République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.
Option Analyse fonctionelle.

Thème

Sur la stabilité des systèmes d'équations aux différences

Présente par :
Hamek Meriem

Devant le jury

Président	: Zerzaihi Tahar	Prof. Université de Jijel
Encadreur	: Belhannache Farida	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	: Melit Samira	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

En préambule à ce mémoire je remercier **ALLAH** qui m'aidé et m'avoir donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

*J*e souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui me apporté leur aide et qui contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire et particulièrement mon encadreur **Mme. Farida. Belhannache** D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

*J*e remercie les membres de jury **M. Zerzaihi Tahar** et **Mme. Melit Samira** qui ont accepté de jurer mon travail.

J'oublie pas mes parents, membres de ma familles pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

*M*erci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce travail à ceux qui quelque soient les termes embrassé. Je me n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère

*À l'homme précieux offre du dieu ma réussite et tout mon respect,mon cher père *Abdessalem*.*

*À la femme qui a souffert sans ma laisser souffrir, qu n'a jamais dit non âmes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse, mon adorable mère *Hafida*.*

À mes chers frères Sidali et Fares, qui n'ont pas cessé de me conseiller encourager tout ou long de mes étude.

À ma chére soeur Khadidja et Houda, son mari et le petit "Djawad".

À mon mari et sa famille qui dieu leur donne une longue et joyeux vie.

À mes amis de promotion, merci pour leurs amours et leurs encouragements.

À tous mes enseignants depuis le cycle primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

Meriem Hamek

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

$\mathbb{N}$	:	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	:	L'ensemble des nombres naturels non nuls.
$\mathbb{R}_+$	:	L'ensemble des nombres réelles positifs.
$\mathbb{R}$	:	L'ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{R}^*{}_+$	:	L'ensemble des nombres réelles strictement positifs.
$\mathbb{N}_{n_0}$	$=$	$\{n_0, n_0+1, \ldots\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{R}^s$	$=$	$\{(x_1, \ldots, x_s)\}$ où $x_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$, s $\in \mathbb{N}^* - \{1\}$.
$M_n(\mathbb{R})$	:	L'anneau des matrices de taille $n \times n$ et à coefficients dans le corps $\mathbb{R}$.
I_n	:	La matrice identité de taille n.
$\|.\|$	:	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}$.
det	:	Déterminant d'un matrice $n \times n$.
$diag$	:	Le diagonale d'un matrice $n \times n$.
$\phi(n)$	:	La matrice fondamentale.
$A(n)$	:	La matrice non autonome.
A	:	La matrice autonome.
$(a_{ij})_{1 \leq i \leq n}$	:	Les coefficients de la matrice A.

INTRODUCTION

Une équation aux différences ou récurrente est une équation qui relie plusieurs termes d'une même suite. Un ensemble des équations liant entre elles différentes suites et leurs termes est appelé système d'équations aux différences. Les équations aux différences sont utilisées dans l'analyse numérique pour la résolution des équations à l'aide des suites et elle sont aussi utilisées pour modéliser quelques phénomènes dans la biologie, l'écologie, l'électronique, ..., etc. L'étude de la stabilité des solutions des systèmes d'équations aux différences a constitué une part importante des mathématiques modernes. L'étude du comportement des solutions dans le cas des systèmes d'équations aux différences non linéaires est difficile et les méthodes utilisées dans le cas linéaire ne sont pas applicables. La méthode de linéarisation est une méthode classique pour déterminer la stabilité des systèmes d'équations aux différences non linéaires. Cette méthode constitue à étudier la stabilité en déterminant le système linéaire associé à cel étudier par ce que dans plusieurs des cas les points d'équilibre des systèmes non linéaires peuvent être ramenés aux même types de point d'équilibre des systèmes linéaires.
L'objectif de ce travail est de donner les différentes notions de la stabilité des systèmes d'équations aux différences et de présenter la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité de quelques systèmes d'équations aux différences.

Ce mémoire est composé d'une introduction, trois chapitres et d'une conclusion. Le premier chapitre est consacré à donner des notions fondamentales sur les matrices carrées. Dans le deuxième chapitre, nous commençons par étudier les équations aux différences linéaires à coefficients variables et à coefficients constants. Ensuite, nous présentons des résultats d'existence de la solution des systèmes d'équations aux différences linéaires autonomes et non autonomes et enfin nous donnons la méthode utilisée pour transformer une équation aux différences linéaires d'ordre supérieur en un système d'équations aux différences linéaires d'ordre un.
Le troisième chapitre est consacré à présenter les différentes notions de la stabilité pour les systèmes d'équations aux différences et donner quelques exemples concernant l'application de la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité des systèmes d'équations aux différences.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES MATRICES

Ce chapitre comporte trois section. Dans la première section nous allons regrouper des notions de base concernant les matrices carrées qui seront utilisées ultérieurement. Dans la deuxième nous allons présenter la forme de Jordan d'une matrice carrée. Enfin dans la dernière section nous allons donner la notion d'une norme matricielle.

1.1 Matrices diagonalisables

Définition 1.1.1. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de la matrice A et l'on note* $\mathrm{tr(A)}$*, la somme des éléments de la diagonale principale, c'est-à-dire si*

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad \textit{alors} \ \ \mathrm{tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Définition 1.1.2. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme défini par*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n). \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle valeur propre de la matrice A toute racine du polynôme P défini par* (1.1).

Remarque 1.1.4. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et P le polynôme caractéristique de A. Alors*

1) $P(0) = \det(A)$.

2) P est de degré n, donc A a au plus n valeurs propres.

3) On note par $S_p(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

Définition 1.1.5. *Soit λ une valeur propre de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle sous-espace propre associé à λ l'espace vectoriel E_λ défini par*

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n) = \{v \in \mathbb{R}^n, Av = \lambda v\}.$$

Définition 1.1.6. *Soient P le polynôme caractéristique de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une racine de P.*

- *On appelle multiplicité algébrique de λ noté $m_{alg}(\lambda)$, sa multiplicité comme racine de P.*

- *On appelle multiplicité géométrique* $m_{geo}(\lambda)$ *de* λ *la dimension de l'espace propre* E_λ *associé à* λ.

Définition 1.1.7. *Soit* $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que* A *et* B *sont semblable s'il existe une matrice inversible* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$A = QBQ^{-1}.$$

Remarque 1.1.8. *Si* A *et* B *sont semblable, alors*

$$\det(A) = \det(B).$$

Définition 1.1.9. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *alors*

1) $\lambda \in S_p(A)$ *est dite simple si* $m_{alg}(\lambda) = 1$.

2) $\lambda \in S_p(A)$ *est dite semi-simple si* $m_{alg}(\lambda) = m_{geo}(\lambda)$.

Remarque 1.1.10. *Soient* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in S_p(A)$, *alors*

$$m_{alg}(\lambda) \geq m_{geo}(\lambda).$$

Définition 1.1.11. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit que*

$$A \text{ est diagonale si } a_{ij} = 0, \forall i \neq j.$$

Proposition 1.1.12. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice diagonale tel que* $A = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. *Alors*

i) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

ii) $A^n = (\lambda_i^n)_{1 \leq i \leq n}$.

iii) Si $\lambda_i \neq 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *alors* $A^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$.

Définition 1.1.13. *On dit que la matrice* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *est régulière si* $\det(A) \neq 0$.

Définition 1.1.14. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *On dit* A *est nilpotente si 'il existe* $r \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $A^r = 0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}$.

Définition 1.1.15. *On dit que* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 1.1.16. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *dont le polynôme caractéristique est* P.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *les racines de* P *et* $m_1, \ldots, m_k$ *leurs multiplicités respectives avec*

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Alors A *diagonalisable si et seulement si pour tout* $i = 1, \ldots, k$ *le sous-espace propre* E_{λ_i} *associé à* λ_i *est de dimension* m_i, *c'est-à-dire si*

$$m_i = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(A - \lambda_i I_n)),\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Théorème 1.1.17. *Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. *Si* A *admet* n *valeurs propres toutes distinctes, alors* A *est diagonalisable.*

Remarque 1.1.18. *Si* $A = QDQ^{-1}$ *où* D *est une matrice diagonale, alors*

$$A^n = QD^nQ^{-1}.$$

Exemple 1.1.19. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -8 \\ -5 & 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda - 9)^3, \end{aligned}$$

donc

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 9, m = 3.$$

Soit E_9 le sous-espase propre associé à $\lambda = 9$, alors

$$E_9 = \ker(A - 9I_3) = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}, (A - 9I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

Donc

$$\begin{cases} 4v_1 - 5v_2 - 2v_3 = 0 \\ -2v_1 - 2v_2 - 8v_3 = 0 \\ -5v_1 + 4v_2 - 2v_3 = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} v_1 = -v_2 - 4v_3 \\ -4v_2 - 16v_3 - 5v_2 - 2v_3 = 0 \\ 5v_2 + 20v_3 + 4v_2 - v_3 = 0. \end{cases}$$

D'où

$$v_1 = -2v_3, v_2 = -2v_3, v_3 \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_9 &= \{(-2v_3, -2v_3, v_3), v_3 \in \mathbb{R}.\} \\ &= \{v_3(-2, -2, 1), v_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -2, 1)^t \rangle. \end{aligned}$$

Remarquons que $\dim_{\mathbb{R}} E_9 = 1 \neq 3$, *donc A n'est pas diagonalisable.*

Exemple 1.1.20. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - (-1-\lambda) \\ &= -(1+\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) \\ &= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2), \end{aligned}$$

alors

$$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -1 \vee \lambda_3 = 2.$$

Alors Q a trois racines distinctes, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, et

$$A = QDQ^{-1},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>cherchons Q</u>
<u>$\lambda_1 = 0$</u> :
Soit E_0 le sous-espase propre associé à $\lambda_1 = 0$, alors

$$E_0 = \ker(A - 0I_3) = \ker(A) = \left\{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}, Av = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

