République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.
Option Analyse fonctionnelle.

Thème

Etude d'une classe d'inégalités variationnelles différentielles inverses

Présenté par :
Rouibah Sofia

Devant le jury

Président	*Nadir Arada*	M.C.A Université de Jijel
Encadreur	*Fatine Aliouane*	M.C.A Université de Jijel
Examinateur	*Abir Kicha*	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

⋇ *Remerciements* ⋇

Je tiens à remercier ALLAH, le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté pour accomplir ce modeste travail.

J'exprime mes profonds remerciements à mon encadreur ***F. Aliouane*** pour sa patience, surtout ses judicieux conseils et remarques, sa bienveillance et la confiance qu'elle m'a accordée pour réaliser ce travail.

Je remercie vivement monsieur ***N. Arada*** pour avoir accepter de présider le jury de ma soutenance.

J'adresse également mes vifs remerciements à l'examinatrice ***A. Kicha*** pour avoir accepter d'être membre de ce jury.

Mes remerciements vont également à l'ensemble de mes enseignants du département de mathématiques.

Enfin, c'est avec beaucoup de plaisir que je peux remercier profondément ma famille pour les conseils et l'encouragement qu'ils m'ont donné durant toutes les années de mes études.

⁜ *Dédicace* ⁜

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste mémoire

♡ À l'homme de ma vie, mon soutien moral et mon bonheur mon père Mohammed, que dieu te garde pour moi mon cher, je t'aime.

♡ À la source de mes efforts et mon bonheur, à toi maman Souad que j'adore.

♡ À mes frères Houssam et Haroun, ma sœur Hanane qui m'ont toujours encouragé. Je vous souhaite plus de succès, de joie et de bonheur.

♡ À mes chères amies, merci pour les bons moments qu'on a partagé.

Sofia ♡

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les inégalités variationnelles différentielles (IVD en abrégé) apparaissent dans certains domaines tels que la théorie des jeux de Nash, la recherche opérationnelle et la physique (voir [3, 12]). Les IVD ont d'abord été systématiquement étudiées dans des espaces de dimension finie par Pang et Stewart [12] en 2008 et ont attiré beaucoup plus d'attention sur les résultats théoriques, les algorithmes numériques et les applications.

Les inégalités variationnelles différentielles inverses (IVDI en abrégé), comme les IVD, ont une large application en optimisation, l'ingénierie, l'économie et la mécanique [6]. Récemment, Li et al. [11] ont prouvé l'existence de solutions faible au sens de Carathéodory pour une inégalité variationnelle différentielle inverse dans des espaces de dimension finie et ont donné une application à un problème d'équilibre dépendant du temps.

L'analyse de stabilité d'une IVD avec des données perturbées est très utile pour identifier les paramètres sensibles, prédire les changements à venir des équilibres à la suite des changements dans le système de gouvernance et fournir des informations utiles pour concevoir différents systèmes d'équilibre. Gwinner dans [9] a étudié la stabilité de la solution pour IVD et a obtenu un nouveau résultat de convergence de la solution par rapport aux perturbations dans les données. Lorsque la multi-application et l'ensemble de contraintes sont perturbés par des paramètres différents.

A notre connaissance, il existe des résultats sur l'existence de solutions pour les IVD et IVDI dans des espaces de dimension finie. Étant motivé par les résultats cité dessus, les auteurs dans [19] ont montré la stabilité de la solution pour une IVID.

Dans ce mémoire, on a mené une étude détaillée du papier récent "X. Zhu et al [19]". Tout d'abord, nous prouvons l'existence et l'unicité de solution faible au sens de Carathéodory pour une inégalité variationnelle différentielle inverse, ensuite on établie la stabilité de la solution.

Pour la bonne compréhension et la lisibilié, on a adopté la structure suivante pour ce manuscrit :

Le premier chapitre intitulé "Notations et Préliminaires", comporte des notations et quelques concepts d'analyse convexe, d'analyse fonctionnelle ainsi que des généralités sur les multi-applications.

Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré l'existence et l'unicité de solution faible au sens de Carathéodory du problème suivant (voir [19])

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big) + g\big(t, x(t)\big)u(t), \quad \forall t \in [0,T] \\ u(t) \in Sol\big(K, h(t, x(t)) + F(\cdot)\big) \quad p.p.\ t \in [0,T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

où K un ensemble non vide, $T > 0$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$, $h : [0,T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et $Sol(\cdot,\cdot)$ est l'ensemble de solution du problème (1).

Finalement, dans le troisième chapitre, nous étudions la stabilité du problème (1) dans un espace de dimension finie où l'ensemble de contraintes et la multi-application F sont perturbées par deux paramètres différents (p, λ).

CHAPITRE 1

NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons toutes les notions et les résultats de base qui nous seront utiles tout au long de ce travail. Nous commençons par quelques notations, puis nous énonçons des définitions et propositions de l'analyse fonctionnelle, convexe et l'analyse multivoque.

1.1 Notations

- p.p. : Presque partout.
- i.e. : C'est à dire.
- := : Égal à, par définition.
- resp. : Respectivement.
- $m.a.$: Multi-application.
- $s.c.s.$: Semi-continuité supérieure.
- $s.c.i.$: Semi-continuité inférieure.
- KKM : Knaster-Kuratowski-Mazurkiewiez.
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$: La dérivée de x par rapport au temps t.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $[a, b]$ (resp. $]a, b[$) : Intervalle fermé (resp. ouvert) de $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}^n$: Espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$.
- (Ω, Σ, μ) : Espace mesuré.
- $(E, \| \cdot \|)$: Espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|$, E' son dual topologique, E'' son bidual.
- (X, d_X) : Espace métrique muni de la métrique d_X.
- $\mathcal{P}(X)$: Ensemble des partie de X.
- $x_n \longrightarrow x$: La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x.
- $x_n \rightharpoonup x$: La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x.
- $int(A)$: Intérieur d'un ensemble A.
- $\overline{A}$: Adhérence d'un ensemble A.
- $co(A)$: enveloppe convexe de A.
- $\mathbf{B}(x, r)$: La boule ouverte de centre x et de rayon r.
- $\overline{\mathbf{B}}(x, r)$: La boule fermée de centre x et de rayon r.
- $\mathcal{V}(x)$: Le voisinage d'un point x.

- Soit A un sous ensemble non vide d'un espace métrique X et $x \in X$. On note par $d_A(x)$ la distance du point x à A, définie par

$$d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

- $\mathcal{C}\,(X, Y)$: L'espace de toutes les applications continues définies sur X à valeurs dans Y, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in X} \|u(x)\|.$$

- $L^p\big([0, T], \mathbb{R}^n\big)$: L'espace de toutes les fonctions mesurables $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\int_0^T \|u(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme de $\| \cdot \|_p$ définie par

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Fonction absolument continue

Définition 1.2.1. *[1] On dit qu'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de $[a,b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant*

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

nous avons

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon.$$

Remarque 1.2.2. *[1]*

(i) *Toute fonction absolument continue est continue.*

(ii) *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

(iii) *Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.*

Théorème 1.2.3. *[1] Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est absolument continue si, et seulement si, elle est l'intégrale de sa dérivée, c'est à dire*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt.$$

Définition 1.2.4. *[10]**(Fonction lipschitzienne)***
Une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $L_f > 0$ telle que pour tous x, $y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\|.$$

Définition 1.2.5. *[18]**(Équicontinuité)***
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une famille G de fonctions continues de X dans Y est dite équicontinue dans X si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \ \forall f \in G, \ \forall x' \in X : \quad d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Théorème 1.2.6. *[2] Un espace métrique (X, d) est dit compact si, et seulement si,* *il vérifie **l'axiome de Bolzano-Weierstrass** de toute suite d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite qui converge.*

Définition 1.2.7. *[18]**(Relative compacité)***
Soit $K \subset X$ une partie d'un espace métrique (X, d_X). On dit que K est relativement compacte si son adhérence est compacte.

Théorème 1.2.8. *[14]**(Arzelà-Ascoli)***
Soit (X, d_X) un espace métrique compact et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, une partie G de $\mathcal{C}(X, E)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites

(i) *G est équicontinue en tout point de X.*

(ii) *L'ensemble $G(x) = \{f(x),\ f \in G\}$ est borné.*

Définition 1.2.9. *[2]**(Espace topologique de Hausdorff)***
*Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que E est un espace de **Hausdorff**, ou espace séparé, si pour deux points x, y distincts, il existe deux ouverts $U, V \in \tau$, tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

Proposition 1.2.10. *[2] Dans un espace de Hausdorff E, tout ensemble fini est fermé.*

Théorème 1.2.11. *[2]**(Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré, E un espace de Banach, $1 \leq p < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables définies sur Ω à valeurs dans E telle que

(i) *$f_n \longrightarrow f \quad \mu - p.p.$ sur Ω.*

(ii) *Il existe une fonction positive $h(\cdot) \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|f_n(t)\| \leq h(t) \quad \mu - p.p.$$

Alors, $f_n \longrightarrow f$ dans $L^p(\Omega, E)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Corollaire 1.2.12. *[7] Un ensemble K est relativement compact dans $L^p(\Omega, E)$ avec $1 \leq p < \infty$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites*

(i) *K est borné dans $L^p(\Omega, E)$.*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\int_0^{b-h} \|f(t+h) - f(t)\|^p dt < \varepsilon^p$ pour tout $f \in K$ et pour tout $|h| \leq \delta$ $\big($p-équicontinuité moyenne$\big)$.*

Lemme 1.2.13. *[13](**Lemme de Gronwall**)*
Soit $u \in \mathcal{C}([0,T[,\ \mathbb{R})$ et $a(\cdot) \in L^1(]0,T[,\ \mathbb{R}^+)$. Si

$$u(t) \leq u_0 \int_0^t a(t)u(s)ds,$$

alors,

$$u(t) \leq u_0 e^{A(t)},$$

où $A(t) = \int_0^t a(s)ds$.

1.2.2 La topologie faible

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et soit E' son dual topologique i.e., $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} : \text{f lineaire continue}\} = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Alors E' est aussi un espace de Banach,et sa norme est définie par

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|.$$

Définition 1.2.14. *[2] Soit $f \in E'$ et soit φ_f l'application définie par*

$$\begin{aligned} \varphi_f :\ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

Lorsque f parcourt E', on obtient une famille de forme linéaire continue sur $\mathbb{R}$. La topologie la plus fine sur E pour laquelle toutes les φ_f $(f \in E')$ sont continues s'appelle la topologie faible et on la note $\sigma(E, E')$.

Définition 1.2.15. *[2](**Convergence faible**)*
Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors on a

$$x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{E',E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E',\,E}\ , \quad \forall f \in E' \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Proposition 1.2.16. *[2] Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E. Alors, on a quand $n \longrightarrow \infty$*

(i) $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.

(ii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.*

Proposition 1.2.17. *[2] Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach de dimension finie alors* *la topologie forte et la topologie faible coïncident c'est un dire,*

$$\tau_{\|\cdot\|} = \sigma(E, E').$$

1.2.3 Espaces réflexifs

Définition 1.2.18. *[2] Soit E un espace vectoriel normé, E'' son bidual et soit J l'injection canonique entre E et E''. On dit que E est réflexif si J est bijective, i.e., si $J(E) = E''$. On identifie alors E et E'' à l'aide de l'isomorphisme J.*

Théorème 1.2.19. *[2] Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée $\overline{\boldsymbol{B}}_E(0,1)$ est faiblement compacte, i.e., compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Corollaire 1.2.20. *[2] Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si, et seulement si, E' est réflexif.*

1.2.4 Outils d'analyse convexe

Définition 1.2.21. *[1] Soient E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On dit que A est convexe si pour tous $a, b \in A$, $\lambda \in [0,1]$, on a*

$$\lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

Définition 1.2.22. *[1] Une fonction $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, est dite convexe si pour tous $x,\ y \in E,\ \lambda \in [0,1]$, l'inégalité*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

est satisfaite telle que $(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ est bien définie.

Définition 1.2.23. *[1]**(Enveloppe Convexe)***
Soit A un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique E. On appelle enveloppe convexe de A, qu'on note $co(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E contenant

A. C'est le plus petit convexe de E qui contient A, et on a

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ / \ x_i \in A, \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Théorème 1.2.24. *[1] Dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, si $A \subset E$ est borné (resp. compact) alors l'enveloppe convexe de A est bornée (resp. compacte).*

Corollaire 1.2.25. *[2] Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Si A est fini alors, $co(A)$ est compact.*

On définit quelques types de cône.

