République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

Thème

Étude d'une inclusion différentielle du second ordre gouvernée par un opérateur sous-différentiel

Présenté par :

Rafik Ramdane

Soutenu publiquement le 22/06/2023 devant le jury :

Président	:	Mustapha Yarou	Prof. Université de Jijel
Encadreur	:	Fatiha Selamnia	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	:	Imen Boutana	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont tout premièrement au bon Dieu **"ALLAH"**, le tout puissant, pour la volonté, la santé et la patience qu'il ma donné durant ces longues années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.
Je tien à exprimer mes profonds respects et remerciements à mon encadreur **Mme.F.Selamnia** tout d'abord pour ma voir confié ce travail ainsi que sa patience, son aide et ses précieux conseils durant la réalisation de ce travail.
Je remercie vivement le professeur **Mr. Mustapha Fateh Yarou**, pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance . J'adresse également mes vifs remerciements à l'examinatrice **Mme. I. Boutana** pour avoir accepter d'être membre de ce jury. Je veux aussi remercier tous les enseignants qu'ont contribué à ma formation, ainsi qu'à toute l'équipe du département de mathématique.
Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je peux remercier profondément ma famille pour ses conseils et ses encouragements durant toute les années de mes études, je encore une fois remercier le bon dieu **"ALLAH"** le tout puissant de ma voir donner la volonté pour finir ce travail que je le dédie :
A mon père **DJILALI "ALLAH"** yrahmo, qu'il n'a pas pu voir l'aboutissement de mon travail, je sais qu'il aurait été fière de moi. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers luis.
A ma mère **ZINEB** mon soutien moral et ma source de joie, de bonheur et de mes efforts, que dieux te garde pour nous en bonne santé.
A mon très chére frère **FATEH** pour leur soutien dans mon choix et leur attention sans faille, avec mes souhaits de bon heur, de santé et de succès.

A mes **sœurs**.Je suis fière d'être votre frère, et leurs **maries** et **enfants**
A tous mes **amies** , **collègues** d'étude, et à tous ceux qui ont m'encouragé de loin ou de prés pour terminer ce travaille.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles (univoque et multivoque) est devenue plus importante et plus attirante. Son champ d'application s'est considérablement développé et s'est avéré fructueuse dans des nombreux domaine comme la mécanique unilatérale, l'économie mathématique, science de l'ingénieur ...etc. Plus ressemant elle est devenue une des méthodes importante pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution.

Le sous-différentiel d'une fonction convexe généralise la notion de dérivée, et a fourni ses premiers exemples à la théorie des opérateurs maximaux monotones, et à la résolution des problèmes d'évolution. En effet, parmi les problèmes d'évolution non linéaires pour les inclusions différentielles, les problèmes gouvernés par les opérateurs maximaux monotones qui se présentent sous la forme

$$-\frac{du}{dt}(t) \in A(t)u(t), u(0) = u_0 \in D(A(0)),$$

et qui trouvent leurs motivation dans différentes applications, en mécanique, contôle optimal et économétrie,...etc.

Ce type de problèmes a été d'abord étudié lorsque l'opérateur ne dépend pas du temps par H. Brézis [7]. Dans le cas où l'opérateur A dépend du temps, différentes contributions ont été données [8, 13].

Lorsque l'opérateur A est le sous différentiel d'une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement φ, on retrouve l'inclusion différentiel régie par le sous différentiel.

Dans un espace de Hilbert H l'existence de solutions absolument continues pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi(0, .), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

où $\varphi : [0, T] \times H \longrightarrow [0, +\infty[$ est telle que pour tout $t \in [0, T]$, l'application $\varphi(t, .)$ est propre, semicontinue inférieurement et convexe, a été étudiée par J. C. Peralba dans [15], et dans [4], l'auteur a étudié le problème

$$\begin{cases} -\dfrac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)) + f(t), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi(0, .). \end{cases} \tag{0.0.2}$$

où $f \in L^2_H([0, T])$.

Dans la même tendance, le problème d'évolution

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -\partial\varphi(u(t)) + F(u(t)), \\ u(0) = x_0 \in dom\varphi \subset \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{0.0.3}$$

où F est une multiapplication semicontinue suppérieurement et à valeurs non vides compactes dans $\mathbb{R}^d$ et $F(x)$ est inclue dans le sous différentiel d'une fonction convexe semicontinue inférieurement, a été étudié par Cellina-Staicu [8]. De nombreux autres travaux traitant les inclusions différentielles de premier ordre régies par le sous-différentiel peuvent être trouvés dans la littérature, voir par exemple [4], [15].

Notre mémoire est constitué de deux chapitres, on commence par un chapitre préliminaire qui rappelle quelques résultats fondamentaux.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, on établit l'existence de solutions pour un problème d'évolution gouverné par l'opérateur sous différentiel d'une fonction convexe, semicontinue inférieurement avec perturbation multivoque de la forme

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \quad \forall t \in [0, T] \\ -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \end{cases} \tag{0.0.4}$$

où $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe et semicontinue inférieurement et $F : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une multiapplication scalairement semicontinue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées. Le cas où la perturbation est univoque est aussi considéré.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RÉSULTATS DE BASE

Contents

Dans ce chapitre, nous commençons par la présentation des notations utilisées tout au long de ce mémoire, puis nous énonçons les définitions et les concepts fondamentaux de l'analyse convexe, fonctionnelle et multivoque sous formes de résultats pour faciliter la compréhension des nos méthodes dans les preuves de l'existence de solutions des problèmes considérés.

1.1 Notations

Soient E un espace de Banach, E' son dual topologique, $\langle ., . \rangle$ leur produit de dualité et $\|.\|$ la norme de E.
On note par

— $\sigma(E, E')$ la topologie faible sur E.

— $\sigma(E', E)$ la topologie faible* sur E'.

— $\overline{\mathbf{B}}_E(0, r)$ la boule fermée de E de centre 0 et de rayon r, $\overline{\mathbf{B}}_E$ la boule unité fermée de E et $\mathbf{S}_E$ la sphère unité de E.

— Si A est un sous ensemble de E alors $\overline{A}$ est la fermeture de A.
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On note par

— $\mathbf{C}(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$, muni de la norme sup, i.e., $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{t \in I} \|u(t)\|$, et $\mathbf{C}^1(I, E)$ l'espace de Banach des applications continues $u : I \to E$ ayant une dérivé continue, muni de la norme

$$\|u(\cdot)\|_{\mathbf{C}^1} = \max\{\max_{t \in I} \|u(t)\|, \max_{t \in I} \|\dot{u}(t)\|\}.$$

— $p.p$ presque partout.

— $\mathcal{L}(I)$ la tribu de Lebesgue sur I.

— $\lambda(.)$ la mesure de Lebesgue.

— $\mathbf{L}^p(I, E)$ $\big(p \in [1, +\infty[\big)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ mesurables et telles que $\displaystyle\int_I \|u(t)\|^p dt < +\infty$, muni de la norme

$$\|u(.)\|_p = \left(\int_I \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

— $\mathbf{L}^\infty(I, E)$ l'espace quotient de Banach des applications $u : I \to E$ essentiellement bornées sur E, muni de la norme

$$\|u(.)\|_\infty = \inf \big\{c \geq 0 : \ \|u(t)\| \leq c, \ p.p. \text{ sur } I\big\}.$$

— Pour $A \subset E,\ co(A)$ est l'enveloppe convexe de A et $\overline{co}(A)$ son enveloppe convexe fermée.