Donc

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ -v_3 = 0, \end{cases}$$

d'où $v_3 = 0$ et $v_2 = -v_1$,
c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_0 &= \{v = (v_1, -v_1, 0), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_1(1, -1, 0), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1, 0)^t \rangle. \end{aligned}$$

<u>$\lambda_2 = -1$</u> :
Soit E_{-1} le sous-espase propre associé à $\lambda_2 = -1$, alors

$$E_{-1} = \ker(A + I_3) = \left\{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}, (A + I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

Donc

$$\begin{cases} 2v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + 2v_2 + v_3 = 0, \end{cases}$$

d'où $v_3 = 3v_1$ et $v_2 = -2v_1$,
c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(v_1, -2v_1, 3v_1), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_1(1, -2, 3), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -2, 3)^t \rangle. \end{aligned}$$

<u>$\lambda_3 = 2$</u> :
Soit E_2 le sous-espase propre associé à $\lambda_3 = 2$, alors

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \left\{v = (v_1, v_2, v_3)^t \in \mathbb{R}, (A - 2I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3}\right\}.$$

Donc

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ -3v_3 = 0, \end{cases}$$

d'où $v_2 = v_1, v_3 = 0,$
c'est-à-dire

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(v_1, v_1, 0), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{v_1(1,1,0), v_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,0)^t \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Forme de Jordan d'une matrice

Maintenant supposons que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable alors on peut écrire

$$Q^{-1}AQ = J,$$

où

$$J = diag(J_1, J_2, \ldots, J_r), \quad 1 \leq r \leq n, \tag{1.2}$$

et

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

J_i est appelée block de Jordan .

Théorème 1.2.1. *Toute matrice* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *est semblable à une matrice de Jordan donnée par* (1.2) *où chaque* J_i *est une matrice* $(s_i \times s_i)$ *de la forme* (1.3) *et* $\sum_{i=1}^{r} s_i = n.$

Remarque 1.2.2. *Le nombre des blocs de Jordan associé à une valeurs propre* λ *est la multiplicité géométrique de* λ.

Exemple 1.2.3.

1) $A = \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}.$

Est une matrice diagonalisable.

2) $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{5} \end{pmatrix}.$

Il y a deux blocs de Jordan avec $s_1 = 2, s_2 = 1, r = 2$ *et* $m_{geo}(\lambda) = 2.$

3) $C = \begin{pmatrix} \boxed{5} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$

Il y a deux blocs de Jordan avec $s_1 = 1, s_2 = 2, r = 2$ *et* $m_{geo}(\lambda) = 2.$

4) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Il y un bloc de Jordan avec $s_1 = 3, r = 1$ et $m_{geo}(\lambda) = 1$.

Remarque 1.2.4.

1) Si $A = QJQ^{-1}$, alors $A^n = QJ^nQ^{-1}$ où

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J_k^n \end{bmatrix}.$$

2) $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $J_i = \lambda_i I_n + N_i$ avec

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$N_i \in \mathbb{M}_{s_i}(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente.

3) $J_i^n = (\lambda_i I_n + N_i)^n = \lambda_i^n I_n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-1} N_i + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-2} N_i^2 + \dots + \begin{pmatrix} n \\ s_i - 1 \end{pmatrix} \lambda_i^{n-s_i+1} N_i^{s_i-1}$.

Corollaire 1.2.5. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = 0$ si et seulement si $|\lambda| < 1$ pour toutes les valeurs propres λ de A.*

1.3 Norme matricielle

Définition 1.3.1. *Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On définit le rayon spectral de la matrice A par*

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda|, \lambda \text{ est une valeur propre complexe de } A\right\}.$$

Définition 1.3.2. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. On dit que $\|\cdot\|_E :\longrightarrow \mathbb{R}$ est une norme sur E si*

1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$ *et* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall x \in E$.

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Lemme 1.3.3. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et $\rho(A)$ le rayon spectrale de A. Alors*

1) $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est nilpotente.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\rho(zA) = |z|\rho(A)$.

3) ρ n'est pas une norme sur $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.3.4. *On définit sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 1.3.5. ***(L'inégalité de Hölder)***
Soient $r \in [1, +\infty[$ et s son conjugué c'est-à-dire $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. *Alors*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{1.4}$$

Démonstration. Tout d'abord on a la fonction exponentielle est convexe donc

$$e^{t\ln(a)+(1-t)\ln(b)} \leq te^{\ln(a)} + (1-t)e^{\ln(b)}, \forall t \in [0, 1], \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Alors

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b,$$

donc

$$\ln(a^t b^{1-t}) \leq \ln(ta + (1-t)b),$$

car la fonction $z \longmapsto \ln(z)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, alors

$$t\ln(a) + (1-t)\ln(b) \leq \ln(ta + (1-t)b). \tag{1.5}$$

Soit maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors si on prend $t = \frac{1}{r}, a = \alpha^r$ et $b = \beta^s$ on trouve

$$\frac{1}{r}\ln(\alpha^r) + (1 - \frac{1}{r})\ln(\beta^s) \leq \ln(\frac{1}{r}\alpha^r + \frac{1}{s})\beta^s).$$

D'où

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^r}{r} + \frac{\beta^s}{s}. \tag{1.6}$$

Soient $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors si on prend $\alpha = \lambda\alpha'$ et $\beta = \frac{1}{\lambda}\beta'$ dans (1.6) on obtient

$$\alpha'\beta' \leq \lambda^r \frac{\alpha'^r}{r} + \lambda^{-s}\frac{\beta'^s}{s}, \tag{1.7}$$

donc

$$|x_i y_i| = |x_i||y_i| \leq \frac{\lambda^r}{r}|x_i|^r + \frac{\lambda^{-s}}{s}|y_i|^s, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{\lambda^r}{r}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r + \frac{\lambda^{-s}}{s}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q. \tag{1.8}$$

Posons dans (1.8)

$$\lambda = \frac{\left((\sum_{i=1}^{n} |y_i|^s)^{\frac{1}{s}}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left((\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r)^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{s}}}$$

donc

$$\lambda^r \sum_{i=1}^{n} |x_i|^r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}, \tag{1.9}$$

et

$$\lambda^{-s}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^s = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{1.10}$$

En combinant $(1.8), (1.9)$ et (1.10) on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}} + \frac{1}{s}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}},$$

donc

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_r\|y\|_s.$$

où

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \text{ et } \|y\| = \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

□

Lemme 1.3.6. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_r : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\|_r \end{array}$$

où

$$\|x\|_r = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} & si\ 1 \leq r < +\infty \\ \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i| \ \ si\ r = +\infty \end{cases}$$

avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

1) $r = 1, r = +\infty$ évident.

2) Soit $r \in]1, +\infty[$ alors

(a) $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^r \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ donc $\|x\| \geqslant 0$.

(b) Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned} \|x\|_r = 0 &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}|x_i|^r = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i| = 0,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow x_i = 0,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

(c) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\| &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^r |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= |\lambda| \|x\|_r.
\end{aligned}$$

(d) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\|x + y\|_r = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

donc

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_r^r &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^r \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{r-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i|\right) |x_i + y_i|^{r-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| |x_i + y_i|^{r-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| |x_i + y_i|^{r-1}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on trouve

$$\|x + y\|_r \leq \|x\|_r \|(x + y)^{r-1}\|_s + \|y\|_r \|(x + y)^{r-1}\|_s,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Alors

$$\|x + y\|_r^r = (\|x_i\|_r + \|y_i\|_r) \|x + y\|_s^{r-1}.$$

Mais

$$\|x + y\|_s^{r-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(r-1)q}\right)^{\frac{1}{s}},$$

donc

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_s^{r-1} &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^r\right)^{\frac{r-1}{r}} \\
&= \|x + y\|_r^{r-1},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|x + y\|_r^r = (\|x_i\|_r + \|y_i\|_r) \|x + y\|_r^{r-1}. \tag{1.11}$$

Si $\|x+y\|_r = 0$, alors $\|x+y\|_r^r = 0$ et l'inégalité triangulaire est vérifiée.
Si $\|x+y\|_r \neq 0$, dans ce cas en divisant les deux membres de (1.11) par $\|x+y\|_r^{r-1}$ on trouve l'inégalité triangulaire suivante

$$\|x+y\|_r \leq \|x\|_r \|y\|_r.$$

D'où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. □

Définition 1.3.7. *On dit que l'application* $|||\cdot||| : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *est une norme matricielle si on a*

1) $|||A||| \geq 0,\ \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}$.
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, |||\lambda A||| = |\lambda| |||A|||,\ \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
3) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||,\ \forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.
4) $|||AB||| \leq |||A||| |||B|||,\ \forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.3.8. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$*. On munit* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *de la norme*

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},\ \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 1.3.9. *On peut construire une norme matricielle à l'aide d'une norme définie sur* $\mathbb{R}^n$ *et dans ce cas cette norme est appelée norme induite ou subordonnées.*

Exemple 1.3.10. *Soit* $|||A|||_r = \sup\limits_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r},\ \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrons que* $|||\cdot|||_r$ *est une norme induite.*

Preuve. 1) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} \geq 0,$$

donc

$$|||A|||_r \geq 0.$$

De plus on a

$$\begin{aligned} |||A|||_r = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} = 0 \\ &\Leftrightarrow \|Ax\|_r = 0, \\ &\Leftrightarrow A = 0_{\mathbb{M}_n(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour toute $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} |||\lambda A|||_r &= \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|\lambda Ax\|_r}{\|x\|_r} \\ &= \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|\lambda| \|Ax\|_r}{\|x\|_r} \\ &= |\lambda| \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} \\ &= |\lambda| |||A|||_r. \end{aligned}$$

