2(I, H)$. Par le Théorème 2.2, on considère $x_{u_0} \in W^{1,2}(I, H)$, la solution unique du problème $(\mathcal{P}_{u_0})$.
D'autre part, d'après (2.5), (2.17) et (2.25), on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|y_1(t)\| &= \|x_{u_0}(t) - x_\Theta(t)\| \\ &\leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t \|u_0(s)\| ds \\ &\leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t a(s) ds \\ &\leq r_0 + \int_0^t a(s) ds \\ &\leq r_0 + \int_0^t \dot{r}(s) ds \\ &= r_0 + r(t) - r_0 \\ &= r(t). \end{aligned} \tag{2.28}$$

D'où

$$\|y_1(t)\| \leq r(t), \quad \forall t \in I. \tag{2.29}$$

De (2.27) on a $u_0(t) \in \dot{r}(t)\overline{B} \quad p.p\ sur\ I$ et en utilisant (2.26), on a

$$u_0(t) \in U(t, y_0(t)) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \quad p.p\ sur\ I.$$

Alors, d'après (2.16)

$$u_0(t) \in U(t, y_1(t)) + k(t)\|y_0(t) - y\|B \quad p.p\ sur\ I,\ \|y\| \leq r(t),\ et\ y \neq 0. \tag{2.30}$$

En particulier, pour tout $t \in I$ vérifiant $y_1(t) \neq 0$ et pour $y = y_1(t)$, on a

$$u_0(t) \in U(t, y_1(t)) + k(t)\|y_0(t) - y_1(t)\|B.$$

Donc il existe $z \in U(t, y_1(t))$ tel que

$$u_0(t) \in z + k(t)\|y_0(t) - y_1(t)\|B.$$

Cela implique que

$$u_0(t) - z \in k(t)\|y_0(t) - y_1(t)\|B.$$

D'où

$$\|u_0(t) - z\| < k(t)\|y_0(t) - y_1(t)\|.$$

Par conséquent

$$d(u_0(t), U(t, y_1(t))) < k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \quad p.p \ sur \ I, \tag{2.31}$$

où $\|y_1(t) - y_0(t)\| = \|y_1(t)\|$.

Soit $I_0 = \{t \in I : \|y_1(t)\| = 0\}$. Considérons la fonction $\alpha_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\alpha_1(t) = d(u_0(t), U(t, y_1(t))), \quad \forall t \in I.$$

Comme pour α_0, on montre facilement que α_1 est mesurable .

De plus, pour tout $t \in I \setminus I_0$, on a

$$\alpha_1(t) < \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2} < k(t)\|y_1(t)\|. \tag{2.32}$$

Considérons la multi-application $H_1 : (I \setminus I_0) \longmapsto H$ définie par

$$H_1(t) = U(t, y_1(t)) \cap \left(u_0(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2} \overline{B} \right), \quad \forall t \in I \setminus I_0$$

- Montrons que H_1 est une multi-application mesurable à valeurs non vides et fermées.

Comme U est à valeurs fermées, H_1 l'est aussi.

Soit $t \in I \setminus I_0$. On a

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= d(u_0(t), U(t, y_1(t))) \\ &= \inf_{v \in U(t, y_1(t))} \|u_0(t) - v_0\| \\ &< \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}. \end{aligned}$$

Donc, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$d(u_0(t), U(t, y_1(t))) \leq \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2} - \varepsilon,$$

et il existe $v_\varepsilon \in U(t, y_1(t))$, tel que

$$\begin{aligned} \|u_0(t) - v_\varepsilon\| &< d(u_0(t), U(t, y_1(t))) + \varepsilon \\ &\leq \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}. \end{aligned}$$

Donc, $v_\varepsilon \in u_0(t)+\dfrac{\alpha_1(t)+k(t)\|y_1(t)\|}{2}\overline{B}$, et comme $v_\varepsilon \in U(t, y_1(t))$, on déduit que $H_1(t) \neq \emptyset$, c'est à dire que H_1 est à valeurs non vides.
Il reste à montre qu'elle est mesurable. Pour cela, considérons la fonction $\gamma : t \longmapsto \|y_1(t)\|$. Puisque $y_1 \in W^{1,2}(I, H)$, γ est continue sur I et on a

$$\begin{aligned} I_0 &= \{t \in I : \ \|y_1(t)\| = 0\} \\ &= \{t \in I : \ \gamma(t) \in \{0\}\} = \gamma^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

Donc, I_0 est un fermé ce qui implique que $(I \setminus I_0)$ est un ouvert donc, $\mathcal{L}(I \setminus I_0) \subset \mathcal{L}(I)$.
Considerons la multi-application mesurable $K_1 : I \rightrightarrows H$ définie par $K_1(t) = U(t, y_1(t))$. On a

$$\begin{aligned} Gr(H_1) &= \{(t,x) \in (I \setminus I_0) \times H : x \in H_1(t)\} \\ &= \Big\{(t,x) \in (I \setminus I_0) \times H : x \in K_1(t) \text{ et } \|x - u_0(t)\| \leq \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}\Big\} \\ &= \{(t,x) \in (I \setminus I_0) \times H : x \in K_1(t)\} \cap \{(t,x) \in (I \setminus I_0) : x \in \overline{B}(u_0(t), \rho(t))\} \\ &= (I \setminus I_0) \cap Gr(K_1) \cap Gr(\overline{B}(u_0(\cdot), \rho(\cdot)), \end{aligned}$$

où $\rho = \dfrac{\alpha_1 + \gamma}{2}$.
Puisque K_1 est mesurable, par le Lemme 1.7.17, $Gr(K_1)$ est mesurable. De plus, puisque α_1 et γ sont mesurable, ρ l'est aussi et comme u_0 est mesurable, par le Théorème 1.7.20, $\overline{B}(u_0(\cdot), \rho(\cdot))$ est mesurable et par le Lemme 1.7.18, son graphe est mesurable. D'où

$$Gr(H_1) \in \mathcal{L}(I \setminus I_0) \otimes \mathcal{B}(H).$$

Donc, par le Lemme 1.7.18, H_1 est mesurable.

Alors, d'après le théorème d'existence de sélection mesurable, il existe une application mesurable $u_1^* : I \setminus I_0 \longmapsto H$ telle que

$$u_1^*(t) \in U(t, y_1(t)) \cap \left(u_0(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}\overline{B}\right), \ \forall t \in I \setminus I_0.$$

On définit l'application $u_1 : I \longrightarrow H$ par

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1^*(t) \quad si \quad t \in I \setminus I_0, \\ u_1(t) = u_0(t) \quad si \quad t \in I_0. \end{cases}$$

On va montrer que

1) $u_1(t) \in U(t, y_1(t)) \quad p.p \ sur \ I,$

2) $\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \quad p.p \ sur \ I.$

Alors,

1) Pour presque tout $t \in I \setminus I_0$, on a

$$u_1^*(t) = u_1(t) \in U(t, y_1(t)) \cap \left(u_0(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}\overline{B} \right).$$

Cela imlique que

$$u_1(t) \in U(t, y_1(t)) \quad \textit{pour presque tout } t \in I \setminus I_0,$$

et comme $u_0(t) \in U(t, y_0(t))$, on aura $u_1(t) \in U(t, y_1(t))$ *p.p sur* $t \in I_0$, D'où

$$u_1(t) \in U(t, y_1(t)) \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.33}$$

2) Pour presque tout $t \in I \setminus I_0$, on a

$$u_1(t) = u_1^*(t) \in U(t, y_1(t)) \cap \left(u_0(t) + \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}\overline{B} \right).$$

Alors

$$u_1(t) \in u_0(t) + \frac{\alpha_1(1) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}\overline{B}.$$

Cela implique que

$$u_1(t) - u_0(t) \in \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_{1(t)}\|}{2}\overline{B}.$$

Donc

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq \frac{\alpha_1(t) + k(t)\|y_1(t)\|}{2}.$$

De (2.32), on conclut que

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| < k(t)\|y_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I \setminus I_0,$$

et comme $\|y_1(t) - y_0(t)\| = \|y_1(t)\|$, on obtient

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \quad p.p \ sur \ I \setminus I_0.$$

Or, $y_1(t) = y_0(t) = 0$ si $t \in I_0$. Il résulte que

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \quad p.p \ sur \ I. \tag{2.34}$$

De (2.34), on trouve

$$\|u_1(t)\| - \|u_0(t)\| \leq k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \quad p.p \ sur \ I.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u_1(t)\| &\leq \|u_0(t)\| + k(t)\|y_1(t) - y_0(t)\| \\ &= \|u_0(t)\| + k(t)\|y_1(t)\| \quad p.p \ sur \ I. \end{aligned}$$

De (2.29) et (2.25), on obtient

$$\|u_1(t)\| \leq a(t) + k(t)r(t) \quad p.p\ sur\ I. \tag{2.35}$$

Montrons que

$$\|u_1(t)\| \leq \dot{r}(t)\ p.p, \quad \|y_2(t)\| \leq r(t),\ \forall t \in I.$$