— $\delta(., A)$ la fonction indicatrice de A, définie sur E par

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in A; \\ +\infty, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

— La fonction polaire associée à $\delta(., A)$, appelée aussi fonction d'appui de A, est la fonction notée $\delta^*(., A)$ et définie sur E' par

$$\delta^*(x', A) = \sup_{x \in A} \langle x', x \rangle, \quad \forall x' \in E'.$$

— $1\!\!1_A$ la fonction caractéristique de A, définie par

$$1\!\!1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Soit H un espace de Hilbert et soit A un sous ensemble fermé pas nécessairement convexe de H. On note par

— $P_A(x)$ la projection de $x \in H$ sur A.

Proposition 1.1. *Soient E un espace de Banach et A un sous ensemble non vide de E. Alors,*

$$\overline{co}(A) = \Big\{ x \in E, \forall x' \in E', \langle x', x \rangle \leq \delta^*(x', A) \Big\}.$$

Lemme 1.1. *Soient X un espace linéaire normé et A un sous ensemble non vide convexe fermé de X. Alors*

$$d(x, A) = \sup_{x' \in \overline{\mathbb{B}}_{X'}} \big(\langle x', x \rangle - \delta^*(x', A) \big). \tag{1.1.1}$$

avec

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

est la distance du point x à l'ensemble A.

1.2 Quelques notions de mesurabilité

Pour commencer, on donne quelques résultats sur la mesurabilité dans le cas univoque. pour plus de détails se référer à [2].

Définition 1.1. *Soient X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X, alors Σ est dite une tribu sur X si*

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Longrightarrow X \setminus A \in \Sigma$
3. $A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \Sigma$

— Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

— Dans le cas où X est un espace topologique, la plus petite tribu contenant la topologie de X, autrement dit, la tribu engendrée par la topologie de X est appelée tribu *Borélienne* sur X et est notée $\mathcal{B}(X)$.

Définition 1.2. *Soient (X_1, Σ_1), (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables et f une application définie sur X_1 à valeurs dans X_2. On dit que f est (Σ_1, Σ_2)-mesurable si pour tout $A \in \Sigma_2$, $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$.*

Si X_2 est un espace topologique, une fonction $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable est dite fonction Borélienne.

Définition 1.3. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique. Alors une application $f : X \to Y$, est dite fortement mesurable ou Bochner mesurable si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable et $f(X)$ est séparable.*

Définition 1.4. *Soient (X, Σ) un espace mesurable et Y un espace métrique. On dite l'application $f : X \to Y$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(X))$-mesurable et $f(X)$ fini (resp. dénombrable).*

Définition 1.5. *Soit (X, Σ) un espace mesurable. Alors la fonction $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$;*
2. *$\mu\Big(\bigcup\limits_n A_n\Big) = \sum\limits_n \mu(A_n)$ pour toute suite dénombrable d'élément de Σ deux à deux disjoints.*

— Le triplet (X, Σ, μ) est appelé espace mesuré.

— Si $\mu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que μ est une mesure positive et on note $\mu \geq 0$, ou que l'espace (X, Σ, μ) est positif.

— Si $\mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \Sigma$. On dit que μ est une mesure finie, ou que l'espace (X, Σ, μ) est fini.

— Si X est un espace topologique, la mesure $\mu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.

Définition 1.6. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$ et Z un sous ensemble de X. On dit que Z est μ-négligeable s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

On dit qu'une propriété sur X est vrais μ-presque partout (μ-p.p.) si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.

La tribu μ-complétée de Σ notée Σ_μ est la tribu engendrée par Σ et les ensembles μ-négligeables, i.e.

$$\Sigma_\mu = \big\{A \cup Z /\ A \in \Sigma \text{ et } Z \text{ ensemble } \mu\text{-négligeable}\big\}.$$

La tribu Σ est dite complète si $\Sigma = \Sigma_\mu$, c'est-à-dire, si tout ensemble μ-négligeable appartient à Σ.

Définition 1.7. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach. Une application $f : X \to E$ est dite simple si f est Σ-mesurable et $f(X)$ est fini.*

Définition 1.8. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach. Une application $f : X \to E$ est dite μ-mesurable s'il existe une suite de fonctions simples (f_n) telle que $f_n \to f$ μ-p.p.*

Lemme 1.2. *Si E est séparable, toute application mesurable est μ-mesurable.*

Théorème 1.1. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré fini et E un espace de Banach séparable. Si $f : X \to E$ est mesurable, il existe une suite (f_n) de fonctions simples telles que $f_n \to f$ μ-p.p., et pour μ-presque tout $x \in X$, $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.9. *Soient (J, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces topologiques et $f : J \times X \to Y$. On dit que f est une application de Carathéodory si $f(., x)$ est Σ-mesurable pour tout $x \in X$ fixé et $f(t, .)$ est continue pour tout $t \in J$ fixé.*

Lemme 1.3. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espace métriques séparables complets. Soit $\varphi : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors pour toute application mesurable $f : T \to X$ l'application $t \mapsto \varphi(t, f(t))$ est mesurable.*

Lemme 1.4. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X, Y deux espaces métriques séparables complets et soit $g : T \times X \to Y$ une application de Carathéodory. Alors g est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$-mesurable.*

1.3 Quelques notions de continuité

Les résultats de cette section sont pris des référence [12].

Définition 1.10. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h < f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ h < f(x),\ \forall x \in V.$$

Définition 1.11. *Soit X un espace topologique et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si et seulement si*

$$\forall\ h \in \mathbb{R},\ h > f(x_0),\ \exists\ V \in V(x_0) \quad \textit{tel que}\ \ h > f(x)\ \ \forall x \in V.$$

Remarque 1.1. *Soit X un espace topologique et soit $x_0 \in X$. Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*

1. *f est s.c.i au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x_0 \in V(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -\varepsilon$,*
2. *f est s.c.s au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists V_{x_0} \in \vartheta(x_0),\ \forall x_0 \in V(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) < \varepsilon$*
3. *f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists v_{x_0} \in V(x_0), \forall x_0 \in V(x_0),\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Définition 1.12. *Soient X un espace topologique et $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est continue au point x_0 si et seulement si f est s.c.i et s.c.s au point $x_0 \in X$.*

Définition 1.13. *Soient X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et soit $x_0 \in X$ alors*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in V(x_0)} \inf_{x \in V} f(x).$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{V \in V(x_0)} \sup_{x \in V} f(x).$$

Proposition 1.2. *Soient X un espace topologique et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *f est s.c.s. sur X ;*
2. *les ensembles $\{x \in X :\ f(x) \geq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont fermés.*

Définition 1.14. ***(Fonction equicontinue)***
soit (f_n)une suite de fonction définie sur un interval I à valeur dans $\mathbb{R}.n$ dit que la suite (f_n) est équicontinue si :
$\forall x \in I, \forall\ xi > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \xi$
autrement dit toutes les fonction f_n sont continue sur I et elle sont continue de la même façon.