Définition 1.2.26. *[16, 11, 15]**(Cônes)***
Soit E un espace de Banach E, E' son dual et K un sous-ensemble de E. Alors

- *K est un **cône** si*

$$\forall x \in K, \quad \forall \alpha \geq 0 : \quad \alpha x \in K.$$

- *Le cône de **barrière** de K, est défini par*

$$barr(K) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \ \sup_{x \in K} \langle y, x \rangle \ < \ \infty \right\}.$$

- *Le cône de **récession** de K, noté K_∞, est défini par*

$$K_\infty := \left\{ d \in E' : \exists \ t_n \longrightarrow 0, \exists \ x_n \in K, \ t_n x_n \rightharpoonup d \right\}.$$

- *Le cône **polaire positif** de l'ensemble non vide K, noté K^+, est donné par*

$$K^+ := \left\{ y \in E' : \ \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in K \right\},$$

  et on a

$$- \, barr(K) = K_\infty^+. \tag{1.1}$$

- *Le cône **polaire négatif** de l'ensemble non vide K, noté K^-, est défini par*

$$K^- := \left\{ y \in E' : \langle y, x \rangle \leq 0, \forall x \in K \right\}.$$

- *Le cône **tangent** d'un ensemble convexe K au point $x \in K$, noté $T_K(x)$, est défini* *par*

$$T_K(x) = \left\{ v \in E | \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} d_K(x + \lambda v) = 0 \right\}. \tag{1.2}$$

1.3 Quelques notions sur les multi-applications

Définition 1.3.1. *[2] Soient X et Y deux ensembles non vides.*
*On appelle **multi-application** (m.a. en abrégé) de X à valeurs dans Y, toute application de X dans $\mathcal{P}(Y)$, notée $F : X \rightrightarrows Y$, c'est à dire que pour tout $x \in X$, $F(x)$ est un sous-ensemble de Y.*

Définition 1.3.2. *[2] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

- ***Le domaine** de F, noté $D(F)$, est défini par*

$$D(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}.$$

- ***L'image** de F, notée $R(F)$, est définie par*

$$R(F) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

- ***Le graphe** de F, noté $gph(F)$, est défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) : x \in D(F) \text{ } et \, y \in F(x)\}.$$

- ***La m.a. inverse***

$$\begin{aligned} F^{-1} : \; & Y \rightrightarrows X \\ & y \longmapsto F^{-1}(Y) \end{aligned}$$

est définie par

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

Définition 1.3.3. *[2] Soit $F : X \rightrightarrows Y$ et soit $V \subset Y$. Alors*

$$F^{-1}(V) = \left\{x \in X : F(x) \cap V \neq \emptyset\right\}$$

est l'image réciproque large de V par F.

Définition 1.3.4. *[2] Soit* $F : X \rightrightarrows Y$ *et soit* $V \subset Y$. *Alors*

$$F_+^{-1}(V) = \big\{x \in X : F(x) \subset V\big\}$$

est l'image réciproque étroite de V *par* F.

Définition 1.3.5. *[2] Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et soit* Y' *l'espace dual de* Y. *On dit que la m.a.* $F : X \rightrightarrows Y$ *est* ***semi-continue supérieurement*** *(s.c.s. en abrégé) au point* $x \in X$ *si pour tout ouvert* $U \subset Y$ *tel que* $F(x) \subset U$, *il existe un voisinage* Ω *de* x *tel que pour tout* $z \in \Omega, F(z) \subset U$ *i.e.,*

$$F \text{ s.c.s. au point } x \Longleftrightarrow \forall\, U \subset Y \ \text{ ouvert tel que } F(x) \subset U,\ F_+^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x).$$

- *On dit que* F *est s.c.s. sur* X *si elle est s.c.s. en tout point de* X.

Exemple 1.3.6. *Soit*

$$\begin{aligned} F :\ & \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R} \\ & x \longmapsto F(x) = \begin{cases} [-1, 1], & x = 0 \\ \{0\}, & x \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

F *est s.c.s. sur* $\mathbb{R}$. *En effet, si* U *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} F_+^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset U\} \\ &= \{x = 0 : [-1, 1] \subset U\} \bigcup \{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ 0 \in U\}. \end{aligned}$$

On a trois cas

- *Si* $[-1, 1] \subset U \Longrightarrow 0 \in U$.
  $F_+^{-1}(U) = \{0\} \cup \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.
- *Si* $[-1, 1] \not\subset U$ *et* $0 \in U$.
  $F_+^{-1}(U) = \emptyset\ \cup\ \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$.
- *Si* $0 \notin U \Longrightarrow [-1, 1] \not\subset U$.
  $F_+^{-1}(U) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ *ouvert de* $\mathbb{R}$.

Donc, F *est s.c.s. sur* $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.7. *[2] Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, et soit* Y' *l'espace dual de* Y. *On dit que la m.a.* $F : X \rightrightarrows Y$ *est* ***semi-continue inférieurement*** *(s.c.i.*

en abrégé) au point $x \in X$ si pour tout ouvert $U \subset Y$ tel que $F(x) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x tel que pour tout $z \in \Omega$, $F(z) \cap U \neq \emptyset$ i.e.,

$$F \text{ s.c.i. au point } x \Longleftrightarrow \forall\, U \subset Y \text{ ouvert tel que } F(x) \cap U \neq \emptyset,\ F^{-1}(U) \in \mathcal{V}(x).$$

- *On dit que F est s.c.i. sur X si elle est s.c.i. en tout point de X.*

Exemple 1.3.8. *Soit*

$$\begin{aligned} G:\ & \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R} \\ & x \longmapsto G(x) = \begin{cases} [-1,1], & x \neq 0 \\ \{0\}, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

G est s.c.i. sur $\mathbb{R}$. En effet, on a pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} : G(x) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : [-1,1] \cap U \neq \emptyset\} \cup \{x = 0 : \{0\} \cap U \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

On a trois cas

- *Si $0 \in U \Longrightarrow [-1,1] \cap U \neq \emptyset$*
  $G^{-1}(U) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \cup \{0\} = \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$.
- *Si $0 \notin U$ et $[-1,1] \cap U \neq \emptyset$*
  $G^{-1}(U) = \big(\mathbb{R}\backslash\{0\}\big) \cup \emptyset =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
- *Si $[-1,1] \cap U = \emptyset \Longrightarrow 0 \notin U$*
  $G^{-1}(U) = \emptyset \cup \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Donc, G est s.c.i. sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.9. *[2]**(Caractérisation de la semi-continuité supérieure)***
Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une m.a. Alors les propriétés suivantes soit équivalentes

(i) *F est s.c.s. sur X.*

(ii) *Pour tout ouvert U de Y, $F_{+}^{-1}(U)$ est un ouvert de X.*

(iii) *Pour tout fermé V de Y, $F^{-1}(V)$ est un fermé de X.*

(iv) *$\forall A \subset Y, \overline{F^{-1}(A)} \subset F^{-1}(\bar{A})$.*

Définition 1.3.10. *[1] Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit Y' l'espace dual de Y. On dit que la m.a. $F : X \rightrightarrows Y$ est **hémicontinue supérieurement** en $x \in X$*

si, et seulement si, pour tout $y^* \in Y'$ *la fonction* $x \longmapsto \sup\limits_{y \in F(x)} \langle y^*, y\rangle$ *est s.c.s au point* x.

Proposition 1.3.11. *[1] Une m.a.* $F : X \rightrightarrows Y$ *est s.c.i. au point* $x \in X$ *si, et seulement si, pour tout* $y \in F(x)$ *et pour toute suite* $(x_n)_n \subset X$ *convergeant vers* x*, il existe une suite* $(y_n)_n$ *d'élément de* $F(x_n)$ *convergeant vers* y.

Proposition 1.3.12. *([8], Lemme 01) Soient* (X, d_X), (Y, d_Y) *deux espaces métriques. Si la m.a.* $F : X \rightrightarrows Y$ *à valeurs non vides, fermées est s.c.s., alors* F *est fermée* $\big($*i.e., son graphe est un sous-ensemble fermé de* $\mathcal{P}(Y)\big)$.

Démonstration. Soit $\big((x_n, y_n)\big)_n \subset gph(F)$ une suite qui converge vers $(\bar{x}, \bar{y})$ et montrons que $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph(F)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in gph(F)$ i.e., $y_n \in F(x_n)$. Or $(x_n)_n$ converge vers x alors,

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(\bar{x}), \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in V. \tag{1.3}$$

F étant s.c.s., pour tout ouvert U de Y tel que

$$F(\bar{x}) \subset U, \text{ on a } F_+^{-1}(U) \in \mathcal{V}(\bar{x}). \tag{1.4}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on sait que $\mathbf{B}\big(F(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{2}\big)$ est un ouvert qui contient $F(\bar{x})$, et donc grâce à la relation (1.4), on a

$$F_+^{-1}\left(\mathbf{B}(F(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathcal{V}(\bar{x}).$$

En utilisant (1.3), il vient que

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow F(x_n) \subset \mathbf{B}\left(F(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Comme $y_n \in F(x_n)$, alors $y_n \in \mathbf{B}\left(F(\bar{x}), \frac{\varepsilon}{2}\right)$, et donc

$$d_Y\left(y_n, F(\bar{x})\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on a $(y_n)_n$ converge vers $\bar{y}$, donc par définition

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Longrightarrow d_Y(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, nous avons

$$\begin{aligned} d_Y(\bar{y}, F(\bar{x})) &\leq d_Y(\bar{y}, y_n) + d_Y(y_n, F(\bar{x})) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

D'où,

$$d_Y(\bar{y}, F(\bar{x})) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

Autrement dit,

$$d_Y(\bar{y}, F(\bar{x})) = 0 \text{ ou } \quad \bar{y} \in \overline{F(\bar{x})}.$$

Puisque F est à valeurs fermées, on déduit que $(\bar{x}, \bar{y}) \in gph(F)$. □

Définition 1.3.13. *[5, 17] La m.a. $F : X \rightrightarrows Y$ est dite :*

(i) Strictement monotone *si, et seulement si, pour tous $x, y \in X$, $x \neq y$, $x^* \in F(x)$, $y^* \in F(y)$ on a*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle > 0.$$

(ii) Monotone *si pour chaque $x, y \in X$ et pour tout $x^* \in F(x)$, $y^* \in F(y)$ on a*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0.$$

(iii) Fortement monotone *avec un module $\mu > 0$ si pour tous $x, y \in X$ et tous $x^* \in F(x), y^* \in F(y)$, on a*

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2. \tag{1.5}$$

1.3.1 Problème de Cauchy.

Soient $[0, a] \subset \mathbb{R}$ $(a > 0)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé, $F : [0, a] \times D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. à valeurs non vides et $x_0 \in D$. On considère l'inclusion différentielle suivantes

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \textit{p.p. } t \in [0, a], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites

- Il existe une fonction positive $c(\cdot) \in L^1([0,a],\ \mathbb{R})$ telle que

$$\|F(t,x)\| = \sup\big\{\|y\| : y \in F(t,x)\big\} \leq c(t)(1+\|x\|) \ \textit{sur}\ [0,a] \times D. \tag{1.7}$$

- Pour tout $(t,x) \in [0,a[\times D$,

$$F(t,x) \cap T_D(x) \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Lemme 1.3.14. *[4, Lemme 5.1] Soit D un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. à valeurs non vides, convexes, et fermées. Si F satisfait les propriétés suivantes*

(i) *F est s.c.s,*

(ii) *Il existe une constante positive c telle que, pour tout $x \in D$*

$$\|F(x)\| \leq c(1+\|x\|),$$

(iii) *$F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset$ sur D,*

alors, pour tout $x_0 \in D$, le problème de Cauchy $\dot{x} \in F(x)$ p.p. avec $x(0) = x_0$, admet une solution absolument continue sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3.15. *[4, Théorème 5.1] Soit D un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et soit $F : [0,a] \times D \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. s.c.s. à valeurs non vides, convexes et fermées telles que (1.7) et (1.8) sont satisfaites. Alors, le problème (1.6) admet une solution absolument continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Considérons $X_0 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'espace de Hilbert muni de la norme $\|(t,x)\| = |t| + \|x\|$, pour tout $(t,x) \in X_0$. Soit $D_0 = [0,a] \times D$ et $F_0 : D_0 \rightrightarrows X_0$ définie par

$$F_0(t,x) = \{1\} \times F(t,x).$$

Il est alors facile de vérifier que pour $(t,x) \in D_0$ avec $t < a$, on a

$$(1,y) \in F_0(t,x) \cap T_{D_0}(t,x) \Leftrightarrow y \in F(t,x) \cap T_D(x). \tag{1.9}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(1,y) \in F_0(t,x) \cap T_{D_0}(t,x) &\Longleftrightarrow (1,y) \in F_0(t,x) \text{ et } (1,y) \in T_{D_0}(t,x) \\
&\Longleftrightarrow (1,y) \in \{1\} \times F(t,x) \text{ et } (1,y) \in T_{D_0}(t,x) \\
&\Longleftrightarrow y \in F(t,x) \text{ et } (1,y) \in T_{D_0}(t,x). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la définition de $T_{D_0}(\cdot)$, pour tout $(t,x) \in D_0$ on a

$$\begin{aligned}
(1,y) \in T_{D_0}(t,x) &\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1}\, d_{[0,a]\times D}\, \big((t,x) + \lambda(1,y)\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1}\, d_{[0,a]\times D}\, \big(t+\lambda, x+\lambda y\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \inf_{(b,z)\in[0,a]\times D} \big\|\big(t+\lambda, x+\lambda y\big) - (b,z)\big\| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \inf_{(b,z)\in[0,a]\times D} \|(t+\lambda-b, x+\lambda y - z)\| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \inf_{b\in[0,a]\wedge z\in D} \big(\|t+\lambda-b\| + \|x+\lambda y - z\| \big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \left(\inf_{b\in[0,a]} \|t+\lambda-b\| + \inf_{z\in D} \|x+\lambda y - z\| \right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} \big(d_{[0,a]}(t+\lambda) + d_D(x+\lambda y)\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \big(\lambda^{-1} d_{[0,a]}(t+\lambda) + \lambda^{-1} d_D(x+\lambda y)\big) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d_D(x+\lambda y) = 0 \\
&\Longleftrightarrow y \in T_D(x). \qquad (1.11)
\end{aligned}$$

De (1.10) et (1.11), on conclut que $y \in F(t,x) \cap T_D(x)$.

Maintenant, on vérifie que les hypothèses du Lemme 1.3.14 sont satisfaites pour X_0, D_0 et F_0.

Tout d'abord, montrons que pour tout $(t,x) \in D_0$, $F_0(t,x)$ est un sous-ensemble convexe fermé de X_0.