On a l'égalité

$$\|y_2(t)\| = \|x_{u_1}(t) - x_\Theta(t)\|. \tag{2.36}$$

D'après (2.35) et (2.8), on trouve que

$$\begin{aligned}\|u_1(t)\| &\leq a(t) + k(t)r(t)\\ &= \dot{r}(t) \quad p.p\ sur\ I,\end{aligned}$$

et d'après (2.8) et (2.5) on obtient

$$\begin{aligned}\|y_2(t)\| &= \|x_{u_1}(t) - x_\Theta(t)\|\\ &\leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t \|u_1(s)\|ds\\ &\leq r_0 + \int_0^t \dot{r}(s)ds\\ &= r(t), \quad \forall t \in I.\end{aligned}$$

D'où

$$\|u_1(t)\| \leq \dot{r}(t)\ p.p\ sur\ I, \quad \|y_2(t)\| \leq r(t), \quad \forall t \in I. \tag{2.37}$$

Montrons maintenant que

1) $\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t a(s)ds\right)$;

2) $\|y_2(t) - y_1(t)\| < r_0 m(t) + \int_0^t [m(t) - m(s)]a(s)ds.$

Donc

1) De (2.34) et (2.28), on obtient

$$\begin{aligned}\|u_1(t) - u_0(t)\| &\leq k(t)\|y_1(t)\| \quad p.p\ sur\ I\\ &\leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t a(s)ds\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| \leq k(t)\left(r_0 + \int_0^t a(s)ds\right). \tag{2.38}$$

2) De (2.3), (2.17) et (2.38), on obtient

$$\begin{aligned}
\|y_2(t)-y_1(t)\| &= \|x_{u_1}(t)-x_{u_0}(t)\| \\
&\leq \int_0^t \|u_1(\tau)-u_2(t)\| d\tau \\
&\leq \int_0^t k(\tau)\left(r_0+\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau \\
&= r_0\int_0^t k(\tau)d\tau+\int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau \\
&\leq r_0 m(t)+\int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau, \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

avec, $m(t)=\int_0^t k(\tau)d\tau$, et comme

$$\begin{aligned}
\triangle_t &= \{(s,\tau)\in[0,1]\times[0,1],\ 0\leq\tau\leq t \ \ et \ \ 0\leq s\leq\tau\} \\
&= \{(s,\tau)\in[0,1]\times[0,1],\ s\leq\tau\leq t \ \ et \ \ 0\leq s\leq t\},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t k(\tau)\left(\int_0^\tau a(s)ds\right)d\tau &= \iint_{\triangle_t} k(\tau)a(s)dsd\tau \\
&= \int_0^t \left(\int_s^t k(\tau)a(s)d\tau\right)ds \\
&= \int_0^t \left(a(s)\int_s^t k(\tau)d\tau\right)ds \\
&= \int_0^t a(s)\left(\int_0^t k(\tau)d\tau-\int_0^s k(\tau)d\tau\right)ds \\
&= \int_0^t (m(t)-m(s))\,a(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors, il résulte de (2.39) que

$$\|y_2(t)-y_1(t)\|\leq r_0 m(t)+\int_0^t (m(t)-m(s))a(s)ds. \qquad (2.40)$$

D'après (2.33), (2.34), (2.37), (2.38) et (2.39), on conclut que les relations (2.18)-(2.22) sont vérifiées pour $i=1$.

Supposons maintenant que $y_i(\cdot)=x_{u_{i-1}}(\cdot)-x_\Theta(\cdot),\ u_{i-1}(\cdot)$ vérifient les relations (2.18)-(2.22). Alors

$$u_{i-1}(t)\in U(t,y_{i-1}(t)) \ p.p \ sur \ I,$$

$$\|u_{i-1}(t)\|\leq\dot r(t) \ p.p \ sur \ I, \quad \|y_i(t)\|\leq r(t) \quad \|y_{i-1}(t)\|\leq r(t).$$

De ces inegalités et de (2.16), il résult que

$$u_{i-1}(t)\in U(t,y_{i-1}(t))\cap\dot r(t)\overline{B}\subset U(t,y_i(t))+k(t)\|y_i(t)-y_{i-1}(t)\|B.$$

Cette inclusion implique que

$$d(u_{i-1}(t), U(t, y_i(t))) < k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|.$$

Comme ci-dessus, on pose $I_i = \{t \in I : \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| = 0\}$. La fonction $t \longmapsto \alpha_i(t) = d(u_{i-1}(t), U(t, y_i(t)))$ est mesurable sur I, et

$$\begin{aligned}\alpha_i(t) &< \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|}{2} \\ &< k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|, \quad \forall t \in I \setminus I_i.\end{aligned}$$

La multi-application

$$H_i : t \longmapsto U(t, y_i(t)) \cap \left(u_{i-1}(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right), \quad \forall t \in I \setminus I_i,$$

est mesurable à valeurs fermées et non vides. Alors d'après le théorème d'existene de sélection mesurable (voir Théorème 1.7.19), il existe une application mesurable $u_i^* : I \setminus I_i \longrightarrow H$ tel que

$$u_i^*(t) \in U(t, y_i(t)) \cap \left(u_{i-1}(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right), \quad \forall t \in I \setminus I_i.$$

On définit l'application $u_i : I \longrightarrow H$ par $u_i(t) = u_i^*(t)$ pour $t \in I \setminus I_0$ et $u_i(t) = u_{i-1}(t)$ si $t \in I_i$. Alors pour $t \in I \setminus I_i$

$$u_i(t) = u_i^*(t) \in U(t, y_i(t)) \cap \left(u_{i-1}(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

Cela implique que

$$u_i(t) \in U(t, y_i(t)) \quad et \quad u_i(t) \in \left(u_{i-1}(t) + \frac{\alpha_i(t) + k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|}{2}\overline{B}\right).$$

D'où

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \leq k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| \ \ p.p \ sur \ I \setminus I_i.$$

De plus, pour presque tout $t \in I_i$, on a $\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| = 0$, donc $k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| = 0$ et on a

$$u_i(t) = u_{i-1}(t) \in U(t, y_{i-1}(t)) = U(t, y_i(t)) \ \ p.p \ sur \ I_i.$$

D'où

$$u_i(t) \in U(t, y_i(t)) \ \ p.p \ sur \ I, \tag{2.41}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \leq k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| \ \ p.p \ sur \ I. \tag{2.42}$$

Montrons que

- $\|u_i(t)\| \leq k(t)\left(r_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t)]^j}{j} + \sum_{j=0}^{i-1}\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^j}{j!}a(s)ds\right) + a(t),$
- $\|u_i(t)\| \leq a(t) + k(t)r(t) = \dot{r}(t),$
- $\|y_{i+1}(t)\| = \|x_{u_i}(t) - x_\Theta(t)\| \leq r(t),$
- $\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \leq k(t)\left(r_0\frac{[m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right)$ *p.p sur* I .

D'après (2.42) on trouve que

$$\begin{aligned}\|u_i(t)\| - \|u_0(t)\| &\leq \|u_i(t) - u_0(t)\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{i}\|u_j(t) - u_{j-1}(t)\| \\ &\leq k(t)\sum_{j=1}^{i}\|y_j(t) - y_{j-1}(t)\| \ p.p \ sur \ I.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|u_i(t)\| \leq k(t)\sum_{j=1}^{i}\|y_j(t) - y_{j-1}(t)\| + \|u_0(t)\| \ p.p \ sur \ I.$$

En utilisant (2.25) et (2.22) on obtient

$$\begin{aligned}\|u_i(t)\| &\leq k(t)\left(r_0\sum_{j=1}^{i}\frac{[m(t)]^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{i}\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{j-1}}{(j-1)!}a(s)ds\right) + a(t) \ \ p.p \ sur \ I. \\ &= k(t)\left(r_0\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t)]^{j}}{j!} + \sum_{j=0}^{i-1}\int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{j}}{j!}a(s)ds\right) + a(t) \ \ p.p \ sur \ I. \quad (2.43)\end{aligned}$$

Or, $1 + \frac{z}{1!} + ... + \frac{z^j}{j!} \leq e^z, \ z \geq 0$, donc, on déduit de (2.43) que

$$\|u_i(t)\| \leq k(t)\left(r_0 e^{m(t)} + \int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds\right) + a(t) \ \ p.p \ sur \ I,$$

et de (2.9)

$$\|u_i(t)\| \leq k(t)r(t) + a(t) = \dot{r}(t) \ p.p \ sur \ I. \quad (2.44)$$

D'après (2.5), (2.8), (2.17) et (2.44) on a, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|y_{i+1}(t)\| &= \|x_{u_i}(t) - x_\Theta(t)\| \\ &\leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t \|u_i(s)\|ds \\ &\leq r_0 + \int_0^t \|u_i(s)\|ds \\ &\leq r_0 + \int_0^t \dot{r}(s)ds \\ &\leq r_0 + r(t) - r_0 \\ &= r(t).\end{aligned}$$