1.4 Quelques résultats de l'analyse convexe

Pour plus de détails dans cette section, on peut se référer à [16].

Définition 1.15. *Soit X un espace topologique réel et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on appelle domaine effectif de f qu'on note $D(f)$ l'ensemble défini par*

$$D(f) = \Big\{ x \in X : \ f(x) < +\infty \Big\}.$$

Définition 1.16. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in D(f)$, et pour tout $\lambda \in [0,1]$, nous avons*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

f est dite concave si $(-f)$ est convexe.

Proposition 1.3. *Soit f une fonction convexe sur un convexe ouvert non vide A de $\mathbb{R}^d$. Alors f est continue en tout point de A.*

Définition 1.17. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, on dit que f est propre si*
$f : X \to]-\infty, +\infty]$ et $f \not\equiv +\infty$, $(f \not\equiv +\infty \Leftrightarrow \exists x_0 \in X \,/\, f(x_0) \neq +\infty)$.

Définition 1.18. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, alors f est dite sous additive si*

$$\forall\, x, y \in X, \ f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

• *f est dite positivement homogène si*

$$\forall \lambda \geq 0, \ f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

Remarque 1.2. *Soient X un espace vectoriel normé et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite sous linéaire si elle sous additive et positivement homogène.*

Proposition 1.4 (Fonction indicatrice)**.**
Soit H un espace de Hilbert et soit A un ensemble convexe fermé non vide de H. La fonction $\delta(H, A)$ noté par δ_A telle que

$$\delta(H, A) = \begin{cases} 0, & si\ x \in A; \\ +\infty, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

est convexe, propre et semicontinue inférieurement.

Définition 1.19. *Soit E un espace de Banach, Y un sous ensemble de E. On dit que la fonction $f : Y \to \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz sur Y si pour un certain scalaire positif L on a*

$$|f(y) - f(y')| \leq L\|y - y'\|,$$

pour tous $y, y' \in Y$.
On dit que f est localement Lipschitzienne (de raport L), au voisinage de x si pour un certain $\varepsilon > 0$, f vérifie la condition de Lipschitz (de rapport L) sur l'ensemble $x + \varepsilon\mathbf{B}_E$ (c'est à dire dans un ε-voisinage de x).

Remarque 1.3. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
Si f est lipschitzienne continue. Alors f est localement lipschitzienne.

Définition 1.20. *Soient E un espace de Banach et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow E$ une application, alors f est dite absolument continue si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tel que pour toute partition dénombrable de $[a, b]$ par des intervalles disjoints $([b_n, a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant*

$$\sum_n (b_n - a_n) < \delta \;\Rightarrow\; \sum_n \| f(b_n) - f(a_n) \| < \varepsilon.$$

Théorème 1.2. *Soient E un espace de Banach et $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si il existe une application intégrable $v : [a, b] \to E$ telle que*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b v(t)dt$$

dans ce ca $\dot{f} = v$ p.p.

Remarque 1.4.

1. *Toute application Lipschitzienne est absolument continue,*
2. *Toute application absolument continue est continue par contre la réciproque est fausse.*

1.5 Sous différentiabilité

Pour plus de détails dans cette section, on peut se référer à [14, 16]

1.5.1 Les dérivées classiques

Définition 1.21. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné $x_0 \in E$, et soit v un vecteur dans E. La dérivée directionnelle généralisée de f au point x_0 dans la direction v, notée $f^\circ(x_0, v)$ est définie par*

$$f^\circ(x_0, v) = \limsup_{y \to x_0 \ t \downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t},$$

où y est un vecteur dans E et t est un scalaire positif.

Proposition 1.5. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage de $x \in E$ de rapport $L > 0$. Alors*
(**a**) *La fonction $v \mapsto f^\circ(x, v)$ est finie, positivement homogène, sous-additive et satisfait*

$$|f^\circ(x, v)| \leq L\|v\|;$$

(**b**) *la fonction $(x, v) \mapsto f^\circ(x, v)$ est semi-continue supérieurement comme fonction de (x, v), et comme fonction de v seulement elle est Lipschitzienne sur E de rapport L ;*
(**c**) *$f^\circ(x, -v) = (-f)^\circ(x, v)$.*

Définition 1.22. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) au point x_0 s'il existe $x^{'} \in E^{'}$, tel que*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle x^{'}, v \rangle, \ \ \forall x \in E. \tag{1.5.1}$$

Dans ce cas $x^{'}$ est définie d'une façon unique et il appelé la différentielle de f au sens de Gâteaux au point x_0, on le note souvent par $x^{'} = \nabla f(x_0)$ (appelée aussi gradient de f au point x_0).

Définition 1.23. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On dit que f est différentiable au sens de Fréchet (F-différentiable) au point x_0 si la convergence dans la relation (1.5.1) est uniforme par rapport à v sur les sous ensemble bornés de E, i.e.,*

$$\forall r > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in \mathbb{R}, |t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - \langle x^{'}, v \rangle \right| < \varepsilon\,, \ \forall v \in \overline{\mathbf{B}}_E(0, r).$$

Dans ce cas $x^{'}$ est définie d'une façon unique par la relation précédente, et il appelé la différentielle de f au sens de Fréchet au point x_0, on le note souvent par $x^{'} = df(x_0)$ ou bien $x^{'} = f^{'}(x_0)$.

Proposition 1.6. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$, alors f est F-différentiable si et seulement s'il existe $x^{'} \in E$, tel que*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle x^{'}, x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Proposition 1.7. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Si f est F-différentiable au point x_0, alors*

1) f est G-différentiable au point x_0, l'inverse est fausse,

2) f est continue au point x_0.

Remarque 1.5. *Soient E un espace de Banach et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. Si f est G-différentiable au point x_0, alors $f^{\circ}(x_0, v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$. Par contre, l'existence de toutes les dérivées directionnelles n'implique pas la G-différentiel de f au point x_0.*

1.5.2 Sous différentiels

Définition 1.24. *Soient X un espace vectoriel normé, X' son dual topologique, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe), noté $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \left\{ x' \in X' : \langle x', x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0), \ \forall x \in X \right\}.$$

Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0, on dit que f est sous différentiable au point x_0 si $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.