Soient $(1,y_1)$, $(1,y_2) \in F_0(t,x)$ et $\lambda \in [0,1]$. Nous savons que

$$(1,y_1) \in F_0(t,x) \Longleftrightarrow y_1 \in F(t,x),$$

et

$$(1,y_2) \in F_0(t,x) \Longleftrightarrow y_2 \in F(t,x).$$

F étant à valeurs convexes, il vient que

$$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in F(t,x),$$

et donc,

$$\lambda(1,y_1) + (1-\lambda)(1,y_2) = \big(1, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\big) \in F_0(t,x),$$

montrant que $F_0(t,x)$ est convexe.

D'autre part, soit $\big((1,y_n)\big)_n$ une suite convergeant vers $(1,y_0)$ dans X_0 et soit $\big((1,y_n)\big)_n \subset F_0(t,x)$ pour tout $(t,x) \in D_0$. On obtient que $y_n \in F(t,x)$ et comme F est à valeurs fermées donc $y_0 \in F(t,x)$. Par conséquent, $(1,y_0) \in F_0(t,x)$, i.e. F_0 est à valeurs fermées.

(i) Montrons que F_0 est s.c.s.
Soit $U = U_1 \times U_2$ un fermé de X_0, tel que U_1 est un fermé de $\mathbb{R}$ et U_2 est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et montrons que $F_0^{-1}(U)$ est un fermé de D_0. On a

$$\begin{aligned}(t,x) \in F_0^{-1}(U) &\Longleftrightarrow F_0(t,x) \cap U \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow (\{1\} \times F(t,x)) \cap U \neq \emptyset \\ &\Longleftrightarrow (\{1\} \times F(t,x)) \cap (U_1 \times U_2) \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow F(t,x) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ et } 1 \in U_1.\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_0^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \ si \ 1 \notin U_1 \\ F^{-1}(U_2) \ si \ 1 \in U_1, \end{cases}$$

U_2 étant un fermé de $\mathbb{R}^n$ et F une m.a. s.c.s., $F^{-1}(U_2)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, F_0 est s.c.s.

(ii) Prenant en compte par (1.7) et la définition de F_0, nous avons pour tout $(t,x) \in D_0$

$$\begin{aligned}\|F_0(t,x)\| &= \sup\Big\{\|(1,y)\|;\ (1,y) \in F_0(t,x)\Big\} \\ &= \sup\Big\{|1| + \|y\|;\ (1,y) \in \{1\} \times F(t,x)\Big\} \\ &= \sup\Big\{|1| + \|y\|;\ y \in F(t,x)\Big\} \\ &= 1 + \sup\Big\{\|y\|;\ y \in F(t,x)\Big\}\end{aligned}$$

$$\leq |1| + c(t)(1 + \|x\|) \leq c_1(t)(1 + \|x\|).$$

avec $c_1(t) = |1| + c(t)$ pour tout $t \in [0, a]$.

(iii) Grâce à (1.8) et (1.9), on a pour tout $(t, x) \in [0, a] \times D$,

$$F_0(t, x) \,\cap\, T_{D_0}(t, x) \neq \emptyset.$$

Donc, par le Lemme 1.3.14, pour $(t_0, x_0) \in D_0$ il existe une solution du problème

$$(1, \dot{x}(t)) \in F_0\,(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, a]$$

i.e.

$$\dot{x}(t) \in F\,(t, x(t)) \quad p.p. \quad t \in [0, a] \text{ avec } x(0) = x_0.$$

$\square$

Lemme 1.3.16. *[11] Si K est un sous-ensemble convexe non vide d'un espace vectoriel de Hausdorff topologique E et $G : K \rightrightarrows K$ une m.a. satisfaisant les propriétés suivantes*

(i) *G est une m.a. KKM c'est à dire, que pour tout sous-ensemble fini A de K,*

$$co(A) \subset \bigcup_{x \in A} G(x),$$

(ii) *$G(x)$ est fermé dans E pour tout $x \in K$,*

(iii) *$G(x_0)$ est compact dans E pour presque tout $x_0 \in K$,*

Alors, $\bigcap_{x \in K} G(x) \neq \emptyset$.

CHAPITRE 2

EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION POUR UNE INÉGALITÉ VARIATIONNELLE DIFFÉRENTIELLE INVERSE

Notre but dans ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution pour l'inégalité variationnelle différentielle inverse (IVDI en abrégé) ([19]) suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ u(t) \in Sol(K, h(t, x(t)) + F(\cdot)) \quad p.p.\ t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où K un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$, $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^m$ et $Sol(\cdot, \cdot)$ est l'ensemble de solutions du problème (2.1)

2.1 Préliminaires

Dans la suite, on considère les hypothèses suivante

(H_1) Les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ et $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont lipschitziennes sur Ω avec des constantes de lipschizité $L_f > 0$, $L_g > 0$ et $L_h > 0$ respectivement.

(H_2) La fonction g est bornée sur Ω avec $\delta_g := \underset{(t,x)\in\Omega}{sup} \|g(t,x)\|$.

On définit la m.a. $\mathbb{F} : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ comme suit

$$\mathbb{F}(t,x) := \big\{ f(t,x) + g(t,x)u : u \in Sol\big(K, h(t,x) + F(\cdot)\big) \big\}. \tag{2.2}$$

où $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

Définition 2.1.1. *Soit E un espace de Banach réflexif, E' son dual. Soit K un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E' et $B := E \times K$. Soit $F : E \rightrightarrows E'$ une m.a. Une inégalité variationnelle différentielle inverse multivoque, notée $IVDI(K,F)$, consiste à chercher $x \in E$ et $x^* \in F(x) \cap K$ tel que*

$$\langle y - x^*, x\rangle \geq 0, \quad \forall y \in A. \tag{2.3}$$

L'ensemble de solutions de ce problème est noté $Sol(K,F)$.

- *Une inégalité variationnelle inverse multivoque duale, notée $IVID(B,F)$, consiste à trouver $(x,y) \in B$, tel que pour tout $(u,v) \in B$*

$$\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x\rangle + \langle u, v - y\rangle \ \geq 0. \tag{2.4}$$

Théorème 2.1.2. *[11] Soit E un espace de Banach réflexif, E' son dual. Soit K un sous-ensemble non vide, convexe de E', $B = E \times K$ et soit $F : E \rightrightarrows E'$ une m.a. à valeurs non vides. Alors,*

(i) *Si F est monotone, alors toute solution d'une $IVDI(K,F)$ résout une $IVID(B,F)$.*

(ii) *Si F est hémicontinue supérieurement, alors toute solution d'une $IVID(B,F)$ résout une $IVDI(K,F)$.*

Définition 2.1.3. *On dit que (x,u) est une solution faible au sens de Carathéodory de* (2.1) *si et seulement si $x(\cdot)$ est une fonction absolument continue sur $[0,T]$, $x(\cdot)$ satisfait pour presque tout $t \in [0,T]$ les conditions initiales et l'équation différentielle dans* (2.1). *De plus, $u(\cdot)$ est une fonction intégrable sur $[0,T]$ et $u(t) \in Sol\big(K, h(t,x(t)) + F(\cdot)\big)$ pour presque tout $t \in [0,T]$.*

Lemme 2.1.1. *[11] Soit K un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach réflexif E avec $int(barrK) \neq \emptyset$. Alors, il n'existe pas de suite $(x_n)_n \subset K$ avec $\|x_n\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \infty$, tel que $\frac{x_n}{\|x_n\|} \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} 0$. Si de plus, K est un cône, alors il n'existe pas de $(d_n)_n \subset K$ avec $\|d_n\| = 1$ tel que $\|d_n\| \underset{n\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} 0$.*

Théorème 2.1.4. *([11], Théorème 3.2) Soit E un espace de Banach réflexif, E' son dual topologique, K un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E', $B := E \times K$ et soit $F : E \rightrightarrows E'$ une m.a. à valeurs non vides. Supposons que les assertions suivantes sont satisfaites*

(i) $K_\infty \cap M^- = \{0\}$, *avec* $M = \{x \in E,\ F(x) \cap K \neq \emptyset\}$.

(ii) *Il existe deux ensembles bornés $C_1 \subset E$ et $C_2 \subset K$ avec $C = C_1 \times C_2 \subset B$ tel que pour tout $x \in E \backslash C_1$ et tout $y \in K \backslash C_2$, il existe $\bar{u} \in C_1$et $\bar{v} \in C_2$ tel que*

$$\inf_{u^* \in F(\bar{u})} \langle u^* - \bar{v}, \bar{u} - x\rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} - y\rangle \ < 0. \tag{2.5}$$

(iii) *$Sol(K, F)$ est non vide et borné.*

(iv) $M \cap int(-barr\ K) \neq \emptyset$.

Alors, ***(i)*** $\Longrightarrow$ ***(ii)*** *si $int(barr K) \neq \emptyset$;* ***(ii)*** $\Longrightarrow$ ***(iii)*** *si F est monotone et hémicontinue supérieurement ;* ***(iii)*** $\Longrightarrow$ ***(iv)*** *et* ***(iv)*** $\Longrightarrow$ ***(i)***.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii)

Si **(ii)** n'a pas lieu, alors il existe une suite $\big((x_n, y_n)\big)_n \subset B$, tel que pour tout n, $\|x_n\| > n$, $\|y_n\| > n$ et

$$\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x_n\rangle + \langle u, v - y_n\rangle \geq 0. \tag{2.6}$$

pour tout $(u, v) \in B$ avec $\|u\| < n$ et $\|v\| < n$. Ceci implique que

$$\langle u^* - v, u - x_n\rangle + \langle u, v - y_n\rangle \geq 0 \tag{2.7}$$

pour tout $u^* \in F(u)$ et tout $(u, v) \in B$ avec $\|u\| < n$ et $\|v\| < n$. Utilisant (2.7) avec $v = u^*$, on obtient en particulier que

$$\langle u, u^* - y_n\rangle \geq 0 \tag{2.8}$$

Pour tout $u^* \in F(u) \cap K$ et tout $u \in K$ tel que $\|u\| < n$ et $\|u^*\| < n$.

Maintenant, soit $\tilde{u} \in M$, il existe $\tilde{u}^* \in F(\tilde{u}) \cap K$ et prenant en compte (2.8), il vient que pour tout n tel que $n \geq \|\tilde{u}\|$ et $n \geq \|\tilde{u}^*\|$, on a

$$\langle \tilde{u}, \tilde{u}^* - y_n\rangle \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\left\langle \frac{\tilde{u}^*}{n}, \tilde{u} \right\rangle - \left\langle \frac{y_n}{\|y_n\|}, \tilde{u} \right\rangle \geq \left\langle \frac{\tilde{u}^*}{\|y_n\|}, \tilde{u} \right\rangle - \left\langle \frac{y_n}{\|y_n\|}, \tilde{u} \right\rangle \geq 0. \tag{2.9}$$

Or, $(y_n)_n \subset K$ et $\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)_n$ est bornée dans E', donc, sans perte de généralité, nous pouvons supposer (par le Théorème 1.2.19) que $\frac{y_n}{\|y_n\|} \underset{n \longrightarrow \infty}{\rightharpoonup} d$. Donc par un passage à la limite dans (2.9), on obtient

$$\langle d, \tilde{u} \rangle \leq 0.$$

Nous avons, $\tilde{u} \in M$ tel que $\langle d, \tilde{u} \rangle \leq 0$. Ce qui signifie par la Définition 1.2.26 que $d \in M^-$ et donc $d \in K_\infty \cap M^-$ qui par (**i**), implique que $d = 0$. D'autre part, on a par la Définition 1.2.26, $d \in K_\infty$. Puisque $int(barr\ K) \neq \emptyset$, par le Lemme 2.1.1 on a $d \neq 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $d = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)**

Soit $G : B \rightrightarrows B$ une m.a. définie par : pour tout $(u, v) \in B$

$$G(u, v) := \left\{ (x, y) \in B : \inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x \rangle + \langle u, v - y \rangle \geq 0 \right\}.$$

Par (**ii**), il est clair que G est à valeur non vides. Soit maintenant $\big((x_n, y_n)\big)_n$ une suite convergeant vers (x_0, y_0), telle que $(x_n, y_n) \in G(u, v)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x_n \rangle + \langle u, v - y_n \rangle \geq 0.$$

Par passage à la limite, il s'ensuit que

$$\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x_0 \rangle + \langle u, v - y_0 \rangle \geq 0.$$

Ceci montre que $(x_0, y_0) \in G(u, v)$ et donc que G est à valeurs fermées.
Ensuite, nous devons prouver que G est une m.a. KKM de B vers B $\big($(**i**) du Lemme 1.3.16$\big)$. Si ce n'est pas le cas, nous avons pour tout ensemble fini $\tilde{K}$ de B

$$co(\tilde{K}) \not\subset \bigcup_{(u,v) \in \tilde{K}} G(u, v). \tag{2.10}$$

Posons $\tilde{K} = \{(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)\} \in B$ et soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in co(\tilde{K})$. Ils existent $t_1, t_2, \ldots, t_n \in$

$[0,1]$ avec $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ et

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} t_i(u_i, v_i) \in co(\tilde{K}).$$

D'autre part, nous avons par (2.10) que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \underset{i \in \overline{1,n}}{\notin} \bigcup G(u_i, v_i)$. En vertu de la définition de G, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$\inf_{u_i^* \in F(u_i)} \langle u_i^* - v_i, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle < 0.$$