D'où

$$\|y_{i+1}(t)\| \leq r(t). \tag{2.45}$$

D'autre part de (2.22), (2.25) et (2.42) on obtient

$$\begin{aligned}\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| &\leq k(t)\|y_i(t) - y_{i-1}(t)\| \quad p.p \ sur \ I \\ &\leq k(t)\left(r_0\frac{[m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)ds\right) \quad p.p \ sur \ I.\end{aligned} \tag{2.46}$$

De (2.17), on a

$$\begin{aligned}\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| &= \|x_{u_i}(t) - x_\Theta(t) - x_{u_{i-1}}(t) + x_\Theta(t)\| \\ &= \|x_{u_i}(t) - x_{u_{i-1}}(t)\|.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Or, de (2.3) et puisque $x_{u_i}(t) = x_{u_{i-1}}(t) = x_0$, on a

$$\|x_{u_i}(t) - x_{u_{i-1}}(t)\| \leq \int_0^t \|u_i(s) - u_{i-1}(s)\|ds, \quad \forall t \in I. \tag{2.48}$$

D'où, de (2.47), (2.48) et (2.21) on a

$$\begin{aligned}\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| &\leq \int_0^t \|u_i(s) - u_{i-1}(s)\|ds \\ &\leq \int_0^t k(s)\left(r_0\frac{[m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^s \frac{[m(s)-m(\tau)]^{i-1}}{(i-1)!}a(\tau)d\tau\right)ds \\ &= \int_0^t r_0 k(s)\frac{[m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}ds + \int_0^t \left(\int_0^s k(s)\frac{[m(s)-m(\tau)]^{i-1}}{(i-1)!}a(\tau)d\tau\right)ds \\ &= r_0\frac{[m(s)]^i}{i!} + \int_0^t \left(\int_\tau^t k(s)\frac{[m(s)-m(\tau)]^{i-1}}{(i-1)!}a(\tau)ds\right)d\tau \\ &= r_0\frac{[m(s)]^i}{i!} + \int_0^t a(\tau)\left(\int_\tau^t k(s)\frac{[m(s)-m(\tau)]^{i-1}}{(i-1)!}ds\right)d\tau \\ &= r_0\frac{[m(s)]^i}{i!} + \int_0^t a(\tau)\frac{[m(s)-m(\tau)]^i}{i!}d\tau.\end{aligned}$$

D'où

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \leq r_0\frac{[m(s)]^i}{i!} + \int_0^t a(\tau)\frac{[m(s)-m(\tau)]^i}{i!}d\tau. \tag{2.49}$$

D'après (2.41)-(2.49), les relations (2.18)-(2.22) sont également vérifiées pour $y_{i+1}(t)$, $u_i(t)$. Par conséquent, les suites $(y_i)_{i\geq 0}$ et $(u_i)_{i\geq 0}$ sont construites.

Etape 3. La convergences de suites (u_i) et (y_i).

De (2.46), on a pour presque tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\| &\leq k(t)r_0\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[m(t)]^i}{i!} + k(t)\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty}\frac{[m(t)-m(s)]^i}{i!}a(s)ds \\ &= k(t)r_0 e^{m(t)} + k(t)\int_0^t e^{m(t)-m(s)}a(s)ds \\ &= k(t)r(t).\end{aligned}$$

Donc, la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|$ est convergente p.p sur I.

- Montrons que cela implique que la suite $(u_i(t))_{i\geq 0}$ est de Cauchy p.p sur I.

Soit $t \in I$ tel que la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|$ est converge. Soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists\, i_0 \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N},\ i \geq i_0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\| < \varepsilon.$$

Soit $m,\ i \in \mathbb{N}$ tels que $m > i \geq i_0$.
On a

$$\|u_m(t) - u_i(t)\| \leq \sum_{j=i}^{m-1} \|u_{j+1}(t) - u_j(t)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|u_{j+1}(t) - u_j(t)\| < \varepsilon,$$

donc $(u_i(t))_{i\geq 1}$ est une suite de Cauchy. Par conséquent, la suite $(u_i(.))_{i\geq 1}$ converge p.p vers une application mesurable u.

De (2.24) nous avons

$$\|u(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad \forall t \in I, \tag{2.50}$$

et par conséquent, par (2.19) et en utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $(u_i(\cdot))_{i\geq 1}$ converge vers u dans l'espace $L^2(I, H)$.
Soit x_u la solution unique du problème $(\mathcal{P}_u)$, alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}
\|x_{u_i}(\cdot) - x_u(\cdot)\|_c &= \max_{t\in I} \|x_{u_i}(t) - x_u(t)\| \\
&\leq \max_{t\in I} \int_0^t \|u_i(\tau) - u(\tau)\| d\tau \\
&= \int_0^1 \|u_i(\tau) - u(\tau)\| d\tau \leq \|u_i - u\|_{L^2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'où $(x_{u_i})_{i\geq 0}$ converge vers x_u dans $C(I, H)$.
Par conséquent, la suite $(y_{i+1}(\cdot))_{i\geq 1} = (x_{u_i}(\cdot) - x_\Theta(\cdot))_{i\geq 1}$ converge vers $y(\cdot) = x_u(\cdot) - x_\Theta(\cdot)$ dans l'espace $C(I, H)$.
D'après (2.5) et (2.50) on a

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \|x_u(t) - x_\Theta(t)\| \\
&\leq \|x_0 - x_0^\Theta\| + \int_0^t \|u(\tau)\| d\tau \\
&\leq r_0 + \int_0^t \dot{r}(\tau) d\tau \\
&= r(t).
\end{aligned}$$

D'où

$$\|y(t)\| = \|x_u(t) - x_\Theta(t)\| \leq r(t). \tag{2.51}$$

Etape 4. Montrons que (x_u, u) est solution du problème $(\mathcal{P}_F)$.
En utilisant (2.16), (2.18), (2.19) et (2.51), et pour $x = y_i(t)$ et $y = y(t)$, on a

$$\begin{aligned} u_i(t) &\in U(t, y_i(t)) \cap \dot{r}(t)\overline{B} \\ &\subset U(t, y(t)) + k(t)\|y_i(t) - y(t)\|B \;\; p.p \; sur \; I. \end{aligned}$$

Donc,

$$d(u_i(t), U(t, y(t))) \leq k(t)\|y_i(t) - y(t)\| \;\; p.p \; sur \; I.$$

Par passage à la limite quand $i \longrightarrow \infty$, on obtient

$$d(u(t), U(t, y(t))) = 0 \;\; p.p \; sur \; I.$$

Alors

$$u(t) \in U(t, y(t)),$$

et de (2.11) on trouve

$$u(t) \in U(t, y(t)) = U(t, x_u(t) - x_\Theta(t)) = F(t, x_u(t)) \;\; p.p \; sur \; I. \tag{2.52}$$

De (2.50)-(2.52) il s'ensuit que $x_u(.)$ est une solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_F)$ et les inégalités (2.10) sont vérifiées. ■

Corollaire 2.8.
Le Théorème 2.7 reste vraie si on remplace l'hypothèse $H(F)(3)$ par l'hypothèse suivante.
$(\mathcal{H}')$. Il existe une fonction strictement positive $c \in L^2(I, \mathbb{R})$, telle que

$$d(0_H, F(t, 0_H)) < c(t), \quad \forall t \in I. \tag{2.53}$$

Preuve.
Soit $t \in I$. On a

$$d(0_H, F(t, x_\Theta(t))) = \inf_{z \in F(t, x_\Theta(t))} \|z\|.$$

Soit $y \in F(t, 0_H)$, on obtient

$$\begin{aligned}
d(0_H, F(t, x_\Theta(t))) &= \inf_{z \in F(t, x_\Theta(t))} \|z\| \\
&\leq \inf_{z \in F(t, x_\Theta(t))} \big(\|z - y\| + \|y\|\big) \\
&\leq \big(\inf_{z \in F(t, x_\Theta(t))} \|z - y\|\big) + \|y\| \\
&= d(y, F(t, x_\Theta(t))) + \|y\| \\
&\leq e(F(t, 0_H), F(t, x_\Theta(t))) + \|y\| \\
&\leq \mathcal{H}(U(t, 0_H), U(t, x_\Theta(t))) + \|y\|.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
d(0_H, F(t, x_\Theta(t))) &\leq \mathcal{H}(U(t, 0_H), U(t, x_\Theta(t))) + d(0_H, F(t, 0_H)) \\
&< k(t)\|x_\Theta(t)\| + c(t).
\end{aligned}$$

D'où, l'hypothèse $H(F)(3)$ est vérifiée avec la fonction $t \longmapsto a(t) = k(t)\|x_0(t)\| + c(t)$. Par conséquent, les hypothèses du Théorème 2.7 sont satisfaites. ■