Théorème 1.3. *Soient E un espace de Banach, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et continue au point $x_0 \in X$, alors $\partial f(x_0)$ est non vide convexe faiblement* compact dans E'.*

Proposition 1.8. *Soient E un espace de Banach, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue sur un sous ensemble convexe ouvert S de E, alors la multi-application $x \mapsto \partial f(x)$ est s.c.s sur S.*

Définition 1.25. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne au voisinage d'un point donné x et soit v un vecteur dans E. Le sous différentiel de Clarke de f au point x, noté $\partial_c f(x)$ est le sous ensemble de E', donné par*

$$\partial_c f(x) = \left\{ \xi \in E' : \langle \xi, v \rangle \leq f^{\circ}(x, v), \ \text{pour tout } v \in E \right\}.$$

On note par $\|\xi\|_*$ *la norme de* ξ *dans* E'*, donnée par*

$$\|\xi\|_* = \sup\Big\{\langle \xi, v\rangle :\ v \in X, \|v\| \le 1\Big\}.$$

Proposition 1.9. *Soient* E *un espace de Banach et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne de rapport* L *au voisinage de* x*. Alors*
(**a**) $\partial_c f(x)$ *est un sous ensemble non vide, convexe et faiblement*compact de* E' *et* $\|\xi\|_* \le L$ *pour tout* ξ *dans* $\partial_c f(x)$ *;*
(**b**) *pour tout* v *dans* E*, on a*

$$f^\circ(x, v) = \max\Big\{\langle \xi, v\rangle :\ \xi \in \partial_c f(x)\Big\}.$$

(**c**) *Soient* $(x_n)_n$ *et* $(x'_n)_n$ *deux suites respectivement dans* E *et* E' *telles que* $x'_n \in \partial_c f(x_n)$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Supposons que* $(x_n)_n$ *converge vers* x *et* $(x'_n)_n$ *converge faiblement* vers* x'*, alors* $x' \in \partial_c f(x)$*.*

Proposition 1.10. *Soient* E *un espace de Banach et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe localement Lipschitzienne au voisinage de* x*, alors* $\partial_c f(x)$ *coïncide avec* $\partial f(x)$ *et* $f'(x, v)$ *coïncide avec la dérivée directionnelle* $f^\circ(x_0, v)$*, pour tout* v*.*

Remarque 1.6. *Si* $f(x_0) = +\infty$*, alors* $\partial f(x_0) = \emptyset$*.*

1.6 Multiapplications et sélections

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multiapplications et leurs sélections. Pour une étude détaillée des multiapplications on peut se référer à [2] et [14]

Définition 1.26. *Soient* X*,* Y *deux ensembles non vides. Une multiapplication (ou fonction multivoque)* F *définie sur* X *à valeurs dans* Y *est une fonction qui à chaque élément* $x \in X$ *associe un sous ensemble* $F(x)$ *de* Y*. On note* $F : X \rightrightarrows Y$*.*
Le domaine, le graphe et l'image de la multi-application $F : X \rightrightarrows Y$ *sont donnés par*

$$\mathcal{D}(F) := dom(F) = \{x \in X :\ F(x) \neq \emptyset\}.$$

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y :\ x \in D(F), y \in F(x)\}.$$

$$Im(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

Définition 1.27. *Soient X, Y deux ensembles non vides, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application, on appelle multi-application inverse associée à F la multi-application*

$$\begin{aligned} F^{-1} : Y &\rightrightarrows T \\ y &\mapsto F^{-1}(y), \end{aligned}$$

définie par

$$F^{-1}(y) = \big\{x \in X : y \in F(x)\big\}.$$

Définition 1.28. *Soient X, Y deux ensembles non vides, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \;\; \forall\, x \in X.$$

1.6.1 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.29. *Soit (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique et $F : T \rightrightarrows X$.*
On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert V de X

$$F^{-1}(V) = \{t \in T :\; F(t) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Lemme 1.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multiapplication à valeurs non vides fermées.*
Considérons les propriétés suivantes

(i) $F^{-1}(\mathcal{B}) \in \Sigma$ pour tout Borélienne $\mathcal{B}$ de X.

(ii) $F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de X.

(iii) $F^{-1}(V) \in \Sigma$ pour tout ouvert V de X.

(iv) Il existe une suite $(\sigma_n)_n$ de sélections mesurables de F telle que

$$\forall t \in T,\; F(t) = \overline{\{\sigma_n(t)\}}_{n\in\mathbb{N}}.$$

(v) $\forall\, x \in X$, la fonction distance $d(x, F(\cdot))$ est mesurable.

(vi) Le graphe de F appartient à $\Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$.

Alors $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Rightarrow (vi)$.
Si F est à valeurs non vides complètes alors $(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.
Si F est à valeurs non vides compactes alors $(iii) \Rightarrow (i)$.

Lemme 1.6. *Soit (T, Σ, μ) un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie et Σ μ-complète. Soient X un espace métrique complet, $F : T \rightrightarrows X$ une multiapplication à valeurs non vides fermées, alors $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$.*

Théorème 1.4. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables)*** *Soient (T, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique complet séparable et $F : T \rightrightarrows X$ une multiapplication mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Théorème 1.5. *Soient (T, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Soient $F : T \times E \rightrightarrows E$ une multiapplication mesurable, $u : T \to E$ une application mesurable. Alors la multiapplication $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.*

Définition 1.30. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et E un espace de Banach séparable. Soit $F : X \rightrightarrows E$ une multi-application. On dit que F scalairement mesurable si pour tout $x' \in X'$, l'application $t \mapsto \delta^*(x', F(t))$ est mesurable.*

Proposition 1.11. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Si $F : X \rightrightarrows E$ est une multi-application à valeurs non vides convexes faiblement compactes, alors $F(.)$ est mesurable si et seulement si elle est scalairement mesurable.*

Proposition 1.12. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, E un espace de Banach séparable. Si $F_1, F_2 : X \rightrightarrows E$ sont deux multi-applications à valeurs non vides convexes faiblement compactes et scalairement mesurable, alors $t \mapsto (F_1 \cap F_2)(t)$ est scalairement mesurable.*

1.6.2 Continuité des multi-applications

Pour plus de détails sur les résultats de cette section voir [1] et [5].

Définition 1.31. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semicontinue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \subset U$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(V_{x_0}) \subset U$.*
Si cela est vrai pour tout $x_0 \in X$, on dit que F est s.c.s sur X.

Définition 1.32. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est dite semicontinue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$ si*

pour tout ouvert U de Y tel que $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 dans X tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, pour tout $x \in V_{x_0}$.
On dit que F est s.c.i sur X, si elle est s.c.i en tout $x \in X$.

Définition 1.33. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors F est continue au point x_0 si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i au point x_0 et F est continue sur X si et seulement si elle est s.c.s et s.c.i sur X.*

Définition 1.34. *Soient $T > 0$ et $F : [0, T] \rightrightarrows Y$ une multiapplication. On dit que F est absolument continue si pour tout $y \in Y$ et tout $t, t' \in [0, T]$ on a*

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq |a(t) - a(t')|$$

où $a : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ est une fonction absolument continue satisfaisant $\dot{a}(t) \neq 0$ p.p sur $[0, T]$. D'après la relation prétendante nous avons pour $t \geq t'$

$$|d(y, F(t)) - d(y, F(t'))| \leq \int_{t'}^{t} |\dot{a}(s)| ds.$$

Remarque 1.7. *Une multi-application Lipschitzienne est absolument continue.*

Définition 1.35. *Soient X, Y deux espaces métriques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On dit que F est une multi-application de Carathéodory si $F(., y)$ est Σ-mesurable pour tout $y \in Y$ fixé et $F(x, .)$ est continue pour tout $x \in X$ fixé.*

Proposition 1.13. *Soient X, Y deux espaces topologiques. $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides est semicontinue supérieurement si et seulement si l'image inverse*

$F^{-1}(C) = \{x \in X : F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout sous ensemble fermé C de Y.