3) Soit $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}|||A+B|||_r &= \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|(A+B)x\|_r}{\|x\|_r} \\ &= \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax+Bx\|_r}{\|x\|_r}.\end{aligned}$$

Mais

$$\|Ax+Bx\|_r \leq \|Ax\|_r + \|Bx\|_r,$$

car $\|\cdot\|_r$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ donc

$$|||A+B|||_r \leq \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Ax\|_r}{\|x\|_r} + \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Bx\|_r}{\|x\|_r},$$

d'où

$$|||A+B|||_r \leq |||A|||_r + |||B|||_r.$$

4) Soit $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$|||AB|||_r = \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|(AB)x\|_r}{\|x\|_r}.$$

Mais

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq |||A|||_r \|Bx\|_r,$$

donc

$$|||AB||| \leq |||A|||_r \sup_{x\neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|Bx\|_r}{\|x\|_r},$$

d'où

$$|||AB||| \leq |||A|||_r |||B|||_r.$$

■

CHAPITRE 2

CALCUL AUX DIFFÉRENCES

Dans ce chapitre nous allons commencer par donner des notions fondamentales concernant les équations aux différences à coefficients variables dans la première partie et celles à coefficients constants, ensuite nous allons présenter des résultats d'existence de la solution des systèmes d'équations aux différences linéaires. Enfin nous allons transformer une équation aux différences linéaire d'ordre supérieur en un système d'équations aux différences linéaires d'ordre un.

2.1 Équations aux différences linéaires à coefficients variables

Définition 2.1.1. *L'équation suivante*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.1}$$

S'appelle équation aux différences linéaires non homogène d'ordre k, avec $p_i(n)$, $i \in \{1, \cdots, k\}$ et $g(n)$ sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Définition 2.1.2. *L'équation homogène associée à l'équation* (2.1) *est*

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \tag{2.2}$$

Définition 2.1.3. *La suite $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est dite solution de l'équation* (2.1) *si elle satisfait cette équation.*
Observons que si nous fixons k conditions pour l'équation (2.1)

$$y(n_0) = c_0, y(n_0+1) = c_1, \ldots, y(n_0+k-1) = c_{k-1}, \tag{2.3}$$

où les $c_i, i \in \{0, \ldots, k-1\}$ sont des constantes réelles, alors on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y(n_0) = c_0, y(n_0+1) = c_1, \ldots, y(n_0+k-1) = c_{k-1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Théorème 2.1.4. *Le problème* (2.4) *admet une seule solution.*

Démonstration. 1) Tout d'abord montrons l'existence de la solution du problème (2.4) admet. De (2.4) on a pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$

$$y(n+k) = -p_1(n)y(n+k-1) - p_2(n)y(n+k-1) - \cdots - p_k(n)y(n) + g(n), \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.5)$$

donc si on pose $n = n_0$ dans (2.5) on obtient

$$\begin{aligned} y(n_0+k) &= -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - p_2(n)y(n_0+k-1) - \cdots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0) \\ &= -p_1(n_0)c_{k-1} - p_2(n_0)c_{k-2} - \cdots - p_k(n_0)c_0 + g(n_0), \end{aligned}$$

alors $y(n_0+k)$ existe.
Pour déterminer $y(n_0+1+k)$ on pose $n = n_0+1$ dans (2.5) on trouve

$$\begin{aligned} y(n_0+1+k) &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - p_2(n_0+1)y(n_0+k) - \cdots - p_k(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - \cdots - p_k(n_0+1)c_1 + g(n_0+1), \end{aligned}$$

et donc $y(n_0+k+1)$ existe.
De la même manière on peut montrer l'existence de $y(n)$ pour tout $n > n_0+k$ ce qui donne l'existence d'une solution du problème (2.4).
2) Maintenant on va montrer l'unicité de la solution, pour cela supposons qu'il existe deux solutions $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{\tilde{y}(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ du problème (2.4), alors $\{z(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ où $z(n) = (y-\tilde{y})$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ est une solution de l'équation (2.5) avec $g = 0$ et $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Comme on a vu dans la preuve de l'existence d'une solution, il est facile de montrer que $z = 0$, ce qui implique l'unicité de la solution. □

Exemple 2.1.5. *On considère l'équation aux différences linéaires d'ordre deux suivante*

$$y(n+2) + \frac{n}{n+1}y(n+1) - 3y(n) = n, \ n \in \mathbb{N}, \quad (2.6)$$

avec $y(0) = 1$ et $y(1) = -1$ et on déterminons $y(3)$ et $y(4)$. D'abord on a l'équation

$$y(n+2) = \frac{-n}{n+1}y(n+1) + 3y(n) + n, \ n \in \mathbb{N}, \quad (2.7)$$

Posons $n = 0$ dans l'équation (2.7), on aura $y(2) = 3y(0) = 3$, pour $n = 1$ on obtient

$$\begin{aligned} y(3) &= -\frac{1}{2}y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{-7}{2}. \\ y(4) &= -\frac{2}{3}y(3) + 3y(2) + 2 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.6. *Soit l'opérateur L définie par*

$$Ly(n) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (2.8)$$

Alors L est linéaire.

Démonstration. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} L(\alpha x(n) + \beta y(n)) &= \sum_{i=0}^{k} p_i(n)\alpha x(n+k-i) + \beta y(n+k-i) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{k} p_i(n)x(n+k-i) + \beta \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i) \\ &= \alpha Lx(n) + \beta Ly(n). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.7. *Soit l'opérateur L défini par* (2.8), *alors l'équation* (2.1) *sera*

$$Ly(n) = g(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.9}$$

Et l'équation (2.2) *devient*

$$Ly(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{2.10}$$

avec $p_0(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Proposition 2.1.8. *L'ensemble S des solutions de l'équation* (2.10) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.9. *Soit* $f_i(n),\ i \in \{1, \dots, r\}$ *des fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$.
On dit que $f_i(n)$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *si on a*

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \Longrightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, r\}.$$

Exemple 2.1.10. $3^n, n3^n$ *et* $n^2 3n$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{N}^*$.
En effet

$$\begin{aligned}\alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n + \alpha_3 n^2 3^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* &\Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.\end{aligned}$$

Définition 2.1.11. *Un ensemble de k solutions de l'équation* (2.10) *linéairement indépendantes est dit ensemble fondamental de solutions de cette dernière.*

Définition 2.1.12. *Soient* $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \dots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *des solutions de l'équation* (2.10) *on définit le Casoratien W(n) de ces solutions par*

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \dots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \dots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \dots & y_k(n+k-1) \end{vmatrix},\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.11}$$

Exemple 2.1.13. *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$y(n+2) + \frac{3}{2} y(n+1) + \frac{1}{2} y(n) = 0, \tag{2.12}$$

vérifions que $\{(-1)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *sont des solution de l'équation* (2.12) *et calculons leur Casoratien.*
On a

$$(-1)^{n+2} + \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^n = 0$$
$$(-\frac{1}{2})^{n+2} + \frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n = 0.$$

Par définition le Casoratien de W(n) de $\{(-1)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est*

$$\begin{aligned} W(n) &= \begin{vmatrix} (-1)^n & (-\frac{1}{2})^n \\ (-1)^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n (-\frac{1}{2})^{n+1} - (-\frac{1}{2})^n (-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.14. *Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante*

$$y(n+1) = a(n)y(n),\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{2.13}$$

avec $y(n_0) = y_0$ *et* $a(n)$ *est une fonction définie sur* $\mathbb{N}_{n_0}$*, alors la solution de l'équation* (2.13) *est définie sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *par*

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0. \tag{2.14}$$

Démonstration. Par récurrence
1) De l'équation (2.13) on a

$$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)y_0\right],$$

donc (2.14) est vraie pour $n = n_0 + 1$.
2) Maintenant supposons que (2.14) est vraie pour $n > n_0 + 1$ et on la montre pour $n + 1$.
On a

$$y(n+1) = a(n)y(n) = a(n)\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0,$$

d'où (2.14). □

Lemme 2.1.15. *Soient* $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *des solutions de l'équation* (2.10) *et soit W(n) leur Casoratien, alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i)\right) W(n_0),\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.15}$$

Démonstration. On va démontrer le lemme pour $k = 3$ et de la même manière on peut montrer le cas général. Considérons l'équation aux différences

$$y(n+3) + p_1(n)y(n+2) + p_2(n)y(n+1) + p_3(n)y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.16}$$

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_3(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ trois solutions de l'équation (2.16). Le Casoratien de ces solution est

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+3) & y_2(n+3) & y_3(n+3) \end{vmatrix},\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.17}$$

De l'équation (2.16) on a
$y_i(n+3) = -p_1(n)y_i(n+2) - p_2(n)y_i(n+1) - p_3(n)y_i(n), i = \{1, 2, 3\},\ n \in \mathbb{N}_{n_0}$ et

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_1(n)y_1(n+2) & -p_1(n)y_2(n+2) & -p_1(n)y_3(n+2) \\ -p_2(n)y_1(n+1) & -p_2(n)y_2(n+1) & -p_2(n)y_3(n+1) \\ -p_3(n)y_1(n) & -p_3(n)y_2(n) & -p_3(n)y_3(n) \end{vmatrix},\ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En utilisant les propriétés des déterminants on trouve

$$\begin{aligned}
W(n+1) &= \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_3(n)y_1(n) & -p_3(n)y_2(n) & -p_3(n)y_3(n) \end{vmatrix} \\
&= -p_3 \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \end{vmatrix} \\
&= -p_3(n)(-1)^2 \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^3 p_3(n) W(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}.
\end{aligned}$$

D'où

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n) W(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.18}$$

D'après le Lemme 2.1.14 on trouve

$$\begin{aligned}
W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 p_3(i)\right] W(n_0) \\
&= (-1)^{3(n-n_0)} \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i)\right] W(n_0).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.16. *Si l'équation* (2.10) *est a coefficients constants* $p_1, p_2, \ldots, p_k$*, alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{n-n_0} W(n_0). \tag{2.19}$$

Corollaire 2.1.17. *Supposons dans* (2.10), $p_k(n) \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$*. Alors*

$$W(n) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \Leftrightarrow W(n_0) \neq 0.$$

Théorème 2.1.18. *L'ensemble* $\left\{\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}\right\}$ *est un ensemble fondamental de solutions si et seulement si* $W(n_0) \neq 0$.