CHAPITRE 3

RELAXATION

Dans ce chapitre, nous établissons une relation entre $R_F(x_0)$, l'ensembles de solutions du problème $(\mathcal{P}_F)$ et $R_{\overline{co}(F)}(x_0)$, l'ensemble des solutions du problème suivant

$$(\mathcal{P}_{\overline{co}(F)}) \begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + \overline{co}(F(t,x(t))), \text{ p. p. sur } I, \\ x(t) \in dom(\partial\varphi^t), \text{ p. p. sur } I, \\ x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0). \end{cases}$$

Soient $g \in W^{1,2}(I,H)$ et $\varphi^t \in \Gamma_0(H),\ \forall t \in I$. Considérons la fonction $\varphi_*^t : H \longrightarrow H$ définie par

$$\varphi_*^t(z) = \varphi^t(z - g(t)), \quad \forall t \in I,\ \forall z \in H. \tag{3.1}$$

Lemme 3.1.
Soient les applications $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$ vérifiant l'hypothèse $H(\varphi)$. Alors les φ_*^t, $\forall t \in I$ définies par l'égalité (3.1) *ont les propriétés suivantes.*

1) Pour tout $t \in I$, on a

$$\varphi_*^t \in \Gamma_0(H), \quad dom(\varphi_*^t) = dom(\varphi^t) + g(t).$$

2) Pour tout $r \geq 0$, il existe des fonctions $a_r^* \in W^{1,2}(I,\mathbb{R})$, $b_r^* \in W^{1,1}(I,\mathbb{R})$ telles que pour tous $s,t \in I$, $s \leq t$ et tout $z \in dom(\varphi_*^s)$, $\|z\| \leq r$ il existe $v \in dom(\varphi_*^t)$

vérifiant les ingalités

$$\|z - v\| \le |a_r^*(t) - a_r^*(s)| \left(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1 \right), \tag{3.2}$$

$$\varphi_*^t(v) - \varphi_*^s(z) \le |b_r^*(t) - b_r^*(s)| \left(|\varphi_*^s(z)| + 1 \right). \tag{3.3}$$

3) $w \in \partial\varphi_*^t(z)$ si seulement si $w \in \partial\varphi^t(x)$, avec $x = z - g(t)$.

Preuve.

1) Soit $t \in I$.

Montrons que $\varphi_*^t \in \Gamma_0(H)$, pour cela on montre que φ_*^t est propre, convexe et s.c.i.

- φ_*^t est propre.

  On a que φ^t est propre alors, il existe $x \in H$, tel que, $\varphi^t(x) \neq +\infty$.

  On pose
  $$z = x + g(t) \in H,$$
  alors
  $$x = z - g(t).$$
  Donc
  $$\varphi^t(z - g(t)) \neq +\infty,$$
  d'où
  $$\varphi_*^t(z) \neq +\infty.$$
  Ceci montre que φ_*^t est propre.

- φ_*^t est convexe.

  Soit $x, y \in H$ et $\lambda \in [0,1]$. Puisque φ^t est convexe, on a
  $$\begin{aligned} \varphi_*^t(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \varphi^t(\lambda(x - g(t)) + (1-\lambda)(y - g(t))) \\ &\le \lambda\varphi^t(x - g(t)) + (1-\lambda)\varphi^t(y - g(t)) \\ &= \lambda\varphi_*^t(x) + (1-\lambda)\varphi_*^t(y). \end{aligned}$$
  D'où φ_*^t est convexe.

- φ_*^t est s.c.i.

  On a que φ^t est s.c.i alors par le Théorème 1.4.3 $epi(\varphi^t)$ est fermé.

  Soit $((x_n, \alpha_n))_n \subset epi(\varphi_*^t)$ une suite telle que $(x_n, \alpha_n) \longrightarrow (x_0, \alpha_0)$ dans $H \times \mathbb{R}$.

  On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned} (x_n, \alpha_n) \in epi(\varphi_*^t) &\Longleftrightarrow \varphi_*^t(x_n) \le \alpha_n \\ &\Longleftrightarrow \varphi^t(x_n - g(t)) \le \alpha_n. \end{aligned}$$

D'où
$$((x_n - g(t), \alpha_n))_n \subset epi(\varphi^t).$$
Or, $x_n - g(t) \longrightarrow x_0 - g(t)$, et comme $epi(\varphi^t)$ est fermé, on obtient
$$(x_0 - g(t), \alpha_0) \in epi(\varphi^t),$$
i.e
$$\varphi^t(x_0 - g(t)) \leq \alpha_0.$$
Or,
$$\varphi^t(x_0 - g(t)) = \varphi^t_*(x_0),$$
donc
$$\varphi^t_*(x_0) \leq \alpha_0,$$
i.e,
$$(x_0, \alpha_0) \in epi(\varphi^t_*).$$
D'où $epi(\varphi^t_*)$ est fermé.

Par conséquent, φ^t_* est s.c.i.

Montrons que $dom(\varphi^t_*) = dom(\varphi^t) + g(t)$.

On a
$$\begin{aligned} x \in dom(\varphi^t_*) &\Longleftrightarrow \varphi^t_*(x) < +\infty \\ &\Longleftrightarrow \varphi^t(x - g(t)) < +\infty \\ &\Longleftrightarrow x - g(t) \in dom(\varphi^t) \\ &\Longleftrightarrow x \in dom(\varphi^t) + g(t). \end{aligned}$$
D'où $dom(\varphi^t_*) = dom(\varphi^t) + g(t)$.

2) Puisque g est continue sur le compact I, le maximum est atteint.

Soit $m = \max\limits_{t \in I} \|g(t)\|$, $r \geq 0$, $s \leq t$ et $z \in dom(\varphi^s_*)$ tel que $\|z\| \leq r \; et \; x = z - g(s)$.
Alors, d'après (3.2), $x \in dom(\varphi^s)$ et
$$\|x\| = \|z - g(s)\| \leq \|z\| + \|g(t)\| \leq r + m.$$
Ainsi, de (2.1), (2.2), on déduit qu'il existe un élément $y \in dom(\varphi^t)$ tel que
$$\|x - y\| \leq |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)| \left(|\varphi^s(x)|^{\frac{1}{2}} + 1 \right), \tag{3.4}$$
$$\varphi^t(y) - \varphi^t(x) \leq |b_{r+m}(t) - b_{r+m}(s)| \Big(|\varphi^s(x)| + 1 \Big). \tag{3.5}$$

On pose $v = y + g(t)$. De (3.2) il s'ensuit que $v \in dom(\varphi_*^t)$.

On a

$$\begin{aligned} \|g(t) - g(s)\| &\leq \Big(|\varphi^s(z - g(s))|^{\frac{1}{2}} + 1\Big)\|g(t) - g(s)\| \\ &= \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big)\|g(t) - g(s)\|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donc, de (3.5) et (3.6) et en utilisant le Corollaire 1.3.4 ainsi que la Proposition 1.9.3, on obtient

$$\begin{aligned} \|z - v\| &= \|x + g(s) - y - g(t)\| \\ &\leq \|g(t) - g(s)\| + \|x - y\| \\ &\leq \|g(t) - g(s)\| + |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)| \Big(|\varphi^s(x)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &\leq \Big(1 + |\varphi_*^s(z)|\Big)^{\frac{1}{2}} \|g(t) - g(s)\| + |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)| \Big(|\varphi^s(x)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &= \Big(1 + |\varphi_*^s(z)|\Big)^{\frac{1}{2}} \|g(t) - g(s)\| + |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)| \Big(|\varphi^s(z - g(s))|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &= \Big(|\varphi_*^s(z)| + 1\Big)^{\frac{1}{2}} \|g(t) - g(s)\| + |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)| \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &= \Big[\|g(t) - g(s)\| + |a_{r+m}(t) - a_{r+m}(s)|\Big] \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &= \left(\left\|\int_s^t \dot{g}(\tau)d\tau\right\| + \left|\int_s^t \dot{a}_{r+m}(\tau)d\tau\right|\right) \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &\leq \left(\int_s^t \|\dot{g}(\tau)\|d\tau + \int_s^t |\dot{a}_{r+m}(\tau)|d\tau\right) \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big) \\ &\leq \Bigg(\left(\int_0^t \|\dot{g}(\tau)\|d\tau - \int_0^s \|\dot{g}(\tau)\|d\tau\right) \\ &\qquad + \left(\int_0^t |\dot{a}_{r+m}(\tau)|d\tau - \int_0^s |\dot{a}_{r+m}(\tau)|d\tau\right)\Bigg) \Big(|\varphi_*^s(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big). \end{aligned}$$

On pose

$$a_r^*(t) = \int\limits_0^t \Big(|\dot{a}_{r+m}(\tau)| + \|\dot{g}(\tau)\|\Big)d\tau, \quad \forall t \in I.$$

D'où

$$\|z - v\| \leq |a_r^*(t) - a_r^*(s)| \Big(|\varphi_*^{(s)}(z)|^{\frac{1}{2}} + 1\Big).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \varphi_*^t(v) - \varphi_*^t(z) &= \varphi^t(v - g(t)) - \varphi^s(z - g(s)) \\ &\leq |b_{r+m}(t) - b_{r+m}(s)|\Big(|\varphi^s(z - g(s))| + 1\Big) \\ &\leq |b_{r+m}(t) - b_{r+m}(s)|\Big(|\varphi_*^s(z)| + 1\Big). \end{aligned}$$

On pose
$$b_r^*(t) = b_{r+m}(t), \quad \forall t \in I.$$
D'où
$$\varphi_*^t(v) - \varphi_*^s(z) \leq |b_r^*(t) - b_r^*(s)|(1 + |\varphi_*^{(s)}(z)|).$$

3) .