Proposition 1.14. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ à valeurs non vides fermées est s.c.s alors son graphe $Gr(F)$ est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 1.15. *Soient X un espace de Banach et Y un espace de Banach compact. Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Théorème 1.6. *Soit X un espace métrique, Y un espace de Banach séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multiapplication à valeurs convexes compactes. Alors F est semi-continue supérieurement si et seulement si pour chaque $\zeta \in X'$ sa fonction $\delta^*(\zeta, F(.))$ est semicontinue supérieurement.*

1.7 Quelques résultats de Compacité

Les résultats suivants sont pris des références [2, 11].

Définition 1.36. *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Définition 1.37. *soit (X, τ_1), (Y, τ_2) deux espace topologique, et $f : X \to Y$ une application continue. Si $A \subset X$ est un compact de X, alors $f(A)$ est un compact de Y.*

Théorème 1.7. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes,*

1. *X est compact.*
2. *Toute suite infinie de X admet au moins une valeur d'adhérence.*
3. *De toute suite infinie de X on peut extraire une sous suite convergente .*
4. *Tout sous ensembles infini de X admet au point d'accumulation.*

Définition 1.38. *Soit (X, d) un espace métrique, et soit A un sous ensemble de X. On dit que A est relativement compact si $\overline{A}$ est compact.*

Remarque 1.8. *Tous sous ensemble d'un compact est relativement compact.*

Théorème 1.8. *Soient (X, d), (Y, d') deux espace métrique et f une application définie sur x à valeurs dans Y. Si X est compact et f est continue alors f est uniformément continue.*

Définition 1.39. *Soient (X, d) un espace métrique compact, (X, d') un espace métrique compact et K un sous ensemble borné de $C(X, Y)$ (l'espace des applications continues définies sur x à valeurs dans Y muni de la topologie de la convergence uniforme). On dit que K est équicontinue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon, \forall x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon \implies d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad f \in K$$

Théorème 1.9 (Théorème de Banach-Alaouglu-Bourbaki)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Alors la boule unité fermée de E' est compacte pour la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$.

Théorème 1.10 (Théorème de Mazur)**.**
Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et S un sous ensemble compact de E. Alors $\overline{co}(A)$ est compact.

Lemme 1.7 (Lemme de Mazur)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach, et soit* (x_n) *une suite d'éléments de* E *convergeant faiblement vers* x*. Alors il existe une suite* (z_n) *(où* z_n *est une combinaison convexe des éléments* $x_n, x_{n+1}, \ldots$*) convergeant fortement vers* x*.*

Théorème 1.11 (Théorème d'Ascoli-Arzelà)**.**
Soit X *un espace métrique compact,* Y *un espace métrique complet, et* K *un sous ensemble de* $\mathcal{C}(X, Y)$*, l'espace des applications continues définies sur* X *à valeurs dans* Y*, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors* K *est relativement compact si et seulement si* S *est équicontinu et* $K(x)$ *est relativement compact, avec*

$$K(x) = \{f(x) : \ f \in S\}.$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS POUR DES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE GOUVERNÉES PAR UN OPÉRATEUR SOUS-DIFFÉRENTIEL AVEC UNE PERTURBATION SEMICONTINUE SUPÉRIEUREMENT

Contents

2.1 Introduction

Le problème de ce chapitre, concerne l'existence de solutions pour un problème d'évolution gouverné par l'opérateur sous différentiel d'une fonction convexe semicontinue inférieur avec perturbation multivoque de la forme

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T] \\ -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \;\; p.p.\; t \in [0,T]. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

où $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application convexe et semi-continue inférieur
$F : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une multi- application scalairement semicontinue supérieurement à valeurs non vides convexes fermées.

2.2 Quelques préliminaires

Dans tout ce chapitre $I = [0,T]$ $(T > 0)$ est une intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ est l'espace euclidien.

Définition 2.1. *(voir [7]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors le sous différentiel de f est défini par*

$$\partial f(x) = \big\{ z \in H,\; f(y) \geq f(x) + \langle z, y - x \rangle, \;\; \forall y \in H \big\}.$$

Proposition 2.1. *(voir [7]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. Alors*

(i) $\partial f(x)$ est un sous ensemble non vide convexe et faiblement compacte de H et il existe $M > 0$ telle que $\| \xi \| \leq M$, pour tout $\xi \in \partial f(x)$.

(ii) Si (x_n) et (y_n) sont des suites de H telle que $y_n \in \partial f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $(x_n)_n$ converge vers x et $(y_n)_n$ converge-$\sigma(H,H)$ vers y, alors $y \in \partial f(x)$.

Proposition 2.2. *(voir [7]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. Soit $u : [0,T] \longrightarrow H$ tel que u et $(f \circ u)$ soient différentiables. Alors*

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = \Big\langle h, \frac{du}{dt}(t) \Big\rangle, \;\; \forall h \in \partial f(u(t)).$$

Proposition 2.3. *(voir[16]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement, et $D = int(dom(f))$ est non vide. Alors f est continue sur D.*

Proposition 2.4. *(voir[16]) Soit H un espace de Hilbert. Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre convexe sur $int(D(f))$, alors ∂f est semi-continue supérieurement sur $int(D(f))$.*

Théorème 2.1. *(théorème de la projection) (voir [6]) Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que*

$$|x - u| = \min_{v \in K} |x - v|$$

de plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K, \langle x - u, v - u \rangle \leq 0, \ \forall v \in K.$$

on note $u = P_K(x)$ Projection de x sur K.

2.3 Existence de solutions pour une inclusion différentielle du second ordre avec une perturbation multivoque semicontinue supérieurement

Cette section est consacrée à l'étude d'un problème gouvernée par le sous différentiel d'une fonction avec perturbation multivoque semicontinue supérieurement.

Théorème 2.2. *[17] Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$ et $F : I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une multi-application à valeurs non vides, convexes et compactes telle que*

(H_1) F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, c'est-à-dire pour tout $e \in \mathbb{R}^d$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(.,.))$ est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable ;

(H_2) pour tout $t \in I$, $F(t,.,.)$ est scalairement semicontinue supérieurement, c'est-à-dire pour tout $e \in \mathbb{R}^d$, la fonction scalaire $\delta^*(e, F(t,.,.))$ est semicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^d$.

(H_3) il existe une fonction $\beta(.)$ positive Lebesgue intégrable définie sur I (i.e. $\beta \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$d(0, F(t, x, y)) \leq \beta(t), \ \forall (t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d. \tag{2.3.1}$$

Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction propre convexe et semicontinue inférieurement. Alors, pour chaque $(u_0, x_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe deux applications Lipschitzienne $u, x : I \to \mathbb{R}^d$ satisfaisant l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in I, \\ -\dot{u}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), u(t)), \ \ p.p.\ t \in I. \end{cases}$$

En d'autre termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_F) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), \ \ p.p.\ t \in I, \\ x(0) = x_0; \ \ \dot{x}(0) = u_0. \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$.

Preuve.
La preuve se base sur la construction de suites discrétisées nous permettant de définir des applications approximantes dont les limites sont les solutions désirées.

Étape 1. Construction de suites approximantes.
Puisque g est une fonction réelle convexe et semicontinue inférieurement alors, d'après la Proposition 2.1 il existe $M > 0$ tel que

$$\partial g(x) \subset M\overline{B}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.3.2}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la partition $(\{t_{n,0}\}, I_{n,i})$ $0 \leq i \leq n-1$, de l'intervalle I, où $I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$, $t_{n,i} = ih_n$ pour $0 \leq i \leq n$ et $h_n = \frac{T}{n}$.