Par cette dernière relation et puisque F est monotone, il existe $u_i^* \in F(u_i)$ tel que pour tout $x^* \in F(\tilde{x})$, on a

$$\begin{aligned}
0 &> \langle u_i^* - v_i, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle \\
&= \langle u_i^* - x^* + x^* - v_i, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle \\
&= \langle u_i^* - x^*, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle x^* - v_i, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle \\
&\geq \langle x^* - v_i, u_i - \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle, \\
&= \langle x^* - v_i, u_i \rangle - \langle x^* - v_i, \tilde{x} \rangle + \langle u_i, v_i - \tilde{y} \rangle
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle x^* - \tilde{y}, u_i \rangle - \langle x^* - v_i, \tilde{x} \rangle < 0,$$

et donc

$$\begin{aligned}
0 &> \left\langle x^* - \tilde{y}, \sum_{i=1}^{n} t_i u_i \right\rangle - \left\langle x^* - \sum_{i=1}^{n} t_i v_i, \tilde{x} \right\rangle \\
&= \langle x^* - \tilde{y}, \tilde{x} \rangle - \langle x^* - \tilde{y}, \tilde{x} \rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à une contradiction. Il résulte donc que G est une m.a. KKM. Montrons à présent que G est à valeurs convexes. Soient $(u, v) \in B, (x, y), (x', y') \in G(u, v)$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned}
&\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x \rangle + \langle u, v - y \rangle \geq 0 \\
&\inf_{u^* \in F(u)} \langle u^* - v, u - x' \rangle + \langle u, v - y' \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\lambda \in [0,1]$, il vient que

$$\begin{aligned}&\inf_{u^*\in F(u)} \langle u^* - v, \lambda u - \lambda x\rangle + \langle u, \lambda v - \lambda y\rangle \\ &+ \inf_{u^*\in F(u)} \langle u^* - v, (1-\lambda)u - (1-\lambda)x'\rangle + \langle u, (1-\lambda)v - (1-\lambda)y'\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\inf_{u^*\in F(u)} \big\langle u^* - v, u - \big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big)\big\rangle + \big\langle u, v - \big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big)\big\rangle \geq 0.$$

Ainsi

$$\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y') = \big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\big) \in G(u,v),$$

d'où la convexité des valeurs de G.

A présent, supposons que C est un ensemble borné, fermé et convexe de $E \times E'$ (sinon, nous prouvons considérer l'enveloppe fermée et convexe de C au lieu de C). Soit $\{(u_1,v_1),\ldots,(u_m,v_m)\}$ un nombre fini de points dans B et soit

$$N := co\big(C \ \cup \ \{(u_1,v_1),\ldots,(u_m,v_m)\}\big).$$

Grâce au Lemme 1.2.25, il clair que N est faiblement compact et convexe (car E est réflexif). Considérons la m.a. G' définie par

$$G'(u,v) := G(u,v) \cap N \text{ pour tout } (u,v) \in N.$$

Alors, chaque $G'(u,v)$ est un sous-ensemble convexe (l'intersection de deux ensembles convexes est convexe) et compact de N (intersection d'un compact et un fermé). Il est clair que G' est une m.a. KKM. De plus,

$$\emptyset \neq \bigcap_{(u,v)\in N} G'(u,v) \subset C. \tag{2.11}$$

En effet, grâce au Lemme 1.3.16, l'intersection dans la relation (2.11) est non vide. De plus, s'il existe $(x_0,y_0) \in \bigcap_{(u,v)\in N} G'(u,v)$ mais $(x_0,y_0) \notin C$, alors vertu de la condition de coercivité (2.5), on a

$$\inf_{u^*\in F(\bar{u})} \langle u^* - \bar{v}, \bar{u} - x_0\rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} - y_0\rangle \ < 0,$$

pour un certain $(\bar{u}, \bar{v}) \in C_1 \times C_2 \in B$. Ainsi, $(x_0, y_0) \notin G(u, v)$ et donc $(x_0, y_0) \notin G'(u, v)$ ce qui est en contradiction avec le choix de (x_0, y_0). L'affirmation (2.11) étant ainsi prouvée. Soit $(x, y) \in \bigcap_{(u,v)\in N} G'(u, v)$. Alors, $(x, y) \in C$ par (2.11), et par la définition de N on trouve

$$(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{m} \big(G(u_i, v_i) \cap C\big).$$

Par conséquent, l'ensemble $\{G(u, v) \cap C : (u, v) \in B\}$ est d'intersection finie. Puisque pour tout $(u, v) \in B$, $G(u, v) \cap C$ est faiblement compact, il s'ensuit que $\bigcap_{(u,v)\in B}(G(u, v) \cap C)$ est non vide qui coïncide avec l'ensemble solution de $IVID(B, F)$. Grâce au Théorème 2.1.2, comme F est monotone et hémicontinue supérieurement on déduit que $Sol(K, F)$ est non vide. Comme C est borné, on trouve que $Sol(K, F)$ l'est aussi.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

Supposons que **(iii)** soit vraie et **(iv)** est fausse. Soit alors $\bar{s} \in Sol(K, F)$. Par définition, on a $\bar{s} \in M$ et $\exists \bar{x}^* \in F(\bar{s}) \cap K$ tel que

$$\langle z - \bar{x}^*, \bar{s}\rangle \geq 0, \quad \forall z \in K,$$

donc

$$\langle z, \bar{s}\rangle \geq \langle \bar{x}^*, \bar{s}\rangle \quad \forall z \in K.$$

D'où,

$$\inf_{z\in K} \langle z, \bar{s}\rangle = \langle \bar{x}^*, \bar{s}\rangle,$$

alors,

$$\sup_{z\in K} \langle -z, \bar{s}\rangle = -\langle \bar{x}^*, \bar{s}\rangle.$$

$\bar{s}$ étant borné, alors $\langle \bar{x}^*, \bar{s}\rangle$ est fini et donc

$$\sup_{z\in K} \langle -z, \bar{s}\rangle < +\infty.$$

Autrement dit $\bar{s} \in int(-barr(K))$. Ceci contredit notre hypothèse.

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

Supposons que $K_\infty \cap M^- \neq \{0\}$. Soit $(d_n)_n$ une suite telle pour tout n, $d_n \in K_\infty \cap M^-$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que$\|d_n\| = 1$ $\big($car $K_\infty \cap M^-$ étant cone, $\frac{d_n}{\|d_n\|} \in K_\infty \cap M^-\big)$ et K étant réflexif, il existe $d_0 \in E$ tel que $(d_n)_n$ converge faiblement vers d_0. Par le Lemme 2.1.1, $d_0 \neq 0$. Comme K_∞ est un cône fermé, $d_0 \in K_\infty$. Soit $x_0 \in M \cap int(-barrK)$. Puisque $d_n \in M^-$, on a $\langle d_n, x_0\rangle \leq 0$. Ceci implique, puisque $(d_n)_n$

converge faiblement vers d_0, que $\langle d_0, x_0\rangle \leq 0$. Par la relation (1.1) on a, $-barr(K) = K^+_\infty$ et donc $\langle d_0, x_0\rangle \geq 0$. Il s'ensuit que $\langle d_0, x_0\rangle = 0$. Comme $x_0 \in int(-barr\ K)$, pour tout $z \in E$, il existe $t \in]0,1[$, tel que
$tx_0 + (1-t)z \in -barr\ K = K^+_\infty$. Cela signifie que pour $d_0 \in A$

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle d_0, tx_0 + (1-t)z\rangle &= \langle d_0, tx_0\rangle + \langle d_0, (1-t)z\rangle \\ &= (1-t)\langle d_0, z\rangle \end{aligned}$$

et donc $\langle d_0, z\rangle \geq 0 \quad \forall z \in E$. En particulier pour $-z \in E$, on déduit que $\langle d_0, z\rangle \leq 0$. Contradiction avec $d_0 \neq 0$. □

Remarque 2.1.5. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction lipschitzienne sur Ω, alors, pour tout $(t,x) \in \Omega$ et t_0 fixé dans $[0,T]$, ilexiste $\rho_f(t_0) > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &= \|f(t,x) - f(t_0,0) + f(t_0,0)\| \\ &\leq \|f(t,x) - f(t_0,0)\| + \|f(t_0,0)\| \\ &\leq L_f\big(|t-t_0| + \|x\|\big) + \|f(t_0,0)\| \\ &\leq L_f\big(2T + \|x\|\big) + \|f(t_0,0)\| \\ &= 2L_fT + L_f\|x\| + \|f(t_0,0)\| \\ &= \big(2L_fT + \|f(t_0,0)\|\big) + L_f\|x\| \\ &\leq \rho_f + \rho_f\|x\| \\ &= \rho_f\big(1 + \|x\|\big), \end{aligned}$$

où $\rho_f = \max\big\{L_f, 2L_f + \|f(t_0,0)\|\big\}$.
De même $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne sur Ω, donc il existe une constante $\rho_h > 0$ telle que pour tout $(t,x) \in \Omega$,

$$\|h(t,x)\| \leq \rho_h\big(1 + \|x\|\big).$$

2.2 Existence de solution pour une IVDI.

Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.2.1. *([12], Lemme 6.3) Soit $w : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue* *et* $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une m.a. à valeurs non vides, fermées telle que pour une constante positive* $\eta_G > 0$, *on a*

$$\sup\{\|y\| : y \in G(t,x)\} \leq \eta_G(1 + \|x\|),\ \forall (t,x) \in \Omega.$$

Soit $v : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction mesurable et* $x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *une fonction continue tel que*

$$v(t) \in w\big(t, x(t), G\big(t, x(t)\big)\big) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Alors, il existe une fonction mesurable $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que*

$$u(t) \in G(t,x(t)) \text{ et } v(t) = w(t, x(t), u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T].$$

Lemme 2.2.2. *[4, Théoreme 5.1] Soit* $\mathbb{F} : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *une m.a. s.c.s. à valeurs non vides, convexes et fermées. On suppose qu'il existe une constante* $\rho^{\mathbb{F}} > 0$ *satisfaisant*

$$\sup\Big\{\|y\| : y \in \mathbb{F}(t,x)\Big\} \leq \rho^{\mathbb{F}}\big(1 + \|x\|\big),\ \forall (t,x) \in \Omega. \tag{2.12}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$, *l'inclusion différentielle*

$$\dot{x}(t) \in \mathbb{F}(t, x(t)) \quad p.p.\ \ t \in [0,T], \quad x(0) = x_0, \tag{2.13}$$

admet une solution $x(\cdot)$ *absolument continue.*

Démonstration. On va appliquer le Théorème 1.3.15 pour $D = \mathbb{R}^m,\ [0,a] = [0,T]$, $F = \mathbb{F}$ et et $c(t) = \rho^{\mathbb{F}}$. Nous avons pour tout $(t,x) \in \Omega$

$$\|\mathbb{F}(t,x)\| = \sup\big\{\|y\| : y \in \mathbb{F}(t,x)\big\} \leq \rho^{\mathbb{F}}(1 + \|x\|),$$

et $T_D(x) = \Big\{y \in \mathbb{R}^m : \varliminf_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1} d_D(x + \lambda y) = 0\Big\} = \mathbb{R}^m$. Donc

$$\mathbb{F}(t,x) \cap T_D(x) \neq \emptyset \text{ sur } \Omega.$$

Alors, l'inclusion (2.13) admet une solution absolument continue dans $\mathbb{R}^m$. $\square$

Lemme 2.2.3. *[19] Supposons que les conditions* (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites.*
Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble non vide, borné, fermé et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une m.a. s.c.s. à valeurs non vides, convexes et fermées. Supposons qu'il existe une*

constante $\rho > 0$ telle que, pour tout $q \in h(\Omega)$

$$\sup \big\{ \|u\| : u \in Sol\big(K, q + F(\cdot)\big) \big\} \leq \rho(1 + \|q\|). \tag{2.14}$$

Alors, il existe une constante $\rho^{\mathbb{F}} > 0$ telle que (2.12) soit vraie. Ainsi, $\mathbb{F}$ est une m.a. s.c.s. à graphe fermé sur Ω.

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'il existe une constante $\rho^{\mathbb{F}} > 0$ telle que (2.12) soit vraie. Soit $(t, x) \in \Omega$ et $y \in \mathbb{F}(t, x)$. D'après la relation (2.2), il existe $u \in Sol\big(K, h(t, x) + F(\cdot)\big)$ tel que $y = f(t, x) + g(t, x)u$. Par la Remarque 2.1.5 et l'hypothèse (H_1), il est facile de voir qu'il existe des constantes positives ρ_f *et* ρ_h telles que

$$\|f(t, x)\| \leq \rho_f(1 + \|x\|), \tag{2.15}$$

et

$$\|h(t, x)\| \leq \rho_h(1 + \|x\|). \tag{2.16}$$

En appliquant les relations (2.14), (2.15), (2.16) et l'hypothèse (H_2) on obtient que,

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \|f(t, x) + g(t, x)u\| \\
&\leq \|f(t, x)\| + \|g(t, x)u\| \\
&= \|f(t, x)\| + \|g(t, x)\| \; \|u\| \\
&\leq \rho_f\big(1 + \|x\|\big) + \|g(t, x)\| \; \rho\big(1 + \|h(t, x)\|\big) \\
&\leq \rho_f\big(1 + \|x\|\big) + \delta_g\rho\big(1 + \rho_h(1 + \|x\|)\big) \\
&= \rho_f\big(1 + \|x\|\big) + \delta_g\rho + \delta_g\rho\big(\rho_h(1 + \|x\|)\big) \\
&\leq \rho_f\big(1 + \|x\|\big) + \delta_g\rho(1 + \|x\|) + \delta_h\rho\big(\rho_h(1 + \|x\|)\big) \\
&= \big(\rho_f + \delta_g\rho + \delta_g\rho\rho_h\big)\big(1 + \|x\|\big).
\end{aligned}$$

Posons $\rho^{\mathbb{F}} = \rho_f + \delta_g\rho + \delta_g\rho\rho_h$, alors (2.12) est vérifiée.