$\Longrightarrow$) Soit $w \in \partial\varphi_*^t(z)$, et soit $y \in dom(\varphi^t)$, alors, par 1), $y + g(t) \in dom(\varphi_*^t)$, donc
$$\begin{aligned} & \langle w, y + g(t) - z\rangle \leq \varphi_*^t(y + g(t)) - \varphi_*^t(z) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle w, y - (z - g(t))\rangle \leq \varphi_*^t(y + g(t)) - \varphi_*^t(z). \end{aligned}$$
On pose $x = z - g(t)$. On trouve
$$\begin{aligned} \langle w, y - x\rangle &\leq \varphi_*^t(y + g(t)) - \varphi_*^t(x + g(t)) \\ &= \varphi^t(y) - \varphi^t(x). \end{aligned}$$
D'où $w \in \partial\varphi^t(x)$.

$\Longleftarrow$) Soit $w \in \partial\varphi^t(x)$ avec $x = z - g(t)$ et soit $y \in dom(\varphi_*^t)$. Alors $y - g(t) \in dom(\varphi^t)$, donc
$$\langle w, (y - g(t)) - x\rangle \leq \varphi^t(y - g(t)) - \varphi^t(x).$$
Or, $x = z - g(t)$, d'où
$$\langle w, y - z\rangle \leq \varphi_*^t(y) - \varphi_*^t(z).$$
Par conséquent, $w \in \partial\varphi_*^t(z)$.

■

Si l'hypothèse $H(\varphi)$ est vérifiée, alors pour tout $u_* \in L^2(I, H)$, il existe une solution $x_{u_*} \in W^{1,2}(I, H)$ avec $x_{u_*}(0) = x_0^* \in dom(\varphi^0)$, du problème $(\mathcal{P}_{u_*})$ avec x_0^* au lieu de x_0. Soit le problème
$$(\mathcal{P}_{u_*}) \begin{cases} -\dot{u}_*(t) \in \partial\varphi^t(x_{u_*})(t) + u_*(t), \quad \text{p. p. sur } I, \\ x_{u_*(t)} \in dom(\partial\varphi^t), \quad \text{p. p. sur } I, \\ x_{u_*}(0) = x_0^* \in dom(\varphi^0). \end{cases}$$
Posons
$$g(t) = \int_0^t u_*(s)ds, \quad \forall t \in I, \tag{3.7}$$
$$\varphi_*^t(z) = \varphi^t(z - g(t)), \ \forall t \in I, \ \forall z \in H. \tag{3.8}$$

Alors, d'après le Lemme 3.1, $\varphi_*^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$, et on a

$$dom(\varphi_*^t) = dom(\varphi^t) + g(t), \quad dom(\varphi_*^0) = dom(\varphi^0). \tag{3.9}$$

De plus, les fonctions φ_*^t, $\forall t \in I$, satisfaitent l'hypothèse $H(\varphi)$ avec φ_*^t au bien de φ^t. Donc, si l'hypothèse $H(\varphi)$ est vraie, alors pour tout $f \in L^2(I, H)$, le problème

$$(\mathcal{P}_f^*) \begin{cases} -\dot{z}(t) \in \partial\varphi_*^t(z(t)) + f(t), & \text{p. p. sur } I, \\ z(t) \in dom\partial\varphi_*^t, & \text{p. p. sur } I, \\ z(0) = z_0 \in dom(\varphi_*^0), \end{cases}$$

admet une solution unique dans $W^{1,2}(I, H)$.
D'après (3.9) on a x_0, $x_0^* \in dom(\varphi_*^0)$, où x_0 et x_0^* sont les conditions initiales dans les problèmes $(\mathcal{P}_u)$ et $(\mathcal{P}_{u_*})$. On note par z_f, avec $z_f(0) = x_0$ et z_Θ, avec $z_\Theta(0) = x_0^*$ les solutions du problème $(\mathcal{P}_f^*)$ avec $f \in L^2(I, H)$ et $f \equiv \Theta$ respactivement.

Lemme 3.2.
Sopposons que l'hypothèse $H(\varphi)$ est vérifiée. Alors, z_f est la solution du problème $(\mathcal{P}_f^*)$ avec $z_0 = x_0 \in dom(\varphi_*^0)$ si et seulement si l'application $x : I \longrightarrow H$, définie par

$$x(t) = z_f(t) + g(t), \tag{3.10}$$

est la solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_u)$ avec $u : I \longrightarrow H$ est donnée par :

$$u(t) = f(t) + u_*(t), \quad \forall t \in I, \tag{3.11}$$

i.e.,

$$x_u = z_f - g.$$

Preuve.
$\Longrightarrow)$
Soit z_f la solution du problème $(\mathcal{P}_f^*)$. On pose $x = z_f - g$. Alors

$$\begin{cases} -\dot{z}_f(t) - f(t) \in \partial\varphi_*^t(z(t)), & \text{p.p. sur } I, \\ z_f(t) \in dom(\partial\varphi_*^t), & \text{p. p sur } I, \\ z_f(0) = x_0 \in dom(\varphi_*^0). \end{cases}$$

De (3.7), on a $g(0) = 0$, alors $x(0) = z_f(0) = x_0$ et par (3.9), on a $x_0 \in dom(\varphi^0)$ et $x(t) \in dom(\varphi^t)$, *p.p. sur* I.

De plus, Par le Lemme 3.1, 3), pour presque tout $t \in I$ et en prennant $w = -\dot{z}_f(t) - f(t)$, on trouve

$$-\dot{z}_f(t) - f(t) \in \partial\varphi^t(x(t)), \quad p.p.\ sur\ I,$$

i.e.,

$$-\dot{z}_f(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t), \quad p.p\ sur\ I.$$

Il suit que

$$-\dot{z}_f(t) + u_*(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + f(t) + u_*(t) \quad p.p\ sur\ I.$$

C'est à dire, en utilisant (3.7) est la Proposition 1.9.2, on a

$$-\dot{x}(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) + u(t) \quad p.p\ sur\ I.$$

De plus, $x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0)$ et $u(t) = f(t) + u_*(t) \quad p.p\ sur\ I.$

Par conséquent, x est solution du problème $(\mathcal{P}_u)$ avec u est définie par l'égalité (3.11).

$\Longleftarrow)$

Supposons que $x = z_f - g$ est la solution du problème $(\mathcal{P}_u)$ avec u est définie par l'égalité (3.11). Alors

$$-\dot{x}(t) - u(t) \in \partial\varphi^t(x(t)) \quad p.p\ sur\ I.$$

et $x(0) = x_0 \in dom(\varphi^0)$ et $x(t) \in dom(\partial\varphi^t),\ p.p\ sur\ I.$

Par le Lemme 3.1, 3), pour presque tout $t \in I$, en prennant $w = -\dot{x}(t) - u(t)$, on trouve

$$-\dot{x}(t) - u(t) \in \partial\varphi^t_*(z_t(t)), \quad p.p\ sur\ I.$$

Par (3.7), (3.9) et (3.11), on trouve $\dot{x}(t) + u(t) = \dot{z}_f(t) + f(t) \quad p.p\ sur\ I,\ x(0) = \dot{z}_f(0) = x_0 \in dom(\varphi^0_*)$ et $z_f(t) \in dom(\varphi^t_*),\ p.p\ sur\ I.$

D'où $\dot{z}_f$ est solution du problème $(\mathcal{P}^*_f)$ avec $z_0 = x_0$. ■

Remarque 3.3.

Du Lemme 3.2, il resulte que pour la soulution $x(u_*)$, $x(u_*)(0) = x^*_0$ *du problème* $(\mathcal{P}_{u_*})$ *nous avons*

$$x_{u_*}(t) = z_\Theta(t) - g(t), \quad \forall t \in I. \tag{3.12}$$

Lemme 3.4.

Soit $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$ *des applications vérifiant l'hypotèse* $H(\varphi)$ *et soit* $F : I \times H \rightrightarrows H$ *une multi-application à valeurs non vides et fermées vérifiant les hypothèses* $H(F)(1)$ *et* (2).