Démonstration. Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (2.10) et $\alpha_i\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$ des constantes réelles. Supposons que

$$\alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \cdots + \alpha_k y_k(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors on trouve k équations
$\alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \cdots + \alpha_k y_k(n) = 0,$
$\alpha_1 y_1(n+1) + \alpha_2 y_2(n+1) + \cdots + \alpha_k y_k(n+1) = 0,$
$\vdots$
$\alpha_1 y_1(n+k-1) + \alpha_2 y_2(n+k-1) + \cdots + \alpha_k y_k(n+k-1) = 0$, donc

$$Y(n)\xi = (0, 0, \cdots, 0)^t, \tag{2.20}$$

où

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix},$$

et

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)^t,$$

observons que

$$W(n) = \det Y(n).$$

L'équation (2.21) admet une seule solution qui est la solution triviale(nulle) i.e.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \text{ si et seulement si } \det Y(n) = W(n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En combinant cette condition avec le Corollaire 2.1.17 on obtient le résultat voulu. □

Exemple 2.1.19. *Montrer que* $\{(2^n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{(-3)^n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est un ensemble fondamental de solutions de l'équation*

$$y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.21}$$

1. *Il est facile de montrer que* $\{(2^n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{(-3)^n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *sont des solutions de l'équation* (2.21)*.*
2. *Soit W(n) le Casoratien des suites* $\{(2^n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *et* $\{(-3)^n\}_{n=n_0}^{+\infty}$*, alors*

$$W(n) = \begin{vmatrix} (2)^n & (-3)^n \\ (2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -5 \neq 0. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.1.18 $\{(2^n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{(-3)^n\}_{n=n_0}^{+\infty}$, est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.21).

Théorème 2.1.20. *Si* $p_k(n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$*, alors l'équation* (2.10) *admet un ensemble fondamental de* k *solutions.*

Démonstration. le problème

$$\begin{cases} y_i(n+k) + p_1(n) y_i(n+k-1) + \cdots + p_k(n) y_i(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y_i(n_0 + i - 1) = 1, y_i(n_0 + j) = 0, \ j \neq i - 1, \ 1 < i < k, \end{cases}$$

admet des solutions $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$. Soit $W(n)$ leur casoration. Alors

$$\begin{aligned} W(n_0) &= \begin{vmatrix} y_1(n_0) & y_2(n_0) & \ldots & y_k(n_0) \\ y_1(n_0+1) & y_2(n_0+1) & \ldots & y_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n_0+k-1) & y_2(n_0+k-1) & \ldots & y_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$W(n_0) = \det I_k = 1 \neq 0,$$

donc $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.10). □

Corollaire 2.1.21. *L'espace S des solutions de l'équation* (2.10) *est de dimension k.*

Maintenant on considère l'équation (2.9) où g est une fonction discrète tel que

$$g(n) \neq 0, \; \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

On peut facilement vérifier le lemme suivant.

Lemme 2.1.22. *La différence entre deux solutions de l'équation* (2.9) *est une solution de l'équation* (2.10).

Remarque 2.1.23. *L'ensemble des solutions de l'équation* (2.9) *n'est pas un espace vectoriel.*

Théorème 2.1.24. *Soient $\{y_i(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \; i \in \{1, \cdots, k\}$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (2.10) *et soit $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de l'équation* (2.9)*, alors toute autre solution $\left\{y_(n)\right\}_{n=n_0}^{+\infty}, \; i \in \{1, \cdots, k\}$ de l'équation* (2.9) *s'écrit sous la forme*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n) + y_i(n), c_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \ldots, k\} \quad et \;\; n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Démonstration. Soient $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.9) et $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de la même équation alors d'après le lemme précédent la suite $\{(y - y_p)(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (2.10). Donc

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n), \; n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

D'où

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} \left(c_i y_i(n) + y_p(n)\right), \; n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

□

2.2 Équations aux différences linéaires à coefficients constants

Soit l'équation aux différences suivante

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \; n \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

avec $p_i, i \in \{1, \cdots, k\}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$.
Notre objectif est de trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.22) et par conséquent sa solution générale.

Proposition 2.2.1. *Soit λ un nombre complexe non nul. Si la suite définie par*

$$y(n) = \lambda^n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

est une solution de l'équation (2.22)*, alors λ est solution de l'équation*

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0. \tag{2.23}$$

Démonstration. Soit

$$y(n) = \lambda^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Substituons les termes de cette suite dans (2.22) nous obtenons

$$\lambda^{n+k} + p_1\lambda^{n+k-1} + \ldots + p_k\lambda^n = 0, \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

donc

$$\lambda^n \left[\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k\right] = 0, \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.25}$$

i.e.

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k = 0.$$

□

Remarque 2.2.2. *L'équation*(2.23) *est appelée équation caractéristique associée à l'équation* (2.22)*.*

Théorème 2.2.3. *Soient $\lambda_i, \ i \in \{1, \ldots, k\}$ les solutions distinctes de l'équation* (2.23)*. Alors $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (2.22)*.*

Démonstration. Soient $\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{+\infty}, \ i \in \{1, \ldots, k\}$ des solutions de l'équation (2.22) et W(n) le Casoratien de ces solutions, d'après le Théorème 2.1.18 il suffit de montrer que $W(0) \neq 0$. On a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

c'est le déterminant de Vandermonde, donc

$$W(0) = \prod_{1<i<j<k} (\lambda_j - \lambda_i). \tag{2.26}$$

Puisque les $\lambda_i, \ i \in \{1, \ldots, k\}$ sont distinctes, il résulte de (2.26) que $W(0) \neq 0$, donc $\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{+\infty} \ i \in \{1, \ldots, k\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.22). □

Corollaire 2.2.4. *La solution générale de l'équation* (2.22) *est donnée par*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2.2.5. *[3] Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ des solutions de l'équation* (2.23) *de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivement tels que $r \leq k$ et $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k$. Alors*

$$\left\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \ldots, \lambda_2^n, \ldots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \ldots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\right\},$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.22)*.*

Corollaire 2.2.6. *La solution générale de l'équation* (2.22) *est*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n,\ c_{i,j} \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.2.7. *Soient l'équation suivante*

$$y(n+2) + 2y(n+1) - y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.27}$$

avec

$$y(0) = 0 \ \ et \ \ y(1) = 1.$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0,$$

les racines de cette équation sont

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \ \ et \ \ \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Donc la solution générale de l'équation (2.27) *est*

$$y(n) = c_1(-1 - \sqrt{2})^n + c_2(-1 + \sqrt{2})^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + (-1 - \sqrt{2}) + c_2(-1 + \sqrt{2}) = 1, \end{cases}$$

donc

$$c_1 = -\frac{-1}{2\sqrt{2}} \ \ et \ \ c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

d'où la solution de l'équation (2.27) *est*

$$y(n) = -\frac{-1}{2\sqrt{2}}(-1 - \sqrt{2})^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 2.2.8. *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) - p_2 y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

et supposons que l'équation caractéristique associée à (2.28) *admet deux solutions complexes*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

donc la solution générale de l'équation (2.28) *est*

$$y(n) = c_1 \left(\alpha + i\beta\right)^n + c_2 \left(\alpha - i\beta\right)^n,\ (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

On utilise les cordonnées polaires

$$\begin{cases} \alpha = r\cos(\theta), \\ \beta = r\sin(\theta), \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}y(n) &= c_1(r\cos(\theta)+ir\sin(\theta)^n + c_2(r\cos(\theta)-ir\sin(\theta))^n\\ &= c_1r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)^n + c_2r^n(\cos(n\theta)-i\sin(n\theta))^n\\ &= r^n[(c_1+c_2)\cos(n\theta)+i(c_1-c_2)\sin(n\theta)]\\ &= r^n[a_1\cos(n\theta)+a_2\sin(n\theta)],\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Où $a_1\ = c_1+c_2$ *et* $a_2\ = i(c_1-c_2)$, *soit*

$$\cos(w)=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ \sin(w)=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ w=\arctan(\frac{a_1}{a_2}).$$

Alors la solution de l'équation (2.28) *est*

$$\begin{aligned}y(n) &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}[\cos w\cos(n\theta)+\sin w\sin(n\theta)]\\ &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos(n\theta-w)\\ &= Ar^n\cos(n\theta-w),\ n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Avec $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

2.3 Systèmes d'équations aux différences linéaires

2.3.1 Systèmes autonomes

Soient $A=(a_{ij})_{i,j}\in M_s(\mathbb{R})$ une matrice constante régulière et $B:\mathbb{N}_{n_0}\longrightarrow\mathbb{R}^s$ une fonction.

Définition 2.3.1. *On appelle système d'équations aux différences linéaires autonome d'ordre un non homogène le système*

$$X(n+1)=AX(n)+B(n),\ n\in\mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.29}$$

Définition 2.3.2. *On appelle système homogène associé au système* (2.29) *le système suivant*

$$X(n+1)=AX(n),\ n\in\mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.30}$$

Proposition 2.3.3. *Soit* $X(n_0)=X_0,\ X_0\in\mathbb{R}^s$.