Pour chaque $(t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, soit $h(t, x, y)$ un élément de norme minimale de $F(t, x, y)$, c'est-à-dire

$$h(t, x, y) = P_{F(t,x,y)}(0), \ \ \forall (t, x, y) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

par la relation (2.3.1)

$$\|h(t, x, y)\| \leq \beta(t), \tag{2.3.3}$$

l'existence de cet élément est assurée par la convexité et la fermeture des valeurs de F.

D'autre part, F est scalairement mesurable et à valeurs convexes faiblement compactes et $\mathbb{R}^d$ est séparable, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par la proposition 1.11 l'application

$t \mapsto h(t,x,y)$ est Lebesgue mesurable , et par (2.3.3) elle est Lebesgue-intégrable.
Pour tout $n \geq 1$, nous allons définir des applications approximantes sur chaque intervalle $I_{n,i}$.
Soit $u_{n,0} = u_0$, $x_{n,0} = x_0$, et comme $\partial g(x_{n,0})$ est un ensemble non vide, on choisit un point $y_{n,0} \in \partial g(x_{n,0})$.
Soit pour tout $t \in I_{n,0} = (t_{n,0}, t_{n,1}]$

$$\begin{cases} h_{n,0} \in F(t_{n,0}, x_{n,0}, u_{n,0}); \\ u_n(t) = u_{n,0} + (t - t_{n,0})y_{n,0} + \displaystyle\int_{t_{n,0}}^{t} h(s, x_{n,0}, u_{n,0})ds; \\ x_n(t) = x_{n,0} + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Soit $u_{n,1} = u_n(t_{n,1}), x_{n,1} = x_n(t_{n,1})$. Nous choisissons un point $y_{n,1} \in \partial g(x_{n,1})$ et pour tous $t \in I_{n,1} = (t_{n,1}, t_{n,2}]$ posons

$$\begin{cases} h_{n,1} \in F(t_{n,1}, x_{n,1}, u_{n,1}); \\ u_n(t) = u_{n,1} + (t - t_{n,1})y_{n,1} + \displaystyle\int_{t_{n,1}}^{t} h(s, x_{n,1}, u_{n,1})ds, \\ x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Similairement, on pose par induction, pour $0 \leq i \leq n-1$
$u_{n,i} = u_n(t_{n,i})$, $x_{n,i} = x_n(t_{n,i})$, on choisit $y_{n,i} \in \partial g(x_{n,i})$ et pour tout $t \in I_{n,i} = (t_{n,i}, t_{n,i+1}]$, on pose

$$\begin{cases} h_{n,i} = h(t, x_{n,i}, u_{n,i}) \in F(t_{n,i}, x_{n,i}, u_{n,i}); \\ u_n(t) = u_{n,i} + (t - t_{n,i})y_{n,i} + \displaystyle\int_{t_{n,i}}^{t} h(s, x_{n,i}, u_{n,i})ds, \\ x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^t u_n(s)ds. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $t \in I_{n,i}$, $\dot{u}_n(t) = y_{n,i} + h_{n,i}$. Nous définissons les applications $y_n, h_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ par $y_n(t) = y_{n,i}$ et $h_n(t) = h(t, x_{n,i}, u_{n,i}) = h_{n,i}$ si $t \in I_{n,i}$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Par construction, pour tout $i = 0, 1, ...n-1$, on a

$$u_n(t_{n,i+1}) = u_{n,i} + \frac{T}{n} y_{n,i} + \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} h(s, x_{n,i}, u_{n,i})ds \tag{2.3.4}$$

Soit $\theta_n(.) : I \longrightarrow I$ la fonction définie par $\theta_n(t) = t_{n,i}$ si $t \in I_{n,i}(i = 0, ..., n-1)$ et $\theta_n(0) = 0$. Remarquons que $|\theta_n(t) - t| = |t_{n,i} - t| \leq (t_{n,i+1} - t_{n,i})| = \frac{T}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, pour tout $t \in I$

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n(t) = t. \tag{2.3.5}$$

Par suite, pour tout $t \in I$

$$u_n(t) = u_n(\theta_n(t)) + (t - \theta_n(t))y_n(t) + \int_{\theta_n(t)}^{t} h_n(s)ds,$$
$$y_n(t) \in \partial g\big(x_n(\theta_n(t))\big).$$

et

$$\dot{u}_n(t) = y_n(t) + h_n(t), i.e., \dot{u}(t) - h_n(t) \in \partial g\big(x_n(\theta_n(t))\big) \quad p.p$$

Étape 2. Convergence des applications approximantes.

Remarquons par2.3.3 et 2.3.2que pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \| \dot{u}_n(t) \| &\leq \|y_n(t)\| + \|h_n(t)\| \\ &\leq M + \beta(t) \\ &= \beta_1(t), \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

et que

$$\begin{aligned} \| u_n(t) \| &\leq \|u_0\| + \int_0^t \| \dot{u}_n(t) \| ds \\ &\leq \|u_0\| + \|\beta_1\| \\ &= M_1 \end{aligned}$$

Donc, $u_n(t) \in \overline{B}(0, M_1)$, pour tout $t \in I$ i.e,$(u_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$.

D'autre part, pour tous $t, s \in I$ $(s < t)$ nous avons

$$\begin{aligned} \| u_n(t) - u_n(s) \| &= \left\| \int_0^t \dot{u}_n(\tau)d\tau - \int_0^s \dot{u}_n(\tau)d\tau \right\| \\ &= \left\| - \int_t^s \dot{u}_n(\tau)d\tau \right\| \\ &= \left\| \int_s^t \dot{u}_n(\tau)d\tau \right\| \\ &\leq \int_s^t \|\dot{u}_n(\tau)\|d\tau \\ &\leq \int_s^t \beta_1(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Donc $(u_n(.))$ est equicontinue.

Alors par le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, donc on peut extraire de $(u_n(\cdot))_n$ une sous suite notée aussi $(u_n(\cdot))$ qui converge uniformément vers une application $u(\cdot) \in \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Il est clair que $u(0) = u_0$.

Maintenant, on va montrer la convergence de $(x_n(.))$ dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Pour tous $t, s \in I$ $(0 \leq s < t \leq T)$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t u_n(s)ds - x_0 - \int_0^s u_n(s)ds \right\| \\
&= \left\| - \int_t^s u_n(s)ds \right\| \\
&= \left\| \int_s^t u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \int_s^t \|u_n(s)\| ds \\
&\leq M_1 |t - s|
\end{aligned}$$

Donc, $(x_n(.))$ est equicontinue.

En outre, pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}
\|x_n(t)\| &= \left\| x_0 + \int_0^t u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \|u_n(s)\| ds \\
&\leq \|x_0\| + M_1 T \\
&= M_2.
\end{aligned}$$

Donc, $x_n(t) \in \overline{B}(0, M_2)$, pour tout $t \in I$ i.e,$(x_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^d$.