Supposons que pour la solution x_{u_*} *du problème* $(\mathcal{P}_{u_*})$*, l'inégalité suivante est vérifiée.*

$$d(u_*(t), F(t, x_{u_*}(t))) < a(t), \tag{3.13}$$

où $a \in L^2(I,\mathbb{R})$ est une fonction strictement positive.
Alors, il existe une solution (x_u, u) du problème $(\mathcal{P}_F)$ telle que,

$$\|x_u(t) - x_{u_*}(t)\| \leq r(t), \quad \forall t \in I, \tag{3.14}$$

$$\|u(t) - u_*(t)\| \leq \dot{r}(t), \quad p.p\ surI, \tag{3.15}$$

où r est la solution de l'équation différentielle (2.8) avec $r(0) = \|x_0 - x_0^*\|$.

Preuve.
On commence par définir la multi-application $U : I \times H \rightrightarrows H$ par :

$$U(t,z) = -u_*(t) + F(t, z - g(t)). \tag{3.16}$$

- Montrons que U vérifie l'hypothèse $H(F)$ avec U à la place de F. Comme F est à valeurs non vides et fermées, U l'est aussi.
  En effet, puisque F est à valeurs non vides, pour tout $(t,z) \in I \times H$, $F(t, z-g(t)) \neq \emptyset$ donc, il existe $v_{(t,z)} \in F(t, z - g(t))$. D'où,
  $$v_{(t,z)} - u_*(t) \in U(t,z),$$
  c'est à dire,
  $$U(t,z) \neq \emptyset.$$
  Donc U est à valeurs non vides. D'autre part, soit $(t,z) \in I \times H$ et soit la suite $(x_n) \subset U(t,z)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans H.
  Posons $v_n = x_n + u_*(t)$. $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors $(v_n) \subset F(t, z - g(t))$. Or, F est à valeurs fermées, de plus
  $$v_n \longrightarrow v = x + u_*(t).$$
  Donc
  $$v \in F(t, z - g(t)) \ i.e.,\ x \in U(t,z).$$
  D'où U est à valeurs fermées.

1) Soit $z \in H$. Montrons que $t \longmapsto U(t,z)$ est mesurable.
   Soit $g_* : I \longrightarrow H$ une application définie par $g_*(t) = z - g(t)$. Puisque g est absolument continue, g_* est continue donc mesurable.
   Par $H(F)(1),(2)$ et la Proposition 1.7.21 ainsi que le Théorème 1.7.16, la multi-application $K : t \longmapsto F(t, g_*(t))$ est mesurable, et comme $u_* \in L^2(I,H)$, on déduit

que la multi-application $U_z : t \longmapsto U(t,z)$ est mesurable.

En effet, soit W un ouvert de H, alors

$$\begin{aligned} U_z^{-1}(W) &= \{t \in I : U_z(t) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I : (K(t) - u_*(t)) \cap W \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in I : \exists v \in K(t) \;\; et \;\; -u_*(t) + v \in W\}. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \gamma_v : I &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto -u_*(t) + v. \end{aligned}$$

Il est claire qu'elle est mesurable (comme somme de deux applications mesurables). Soit $V = \{(x, -u_*(t)) : x \in W + u_*(t)\} \subset H \times H$. Comme W est ouvert, V l'est aussi.

Pour montrer cela, soit la suite $(x_n, -u_*(t)) \subset H \times H \setminus V$ telle que $(x_n, -u_*(t)) \longrightarrow (x, -u_*(t))$, alors $x_n \longrightarrow x$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, u_*(t)) \notin V$, donc $(x_n - u_*(t)) \subset H \setminus W$, et puisque $H \setminus W$ est fermé et $x_n - u_*(t) \longrightarrow x - u_*(t)$, on déduit que $x - u_*(t) \notin W$,i .e., $x \notin W + u_*(t)$. D'où $(x, -u_*(t)) \in H \times H \setminus V$. Ce qui montre que $H \times H \setminus V$ est fermé, d'où V est ouvert, et on a

$$U_z^{-1}(W) = \{t \in I : \exists\, v \in K(t) \; et \; (v, -u_*(t)) \in V\}.$$

Puisque $V \subset H \times H$ et H est séparable, on a, $V = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (V_1^n \times V_2^n)$ avec V_1^n, V_2^n sont des ouverts de H. Donc,

$$\begin{aligned} U_z^{-1}(W) &= \Big\{t \in I : \exists\, v \in K(t) \; et \; (v, u_*(t)) \in \bigcup_n V_1^n \times V_2^n\Big\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{t \in I : \exists\, v \in K(t) \; et \; (v, -u_*(t)) \in V_1^n \times V_2^n\Big\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{t \in I : K(t) \cap V_1^n \neq \emptyset\} \cap \{t \in I : -u_*(t) \in V_2^n\Big\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(K^{-1}(V_1^n) \cap u_*^{-1}(-V_2^n)\Big) \in \mathcal{L}(I). \end{aligned}$$

D'où $t \longmapsto U(t,z)$ est mesurable.

2) Soit $z, x \in H$ tels que $z \neq x$. Pour tout $t \in I$, on a

$$\mathcal{H}(U(t,z), U(t,x)) = \max\{e(U(t,z), U(t,x)), e(U(t,x), U(t,z))\},$$

et

$$e(U(t,z),U(t,x)) = \sup_{v\in U(t,z)} d(v,U(t,x))$$
$$= \sup_{w\in F(t,z-g(t))} d(w-u_*(t),U(t,x)), \tag{3.17}$$

tel que $w = v + u_*(t)$. Or

$$d(w-u_*(t),U(t,x)) = \inf_{v_*\in U(t,x)} \|w-u_*(t)-v_*\|$$
$$= \inf_{w_*\in F(t,x-g(t))} \|w-w_*\|$$
$$= d(w,F(t,x-g(t))),$$

tel que $w_* = v_* + u_*(t)$. Alors

$$e(U(t,z),U(t,x)) = \sup_{w\in F(t,z-g(t))} d(w,F(t,x-g(t)))$$
$$= e(F(t,z-g(t)),F(t,x-g(t))).$$

De la même manière, on montre que

$$e(U(t,x),U(t,z)) = e(F(t,x-g(t)),F(t,z-g(t))).$$

Donc,

$$\mathcal{H}(U(t,z),U(t,x)) = \mathcal{H}(F(t,x-g(t)),F(t,z-g(t))),$$

et par $H(F)(2)$, il existe une fonction strictement positive $k \in L^2(I,\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$, on a

$$\mathcal{H}(U(t,z),U(t,x)) = \mathcal{H}(F(t,z-g(t)),F(t,x-g(t)))$$
$$< k(t)\|z-g(t)-x+g(t)\|$$
$$= k(t)\|z-x\|.$$

D'où

$$\mathcal{H}(U(t,z),U(t,x)) < k(t)\|z-x\| \quad \forall t\in I\ ,\forall z,x\in H,\ z\neq x.$$

3) De (3.13) et (3.16), on obtient

$$d(0_H,U(t,z_\Theta(t))) = \inf_{w\in U(t,z_\Theta(t))} \|w\|.$$

En possant $w_* = w + u_*(t)$, on a

$$\begin{aligned} d(0_H, U(t, z_\Theta(t))) &= \inf_{w \in U(t, z_\Theta(t))} \|w\| \\ &= \inf_{w_* \in F(t, z_\Theta(t) - g(t))} \|w_* - u_*(t)\| \\ &= d(u_*(t), F(t, z_\Theta(t) - g(t))) \\ &= d(u_*(t), F(t, x_{u_*}(t))) \\ &< a(t) \quad p.p \ sur \ I. \end{aligned}$$

D'où

$$d(0_H, U(t, z_\Theta(t)) < a(t) \quad p.p \ sur \ I.$$

Donc, toutes les hypothèses du Théorème 2.7 sont vérifiées pour la multi-application U. Consedérons l'inclusion différentielle suivante.

$$\begin{cases} -\dot{z}(t) \in \partial\varphi_*^t(z(t)) + U(t, z(t)), \quad \text{p.p. sur } I, \\ z(t) \in dom(\partial\varphi_*^t), \quad \text{p.p. sur } I, \\ z(0) = x_0^* \in dom(\varphi_*^0). \end{cases} \tag{3.18}$$

D'après le Théorème 2.7, l'inclusion (3.18) admet une solution (z_f, f) telle que $z_f(0) = x_0^* \in dom(\varphi_*^0)$,

$$f(t) \in U(t, z_f(t)) \quad p.p \ sur \ I, \tag{3.19}$$

et les inégalités suivantes sont vérifiées,

$$\|z_f(t) - z_\Theta(t)\| \leq r(t), \ \ \forall t \in I, \quad \|f(t)\| \leq \dot{r}(t) \ \ p.p \ sur \ I. \tag{3.20}$$

On pose $u = f + u_*$ et soit x_u la solution du problème $(\mathcal{P}_u)$.
Du Lemme 3.2, on a

$$x_u = z_f - g \quad et \quad x_{u_*} = z_\Theta - g.$$

Donc, pour tout $t \in I$,

$$\|x_u(t) - x_{u_*}(t)\| = \|z_f(t) - z_\Theta(t)\| \ et \ \|u(t) - u_*(t)\| = \|f(t)\|,$$

et par les inégalités (3.20), on obtient les inégalités (3.14) et (3.15), et par (3.16), on a

$$f(t) \in U(t, x_u(t) + g(t)) = -u_*(t) + F(t, x_u(t)).$$

Alors

$$u(t) = f(t) + u_*(t) = F(t, x_u(t)).$$

D'où

$$u(t) \in F(t, x_u(t)) \;\; p.p \; sur \; I.$$

Par conséquent, (x_u, u) est une solution du problème $(\mathcal{P}_F)$. ■

Remarque 3.5.