Maintenant, nous montrons que $\mathbb{F}$ est s.c.s. Notons que sous la condition de croissance linéaire (2.12), la semi-continuité supérieure de $\mathbb{F}$ est vérifiée si $\mathbb{F}$ est fermée sur Ω. Soit $\big((t_n, x_n, z_n)\big)_n \subset gph(\mathbb{F})$ telle que $\big((t_n, x_n)\big)_n$ est une suite convergeant vers (t_0, x_0) dans Ω et $\bigg(z_n = f(t_n, x_n) + g(t_n, x_n)u_n\bigg)_n \subset \mathbb{F}(t_n, x_n)$ convergeant vers z_0, où

$$u_n \in Sol(K, h(t_n, x_n) + F(\cdot)).$$

Les relations (2.14) et (2.16), impliquent que

$$\begin{aligned}\|u_n\| &\leq \rho(1+\|h(t_n,x_n)\|)\\ &\leq \rho_f\big(1+\rho_h(1+\|x_n\|)\big).\end{aligned}$$

Par cette dernière inégalité et en utilisant le fait que $(x_n)_n$ converge vers x_0 dans $\mathbb{R}^m$ (donc bornée), on déduit que $(u_n)_n$ est bornée. Par conséquent, $(u_n)_n$ admet une sous-suite extraite, notée encore $(u_n)_n$, telle que $(u_n)_n$ converge vers u_0 dans $\mathbb{R}^n$.
Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in Sol(K, h(t_n,x_n)+F(\cdot))$. Par la Définition 2.1.1, il existe $u_n^* \in F(u_n)$ et $h(t_n,x_n)+u_n^* \in K$ tel que,

$$\big\langle y-h(t_n,x_n)-u_n^*, u_n\big\rangle \geq 0\ , \quad \forall y \in K. \tag{2.17}$$

Comme K est borné il existe $m>0$ tel que $\|h(t_n,x_n)+u_n^*\| \leq m$. et grâce à (2.16), on obtient

$$\begin{aligned}\|u_n^*\| &\leq \|u_n^*+h(t_n,x_n)\|+\|h(t_n,x_n)\|\\ &\leq m+\rho_h(1+\|x_n\|),\end{aligned}$$

impliquant que, $(u_n^*)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$. On peut donc en extraire une sous-suite, notée aussi $(u_n^*)_n$, qui converge vers u_0^*. Nous avons,

$$u_n^* \in F(u_n)\ i.e.,\ (u_n,u_n^*) \in gph(F).$$

Or, $\big((u_n,u_n^*)\big)_n$ converge vers (u_0,u_0^*). Puisque F est s.c.s. à valeurs non vides fermées, par le Lemme 1.3.12, F est fermée i.e., son graphe est fermé et donc,

$$(u_0,u_0^*) \in gph(F)\ i.e.,\ u_0^* \in F(u_0).$$

D'autre part, de la convergence de $\big((t_n,x_n)\big)_n$ et la lipschizité de h, il vient que

$$\|h(t_n,x_n)-h(t_0,x_0)\| \leq \rho_h\big(|t_n-t_0|+\|x_n-x_0\|\big),$$

et donc

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} h(t_n,x_n)=h(t_0,x_0).$$

K étant fermé, on déduit que

$$h(t_0, x_0) + u_0^* \in K.$$

grâce à (2.17), on a pour tout $y \in K$

$$\begin{aligned}
&\langle y - h(t_0, x_0) - u_0^*, u_0 \rangle \\
&= \langle y - h(t_n, x_n) - u_n^*, u_0 \rangle + \langle h(t_n, x_n) - h(t_0, x_0) + u_n^* - u_0^*, u_0 \rangle \\
&= \langle y - h(t_n, x_n) - u_n^*, u_n \rangle - \langle y - h(t_n, x_n) - u_n^*, u_n - u_0 \rangle \\
&- \langle h(t_0, x_0) - h(t_n, x_n) + u_0^* - u_n^*, u_0 \rangle \\
&\geq -\|y - h(t_n, x_n) - u_n^*\| \|u_n - u_0\| \\
&- \big(\|h(t_0, x_0) - h(t_n, x_n)\| + \|u_n^* - u_0^*\| \big) \|u_0\| \\
&\longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Récapitulant, on a l'existence de $u_0^* \in F(u_0)$ et $h(t_0, x_0) + u_0^* \in K$ tel que pour tout $y \in K$,

$$\langle y - h(t_0, x_0) - u_0^*, u_0 \rangle \geq 0,$$

i.e., $u_0 \in Sol\big(K, h(t_0, x_0) + F(\cdot)\big)$. De plus, par (H_1) et (H_2) on a

$$\begin{aligned}
&\|f(t_n, x_n) + g(t_n, x_n)u_n - f(t_0, x_0) - g(t_0, x_0)u_0\| \\
&\leq \|f(t_n, x_n) - f(t_0, x_0)\| + \|g(t_n, x_n)u_n - g(t_0, x_0)u_0\| \\
&\leq \|f(t_n, x_n) - f(t_0, x_0)\| + \|g(t_n, x_n)u_n - g(t_0, x_0)u_n\| + \|g(t_0, x_0)u_n - g(t_0, x_0)u_0\| \\
&\leq L_f\big(|t_n - t_0| + \|x_n - x_0\|\big) + L_g\big(|t_n - t_0| + \|x_n - x_0\|\big)\|u_n\| + \delta_g\|u_n - u_0\|.
\end{aligned}$$

Or, $(u_n)_n$ est bornée et converge vers u_0 et $\big((t_n, x_n)\big)_n$ converge vers (t_0, x_0). Donc par un passage à la limite dans la dernière relation, on déduit que $(f(t_n, x_n) + g(t_n, x_n)u_n)_n$ converge vers $\big(f(t_0, x_0) + g(t_0, x_0)u_0\big)$ i.e., $z_0 = f(t_0, x_0) + g(t_0, x_0)u_0$ et on a $u_0 \in Sol\big(K, h(t_0, x_0) + F(\cdot)\big)$. Donc, $z_0 \in \mathbb{F}(t_0, x_0)$. Par conséquent, $\mathbb{F}$ est fermé. Ceci complète la démonstration. □

Théorème 2.2.4. *Supposons que les conditions du Lemme 2.2.3 sont satisfaites et que et que pour tout $q \in h(\Omega)$, il existe une constante $\rho > 0$ telle que la relation* (2.14) *soit satisfaite et que l'ensemble $Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$ soit non vide, fermé et convexe. Alors, l'IVDI* (2.1) *admet une solution faible au sens de Carathéodory.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.3, qu'il existe une constante $\rho^{\mathbb{F}} > 0$ telle que la relation (2.12) soit vérifiée et $\mathbb{F}$ est une m.a. s.c.s. à graphe fermée. Puisque pour tout $q \in h(\Omega)$, $Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$ est non vide, alors pour tout $(t, x) \in \Omega$, $\mathbb{F}(t, x)$ est non vide. Montrons que $\mathbb{F}(t, x)$ est convexe.
Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{F}(t, x)$, $\eta \in [0, 1]$. Donc, il existent $u_1, u_2 \in Sol\big(K, h(t, x) + F(\cdot)\big)$ tels que $y_1 = f(t, x) + g(t, x)u_1$ et $y_2 = f(t, x) + g(t, x)u_2$.
Par la convexité de $Sol\big(K, h(t, x) + F(\cdot)\big)$, on a pour tout $\eta \in]0, 1[$

$$\eta u_1 + (1 - \eta)u_2 \in Sol(K, h(t, x) + F(\cdot)),$$

et

$$\eta y_1 + (1 - \eta)y_2 = f(t, x) + g(t, x)\big(\eta u_1 + (1 - \eta)u_2\big).$$

Alors,

$$\eta y_1 + (1 - \eta)y_2 \in \mathbb{F}(t, x),$$

d'où la convexité de $\mathbb{F}(t, x)$.
Montrons à présent que $\mathbb{F}$ est à valeurs fermées. En effet, soit $(t, x) \in \Omega$ et $(y_n)_n \subset \mathbb{F}(t, x)$ telle que $(y_n)_n$ converge vers y_0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \mathbb{F}(t, x)$. Donc il existe $(u_n)_n \subset Sol(K, q + F(\cdot))$ et $y_n = f(t, x) + g(t, x)u_n$. Par la relation (2.14), on a pour $q \in h(\Omega)$

$$\|u_n\| \leq \rho(1 + \|q\|).$$

donc $(u_n)_n$ bornée. On peut en extraire une sous-suite qui converge vers u_0. Puisque $Sol(K, q + F(\cdot)$ est fermé, on déduit que $u_0 \in Sol(K, q + F(\cdot)$. Donc,

$$y_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \big(f(t, x) + g(t, x)u_n\big) = f(t, x) + g(t, x)u_0,$$

et on conclut que $y_0 \in \mathbb{F}(t, x)$.

La m.a. $\mathbb{F}$ étant s.c.s. à valeurs convexes fermées non vides et vu qu'il existe une constante $\rho^{\mathbb{F}} > 0$ tel que (2.12) est vraie, grâce au Lemme 2.2.2, l'inclusion (2.13) admet une solution $x(\cdot)$ absolument continue. Ainsi, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) \in \mathbb{F}(t, x(t)) \text{ avec } x(0) = x_0.$$

Donc, par la relation (2.12), pour tout $t \in [0, T]$

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \rho^{\mathbb{F}}(1 + \|x(t)\|) \tag{2.18}$$

De plus, on a (car $x(\cdot)$ est absolument continue)

$$\int_0^t \dot{x}(s)ds = x(t) - x(0). \tag{2.19}$$

En utilisant les relation (2.18) et (2.19), il vient que

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x(t) - x(0)\| + \|x(0)\| \\
&= \left\| \int_0^t \dot{x}(s)ds \right\| + \|x(0)\| \\
&= \int_0^t \|\dot{x}(s)\|ds + \|x(0)\| \qquad (2.20) \\
&\leq \|x_0\| + \int_0^t \rho^{\mathbb{F}}\big(1 + \|x(s)\|\big)ds \\
&= \|x_0\| + t\rho^{\mathbb{F}} + \int_0^t \|x(s)\|ds \\
&\leq \|x_0\| + T\rho^{\mathbb{F}} + \int_0^t \|x(s)\|ds \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 1.2.13, on déduit que

$$\|x(t)\| \leq \big(\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}}T\big)e^{\rho^{\mathbb{F}}T}. \tag{2.22}$$

Soit maintenant $G(t,x) := Sol\big(K, h(t,x) + F(\cdot)\big)$ et $w(t,x,u) := f(t,x) + g(t,x)u$. Nous concluons par le Lemme 2.2.1, qu'il existe une fonction mesurable $u(\cdot)$ telle que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$u(t) \in Sol\big(K, h(t, x(t)) + F(\cdot)\big)$$

et

$$\dot{x}(t) = f(t,x) + g(t,x)u(t).$$

La relation (2.14) implique que pour presque tout $t \in [0,T]$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$\|u(t)\| \leq \rho\big(1 + \|h(t, x(t))\|\big). \tag{2.23}$$

De (2.16), (2.22) et (2.23), il résulte que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq \rho\big(1 + \rho_h\,(1 + \|x(t)\|)\,\big)\\ &\leq \rho\left(1 + \rho_h\left(1 + (\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}}T)e^{\rho^{\mathbb{F}}T}\right)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, $u(\cdot)$ est intégrable sur $[0, T]$. D'où, $(x(\cdot),\ u(\cdot))$ est une solution faible au sens de Carathéodory du problème (2.1). □

Corollaire 2.2.5. *Supposons que (H_1) et (H_2) sont satisfaites. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe. Supposons de plus les assertions suivantes*

- ***(i)*** *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est strictement monotone et hémicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$.*
- ***(ii)*** *Pour tout $q \in h(\Omega), K_\infty \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \big(q + F(x)\big) \cap K \neq \emptyset\}^- = \{0\}$.*
- ***(iii)*** *L'intérieur de $barr(K)$ est non vide.*

Alors, $Sol(K, q + F(\cdot))$ est un singleton pour tout $q \in h(\Omega)$. De plus, il existe une constante $\rho > 0$ telle que (2.14) est vérifiée pour tout $q \in h(\Omega)$.

Démonstration. On va appliquer le Théorème 2.1.4. Sachant que F est strictement monotone donc monotone, nous aurons par les condition $(\mathbf{i}) - (\mathbf{iii})$ que $Sol(K, q + F(\cdot))$ est non vide et borné. Ensuite, nous montrons que pour $q \in h(\Omega)$, $Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$ est un singleton.