Alors par le théorème d'Ascoli-Arzelà, la suite $(x_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $\mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$, donc on peut extraire de $(x_n(\cdot))_n$ une sous suite notée aussi $(x_n(\cdot))$ qui converge uniformément vers une application $x(\cdot) \in \mathbf{C}(I, \mathbb{R}^d)$. Il est clair que $x(0) = x_0$.

Observons que pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) \\ &= x_0 + \lim_{n\to\infty} \int_0^t u_n(s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t \lim_{n\to\infty} u_n(s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t u(s)ds \end{aligned}$$

ceci en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue car $(u_n(.))_n$ est équibornée, d'où $\dot{x}(.) = u(.)$ presque partout.

Par (2.3.5) et la convergence uniforme de $(x_n(.))$ vers x nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| &\leq \|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x(t)\| \\ &\leq M_1|\theta_n(t) - t| + \|x_n(t) - x(t)\|, \end{aligned}$$

i.e,

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n(\theta_n(t)) - x(t)\| = 0, \forall t \in [0, T].$$

D'autre part, en utilisant la convergence uniforme de $(u_n(.))$ vers u nous avons pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \|u_n(t) - u(t)\| \\ &\leq \|\beta_1\|\|\theta_n(t) - t\| + \|u_n(t) - u(t)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| = 0, \forall t \in I.$$

La convergence de la suite $\big(x_n(\theta_n(t))\big)_n$ et $\big(u_n(\theta_n(t))\big)$ vers $x(.)$ et $u(.)$ respectivement est obtenue par la même manière. Maintenant, par la définition de h_n, nous avons pour tout $t \in I$,

$$h_n(t) \in F(\theta_n(t), x_n(\theta_n(t)), u_n(\theta_n(t))) \tag{2.3.7}$$

Pour tout $t \in I$, on pose $s_n(t) = \frac{h_n(t)}{\beta(t)}$. Alors $\|s_n(t)\| \leqslant 1$, donc $s_n(.) \in B_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (d'après le Théorème de Banach-Aloaglu-Bourbaki), donc par extraction d'une sous-suite on peut supposer que $(s_n(.))_n$ converge faiblement* vers une application $s(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $\xi \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle s_n(.), \xi \rangle = \langle s(.), \xi \rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\beta(t)y(t)\|dt &\leqslant \int_0^T \beta(t).\|y\|_\infty dt \\ &= \|y\|_\infty \int_0^T \beta(t)dt \\ &= \|y\|_\infty.\|\beta\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

c'est à dire, $\beta(.)y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \langle h_n(.), y(.) \rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle h_n(t), y(t) \rangle dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \beta(t)s_n(t), y(t) \rangle dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle s_n(t), \beta(t)y(t) \rangle dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle s_n(.), \beta(.)y(.) \rangle \\ &= \int_0^T \langle s(t), \beta(t)y(t) \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle \beta(t)s(t), y(t) \rangle dt \\ &= \langle \beta(.)s(.), y(.) \rangle \end{aligned}$$

par suite, $(h_n(.))$ converge vers $h(.) = \beta(.)s(.)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d), \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d))$, le lemme de Mazur assure l'existence d'une suite $(\xi_n(.))$ (où $\xi_n(.)$ est une combinaison convexe de $\{h_k(.), \quad k \geqslant n\}$ qui converge fortement vers $h(.)$ dans $\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. On peut alors extraire de la suite $(\xi_n(.))$ une sous-suite qui converge p.p. vers $h(.)$. Alors,

$$h(t) \in \overline{\{\xi_n(t), n \in \mathbb{N}\}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{\xi_n(t)\}}, \quad p.p.t \in I,$$

d'où,

$$h(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{co}\{h_k(t), k \geq n\}, \quad p.p.t \in I.$$

Posons

$$A_n = \{h_k(t), k \geq n\}.$$

Alors, par la proposition 1.1 , on obtient pour tout $x' \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \langle x', h(t)\rangle &\leq \delta^*(x', A_n), \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \sup_{k\geq n} \langle x', h_k(t)\rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \langle x', h(t)\rangle &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \langle x', h_k(t)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup \langle x', h_n(t)\rangle. \end{aligned}$$

De la relation (2.3.7), on obtient

$$\langle x', h(t)\rangle \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup \delta^*(x', F(\theta_n(t), x_n(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)),$$

et par la semicontinuité supérieure de $F(t, ., .)$ (voir $(H2)$) on conclut que

$$\langle x', h(t)\rangle \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup \delta^*(x', F(\theta_n(t), x_n(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t)) \leqslant \delta^*(x', F(t, x(t), u(t)) \ \forall x' \in \mathbb{R}^d,$$

et alors

$$\langle x', h(t)\rangle \leqslant \delta^*(x', F(t, x(t), u(t)) \ \forall x' \in \mathbb{R}^d,$$

Puisque par $(H1)$, $t \to F(t, x(t), u(t))$ est scalairement mesurable et comme F est à valeurs convexes faiblement compactes et $\mathbb{R}^d$ est séparable, on obtient

$$h(t) \in F(t, x(t), u(t)), p.p.t \in I.$$

D'autre part, par la relation (2.3.6), on a $(\frac{\dot{u}_n(.)}{\beta_1(.)})$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(I)$, on pose $z_n(.) = \frac{\dot{u}_n(.)}{\beta_1(.)}$. Implique $\|z_n(t)\| \leqslant 1$, donc $z_n(.) \in \overline{\mathbf{B}}_{\mathbf{L}^\infty}$, qui est faiblement*compacte dans $\mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$ (d'après le Théorème de Banach-Aloaglu- Bourbaki), donc par extraction d'une sous-suite on peut supposer que $(z_n(.))_n$ converge faiblement* vers une application $z(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, c'est à dire pour tout $\zeta \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \zeta(.)\rangle = \langle z(.), \zeta(.)\rangle.$$

Soit $y(.) \in \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\beta_1(t) y(t)\| dt &\leqslant \int_0^T \beta_1(t).\|y\|_\infty dt \\ &= \|y\|_\infty \int_0^T \beta_1(t) dt \\ &= \|y\|_\infty.\|\beta_1\|_1 < +\infty \end{aligned}$$

c'est à dire, $\beta_1(.)y(.) \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \dot{u}_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle \beta_1(t) z_n(t), y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle z_n(t), \beta_1(t) y(t)\rangle dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle z_n(.), \beta_1(.)y(.)\rangle \\
&= \int_0^T \langle z(t), \beta_1(t) y(t)\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle \beta_1(t) z(t), y(t)\rangle dt \\
&= \langle \beta_1(.)z(.), y(.)\rangle,
\end{aligned}$$

alors, $(\dot{u}_n(.))$ converge vers une application $w(.) = \beta_1(.)z(.)$ pour la topologie $\sigma(\mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d), \mathbf{L}^\infty(I, \mathbb{R}^d))$, et que $w(.) = \dot{u}(.)$. En effet, pour tout $y \in \mathbf{L}^1(I, \mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \dot{u}_n(.), y(.)\rangle = \langle w(.), y(.)\rangle$$

i.e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \langle \dot{u}_n(s), y(s)\rangle ds = \int_0^t \langle w(s), y(s)\rangle ds,$$

on particulier, pour $y(.) = \mathbb{1}_{[0,t]}(.)e_j$ avec $t \in I$, $\mathbb{1}_{[0,t]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, t]$ et (e_j) une base de $\mathbb{R}^d$, donc on obtient

$$\left\langle \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds, e_j \right\rangle = \left\langle \int_0^t w(s) ds, e_j \right\rangle \ , \ \forall j$$

ce qui assure que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t w(s) ds.$$