Le Théorème 2.7 implique que si les hypothèses $H(\varphi)$, $H(F)$(1) et (2) et l'hypothèse (H') sont vérifiées, alors l'ensemble $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0)$ n'est pas vide $(\mathcal{R}_{(F)}(x_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0))$.

Le Théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.6. ***(Théorème de relaxation)***

Soit $\varphi^t \in \Gamma_0(H)$, $\forall t \in I$ des applications vérifiant l'hypothèse $H(\varphi)$ et soit $F : I \times H \rightrightarrows H$ une multi-application à valeurs non vides et fermées vérifiant les hypothèses $H(F)$(1),(2) et (H'). Alors,

$$\overline{\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}, \tag{3.21}$$

où la barre dans (3.21) *représentent la fermeture dans les espaces $C(I, H) \times L^2_w(I, H)$.*

Preuve.

Soit $x_{u_*} \in R_{\overline{co}(F)}(x_0)$. Alors

$$u_*(t) \in \overline{co}(F(t, x_{u_*}(t))) \quad p.p \; sur I. \tag{3.22}$$

Soient Σ^2_F et $\Sigma^2_{\overline{co}(F)}$ les ensembles de séléctions mesurables des multi-applications $t \longmapsto F(t, x_{u_*}(t))$ et $t \longmapsto \overline{co}(F(t, x_{u_*}(t)))$ qui sont des éléments de l'espace $L^2(I, H)$, c'est à dire, $\Sigma_F = S^2_F(\cdot, x_{u_*}(\cdot))$ et $\Sigma^2_{\overline{co}(F)} = S^2_{\overline{co}(F(\cdot, x_{u_*}(\cdot)))}$.

Soit $t \in I$ tel que (2.53) soit vérifiée et soit $y \in F(t, 0_H)$. De (2.6) et (2.53), on obtient

$$\begin{aligned}
d(0_H, F(t, x_{u_*}(t))) &= \inf_{z \in F(t, x_{u_*}(t))} \|z\| \\
&\leq \inf_{z \in F(t, x_{u_*}(t))} \big(\|z - y\| + \|y\|\big) \\
&= \inf_{z \in F(t, x_{u_*}(t))} \big(\|z - y\|\big) + \|y\| \\
&\leq d(y, F(t, x_{u_*}(t))) + \|y\| \\
&\leq e(F(t, 0_H), F(t, x_{u_*}(t))) + \|y\| \\
&\leq \mathcal{H}(F(t, 0_H), F(t, x_{u_*}(t))) + \|y\|.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
d(0_H, F(t, x_{u_*}(t))) &\leq \mathcal{H}(F(t, 0_H), F(t, x_{u_*}(t))) + d(0_H, F(t, 0_H)) \\
&< k(t)\|x_{u_*}(t)\| + c(t),
\end{aligned}$$

Donc,

$$d(0_H, F(t, x_{u_*}(t))) < k(t)\|x_{u_*}(t)\| + c(t), \quad p.p \ sur \ I.$$

De cette inégalité et le Lemme 1.7.24 il résulte que l'ensemble Σ_F n'est pas vide. Alors par la Proposition 1.7.26 on déduit que

$$\Sigma_{\overline{co}F} = S^2_{\overline{co}(F(\cdot, x_*(\cdot)))} = \overline{co} S^2_{F(\cdot, x_*(\cdot))} = \overline{co}(\Sigma_F), \tag{3.23}$$

où l'enveloppe convexe fermée $\overline{co}$ à droite de cette égalité est prise dans l'espace $L^2(I, H)$. De (3.23) et (3.22), on voit que

$$u_* \in \overline{co}(\Sigma_F).$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $u_\varepsilon \in L^2(I, H)$ tel que

$$u_\varepsilon \in co(\Sigma_F), \tag{3.24}$$

$$\|u_* - u_\varepsilon\|_{L^2(I,H)} \leq \varepsilon. \tag{3.25}$$

Soit x_ε la solution de l'inclusion $(\mathcal{P}_u)$ avec $u = u_*$. Alors, de (2.3) on trouve que

$$\|x_{u_\varepsilon}(t) - x_{u_*}(t)\| \leq \int_0^t \|u_\varepsilon(s) - u_*(s)\| ds,$$

et en utilisant l'inégalité de Chauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\|x_{u_\varepsilon} - x_{u_*}\|_c &= \max_{t \in I} \|x_{u_\varepsilon}(t) - x_{u_*}(t)\| \\
&\leq \max_{t \in I} \int_0^t \|u_\varepsilon(s) - u_*(s)\| ds \\
&= \int_0^1 \|u_\varepsilon(s) - u_*(s)\| ds \\
&\leq \|u_\varepsilon - u_*\|_{L^2(I,H)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$x_{u_\varepsilon} \longrightarrow x_{u_*} \ \ dans \ \ C(I, H) \ \ quand \ \ \varepsilon \longrightarrow 0.$$

D'après (3.25) on a

$$\|u_* - u_\varepsilon\|_{L^2(I,H)} \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\|u_* - u_\varepsilon\|_{L^2(I,H)} \longrightarrow 0.$$

Donc

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_* \ \ dons \ \ L^2(I, H) \ \ quand \ \ \varepsilon \longrightarrow 0.$$

D'où

$$x_{u_\varepsilon} \longrightarrow x_{u_*} \;\; dans \;\; C(I,H) \;\; quand \;\; \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{3.26}$$

$$u_\varepsilon \longrightarrow u_* \;\; dans \;\; L^2(I,H) \;\; quand \;\; \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{3.27}$$

Fixons u_ε. D'après (3.24) il existe une famille finie d'éléments

$$f_i(\cdot) \in \Sigma_F, \quad i = 1, ..., N, \tag{3.28}$$

et de nombre $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ tels que

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i.$$

Soit $\Phi : I \rightrightarrows H$ la multi-application

$$\Phi(t) = \{f_i(t) : i = 1, ..., N\}, \;\; \forall t \in I.$$

Il est claire que Φ est à valeurs fermées et que

$$u_\varepsilon(t) \in co(\Phi(t)) \quad p.p \; sur \; I. \tag{3.29}$$

- Montrons que la fonction $t \to \|\Phi(t)\|$ est carré intégrable.
  Pour tout $t \in I$, on a $\|\Phi(t)\| = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \|f_i(t)\|$. On définit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \|f_i(t)\| = \|\Phi(t)\|$.
  Alors, on a

$$\begin{aligned} \|g(t)\|_2^2 &= \int_0^1 |g(t)|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \sum_{i=0}^N \|f_i(t)\|^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^N \|f_i\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

  donc, $g : t \longmapsto \|\Phi(t)\|$ est carré intégrable.