1) *Le système* (2.30) *admet une solution unique* $X(n)$ *vérifie* $X(n_0)=X_0$ *et cette solution est donnée par*

$$X(n)=A^{n-n_0}X_0,\ n\in\mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.31}$$

2) *Le système* (2.29) *admet une solution unique* $X(n)$ *vérifie* $X(n_0)=X_0$ *et cette solution est donnée par*

$$X(n)=A^{n-n_0}X_0+\sum_{i=n_0}^{n-1}A^{n-i-1}B(i),\ n\in\mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.32}$$

Démonstration :

(1) Par récurrence

(a) Pour $n = n_0$ (évident)

(b) Supposons que (2.31) est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$ on a

$$\begin{aligned} X(n+1) &= AX(n) \\ &= AA^{n-n_0}X(n_0) \\ &= A^{n+1-n_0}X_0, \end{aligned}$$

d'où (2.31) et vraie.

(2) Par récurrence

(a) Pour $n = n_0$ évident

(b) Supposons que (2.32) est vraie pour n et on montre qu'elle est vrai pour $n+1$ on a

$$\begin{aligned} X(n+1) &= AX(n) + B(n) \\ &= A\left(A^{n-n_0}X_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1}B(i)\right) + B(n) \\ &= AA^{n-n_0}X_0 + A\sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1}B(i) + B(n) \\ &= A^{n+1-n_0}X_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i}B(i) + B(n) \\ &= A^{n+1-n_0}X(n_0) + \sum_{i=n_0}^{n} A^{n-i}B(i), \end{aligned} \tag{2.33}$$

d'où (2.32) et vraie. ■

2.3.2 Systèmes non autonomes homogènes

Soit $A = (a_{ij}(n))_{i,j} \in M_s(\mathbb{R})$ une matrice régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$.

Définition 2.3.4. *On appelle système d'équations aux différences non autonome homogène l'équation*

$$X(n+1) = A(n)X(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.34}$$

Proposition 2.3.5. *Le système* (2.34) *admet une solution unique* $X(n)$ *vérifie* $X(n_0) = X_0$ *et cette solution est donnée par*

$$X(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) X_0, \tag{2.35}$$

où

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)A(n_0) \ si \ n > n_0 \\ I_s \quad si \ n = n_0 \end{cases}. \tag{2.36}$$

Démonstration : Par récurrence

(i) Pour $n = n_0$ (évident)

(ii) Supposons que (2.35) est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$ On a

$$\begin{aligned} X(n+1) &= A(n)X(n) \\ &= A(n)\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) X_0 \\ &= \left(\prod_{i=n_0}^{n} A(i)\right) X_0, \end{aligned}$$

d'où (2.32) et vraie. ■

Définition 2.3.6. *Soit $\Phi(n) \in M_s(\mathbb{R})$. On dit que Φ est une matrice fondamentale pour le système* (2.34) *si Φ est régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et satisfait l'équation aux différences matricielle suivante*

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.37}$$

Remarque 2.3.7. *Une matrice dont les colonnes sont des solution linéairement indépendantes du système* (2.34) *est une matrice fondamentale pour ce système.*

Théorème 2.3.8. *[3] L'équation aux différences matricielle* (2.37) *admet une solution unique Ψ qui vérifier*

$$\Psi(n_0) = I_s.$$

Lemme 2.3.9. *Soient $\phi(n)$ une matrice fondamentale pour le système* (2.34) *et*

$$\varphi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m),\ n \in \mathbb{N}_m. \tag{2.38}$$

Alors

1) $\varphi^{-1}(n,m) = \varphi(m,n)$.

2) $\varphi(n,m)$ *est une matrice fondamentale pour le système* (2.34).

3) $\varphi(n,r)\varphi(r,m) = \varphi(n,m)$, $n \in \mathbb{N}_r$, $r \in \mathbb{N}_m$.

4) $\varphi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$, $n \in \mathbb{N}_m$.

Démonstration :

1) De (2.38) on a

$$\varphi(n,m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m)$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(n,m) &= (\Phi(m)^{-1})^{-1}\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(m)\Phi^{-1}(n) \\ &= \varphi(m,n). \end{aligned}$$

2) D'après 1) on a $\varphi(n,m)$ est régulière donc pour montrer qu'elle est une matrice fondamentale pour le système (2.34) il suffit de vérifier que $\varphi(n,m)$ est une solution de l'équation (2.37). De (2.38) on a

$$\varphi(n+1,m) = \varphi(n+1,m)\Phi^{-1}(m)$$

et comme $\Phi(n)$ est une matrice fondamentale pour le système (2.34) alors

$$\begin{aligned} \varphi(n+1,m) &= A(n)\Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ &= A(n)\varphi(n,m). \end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}_r,\ r \in \mathbb{N}_m$. Par définition on a

$$\begin{aligned}\varphi(n,r)\varphi(n,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\Phi^{-1}(m)\\ &= \Phi(n)I\Phi^{-1}(m)\\ &= \Phi(n)\Phi^{-1}(m)\\ &= \varphi(n,m).\end{aligned}$$

4) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_m$.

(a) Pour $n = m$ (évident).

(b) Supposons que $\varphi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$ alors (2.38) et (2.37) impliquent

$$\begin{aligned}\varphi(n+1,m) &= A(n)\varphi(n,m)\\ &= A(n)\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\\ &= \prod_{i=m}^{n} A(i).\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.10. $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$ *est une matrice fondamentale unique pour le système* (2.34) *vérifiant*

$$\Phi(n_0) = I_s.$$

Remarque 2.3.11.

(1) La solution du système (2.34) *qui vérifié* $X(n_0) = X_0$ *s'écrit sous la forme*

$$X(n) = \Phi(n)X_0,$$

où $\Phi(n)$ *est matrice fondamentale du système* (2.34) *avec* $\Phi(n_0) = I_s$.

(2) La solution générale du système (2.34) *s'écrit sous la forme*

$$X_h(n) = \Phi(n)C,\ n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

où $\Phi(n)$ *est une fondamentale pour ce système et* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_s)^t \in \mathbb{R}^s$.

(3) Si $\Phi(n)$ *est une matrice fondamentale pour le système* (2.34) *alors* $\psi = \Phi(n)C$ *où* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_s)^t \in \mathbb{R}^s$ *est une matrice fondamentale pour le même système.*

2.3.3 Systèmes non autonomes non homogènes

Soient $A(n) = (a_{ij}(n))_{i,j} \in M_s(\mathbb{R})$ une matrice régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$ et $B : \mathbb{N}_{n_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Une fonction.

Définition 2.3.12. *On appelle système d'équation aux différence non autonome non homogène l'équation*

$$X(n+1) = A(n)X(n) + B(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.39}$$

Proposition 2.3.13. *Toute solution du système* (2.39) *s'écrit sous la forme*

$$X(n) = X_h(n) + X_p(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{2.40}$$

où $\{X_h(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est la solution générale du système* (2.34) *et* $\{X_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est une solution particulière du système* (2.39).

Démonstration : Soient $\{X_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière du système (2.39) et $\{X(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une autre solution du même système.
Soit

$$Z(n) = (X_h - X_p)(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

alors

$$\begin{aligned} Z(n+1) &= X_h(n+1) - X_p(n+1) \\ &= A(n)X_h(n) + B(n) - A(n)X_p(n) - B(n) \\ &= A(n)Z(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \end{aligned}$$

Donc $\{Z(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est solution du système (2.34). ■

Corollaire 2.3.14. *Toute solution du système* (2.39) *s'écrit sous la forme*

$$X(n) = \Phi(n)C + X_p(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{2.41}$$

où $\Phi(n)$ *est une matrice fondamentale pour le système* (2.34).

Lemme 2.3.15. *La suite* $\{X_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *définie par*

$$X_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \varphi(n, r+1)B(r), \tag{2.42}$$

est une solution particulière du système (2.39).

Démonstration : En utilisant (2.37),(2.38) et (2.42) on trouve

$$\begin{aligned} X_p(n) &= \sum_{r=n_0}^{n} \varphi(n+1, r+1)B(r) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} \varphi(n+1, r+1)B(r) + \varphi(n+1, n+1)B(n) \\ &= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\varphi(n, r+1)B(r) + B(n) \\ &= A(n)X_p(n) + B(n). \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.16. *Le système* (2.39) *avec* $X(n_0) = X_0$ *admet une solution unique et cette solution est*

$$X(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) X_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) B(r),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{2.43}$$

Démonstration : Par récurrence

(i) Pour $n = n_0$ (évident)

(ii) Supposons que (2.43) est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$ on a

$$\begin{aligned}
X(n+1) &= A(n)X(n) + B(n) \\
&= A(n)\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) X_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)B(r)\right) + B((n) \\
&= A(n)\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) X_0 + A(n)\sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) B(r) + B(n) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{n} A(i)\right) X_0 + A(n)\sum_{r=n_0}^{n}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) B(r) \\
&= \left(\prod_{i=n_0}^{n} A(i)\right) X_0 + \sum_{r=n_0}^{n}\left(\prod_{i=r+1}^{n} A(i)\right) B(r),
\end{aligned}$$

d'où (2.43) est vraie. ■

2.4 Transformation d'une équation aux différences linéaires d'ordre supérieur en un système d'équations aux différences linéaires d'ordre un

Dans cette section on va voir comment transformer une équation aux différences d'ordre supérieure en un système d'équations aux différences d'ordre un.
considérons l'équation aux différences (2.1) alors si on pose

$$\begin{aligned}
y_1(n) &= y(n) \\
y_2(n) &= y_1(n+1) \\
y_3(n) &= y_2(n+1) \\
y_4(n) &= y_3(n+1) \\
&\vdots \\
y_k(n) &= y(n+k-1) = y_{k-1}(n+1),
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
y_1(n+1) &= y_2(n) \\
y_2(n+1) &= y_3(n) \\
y_3(n+1) &= y_4(n) \\
y_4(n+1) &= y_5(n) \\
&\vdots \\
y_{k-1}(n+1) &= y_k(n) \\
y_k(n+1) &= -p_1(n)y_k(n) - p_2(n)y_{k-1}(n) - \ldots - p_k(n)y_1(n) + g(n),
\end{aligned}$$

donc on obtient le système d'équations aux différences linéaires non autonome non homogène suivant q

$$Y(n+1) = A(n)Y(n) + B(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{2.44}$$

avec

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_k(n) \end{pmatrix}, \ B(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix},$$

et

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \dots & -p_1(n) \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.4.1.