Soient $u_1, u_2 \in Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$ et supposons que $u_1 \neq u_2$. Par définition, ils existe $u_1^* \in F(u_1)$, $u_2^* \in F(u_2)$ tels que

$$q + u_1^* \in \big(q + F(u_1)\big) \cap K \text{ avec } \langle y - q - u_1^*, u_1\rangle \geq 0,\ \forall y \in K, \tag{2.24}$$

et

$$q + u_2^* \in \big(q + F(u_2)\big) \cap K \text{ avec } \langle y - q - u_2^*, u_1\rangle \geq 0,\ \forall y \in K. \tag{2.25}$$

Prenant $y = q + u_2^*$ dans (2.24), on trouve

$$\langle q + u_2^* - q - u_1^*, u_1\rangle \geq 0.$$

Ceci implique que

$$\langle u_2^* - u_1^*, u_1\rangle \geq 0,$$

De même, avec $y = q + u_1^*$ dans (2.25), on obtient

$$\langle u_1^* - u_2^*, u_2 \rangle \geq 0.$$

Il résulte des deux inégalités précédentes que

$$\langle u_2^* - u_1^*, u_1 \rangle + \langle u_1^* - u_2^*, u_2 \rangle \geq 0,$$

d'où

$$\langle u_2^* - u_1^*, u_1 - u_2 \rangle \geq 0. \tag{2.26}$$

Puisque F est strictement monotone, $u_1 \neq u_2,\ u_1^* \in F(u_1),\ u_2^* \in F(u_2)$, on obtient que

$$\langle u_2^* - u_1^*, u_2 - u_1 \rangle > 0$$

qui contredit (2.26). On en déduit que $Sol(K, q + F(\cdot))$ est un singleton pour tout $q \in h(\Omega)$. Puisque $Sol(K, q + F(\cdot))$ est borné, on déduit que la relation (2.14) est vérifiée pour tout $q \in h(\Omega)$. Ceci complète la démonstration. □

Théorème 2.2.6. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe et supposons que (H_1) et (H_2) sont satisfaites. Si*

- ***(i)*** *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est strictement monotone et hémicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$,*
- ***(ii)*** *$F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une m.a. s.c.s. à valeurs convexes fermées non vides,*
- ***(iii)*** *Pour tout $q \in h(\Omega)$,*

$$K_\infty \cap \{x \in \mathbb{R}^n, q + F(x) \cap K \neq \emptyset\}^- = \{0\}.$$

- ***(iv)*** *L'intérieur de $barr(K)$ est non vide,*

alors, l'IVDI (2.1) admet une solution faible au sens de Carathéodory.

Démonstration. Par le Corollaire 2.2.5, les conditions (i), (iii), (iv) impliquent que (2.14) est vérifiée i.e., il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $q \in h(\Omega)$,

$$\sup\Big\{\|u\| : u \in Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)\Big\} \leq \rho\big(1 + \|q\|\big).$$

et que $Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$ est un singleton pour tout $q \in h(\Omega)$. De plus, par la dernière estimation et la condition (ii), il résulte du Théorème 2.2.4 que l'IVDI (2.1) admet une solution faible au sens de Carathéodory. Ceci complète la preuve. $\square$

Remarque 2.2.7. *D'après la preuve ci-dessus, il est facile de voir que* $u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$. *En effet, pour* $u \in Sol\big(K, q + F(\cdot)\big)$, $q \in h(\Omega)$, *nous avons*

$$\|u\| \leq \rho(1 + \|q\|)$$

alors,

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \int_0^T \big(\rho(1 + \|q\|)\big)^2 dt$$

donc,

$$\left(\int_0^T \|u\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T (\rho(1 + \|q\|))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}(\rho(1 + \|q\|)) < +\infty.$$

D'où, $u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

2.3 Unicité de la solution

Dans cette section on étudie l'unicité de solution pour l'IVDI (2.1).

Théorème 2.3.1. *Supposons que toutes les conditions du Théorème 2.2.6 sont vérifiées en remplaçant* (i) *par*
(i') : $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est fortement monotone et hémicontinue supérieurement sur* $\mathbb{R}^n$.
Alors, l'IVDI (2.1) *possède une unique solution faible au sens de Carathéodory* $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^m) \times L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Par le Théorème 2.2.6, nous savons que l'IVDI (2.1) admet au moins une solution (x, u) faible au sens de Carathéodory. Il suffit donc de montrer que cette solution est unique. Pour ce faire, on considère (x_1, u_1) et (x_2, u_2) deux solutions faibles au sens de Carathéodory pour le problème (2.1). Autrement dit, (x_1, u_1) $\big($resp. $(x_2, u_2)\big)$ vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} x_i(t) = x_0 + \int_0^t f\big(\tau, x_i(\tau)\big) + g(\tau, x_i(\tau))u_i(\tau)d\tau, \quad \forall\, t \in [0,T]; \quad i = 1, 2. \\ u_i(t) \in Sol\big(K, h(t, x_i(t)) + F(\cdot)\big) \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ x_i(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Pour presque tout $t \in [0,T]$, nous avons $u_i(t) \in Sol\big(K, h(t,x_i(t))+F(\cdot)\big)$. Par conséquent, il existe un ensemble mesurable A de $[0,T]$ de mesure non nulle tel que pour tout $t \in [0,T]\setminus A$, il existe $u_1^*(t) \in F(u_1(t))$ $\big($resp. $u_2^*(t) \in F(u_2(t))\big)$ et $h(t,x_1(t))+u_1^*(t) \in K$ $\big($resp. $h(t,x_2(t)) + u_2^*(t) \in K\big)$ avec

$$\langle y - h(t,x_1(t)) - u_1^*(t), u_1(t)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in K, \tag{2.28}$$

respectivement,

$$\langle y - h(t,x_2(t)) - u_2^*(t), u_2(t)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in K. \tag{2.29}$$

Pour tout $t \in [0,T]\backslash A$, en prenant $y = h(t,x_2(t)) + u_2^*(t)$ dans (2.28), on obtient

$$\big\langle h(t,x_2(t)) + u_2^*(t) - h(t,x_1(t)) - u_1^*(t), u_1(t)\big\rangle \geq 0$$

et pour $y = h(t,x_1(t)) + u_1^*(t)$ dans (2.29), on aura

$$\big\langle h(t,x_1(t)) + u_1^*(t) - h(t,x_2(t)) - u_2^*(t), u_2(t)\big\rangle \geq 0.$$

Par conséquent, $\big($en sommant les deux dernières inégalités$\big)$ pour tout $t \in [0,T]\backslash A$,

$$\big\langle h(t,x_1(t)) + u_1^*(t) - h(t,x_2(t)) - u_2^*(t), u_2(t) - u_1(t)\big\rangle \geq 0,$$

et donc

$$\big\langle h(t,x_1(t)) - h(t,x_2(t)), u_2(t) - u_1(t)\big\rangle + \big\langle u_1^*(t) - u_2^*(t), u_2(t) - u_1(t)\big\rangle \geq 0,$$

d'où

$$\big\langle h(t,x_1(t)) - h(t,x_2(t)), u_2(t) - u_1(t)\big\rangle \geq \big\langle u_1^*(t) - u_2^*(t), u_1(t) - u_2(t)\big\rangle. \tag{2.30}$$

Comme F est fortement monotone sur $\mathbb{R}$, nous avons par (1.5), pour $\mu > 0$

$$\big\langle u_1^*(t) - u_2^*(t), u_1(t) - u_2(t)\big\rangle \geq \mu\|u_1(t) - u_2(t)\|^2. \tag{2.31}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous savons que

$$\begin{aligned}&\big\langle h\big(t,x_1(t)\big)-h\big(t,x_2(t)\big),u_2(t)-u_1(t)\big\rangle\\ &\leq \|h(t,x_1(t))-h(t,x_2(t))\|\,\|u_1(t)-u_2(t)\|.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Combinant les relations (2.30), (2.31) et (2.32), on trouve pour presque tout $t\in[0,T]$

$$\|h(t,x_1(t))-h(t,x_2(t))\|\,\|u_1(t)-u_2(t)\|\geq \mu\|u_1(t)-u_2(t)\|^2,$$

donc

$$\mu\|u_1(t)-u_2(t)\|\leq \|h(t,x_1(t))-h(t,x_2(t))\|.$$

Par la lipschizité de la fonction h, on arrive à

$$\mu\|u_1(t)-u_2(t)\|\leq L_h\|x_1(t)-x_2(t)\|, \tag{2.33}$$

alors,

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leq \frac{L_h}{\mu}\|x_1(t)-x_2(t)\|. \tag{2.34}$$

De plus, de (2.27), on déduit que pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\|x_1(t)-x_2(t)\| &= \left\|\int_0^t f(\tau,x_1(\tau))+g(\tau,x_1(\tau))u_1(\tau)d\tau-\int_0^t f(\tau,x_2(\tau))+g(\tau,x_2(\tau))u_2(\tau)d\tau\right\|\\ &= \left\|\int_0^t \big(f(\tau,x_1(\tau))+g(\tau,x_1(\tau))u_1(\tau)-f(\tau,x_2(\tau))-g(\tau,x_2(\tau))u_2(\tau)d\tau\big)\right\|\\ &\leq \int_0^t \big\|f(\tau,x_1(\tau))+g(\tau,x_1(\tau))u_1(\tau)-f(\tau,x_2(\tau))-g(\tau,x_2(\tau))u_2(\tau)\big\|d\tau\\ &\leq \int_0^t \big\|f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_2(\tau))\big\|d\tau+\int_0^t \big\|g(\tau,x_1(\tau))u_1(\tau)-g(\tau,x_2(\tau))u_2(\tau)\big\|d\tau\\ &\leq \int_0^t \big\|f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_2(\tau))\big\|d\tau+\int_0^t \big\|g(\tau,x_1(\tau))u_1(\tau)-g(\tau,x_2(\tau))u_1(\tau)\big\|d\tau\\ &+\int_0^t \big\|g(\tau,x_2(\tau))u_1(\tau)-g(\tau,x_2(\tau))u_2(\tau)\big\|d\tau.\end{aligned} \tag{2.35}$$

Sous les conditions $(iii),(iv)$ et (i') du Théorème 2.3.1, on déduit du Théorème 2.1.4 que $Sol(K,h(t,x_1(t)+F(\cdot))$ est borné (de constante de bornitude $m>0$). Donc par

(H_1), (H_2) et les relations (2.34) et (2.35), on aura

$$
\begin{aligned}
\|x_1(t)-x_2(t)\| &\leq \int_0^t \|f(\tau,x_1(\tau))-f(\tau,x_2(\tau))\|d\tau + \int_0^t \|g(\tau,x_1(\tau))-g(\tau,x_2(\tau))\|\|u_1(\tau)\|d\tau \\
&+ \int_0^t \|g(\tau,x_2(\tau))\|\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|d\tau \\
&\leq L_f \int_0^t \|x_1(\tau))-x_2(\tau)\|d\tau + L_g \int_0^t \|x_1(\tau))-x_2(\tau)\|\|u_1(\tau)\|d\tau \\
&+ \delta_g \int_0^t \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|d\tau \\
&\leq (L_f+mL_g) \int_0^t \|x_1(\tau))-x_2(\tau)\|d\tau + \delta_g \frac{L_h}{\mu} \int_0^t \|x_1(\tau)-x_2(\tau)\|d\tau \\
&\leq \left(L_f+mL_g+\delta_g\frac{L_h}{\mu}\right) \int_0^t \|x_1(\tau)-x_2(\tau)\|d\tau.
\end{aligned}
$$

Il existe alors, une constante $C = L_f + mL_g + \delta_g \frac{L_h}{\mu} > 0$ telle que

$$\|x_1(t)-x_2(t)\| \leq C \int_0^t \Big\|x_1(\tau)-x_2(\tau)\Big\|d\tau.$$

Grâce au Lemme 1.2.13, déduit que

$$||x_1(t)-x_2(t)|| \leq 0,$$

donc

$$x_1(t) = x_2(t).$$

Donc, $x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$ dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^m)$. D'après la relation (2.34), nous aurons $u_1(t) = u_2(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Cela signifie que $u_1(\cdot) = u_2(\cdot)$ dans $L^2([0,T],\ \mathbb{R}^n)$. D'où, l'unicité de la solution. $\square$

CHAPITRE 3

STABILITÉ DE LA SOLUTION POUR L'IVDI

Dans ce chapitre, nous aurons pour objectif d'étudier la stabilité de l'IVDI (2.1) dans des espaces de dimension finie lorsque la m.a. et l'ensemble de contraintes sont perturbés par deux paramètres différents. Pour cela, nous considérons l'IVDI (2.1) paramétrique, notée IVDI $\big(L(p), h(t, x(t)) + F(\cdot, \lambda)\big)$, comme suit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ u(t) \in Sol\big(L(p), h(t, x(t)) + F(\cdot, \lambda)\big) \quad p.p.\ t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Soit (Z_1, d_1) et (Z_2, d_2) deux espaces métriques et $L : Z_1 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. à valeurs convexes fermées non vides. La m.a. $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une m.a. perturbée par un paramètre λ variant sur (Z_2, d_2), c'est à dire que $F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit, pour simplifier la notation, $S(p, \lambda)$ est la solution faible au sens de Carathéodory pour l'IVDI (3.1).
Nous allons établir la fermeture de l'ensemble de solutions et la continuité de l'application $(p, \lambda) \longmapsto S(p, \lambda)$.