De (3.29) et par le Théorème 1.7.27 il résulte qu'il existe une suite $(v_n)_{n \geq 1} \in L^2(I,H)$, telle que

$$v_n(t) \in \phi(t) \subset F(t, x_{u_*}(t)) \quad p.p \; sur \; I, \tag{3.30}$$

et

$$v_n \longrightarrow u_\varepsilon \; dans \; L^2_w(I,H). \tag{3.31}$$

Soit x_{v_n}, $\forall n \geq 1$ la solution du problème $\mathcal{P}_u$ avec $u = v_n$.
En utilisant (3.30), (3.31), l'intégralité carré de l'application $t \to \|\phi(t)\|$ et le Lemme 1.6.18 en déduit que,

$$v_n \rightharpoonup u_\varepsilon \quad dans \quad L^2(I, H).$$

Puisque les valeurs de la multi-application Φ sont des ensembles compacts dans l'espace H,
de (3.30) et par le Théorème 2.5 on en déduit que

$$x_{v_n} \longrightarrow x_{u_\varepsilon} \quad dans\ C(I, H). \tag{3.32}$$

Or, de (3.26), (3.27), (3.31) et (3.32), il résulte qu'il existe une suite $(v_k) \subset L^2(I, H)$,

$$v_k(t) \in F(t, x_{u_*}(t)) \quad p.p\ sur\ I,\ \forall k \geq 1, \tag{3.33}$$

telle que

$$v_k \longrightarrow u_*\ dans\ L^2_w(I, H), \tag{3.34}$$

$$x_{v_k} \longrightarrow x_{u_*}\ dans\ C(I, H). \tag{3.35}$$

Possons

$$a_k(t) = k(t)\|x_{u_*}(t) - x_{v_k}(t)\| + \frac{1}{k}. \tag{3.36}$$

De (3.36) et (3.35), il résulte que $a_k \in L^2(I, \mathbb{R}_+)$, $a_k(t) > 0$, $\forall k \geq 1$, $\forall t \in I$ et

$$a_k \longrightarrow \Theta \ \ dans \ \ L^2(I, \mathbb{R}_+). \tag{3.37}$$

De (2.6), (3.33) et (3.35), on a

$$\begin{aligned} d(v_k(t), F(t, x_{v_k}(t))) &\leq e(F(t, x_{u_*}(t)), F(t, x_{v_k}(t))) \\ &\leq \mathcal{H}(F(t, x_{u_*}(t)), F(t, x_{v_k}(t))) \\ &< k(t)\|x_{u_*}(t) - x_{v_k}(t)\| \\ &< k(t)\|x_{u_*}(t) - x_{v_k}(t)\| + \frac{1}{k} \\ &= a_k(t). \end{aligned}$$

D'où

$$d(v_k(t), F(t, x_{v_k}(t))) < a_k(t), \quad p.p\ sur\ I. \tag{3.38}$$

De cette inégalité et du Lemme 3.4, on déduit qu'il existe une solution $(x_{u_k}, u_k) \in \mathcal{R}_F(x_0)$ telle que

$$\|x_{u_k}(t) - x_{v_k}(t)\| \leq r_k(t), \quad \forall t \in I,\ \forall k \geq 1, \tag{3.39}$$

$$\|u_k(t) - v_k(t)\| \leq \dot{r}_k(t), \quad p.p\ sur\ I,\ \forall k \geq 1, \tag{3.40}$$

où $r_k(t)$ est la solution de l'équation (2.8) avec $a = a_k$ et

$$r_0 = \|x_{u_k}(0) - x_{v_k}(0)\| = 0. \tag{3.41}$$

De (2.9) et (3.41), on a

$$r_k(t) = \int_0^t e^{m(t)-m(s)} a_k(s)ds.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|r_k\|_C &= \max_{t\in I} \int_0^t e^{m(t)-m(s)} a_k(s)ds \\
&\leq e^{m(1)} \int_0^1 a_k(s)ds \\
&\leq e^{m(1)} \int_0^1 a_k(s)ds \qquad (3.42)\\
&\overset{C.S}{\leq} e^{m(1)} \|a_k\|_2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

De (3.39) et (3.35), on a

$$\begin{aligned}
\|x_{u_k} - x_{u_*}\|_C &\leq \|x_{u_k} - x_{v_k}\|_C + \|x_{v_k} - x_{u_*}\|_C \\
&\leq \|r_k\|_C + \|x_{v_k} - x_{u_*}\|_C \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, de (3.40) on a

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_*\|_w &\leq \|u_k - v_k\|_w + \|v_k - u_*\|_w \\
&\leq 2|u_k - v_k\|_2 + \|v_k - u_*\|_w \\
&\leq 2\|\dot{r}_k\|_2 + \|v_k - u_*\|_w. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Or, de (2.8), on a $\dot{r}_k = a_k + k(\cdot)r_k$.
Donc, de (3.37) et (3.43) on obtient

$$\|\dot{r}_k\|_2 \leq \|a_k\|_2 + \|k\|_2 . \|r_k\|_C \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, de (3.34) et (3.44), on obtient

$$u_k \longrightarrow u_* \ \ dans \ \ L^2_w(I, H).$$

Donc, on a trouvé une suite $((x_{u_k}, u_k))_{k\geq 1} \subset \mathcal{R}_F(x_0)$ telle que, quand $k \longrightarrow \infty$

$$x_{u_k} \longrightarrow x_{u_*} \quad dans \ \ C(I, H), \tag{3.45}$$

$$u_k \longrightarrow u_* \quad dans \ \ L^2_w(I, H). \tag{3.46}$$

Puisque (x_{u_*}, u_*) est arbitraire dans $\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0)$, on déduit que

$$\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0) \subset \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}.$$

Or,

$$\mathcal{R}_F(x_0) \subset \mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0), \tag{3.47}$$

d'où la deuxième inclusion.

Par conséquent,

$$\overline{\mathcal{R}_{\overline{co}(F)}(x_0)} = \overline{\mathcal{R}_F(x_0)}, \tag{3.48}$$

où la barre dans (3.48) représentent la fermeture dans les espaces $C(I,H) \times L^2_w(I,H)$. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats d'existence de solutions pour les inclusions sous-différentielles du premièr ordre dans un espace de Hilbert et sous-différentes hypothèses sur la multi-application F.

Il est réparti en deux parties.

La première concerne, la démenstration des Théorèmes d'existence de solutions pour les inclusions sous-différentielles du premier ordre avec F une multi-application à valeurs non vides et fermées.

Dans la deuxième partie, on a démontré un Théorème de relaxation pour les inclusions différentielle du premièr ordre, où, dans les preuves.

Ces résultats sont pris du travail de Tolstonogov [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin et A. Cellina, *Differential inclusion Set-Valued maps and Viability theory.* Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[2] D. Azzam-Laouir, *Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre*, Thèse de doctorat d'état, Constantine, (2003).

[3] D. Azzam-Laouir, *Polycopié, Cours d'analyse multivoque*, Laboratoire de Mathématiques Pure et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[4] D. Azzam-Laouir, *Policopié, cours de mesure et intégration*, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées, Université de Jijel (2009).

[5] V. Barbu, *Nonlinear Semigroupes and Differential Equation in Banach Spaces*, Editura Academei Republicii Socialiste Române, Bucuresti Celea Victorei 125, (1976).

[6] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle théorie et application*, Masson, (1983).

[7] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[8] C. Castaing et M. Valadier, *Convexe analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, (1977).

[9] A. F. Filippov, *Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side*, SIAM J. Control. 5 (1967), no. 4, 609-621.

[10] L. Gasinski et N. S. Papageorgiou, *Nonlinear analysis*, Ghapman and Hall/ CRC Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore (2005).

[11] F. Hiai et H. Umegaki, *Conditional expectations and martingales of multi-application valued functions, I.* Multivariate Anal. 7, (1977), 149-182.

[12] C. J. Himmelberg, *Measurable relations*, Fund. Math. 87, (1975), 53-72.

[13] A. Ioffe, *Eistence and relaxation theorems for unbounded differential inclusions*, J. Convex Anal. 13, (2006), no. 2, 353-362.

[14] N. Kenmochi. *Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications*, Bull. Fac. Educ., Chiba Univ. 30, (1981), 1-87.

[15] P. D. Lovewen and R. T. Rockafellar, *Optimal control of unbounded differential inclusions*, SIAM J. Control Optim. 32, (1994), no. 2, 442-470.

[16] K. S. Papageorgiou et S. T. Kiristy-Yaillourou. *Handbook of Applied Analysis*, Volume 19, (2008).

[17] S. Hu et N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis*, Volume I : Theory, Kliwer, Dorfrecht, the Netherlands (1997).

[18] N. S. Papageorgiou, *On the 'bang-bang' principle for nonlinear evolution inclusions*, Dynamic Systems Appl. 2, (1993), 61-74.

[19] J. V. Tiel, *convex analysis an introductory text*, Winey, (1984).

[20] A. A. Tolstonogov, L_p*-continueous selections of fixed points of multifunctions with decomposaable values.* III. Applications, Sib. Math. J. 40, (1999), no. 6, 1380-1396.

[21] A. A. Tolstonogov, *Existence and relaxation of solutions for a subdifferential inclusion with unbounded prturbation*, J. Math. Anal. Appl. 447 (2017), 269-288.

[22] A. A. Tolstonogov, *Institute of System Dynamics and Control Theory*, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia (2000).

[23] A. A. Tolstonogov, *Mosco convergence of integral functionals and its applications*, Sb. Math. 200 (2009), no. 3, 429-454.

[24] A. A. Tolstonogov, *Variational stability of optimal control problems involving subdifferential operators*, Sb. Math. 202, (2011), no. 4, 583-619.

[25] A. A. Tolstonogov et D. A. Tolstonogov, L_p*-Continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable Values : Relaxation Theorems*. Set-Valued Anal, vol. 87 (4), (1996), 237-269.

[26] D. Wagner, *Survey of mesurable selection theorem*, Control Optimal, SIAM. J, Vol 15, (1977), 859-903.

[27] Q. Zhang et G. Li. *Nonlinear boundary value problems for second order differential inclusions*. Nonlinear Analysis, 70, (2009), 3390-3406.