1. *Si on considère l'équation aux différences linéaires à coefficients constants* (2.22) *alors le système équivalent à cette équation est* (2.44) *avec* $Y(n)$, $B(n)$ *sont comme dans le cas précédent et*

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \dots & -p_1 \end{pmatrix}.$$

2. *Si* $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ *alors on obtient un système homogène.*

CHAPITRE 3

NOTIONS DE STABILITÉ

Dans ce chapitre nous allons présenter des notions de stabilité concernant les systèmes d'équations aux différences et étudier la stabilité de quelques systèmes d'équations aux différences.

3.1 Notions de stabilité

Considérons le système

$$X(n+1) = f(n, X(n)),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.1}$$

où $X : \mathbb{N}_{n_0} \longrightarrow \mathbb{R}^s$ et $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ sont deux fonctions vectorielles et f est continue par rapport à la deuxième variable. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^s$.
On note par $X(n, n_0, X_0)$ la solution du système (3.1) avec $X(n_0) = X_0$.

Définition 3.1.1. *On dit que $\overline{X} \in \mathbb{R}^s$ est un point d'équilibre du système* (3.1) *si*

$$f(n, \overline{X}) = \overline{X},\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Définition 3.1.2. *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système* (3.1).

1) *On dit que $\overline{X}$ est stable si $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists \delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$ tel que si $X(n, n_0, X_0)$ est une solution de* (3.1) *avec $X(n_0) = X_0$ vérifiant*

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \delta \ \text{ alors } \ \|X(n, n_0, X_0) - \overline{X}\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

sinon on dit que $\overline{X}$ est instable.

2) *On dit que $\overline{X}$ est uniformément stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que si $X(n, n_0, X_0)$ est la solution de* (3.1) *avec $X(n_0) = X_0$ et*

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \delta \text{ alors } \|X(n, n_0, X_0) - \overline{X}\| < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

3) *On dit que $\overline{X}$ est attractif si $\exists \mu = \mu(n_0)$ tel que si $X(n, n_0, X_0)$ est la solution de* (3.1) *avec $X(n_0) = X_0$ et*

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \mu \ \text{ alors } \ \lim_{n \to +\infty} X(n, n_0, X_0) = \overline{X}.$$

4) On dit que $\overline{X}$ est uniformément attractif si $\overline{X}$ est attractif avec μ ne dépend pas de n_0.

5) On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable) si $\overline{X}$ est stable et attractif (respectivement uniformément stable et uniformément attractif).

6) On dit que $\overline{X}$ est exponentiellement stable si $\exists \delta, M > 0$ et $\exists \eta \in]0,1[$ tel que si $X(n, n_0, X_0)$ est la solution de (3.1) avec $X(n_0) = X_0$ et

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \delta \ \text{ alors } \ \|X(n, n_0, X_0) - \overline{X}\| < M\|X_0 - \overline{X}\|\eta^{n-n_0}.$$

Définition 3.1.3. *On dit que la solution $X(n, n_0, X_0)$ du système (3.1) est bornée si*

$$\exists M > 0 \ \text{ avec } \ \|X(n, n_0, X_0)\| < M, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Maintenant on considère le système autonome suivant

$$X(n+1) = f(X(n)), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.4. *[3] Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (3.2) alors*

1) $\overline{X}$ est stable si et seulement si $\overline{X}$ est uniformément stable.

2) $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\overline{X}$ est uniformément asymptotiquement stable.

3) $\overline{X}$ est attractif si et seulement si $\overline{X}$ est uniformément attractif.

Démonstration : Supposons $\overline{X}$ stable.
Soient $X(n, n_0, X_0)$ et $Y(n, n_0, X_0)$ deux solutions du système (3.2) avec $m_0 = n_0 + r_0, r_0 \geq 0$.
Observons que si $n = m_0$, alors

$$X(n - r_0, n_0, X_0) = Y(n, m_0, X_0),$$

comme la solution est unique, alors

$$Y(n, m_0, X_0) = X(n - r_0, n_0, n_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où δ est indépendant de n_0.
De la même manière on prouve 2) et 3). ■

Exemple 3.1.5. *Soit le système*

$$X(n+1) = X(n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Alors $\overline{X} = 0$ est un point d'équilibre pour le système (3.3).
La solution $X(n, n_0, X_0)$ de (3.3) telle que $X(n_0) = X_0$ est la suite constante définie par

$$X(n, n_0, X_0) = X_0, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

donc $\overline{X} = 0$ est uniformément stable mais il n'est pas attractif car

$$\forall \mu > 0, \ \exists X_0 \in \mathbb{R}^* \ \text{ telle que } \ |X_0| < \mu \ \text{ et } \ \lim_{n \to \infty} X(n, n_0, x_0) = X_0 \neq 0.$$

3.2 Stabilité des systèmes linéaires

3.2.1 Stabilité des systèmes linéaires non autonomes

Soit $\Phi(n)$ une matrice fondamentale pour le système (2.34), φ la matrice définie par (2.38).

Théorème 3.2.1. *La solution nulle du système*(2.34) *est*
1) *Stable si et seulement si* $\exists M > 0$ *telle que*

$$|||\Phi(n)||| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

2) *Uniformément stable si et seulement si* $\exists M > 0$ *telle que*

$$|||\varphi(n,m)||| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}_m, \ m \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

3) *Asymptotiquement stable si et seulement si* $\lim\limits_{n \to +\infty} |||\Phi(n)||| = 0.$
4) *Uniformément asymptotiquement stable si et seulement si* $\exists M > 0$, $\exists \eta \in]0,1[$ *telle que*

$$|||\varphi(n,m)||| \leq M\eta^{n-m}, \ \forall n \in \mathbb{N}_m, \ m \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.5}$$

Démonstration : Remarquons que si les conditions (3.4) et (3.5) sont vérifiées pour une matrice fondamentale du système (2.34), alors elles sont vérifiées pour toutes les matrices fondamentales du même système. Alors on peut supposer $\Phi(n) = I_s$.
1) Soit (3.4) vérifiée, alors

$$\begin{aligned} \|X(n, n_0, X_0)\| &= \|\Phi(n)X_0\| \\ &\leq M\|X_0\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ tel que } \|X_0\| < \delta \Longrightarrow \|X(n, n_0, X_0)\| < \varepsilon,$$

d'où la solution nulle est stable.
Réciproquement si

$$\|X(n, n_0, X_0)\| = \|\Phi(n)X_0\| < \varepsilon \text{ si } \|X_0\| \leq \delta,$$

alors

$$\begin{aligned} |||\Phi(n)||| &= \sup_{\|\varepsilon\| \leq 1} \|\Phi(n)\varepsilon\| \\ &= \frac{1}{\delta} \sup_{\|x_0\| \leq \delta} \|\Phi(n)X_0\| \\ &\leq \frac{1}{\delta}\varepsilon = M. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, n)\|X_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|X(n, n_0, X_0)\| = \|\Phi(n)X_0\| < \varepsilon,$$

on a

$$\|X_0\| \leq \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta}\|X_0\| \leq 1.$$

D'où
$$|||\Phi(n)||| = \sup_{\|\varepsilon\|\leq 1} \|\Phi(n)\varepsilon\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|X_0\|\leq\delta} \|\Phi(n)X_0\| \leq \frac{1}{\delta}\varepsilon = M.$$
2) De la même manière on peut montrer 2) et 3).
4) Supposons que (3.5) est satisfait, alors
$$|||\varphi(n,m)||| \leq M\eta^{n-n_0} = M',$$
donc d'après 2), la solution nulle est uniformément stable. De plus pour $\varepsilon > 0,\ 0 < \varepsilon < M$ si on prend $\mu = 1$ et N tel que $\eta^N < \frac{\varepsilon}{M}$, alors pour tout $n \geq n_0 + N$ on a
$$\begin{aligned} \|X_0\| < 1 \Longrightarrow \|X(n,n_0,X_0)\| &= \|\Phi(n)X_0\| \\ &\leq M\eta^{n-n_0} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$
D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \|X(n,n_0,X_0)\| = 0$ et la solution nulle est uniformément asymptotiquement stable.
Réciproquement, supposons que la solution nulle est uniformément asymptotiquement stable, donc elle est uniformément stable.
D'après 2), on trouve
$$|||\varphi(n,m)||| \leq M \ \text{ pour } \ 0 \leq n_0 \leq m \leq n \leq \infty.$$
D'après l'attractivité uniformément on obtient
$$\exists\mu > 0 \ \text{ tel que } \ \forall\varepsilon \in]0,1[,\ \exists N \ \text{ tel que } \ \|X_0\| \leq \mu \Longrightarrow |||\varphi(n,n_0)||| \leq \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_0+N.$$
D'où
$$\forall n \in [n_0 + mN, n_0(m+1)N],\ m > 0.$$
$$\begin{aligned} |||\varphi(n,n_0)||| &\leq |||\varphi(n,n_0+mN)||||||\varphi(n_0+mN,n_0+(m-1)N)||| \times \ldots \times |||\varphi(n_0+N,n_0)||| \\ &\leq M\varepsilon^m \leq \frac{M}{\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{1}{N}})^{(m+1)N} = \tilde{M}\eta^{(m+1)N} \\ &\leq \tilde{M}\eta^{(n-n_0)}, \end{aligned}$$
pour
$$mN \leq n - n_0 \leq (m+1)N \ \text{ et } \ \tilde{M} = \frac{M}{\varepsilon}, \eta = \varepsilon^{\frac{1}{N}}.$$
■

Corollaire 3.2.2.