Théorème 3.1. *([11], Théorème 4.1) Soit E un espace de Banach réflexif, E' son dual topologique, et soient $(Z_1, d_1), (Z_2, d_2)$ deux espaces métriques. Soit $L : Z_1 \rightrightarrows E'$ une m.a. continue, $p_0 \in Z_1$, $\lambda_0 \in Z_2$ des points donnés, $F : E \times Z_2 \rightrightarrows E'$ une m.a. s.c.i. sur Z_2. Supposons qu'il existe un voisinage $P \times \Lambda$ de (p_0, λ_0) tel que $L(p)$ est non vide, fermé et convexe pour tout $p \in P$ et $F(x, \lambda)$ est non vide et tout fermé pour tout $x \in E$ et tout*

$\lambda \in \Lambda$. Si

$$\big(L(p_0)\big)_\infty \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n : F(x,\lambda_0) \cap L(p_0) \neq \emptyset\}^- = \{0\}.$$

Alors, il existe un voisinage $P' \times \Lambda'$ de (p_0,λ_0) avec $P' \times \Lambda' \subset P \times \Lambda$ tel que pour tout $(p,\lambda) \in P' \times \Lambda'$

$$\big(L(p)\big)_\infty \bigcap \{x \in X : F(x,\lambda) \cap L(p) \neq \emptyset\}^- = \{0\}. \tag{3.2}$$

Théorème 3.2. *([11], Théorème 4.2) Supposons que toutes les conditions du Théorème 3.1 sont satisfaites. De plus, on suppose que*

- ***(i)*** *Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la m.a. $x \longmapsto F(x,\lambda)$ est monotone et hémicontinue supérieurement.*
- ***(ii)*** *L'ensemble de solution $Sol\big(L(p_0), F(\cdot,\lambda_0)\big)$ est non vide et borné.*

Alors, il existe un voisinage $P' \times \Lambda'$ de (p_0,λ_0) avec $P' \times \Lambda' \subset P \times \Lambda$ tel que pour tout $(p,\lambda) \in P' \times \Lambda'$, l'ensemble de solution $Sol\big(L(p), F(\cdot,\lambda)\big)$ est non vide et borné.

Lemme 3.3. *([11], Théorème 4.2, [11], Théorème 4.1) Soient $(Z_1,d_1),(Z_2,d_2)$ deux espaces métriques et $L : Z_1 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ m.a. continue, $p_0 \in Z_1$, $\lambda_0 \in Z_2$ des points donnés, $F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. s.c.i. sur Z_2.*
Supposons qu'il existe un voisinage $P \times \Lambda$ de (p_0,λ_0) tel que $L(p)$ est un ensemble non vide, fermé et convexe pour tout $p \in P$ et $F(x,\lambda)$ est non vide et fermé pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \Lambda$. De plus, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $q \in h(\Omega)$, la m.a. $x \longmapsto q+F(x,\lambda)$ est hémicontinue supérieurement et monotone. Si

$$\big(L(p_0)\big)_\infty \bigcap \big\{x \in \mathbb{R}^n : \big(q + F(x,\lambda_0)\big) \cap L(p_0) \neq \emptyset\big\}^- = \{0\}. \tag{3.3}$$

Alors, il existe un voisinage $P' \times \Lambda'$ de (p_0,λ_0) avec $P' \times \Lambda' \subset P \times \Lambda$ tel que pour tout $(p,\lambda) \in P' \times \Lambda'$, l'ensemble de solution $Sol\big(L(p), q + F(\cdot,\lambda)\big)$ est non vide et borné.

Démonstration. D'après le Théorème 3.1, il existe un voisinage $P' \times \Lambda'$ de (p_0,λ_0) avec $P' \times \Lambda' \subset P \times \Lambda$, tel que

$$(L(p))_\infty \cap \{x \in X : (q + F(x,\lambda)) \cap L(p) \neq \emptyset\}^- = \{0\}, \ \ \forall (p,\lambda) \in P' \times \Lambda'.$$

Donc grâce au Théorème 3.2, et au fait que la m.a. $x \longmapsto q + F(x,\lambda)$ est monotone et hémicontinue supérieurement, on obtient que l'ensemble de solution $Sol\big(L(p), q+F(\cdot,\lambda)\big)$

est non vide et borné. $\square$

Théorème 3.4. *Soient f, h, g trois fonctions satisfaisant les conditions (H_1) et (H_2), $p_0 \in Z_1$, $\lambda_0 \in Z_2$ deux points donnés. On suppose que les conditions suivantes ont lieu*

(i) $L : Z_1 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une m.a. continue à valeurs non vides, convexes, fermées et bornées telle que* $\bigcup_{p \in U(p_0)} L(p)$ *est compact, où $U(p_0)$ est un voisinage de p_0.*

(ii) $F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *une m.a. s.c.s. à valeurs non vides, convexes et fermées sur $\mathbb{R}^n \times Z_2$ et s.c.i. sur Z_2.*

(iii) *Il existe un voisinage Λ de λ_0, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la m.a. $x \longmapsto q + F(x, \lambda)$ est hémicontinue supérieurement et monotone pour tout $q \in h(\Omega)$.*

(iv) *L'ensemble $Sol\big(L(p_0), F(\cdot, \lambda_0)\big)$ est non vide et borné pour tout $q \in h(\Omega)$.*

(v) $F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *est strictement monotone et hémicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$.*

Alors, $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big)$ est fermé dans $Z_1 \times Z_2$.

Démonstration. D'après le Théorème 2.1.4, nous savons que la condition (iv) implique la relation (3.3). Donc par cette dernière relation et les conditions $(i) - (iv)$, il découle du Lemme 3.3 qu'il existe un voisinage $P' \times \Lambda'$ de (p_0, λ_0), $P' \times \Lambda' \subset P \times \Lambda$, tel que pour chaque $(p, \lambda) \in P' \times \Lambda'$, l'ensemble $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big)$ est non vide et borné. Grâce au Théorème 2.1.4, il vient que

$$L(p)_\infty \cap \{x \in \mathbb{R}^n, (q + F(x, \lambda)) \cap L(p) \neq \emptyset\}^- = \{0\}.$$

On déduit du Théorème 2.2.6 que l'IVDI (2.1) admet une solution faible au sens de Carathéodory.

Prouvons maintenant que $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big)$ est fermé. Soit $\big((p_n, \lambda_n)\big)_n \subset P \times \Lambda$ une suite qui converge vers (p_0, λ_0) et $(x_n, u_n) \in Sol\big(L(p_n), q + F(\cdot, \lambda_n)\big)$ avec $\big((x_n, u_n)\big)_n$ convergeant vers (x_0, u_0) dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^m) \times L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n, u_n) est une solution du problème (3.1) i.e.,

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = f(t, x_n(t)) + g(t, x_n(t))u_n(t), \quad \forall t \in [0, T] \\ u_n(t) \in Sol\big(L(p_n), h(t, x_n(t)) + F(\cdot, \lambda_n)\big) \quad p.p. \ t \in [0, T] \\ x_n(0) = x_0, \end{cases}$$

(a) $x_n(\cdot)$ étant absolument continue, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$x_n(t) - x_n(s) = \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big) u_n(\tau) d\tau. \tag{3.4}$$

(b) D'après la Définition 2.1.1, pour presque tout $t \in [0, T]$, il existe $u_n^*(t) \in F(u_n(t), \lambda_n)$ tel que $h(t, x_n(t)) + u_n^*(t) \in L(p_n)$ et

$$\big\langle y_n - h(t, x_n(t)) - u_n^*(t), u_n(t) \big\rangle \geq 0, \quad \forall (y_n)_n \subset L(p_n).$$

(c) La condition initiale

$$x_n(0) = x_0.$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers u_0 dans $L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$ i.e.,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_2 = 0.$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_n(t) - u_0(t)\| dt &\leq \left(\int_0^T \|u_n(t) - u_0(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{T}\, \|u_n - u_0\|_2, \end{aligned}$$

et par passage à la limite quand $n \longrightarrow \infty$, il vient que

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T \|u_n(t) - u_0(t)\|\, dt &\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{T} \left(\int_0^T \|u_n(t) - u_0(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci signifie que $(u_n)_n$ converge vers u_0 dans $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$, et donc,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_0^T u_n(t) dt = \int_0^T u_0(t) dt.$$

Cependant, à partir de (b), nous avons que $h(t, x_n(t)) + u_n^*(t) \in L(p_n)$ pour presque tout $t \in [0, T]$ et par la condition (i), $\bigcup_{p \in U(p_0)} L(p)$ est compact. Donc $\big(h(t, x_n(t)) + u_n^*(t)\big)_n$ est relativement compact. Donc, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers $w(\cdot)$. D'autre part, de la convergence de $(x_n)_n$ vers x_0 et de la continuité lipschitzienne de h, on déduit que $w(\cdot) = h(\cdot, x_0(\cdot)) + u_0^*(\cdot)$. Puisque $\big((u_n, \lambda_n)\big)_n$ converge vers (u_0, λ_0), il découle du Lemme 1.3.12 et de la condition (ii) que $u_0^*(t) \in F(u_0(t), \lambda_0)$. De plus par la Proposition 1.3.11, la semi-continuité inférieure de L implique que, pour tout $y \in L(p_0)$, il existe une suite $(y_n)_n \subset L(p_n)$ telle que $(y_n)_n$ converge vers y. Maintenant, par (a), (b) *et* (c), nous avons

(a') Pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, (H_1) et (H_2) on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau) - f\big(\tau, x_0(\tau)\big) + g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_0(\tau)d\tau \right\| \\
&\leq \int_s^t \left\|f\big(\tau, x_n(\tau)\big) - f\big(\tau, x_0(\tau)\big)\right\| + \left\|g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau) - g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_0(\tau)\right\| d\tau \\
&\leq \int_s^t \left\|f\big(\tau, x_n(\tau)\big) - f\big(\tau, x_0(\tau)\big)\right\| + \left\|g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau) - g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_n(\tau)\right\| \\
&+ \left\|g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_n(\tau) - g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_0(\tau)\right\| d\tau \\
&\leq \int_s^t L_f\big(\|x_n(\tau) - x_0(\tau)\|\big) + L_g\big(\|x_n(\tau) - x_0(\tau)\|\big)m + \delta_g\|u_n(\tau) - u_0(\tau)\|d(\tau),
\end{aligned}$$

où m est la constant de bornitude de $Sol\big(L(p_n), q + +F(\cdot, \lambda_n)\big)$. On déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau)d(\tau) = \int_s^t f\big(\tau, x_0(\tau)\big) + g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_0(\tau)d\tau.$$

De la relation (3.4) et l'unicité de la limite, on obtient que

$$\begin{aligned}
x_0(t) - x_0(s) &= \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n(t) - x_n(s) \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau)d(\tau) \\
&= \int_s^t f\big(\tau, x_0(\tau)\big) + g\big(\tau, x_0(\tau)\big)u_0(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

(b') Tout d'abord, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $h(t, x_n(t)) + u_n^*(t) \in L(p_n)$. Or, L est continue (donc s.c.s.) à valeurs non vides, et fermées, on déduit via le Théorème 1.3.12 que $gph(L)$ est fermé. Les convergences des suites $(p_n)_n$ vers p_0 et $\big(h\big(t, x_n(t)\big) - u_n^*(t)\big)_n$ vers $h\big(t, x_0(t)\big) - u_0^*(t)$, nous conduisent à $h\big(t, x_0(t)\big) - u_0^*(t) \in L(p_0)$. De plus, $(y_n)_n \subset L(p_n)$ qui est borné. On peut donc lui en extraire une sous-suite qui converge vers y et puisque $gph(L)$ est fermé, on déduit que $y \in L(p_0)$. Alors, pour presque tout $t \in [0, T]$, il existe $u_0^*(t) \in F(u_0(t), \lambda_0)$ et

$h(t,x_0(t)) + u_0^*(t) \in L(p_0)$, pour tout $y \in L(p_0)$, tels que (par (**b**) on a)

$$
\begin{aligned}
&\big\langle y - h\big(t,x_0(t)\big) - u_0^*(t), u_0(t)\big\rangle \\
&= \big\langle y - h\big(t,x_n(t)\big) - u_n^*(t), u_0(t)\big\rangle + \big\langle h\big(t,x_n(t)\big) - h\big(t,x_0(t)\big) + u_n^*(t) - u_0^*(t), u_0(t)\big\rangle \\
&= \big\langle y - h\big(t,x_n(t)\big) - u_n^*(t), u_n(t)\big\rangle - \big\langle y - h\big(t,x_n(t)\big) - u_n^*(t), u_n(t) - u_0(t)\big\rangle \\
&- \big\langle h\big(t,x_0(t)\big) - h\big(t,x_n(t)\big) + u_n^*(t) - u_0^*(t), u_0(t)\big\rangle \\
&\geq - \big\| y - h\big(t,x_n(t)\big) - u_n^*(t)\big\| \, \|u_n(t) - u_0(t)\| \\
&- \big(\big\| h\big(t,x_0(t)\big) - h\big(t,x_n(t)\big)\big\| + \|u_n^*(t) - u_0^*(t)\|\big) \|u_0(t)\| \\
&\geq - \big\| y - h\big(t,x_n(t)\big) - u_n^*(t)\big\| \, \|u_n(t) - u_0(t)\| \\
&- (L_h \|x_0(t) - x_n(t)\| + \|u_n^*(t) - u_0^*(t)\|) \|u_0(t)\|
\end{aligned}
$$

Par la convergence de $\big((x_n,u_n)\big)_n$ vers (x_0,u_0) on trouve,

$$\big\langle y - h\big(t,x_0(t)\big) - u_0^*(t), u_0(t)\big\rangle \geq 0, \quad \forall y \in L(p_0).$$

(c') Par un passage de la limite, la condition initiale devient

$$x_0(0) = x_0.$$

On en déduit que $(x_0,u_0) \in Sol\big(L(p_0), q + F(\cdot,\lambda_0)\big)$. La preuve est ainsi complète. $\square$

Théorème 3.5. *Soit f, h, g trois fonctions satisfaisant les conditions (H_1) et (H_2), $p_0 \in Z_1$, $\lambda_0 \in Z_2$ deux points donnés. On suppose que les conditions suivantes sont rétablies*

- ***(i)*** *$L : Z_1 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est une m.a. continue, à valeurs non vides, bornées, fermées et convexes et il existe un voisinage $U(p_0)$ de p_0, tel que $\bigcup_{p \in U(p_0)} L(p)$ est compact.*
- ***(ii)*** *$F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une m.a. s.c.s. à valeurs non vides, fermées et convexe sur $\mathbb{R}^n \times Z_2$ et s.c.i. sur Z_2.*
- ***(iii)*** *Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ et $q \in h(\Omega)$, la m.a. $x \longmapsto q + F(x,\lambda)$ est hémicontinue supérieurement et monotone, où Λ est un voisinage de λ_0.*
- ***(iv)*** *Il existe un voisinage $U(p_0,\lambda_0)$ de (p_0,λ_0) tel que*

$$\bigcup_{(p,\lambda) \in U(p_0,\lambda_0)} Sol\big(L(p), q + F(\cdot,\lambda)\big)$$

est borné pour tout $q \in h(\Omega)$.