Comme $(u_n(.))$ est absolument continue, on a l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty} \big(u_n(t) - u_n(0)\big) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \int_0^t w(s) ds,$$

par conséquent

$$u(t) = u(0) + \int_0^t w(s) ds,$$

c'est-à-dire $u(.)$ est absolument continue, et donc $w(.) = \dot{u}(.)$ *a.e.*

Maintenant, nous procédons à prouver que

$$\dot{u}(t) + F(t, x(t), u(t)) \in -\partial g(x(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T].$$

Par la convergence faible des deux suites $(u_n(.))$ et $(h_n(.))$ dans $L^1(I)$. Par le lemme de Mazur, il existe une suite $(w_n(.))$ qui converge fortement dans $L^1(I)$ vers $\dot{u}(.) - h$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n(.) \in co\{\dot{u}_k(.) - h_k(.) : k \geq n\}$$

par extraction d'une sous suite, on sait que $w_n(.)$ converge presque partout vers $\dot{u}(.) - h$. Alors

$$w_n(t) \longrightarrow \dot{u}(t) - h(t),\ h(t) \in F(t, x(t), u(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T].$$

par conséquent, pour presque tous $t \in I$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) - h(t) \quad &\in \quad \bigcap_n \overline{\{w_n(t)\}} \\ &\subset \quad \bigcap_n \overline{co}\big\{\dot{u}_k(.) - h_k(.), k \geq n\big\} \end{aligned}$$

le résultat est que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle y, \dot{u}(t) - h(t) \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \big\langle y, \dot{u}_k(t) - h_k(t) \big\rangle$$

ainsi,

$$\dot{u}_k(t) - h_k(t) \in -\partial g\big(x_n(\delta_n(t))\big)$$

et la proposition 1.1

$$\big\langle y, \dot{u}(t) - h(t) \big\rangle \leq \lim_{n \to \infty} \sup \delta^*\big(y, -\partial g(x_n(\delta_n(t))\big)$$

par $\delta_n(t) \longrightarrow t$, $x_n(\delta_n(t)) \longrightarrow x(t)$, et la proposition 2.4

$$\big\langle y, \dot{u}(t) + h(t)\big)\big\rangle \leq \delta^*\big(y, -\partial g(x(t))\big)$$

alors

$$\big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big)\big\rangle - \delta^*\big(y, -\partial g(x(t))\big) \leq 0$$

y est arbitraire, nous obtenons

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \big\langle y, \dot{u}(t) - h(t)\big)\big\rangle - \delta^*\big(y, -\partial g(x(t))\big) \leq 0$$

puisque le différentiel est encore sous fermé et convexe, pour le Lemme 1.1 pour tout $t \in I$, nous avons

$$\begin{aligned} d(\dot{u}(t) - h(t), -\partial g\big(x(t)\big)) &= \sup_{y \in \overline{B}} \big\langle y, \dot{u}(t) - h(t) \big\rangle - \delta^*\big(y, -\partial g(x(t))\big) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

i.e

$$d\big(\dot{u}(t) - h(t), -\partial g\big(x(t)\big)\big) = 0.$$

Cette égalité donne, pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{u}(t) - h(t) \in -\partial g\big(x(t)\big).$$

comme $h(t) \in F(t, x(t), u(t))$, Alors pour presque tout $t \in I$,

$$-\dot{u}(t) \in \partial g\big(x(t)\big) + F(t, x(t), u(t))$$

et comme $\dot{x}(.) = u(.)$, on aura

$$-\ddot{x}(t) \in \partial g\big(x(t)\big) + F(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad p.p.t \in I$$

avec $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = u_0$. Ceci montre que x est une solution du problème considéré.

Corollaire 2.1. *[17] Soit $I = [0, T]$ $(T > 0)$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application Carathéodory borné par une fonction positif $\beta \in L^1_{\mathbb{R}_+(I)}$. Soit $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre convexe et semicontinue inférieur. Alors pour tous $(u_0, x_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe deux applications Lipschitzienne $u, x : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfaisant*

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \qquad \forall t \in [0, T], \\ -\dot{u}(t) \in \partial g(x(t)) + f(t, x(t), u(t)), \;\; a.e.\ t \in [0, T]. \end{cases}$$

En d'autre termes, l'inclusion différentielle

$$(\mathcal{P}_f) \begin{cases} -\ddot{x}(t) \in \partial g(x(t)) + f(t, x(t), \dot{x}(t)), \;\; a.e.\ t \in [0, T], \\ x(0) = x_0; \;\; \dot{x}(0) = u_0. \end{cases}$$

admet au moins une solution Lipschitzienne $x \in \mathbf{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Preuve.

Ce théorème est un cas particulier du théorème précédant avec $F(t, x, u) = \{f(t, x, u)\}$ pour tout $(t, x, u) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ où f est une application univoque.

■

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin and A. Cellina, differential inclusions Set-Valued maps and Viability theory. Springer-Verlag, Berlin 1984.

[2] D. Azzam-Laouir, Contribution à l'étude de problèmes d'évolution du second ordre, thèse de doctorat d'état, Constantine. 2003.

[3] D. Azzam-Laouir and F. Selamnia, On state dependent sweeping process in Banach spaces, Evolution equations and control theory Volume 7, Number 2, 2018.

[4] H. Benabdallah, C. Castaing and A. Salvadori, Compactness and discretization methods for differential inclusions and evolution problems, Atti. Sem. Math. Fis. Univ. Modena, XLV, (1997), 9-51.

[5] G. Beer, Topologies on closed and closed convex sets. Kluwer Academic Publishers 1993.

[6] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications. Masson, 1983.

[7] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert. Lecture notes in Math. North-Amsterdam 1973.

[8] A. Cellina, V. Staicu, On evolution equations having monotonicities of opposite sign, J. Differential Equations, 90 (1991), 71-80.

[9] P.Descombe, Cours d'analyse, librairie vuibert,paris 1962.

[10] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag 1985.

[11] Z. Denkowski, S. Migórski, Nikolaos and S. Papageorgiou, An Introduction to Nonlinear Analysis : Applications, Volume 2, Walter de Gruyter, Berlin 1994.

[12] L.C. Evans, Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Second edition 2010.

[13] L. A. Faik : Contribution à l'Analyse des Multifonctions et à l'Étude de Quelques Problèmes d'Évolution, Thèse de Doctorat, Université. Montpellier II 1995.

[14] S. Hu and N.S. Papagiorgiou, Handbook of multivalued analysis. Volume I : Theory. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands 1997.

[15] J. C. Peralba, Un Problème d'évolution relatif à un opérateur sous-différentiel dépendant du Temps, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1972, Exposé N.6.

[16] R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, 2nd edition, Springer, London 1991.

[17] F. Selamnia : Contribution à l'étude de quelques problèmes d'évolution gouvernés par des opérateurs maximaux monotones, Thèse de Doctorat. Université de Jijel 2018.