- *La solution nulle du système* (2.34) *est stable si et seulement si toutes les solutions sont bornées.*
- *La solution nulle du système* (2.34) *est exponentiellement stable si et seulement si elle est uniformément asymptotiquement stable.*

Théorème 3.2.3.

1) Si $\sum\limits_{i=1}^{k}|a_{ij}(n)| \leq 1,\ 1 \leq j \leq k, n \in \mathbb{N}_{n_0}$, *alors la solution nulle de système* (2.34) *est uniformément stable.*

2) Si $\sum_{i=1}^{k}|a_{ij}(n)| \leq 1-\gamma$ *pour un certain* $\gamma \geq 0,\ 1 \leq j \leq k,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}$, *alors la solution nulle du système* (2.34) *est uniformément asymptotiquement stable.*

Démonstration : 1) Soit $\sum_{i=1}^{k}|a_{ij}(n)| \leq 1$, alors

$$|||A(n)|||_1 = \sum_{i=1}^{k}|a_{ij}(n)| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Donc

$$|||\varphi(n,m)|||_1 = \|\prod_{i=m}^{n-1}A(i)\|_1 = |||A(n-1)|||_1|||A(n-2)|||_1 \ldots |||A(m)|||_1 \leq 1.$$

En appliquant le Théorème 3.2.1, on trouve que la solution nulle est uniformément stable.
De la même manière on peut montrer 2). ■

3.2.2 Stabilité des systèmes linéaires autonomes

Considérons le système (2.30)

Théorème 3.2.4.

i) La solution nulle de (2.30) *est stable si et seulement si* $\rho(A) < 1$ *et les valeurs propres* λ_i *avec* $|\lambda_i| = 1$ *sont semi-simple.*

ii) La solution nulle est asymptotiquement stable si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Démonstration :

Soit $A = QJQ^{-1}$ où $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_r)$ la matrice Jordan associée à A

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

D'après le Théorème 3.2.1 la solution nulle de (2.30) est stable si et seulement si

$$|||A^n||| = |||QJQ^{-1}||| \leq M,$$

donc

$$|||J^n||| \leq \tilde{M} \ \text{ où } \ \tilde{M} = \frac{M}{|||Q||||||Q^{-1}|||}.$$

D'autre part on a

$$J = diag(J_1^n, J_2^n, \ldots, J_r^n)$$

avec

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \ldots & \binom{n}{s_i-1}\lambda_i^{n-s_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \ldots & \vdots \\ & & & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i^n \end{pmatrix}.$$

Observons que J est non bornée si $|\lambda_i| > 1$ ou $|\lambda_i| = 1$ et J_i n'est pas (1×1)
si

$$|\lambda_i| < 1 \ \text{ alors } \ J_i^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc il suffit de montre que

$$|\lambda_i|^n n^l \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \ \forall l > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} |\lambda_i|^n n^l &= e^{(\ln |\lambda_i|^n n^l)} \\ &= e^{n \ln |\lambda_i| + l \ln n} \\ &= e^{n(l \frac{\ln n}{n} + \ln |\lambda_i|)}. \end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n \to +\infty} n \left(l \frac{\ln n}{n} + \ln |\lambda_i| \right) = -\infty,$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} |\lambda_i|^n n^l = 0.$$

■

3.3 Stabilité d'un système de dimension deux

On considère l'équation aux différences suivante

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Théorème 3.3.1. *Soit $\bar{y}$ un point d'équilibre de l'équation* (3.7)*, alors $\bar{y}$ est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

$$1 + p_1 + p_2 > 0, \ 1 - p_1 + p_2 > 0, \ 1 - p_2 > 0.$$

Démonstration : Supposons que le point d'équilibre $\bar{y}$ de l'équation (3.7) est asymptotiquement stable donc les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2 = 0,$$

sont à l'intérieur du disque unité.
Alors

$$|\lambda_1| < 1 \ \text{ et } \ |\lambda_2| < 1.$$

<u>Cas 1</u> : Supposons que $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$, alors

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \ \text{ et } \ \lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

Donc

$$|\lambda_1| < 1 \Leftrightarrow -2 < -p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2, \tag{3.8}$$

et

$$|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow -2 < -p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2. \tag{3.9}$$

Alors

$$-2 + p_1 < \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

et

$$-2 + p_1 < -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1,$$

d'où

$$p_1^2 - 4p_2 < (2 + p_1)^2,$$

et

$$-(2 + p_1)^2 > p_1^2 - 4p_2.$$

Donc

$$p_1^2 - 4p_2 < 4 + p_1^2 + 4p_1,$$

et

$$4 + p_1^2 - 4p_1 > p_1^2 - 4p_2,$$

alors

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \text{ et } 1 - p_1 + p_2 > 0.$$

De plus on a

$$2 + p_1 > 0 \text{ et } -2 + p_1 < 0,$$

donc

$$p_1 > -2 \text{ et } p_1 < 2,$$

d'où

$$|p_1| < 2.$$

Mais dans ce cas on a

$$p_1^2 - 4p_2 \geq 0,$$

alors

$$p_2 \leq \frac{p_1^2}{4} < 1.$$

<u>cas 2</u> : Supposons que $p_1^2 - 4p_2 < 0$, alors λ_1 et λ_2 sont complexes et on a

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \frac{-p_1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4p_2 - p_1^2},$$

donc

$$|\lambda_1|^2 = \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2}{4} = p_2.$$

Mais

$$p_1^2 - 4p_2 < 0, \text{ donc } \frac{p_1^2}{4} < p_2, \tag{3.10}$$

et

$$-2\sqrt{2} < p_1 < 2\sqrt{p_2}. \tag{3.11}$$

De (3.10) on trouve

$$0 < p_2 < 1.$$

Maintenant Montrons que

$$1 + p_1 + p_2 > 0 \text{ et } 1 + p_2 - p_1 > 0.$$

Considérons la fonction f définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x}, \ \forall x \in]0,1[.$$

On a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0, \ \forall x \in]0,1[.$$

Donc f est décroissante sur $]0,1[$, c'est-à-dire

$$f(x) > 0, \ \forall x \in]0,1[.$$

d'où

$$1 + x - 2\sqrt{x} > 0, \ \forall x \in]0,1[.$$

Comme $p_2 \in]0,1[$, alors $1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0$, En utilisant (3.11) on obtient

$$1 + p_1 + p_2 > 1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0,$$

et

$$1 + p_2 - p_1 > 1 + p_2 - 2\sqrt{p_2} > 0.$$

■

Maintenant on va étudier la stabilité d'un système d'équations aux différences linéaires de dimension deux. On considère le système (2.30) avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.3.2. *La solution nulle de* (2.30) *est asymptotiquement stable si*

$$|\mathrm{tr(A)}| < 1 + \det(A) < 2.$$

Démonstration : Soit P Le polynôme caractéristique de A, alors

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

donc

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr(A)})\lambda + (\det(A)) = 0, \tag{3.12}$$

est l'équation caractéristique associée à la matrice A. De plus cette équation s'écrit sous la forme
$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0,$$
où
$$p_1 = \text{-tr(A) et } p_2 = \det(A).$$
En appliquant le Théorème 3.3.1 on trouve que les valeurs propre de la matrice A sont à l'intérieur du disque unité si et seulement si
$$1 + \text{tr(A)} + \det(A) > 0 \tag{3.13}$$
$$1 - \text{tr(A)} + \det(A) > 0, \tag{3.14}$$
$$1 - \det(A) > 0. \tag{3.15}$$
De (3.13) et (3.15) on trouve
$$-(1 + \det(A)) < \text{tr(A)} < 1 + \det(A),$$
et
$$\det(A) < 1.$$
Donc
$$|\text{tr(A)}| < 1 + \det(A) < 2.$$
■

3.4 Stabilité par approximation linéaire

Dans cette section on considère le système non linéaire suivant
$$y(n+1) = A(n)y(n) + g(n, y(n)),\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$
et sa partie linéaire
$$x(n+1) = A(n)x(n),\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$
Où $A(n) \in \mathbb{M}_s(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{N} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^s, G \subset \mathbb{R}^k$ une fonction continue.
Le système (3.16) est cas particulier des systèmes d'équations aux différences de la forme
$$x(n+1) = f(n, x(n)),\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.18}$$
où $f : \mathbb{N} \times G \longrightarrow \mathbb{R}^s, G \subset \mathbb{R}^s$ est une fonction continument différentiable au point $\overline{y}$.

Remarque 3.4.1. 1) *Le système*
$$y(n+1) = Ay(n) + g(y(n)),\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$
est un cas particulier du système (3.16)*.*
2) *Le système automôme*
$$y(n+1) = f(y(n)), \tag{3.20}$$
est un cas particulier du système (3.18)*.*

On va appliquer la méthode de linéarisation au système (3.19). Soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)^t$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial f(n,0)}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(n,0)}{\partial y_k} \\ \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2(n,0)}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_k(n,0)}{\partial y_k} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$y(n) = x(n) - \bar{x},$$

dans (3.18) alors

$$\begin{aligned} y(n+1) &= f(n, y(n) + \bar{x}) - \bar{x} \\ &= \frac{\partial f(n,\bar{x})}{\partial x} y(n) + g(n, y(n)), \end{aligned}$$

où

$$g(n, y(n)) = f(n, y(n) + \bar{x}) - \bar{x} - \frac{\partial f(n,\bar{x})}{\partial x} y(n),$$

d'où (3.16) avec

$$A(n) = \frac{\partial f(n,\overline{x})}{\partial x}.$$

D'autre part on a

$$g(n,y) = o(\|y\|) \text{ si } \|y\| \longrightarrow 0.$$

Car f est différentiable autour du point $\bar{x}$. Alors

$$\forall \varepsilon,\ \exists \delta > 0, \|y\| < \delta \Longrightarrow \|g(n,y)\| < \varepsilon \|y\|,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si on pose $\bar{x} = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} g(n, y(n)) &= f(n, y(n)) - Df(n,0) y(n) \\ &= f(n, y(n)) - A(n) y(n), \end{aligned}$$

où $Df(n,\bar{x}) = \frac{\partial f(n,\bar{x})}{\partial x}$.

Lemme 3.4.2. *(Inégalité de Gronwall discrète)*
Soit $x, y : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux suites réelles telles que

$$y(n) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Si

$$x(n) \leq M \left[x(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} y(j) x(j) \right],\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{3.21}$$

où $M > 0$, alors

$$x(n) \leq x(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} \left[(1 + My(j)) \right],\ n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{3.22}$$

et

$$x(n) \leq x(n_0) \exp \left[\sum_{j=n_0}^{n-1} My(j) \right],\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.23}$$

Démonstration : Soit

$$u(n) \leq M \left[u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} y(j) u(j) \right], u(n_0) = x(n_0), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0+1}. \tag{3.24}$$

Tout d'abord montrons par récurrence que

$$x(n) \leq u(n), \ \forall n \geq \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.25}$$

i) on a pour $n = n_0$, $u(n_0) = x_{n_0}$.

ii) Supposons que $x(n) \leq u(n)$ et on montrons que $x(n+1) \leq u(n+1)$

De (3.21) on a

$$x(n+1) \leq M \left[x(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n} y(j) x(j) \right].$$

En utilisant l'hypothèse de la récurrence et que $y(j) \geq 0, \ \forall j \in \mathbb{N}_{n_0}$ on obtient

$$x(n+1) \leq M \left[u(n_0) + \sum_{j=n_0}^{n} y(j) u(j) \right],$$

d'où

$$x(n+1) \leq u(n+1).$$

$$\begin{aligned} u(n+1) - u(n) &= \sum_{j=n_0}^{n} y(j) u(j) - \sum_{j=n_0}^{n-1} y(j) u(j) \\ &= M y(n) u(n). \end{aligned}$$

Donc

$$u(n+1) = [1 + M y(n)] u(n). \tag{3.26}$$

En appliquant (2.14) à l'équation (3.26) on trouve

$$u(n) = \prod_{j=n_0}^{n-1} [(1 + M y(j))] \, u(n_0). \tag{3.27}$$

En combinant (3.25) et (3.27) on obtient (3.22).
Montrons maintenant (3.23). On a

$$(1 + M y(j)) \leq \exp(M y(j)), \forall j \in \mathbb{N}_{n_0},$$

car $y(j) \geq 0$ et $M > 0$ et la fonction $x \longmapsto e^x - x - 1$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
Alors

$$\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 + M y(j)) \leq \prod_{j=n_0}^{n-1} \exp(M y(j)),$$

donc

$$\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 + M y(j)) \leq \exp\left(\sum_{j=n_0}^{n-1} (M y(j)) \right). \tag{3.28}$$

De (3.23) et (3.22) on trouve (3.28). ■

Théorème 3.4.3. *Supposons que* $g(n, y) = o(\|y\|)$ *quand* $\|y\| \to 0$*. Alors la solution nulle du système linéaires* (3.17) *est uniformément asymptotiquement stable, et la solution nulle du système non linéaire* (3.16) *est exponentiellement stable.*

Démonstration : De (3.5) on trouve que

$$|||\varphi(n, m)||| \leq M\eta^{n-m}, \ n \geq m \geq n_0,$$

avec $M \geq 1$ et $n \in]0, 1[$.
En appliquant (2.41) on trouve que la solution de (3.19) et

$$y(n, n_0, y_0) = \varphi(n, n_0)y_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \varphi(n, j+1)g(j, y(j)).$$

Alors

$$\|y(n)\| \leq M\eta^{(n-n_0)}\|y_0\| + M\eta^{-1}\sum_{j=n_0}^{n-1}\eta^{(n-j)}\|g(j, y(j))\|. \tag{3.29}$$

D'autre par on a $\varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ si $\|y\| < \delta$ alors $\|g(j, y(j))\| < \varepsilon\|y\|$,
donc (3.29) devint

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \leq M\left[\eta^{-n}\|y_0\| + \sum_{j=n_0}^{n-1}\varepsilon\eta^{-j-1}\|y(j)\|\right]. \tag{3.30}$$

posons $x(n) = \eta^{-n}\|y(n)\|$ et on applique l'inégalité de Gronwall on trouve

$$\eta^{-n}\|y(n)\| \leq \eta^{-n_0}\|y_0\| \prod_{j=n_0}^{n-1} \left[1 + \varepsilon\eta^{-1}M\right],$$

d'où

$$\|y(n)\| \leq \|y_0\|(\eta + \varepsilon M)^{(n-n_0)}, \tag{3.31}$$

choisissions $\varepsilon < (1 - \eta)$, alors

$$\|y(n)\| \leq \|y_0\| < \delta, \ \forall n \geq n_0 \geq 0,$$

d'où la stabilité exponentielle. ■

Une application du Théorème 3.2.4 et du Théorème 3.4.3 on trouve le corollaire suivant

Corollaire 3.4.4. *Si* $\rho(A) < 1$ *alors la solution nulle de* (3.19) *est exponentiellement stable.*

Corollaire 3.4.5. *Si* $\|f'(0)\| < 1$*, alors la solution nulle de* (3.20) *est exponentiellement stable.*

Démonstration : En effet on a $\rho(f'(0)) \leq \|f'(0)\|$ donc d'après le Corollaire 3.4.4 on trouve le résultat. ■

Exemple 3.4.6. *Soit le système*

$$X(n+1) = AX(n) + g(X(n)), \ n \in \mathbb{N}, \tag{3.32}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 1 \\ 0 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (0.5-\lambda)^2, \end{aligned}$$

donc $\lambda = 0.5 < 1$.
Donc la solution nulle du système (3.32) *est exponentiellement stable.*

Exemple 3.4.7. *on va étudier la stabilité de* $\overline{X} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ *du système suivant*

$$\begin{cases} y_1(n+1) = ay_2(n)/[1+y_1^2(n)], \ n \in \mathbb{N}. \\ y_2(n+1) = by_1(n)/[1+y_2^2(n)], \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.33}$$

où $a, b \in \mathbb{R}_+$,
le système (3.33) *s'écrit sous la forme*

$$Y(n+1) = f(Y(n)), \ n \in \mathbb{N}.$$

où $Y(n) = (y_1(n), y_2(n))^t$ *et* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *est définie par*

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^t,$$

où $f_1 = ay_2(n)/[1+y_1^2(n)]$ *et* $f_2 = by_1(n)/[1+y_2^2(n)]$,
la matrice jacobienne est de f *autour du point* $\overline{X}$ *est donnée par*

$$J_{f(0,0)} = \frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(0,0) \end{pmatrix}$$

d'où

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le système (3.33) *s'écrite sous la forme*

$$Y(n+1) = AY(n) + g(Y(n)), \ n \in \mathbb{N},$$

où

$$A = J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit le polynôme caractéristique de A *alors*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ b & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda)^2 - ab. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A *sont*

$$\lambda_1 = \sqrt{ab}, \ \lambda_2 = -\sqrt{ab},$$

alors si $ab < 1$, *la solution nulle de système linéaire*

$$X(n+1) = AX(n),$$

est asymptotiquement stable, comme $g(y)$ *est continue et dérivable en* $(0,0)$,

$$g(y) = o(y).$$

Alors la solution nulle du système (3.33) *est exponentiellement stable.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons donnée quelques notions préliminaires concernant les matrices carrées dans le premier chapitre. En suite, nous avons présentée des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour les équations et les systèmes d'équations aux différences linéaires. Enfin, dans la dernière partie on a étudier la stabilité des solutions de quelques systèmes d'équations aux différences.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **E. A. Grove, G. Ladas** :*Periodicities in Nolineare Difference Equations,*Advances in Discrete Mathematics and Applications , volume 4, Chapman and Hall , CRS Press, 2005.

[2] **F.Belhannache** : *Cours équations aux différences non lineaires.*

[3] **Saber Elaydi** :*An Introduction To Difference Equations*, Springer.

[4] **Sedaghat,H,**The impossibility of unstable globally attracting fixed points for continuous mappings of the line , *Amer .Math .Monthly***104**(1997),356-358.

[5] **Sharkovsky,A.N. ;Yu.L Maistrenkon and E.Yu.Romanenko** :*Difference Equations and Thier Applications,*Kluwer Academic ,Dordrecht, 1993.

[6] **V.Laksmikantham ; D. Trigiante** :*Theory of difference équation, numerical méthods and applications,* 2nd ed., Marcal Dekker, Inc., New York, 2002.

[7] **V. L. Kocic ; G. Ladas,** *Global Behavior of Nolinear Difference Equations of Higer order with Applications,* Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London , volume 256, 1993.

[8] **W. G. Kelley ; A. C. Peterson** : *Difference Equation :An I ntroduction With Application,* Harcourt/Academic Press, San Diego , CA., 2001

[9] **Q. Zhang W. Zhang,** : *On système of nonlinear rational difference équation,* International journal of Mathematical, Comp. Phy. Qua. Eng., 8(2014), 688-691.