(v) *$F : \mathbb{R}^n \times Z_2 \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est fortement monotone et hémicontinue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$.*

Alors, l'application $(p, \lambda) \longmapsto S(p, \lambda)$ est continue sur $Z_1 \times Z_2$.

Démonstration. D'après le Théorème 2.1.4, nous savons que la condition (iv) est équivalente à relation (3.2). Par le Théorème 2.3.1, les conditions, $(i), (ii), (v)$ et la relation (3.2) donne une solution unique pour le problème (3.1), ceci implique que $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big)$ est un singleton i.e., $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big) = \{S(p, \lambda)\}$. Soit donc $S(p_n, \lambda_n) = \big((x_n, u_n)\big)_n$ tel que $\big((p_n, \lambda_n)\big)_n$ converge vers (p_0, λ_0) quand $n \longrightarrow \infty$. Dans la suite, nous devons prouver que les suites $(x_n)_n$ et $(u_n)_n$ sont convergentes. On procède par trois étapes.

Étape 1. $(x_n)_n$ **est uniformément bornée.**

On sait que $(x_n, u_n) \in Sol\big(L(p_n), q + F(\cdot, \lambda_n)\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x_n(t)) + g(t, x_n(t))u_n(t), \quad . \tag{3.5}$$

Par le Lemme 2.2.3, on aura que $\mathbb{F}$ satisfait (2.12). Pour tout $t \in [0, T]$, on a alors

$$\begin{aligned} \|x_n(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t \|\dot{x}_n(s)\| ds \\ &\leq \|x_0\| + \int_0^t \rho^{\mathbb{F}}\big(1 + \|x_n(s)\|\big) ds \end{aligned}$$

Il découle du Lemme 1.2.13, que

$$\|x_n(t)\| \leq \big(\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}} T\big) e^{\rho^{\mathbb{F}} T}. \tag{3.6}$$

Clairement, $(x_n)_n$ est uniformément bornée.

Étape 2. $(x_n)_n$ **est une famille de fonctions équicontinues.**

Pour presque tout $t \in [0, T]$, nous avons $u_n(t) \in Sol(L(p_n), h(t, x_n(t)) + F(\cdot, \lambda_n))$. Par la condition (iv), pour presque tout $t \in [0, T]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u_n(t)\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

Plus précisément, (3.5) signifie que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$

$$x_n(t) - x_n(s) = \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau)d\tau,$$

Des relations (2.15), (3.6), (3.7) et les hypothèses (H_1) et (H_2) il vient que

$$\begin{aligned}
\|x_n(t) - x_n(s)\| = & \quad \left\| \int_s^t f\big(\tau, x_n(\tau)\big) + g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau)d\tau \right\| \\
\leq & \quad \int_s^t \|f\big(\tau, x_n(\tau)\big)\|d\tau + \int_s^t \|g\big(\tau, x_n(\tau)\big)u_n(\tau)\|d\tau \\
\leq & \quad \int_s^t \|f(\tau, x_n(\tau))\|d\tau + \int_s^t \|g\big(\tau, x_n(\tau)\big)\| \, \|u_n(\tau)\|d\tau \\
\leq & \quad \int_s^t \rho_f\big(1 + \|x_n(\tau)\|\big)d\tau + \delta_g \, C|t-s| \\
\leq & \quad \rho_f|t-s| + \rho_f\big(\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}}T\big)e^{\rho^{\mathbb{F}}T}|t-s| + \delta_g \, C|t-s| \\
\leq & \quad \left(\rho_f\big(1 + (\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}}T)e^{\rho^{\mathbb{F}}T}\big) + \delta_g \, C\right)|t-s| \\
:= & \; M|t-s| \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$M = \rho_f\left(1 + \big(\|x_0\| + \rho^{\mathbb{F}}T\big)e^{\rho^{\mathbb{F}}T}\right) + \delta_g \, C$. Alors, la suite $(x_n)_n$ est équicontinue. En appliquant le Théorème 1.2.8, on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite, notée aussi $(x_n)_n$, qui converge vers x_0.

Étape 3. $S(p_n, \lambda_n) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} S(p_0, \lambda_0)$ dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^m) \times L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$.
Nous savons que $u_n(t) \in Sol\big(L(p_n), h(t, x_n(t)) + F(\cdot, \lambda_n)\big)$ pour presque tout $t \in [0,T]$. Alors, il existe un ensemble A de mesure non nulle tel que $u_n(t) \in Sol\big(L(p_n), h(t, x_n(t)) + F(\cdot, \lambda_n)\big)$ pour tout $t \in [0,T] \setminus A$. Or, pour tout $t \in [0,T] \setminus A$, il existe $u_n^*(t) \in F(u_n(t), \lambda_n)$ tel que $h(t, x_n(t)) + u_n^*(t) \in L(p_n)$ et

$$\big\langle y - h(t, x_n(t)) - u_n^*(t), u_n(t) \big\rangle \geq 0, \quad \forall y \in L(p_n). \qquad (3.9)$$

Prenons r assez petit tel que $t + r \in [0,T] \setminus A$ et

$$u_n(t+r) \in Sol\big(L(p_n), h(t+r, x_n(t+r)) + F(\cdot, \lambda_n)\big).$$

Alors, il existe $u_n^*(t+r) \in F(u_n(t+r), \lambda_n)$ tel que $h(t+r, x_n(t+r)) + u_n^*(t+r) \in L(p_n)$

et pour $t+r \in [0,T] \setminus A$,

$$\big\langle y - h\big(t+r, x_n(t+r)\big) - u_n^*(t+r), u_n(t+r)\big\rangle \geq 0, \quad \forall y \in L(p_n). \tag{3.10}$$

Pour tout $t+r \in [0,T] \setminus A$, en prenant $y = h\big(t+r, x_n(t+r)\big) + u_n^*(t+r)$ dans (3.9), on a

$$\big\langle h\big(t+r, x_n(t+r)\big) + u_n^*(t+r) - h\big(t, x_n(t)\big) - u_n^*(t), u_n(t)\big\rangle \geq 0,$$

et soit $y = h(t, x_n(t)) + u_n^*(t)$ dans (3.10), on a

$$\big\langle h\big(t+r, x_n(t)\big) + u_n^*(t) - h\big(t+r, x_n(t+r)\big) - u_n^*(t+r), u_n(t+r)\big\rangle \geq 0.$$

Par conséquent, en additionnant les deux inégalités précédentes, on obtient que

$$\big\langle h\big(t+r, x_n(t+r)\big) + u_n^*(t+r) - h(t, x_n(t)) - u_n^*(t), u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle \geq 0,$$

donc

$$\begin{aligned} &\big\langle h(t+r, x_n(t+r)) - h\big(t, x_n(t)\big), u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle \\ &\qquad\qquad + \big\langle u_n^*(t+r) - u_n^*(t), u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\big\langle h\big(t+h, x_n(t+r)\big) - h\big(t, x_n(t)\big)\ , u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle \\ &\qquad\qquad \geq \big\langle u_n^*(t) - u_n^*(t+r), u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par la forte monotonie de F, pour $\mu > 0$, on a

$$\big\langle u_n^*(t) - u_n^*(t+r), u_n(t) - u_n(t+r)\big\rangle \geq \mu\|u_n(t) - u_n(t+r)\|^2.$$

Ainsi, en appliquant la lipschizité de h, on aura

$$\begin{aligned} \mu\|u_n(t) - u_n(t+r)\| &\leq \|h\big(t+r, x_n(t+r)\big) - h(t, x_n(t))\| \\ &\leq L_h\big(|r| + \|x_n(t+r) - x_n(t)\|\big). \end{aligned}$$

ce qui signifie, en évoquant (3.8), que

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - u_n(t+r)\| &\leq \frac{L_h}{\mu}\big(|r| + \|x_n(t+r) - x_n(t)\|\big)\\ &\leq \frac{L_h}{\mu}\big(|r| + M|r|\big)\\ &\leq \frac{L_h}{\mu}\big(M+1\big)|r|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Posons $z = L_h(M+1)$. Puisque $(x_n)_n$ est équicontinue, il découle de (3.12) que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \min\{T, \frac{\epsilon}{z\sqrt{2T}}\}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $|r| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}\int_0^{T-r} \|u_n(t+r) - u_n(t)\|^2 dt &\leq \int_0^{T-r} z^2 r^2 dt\\ &\leq z^2 r^2 (T-r)\\ &\leq z^2 \delta^2 (T+\delta)\\ &< \epsilon^2. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En appliquant l'inégalité (3.13) et la bornitude de $(u_n)_n$, on déduit du Corollaire 1.2.12, que la suite $(u_n)_n$ est relativement compacte dans $L^2([0,T], \mathbb{R}^n)$. Par conséquent, $(u_n)_n$ admet une sous-suite qui converge vers u_0. Jusqu'à présent, nous avons obtenu la convergence de $\big((x_n, u_n)\big)_n = S(p_n, \lambda_n)$ vers (x_0, u_0). D'après le Théorème 3.4, $Sol\big(L(p), q + F(\cdot, \lambda)\big)$ est fermé. On conclut que, $\big((x_n, u_n)\big)_n$ converge vers $(x_0, u_0) = S(p_0, \lambda_0)$ et donc $S(p, \lambda)$ est continu en (p_0, λ_0). Ceci complète la preuve.

□

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons démontré un résultat (voir [19]) concernant l'existence et l'unicité de solution faible au sens de Carathéodory pour une inégalité variationnelle différentielle inverse dans un espace de dimension finie. Ensuite, on a considéré une étude de la stabilité de solution pour l'IVDI dans le cas où l'ensemble des contraintes et la multi-application sont perturbés par deux paramètres différents. Pour ce faire, nous avons démontré la fermeture de l'ensemble de solutions et la continuité de l'application qui à chaque paramètre associe la solution du problème étudié.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ***J. P. Aubin ; H. Frankowska,*** *Set-Valued Analysis.* Birkhauser Boston, MA, USA, 1990.

[2] **H. Brezis,** *Analyse Fonctionnelle.* Masson, Paris, 1983.

[3] **X. J. Chen ; Z. Y. Wang,** *Differential variational inequalitiy approach to dynamic games with shared constraints.* Math. Program. 146, 379–408, 2014.

[4] **K. Deimling,** *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, Germany, 1992.

[5] **J. H. Fan ; X. G. Wang,** *Gap functions and global error bounds for set-valued variational inequalities,* J. Comput. Appl. Math. 233, 2956–2965, 2010.

[6] **B. S. He ; X. Z. He ; H. X. Liu,** *Solving a class of constrained 'black-box' inverse variational inequalities.* Eur. J. Oper. Res. 204, 391–401, 2010.

[7] **S. C. Hu ; N. S. Papageorgiou,** *Handbook Of Multivalued Analysis, Volume II, Applications ; Mathematics and Its Applications.* Springer : New York, NY, USA, 1997.

[8] **F. M. Guo ; W. Li ; Y.B. Xiao ; S. Migórski,** *Stability analysis of partial differential variational inequalities in Banach spaces.* Nonlinear Anal. Model. Control. 25, 69–83, 2020.

[9] **J. Gwinner,** *On a new class of differential variational inequalities and a stability result :* Math. Program. 139, 205–221, 2013.

[10] **W. Li ; X. Wang ; N. J. Huang,** *Differential inverse variational inequalities in finite dimensional spaces.* Acta Math. Sci. 35, 407-422, 2015.

[11] **X. P. Luo,** *Stability analysis of set-valued inverse variational inequalities in reflexive Banach spaces.* J. Fixed Point Theory Appl. 23, 1-15, 2021.

[12] **J. S. Pang ; D. E. Stewart,** *Differential variational inequalities,* Math. Program. 113, 345–424, 2008.

[13] **M. Schatzman,** *Numerical Analysis : A Mathematical Introduction,* Clarendon Press, 2002.

[14] **L. Schwartz,** *Théorie des ensembles et Topologie, tome 1.* Hermann, 1997.

[15] **G. V. Smirnov,** *Introduction To The Theory Of Diffrential Inclusion*, vol. 41. Amer. Math. Soc., Providence. Rhode, Island, 2001.

[16] **J. V. Tiel,** *Convex Analysis An Introductory.* Text Wiley, New York, 1984.

[17] **X. Wang ; W. Li ; X. S. Li, ; N. J. Huang,** *Stability for differential mixed variational inequalities.* Optim. Lett. 8, 1873–1887, 2014.

[18] **K. Yosida,** *Functional Analysis.* Spring-verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.

[19] **X. Zhu ; W. Li ; X. Luo,** *Stability for a class of differential set-valued inverse variational inequalities in finite dimensional spaces.* Axioms 11, 1-16, 2022.

Résumé

Le thème étudié dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude d'une classe d'inégalités variationnelles différentielles inverses (IVDI en abrégé) dans un espace de dimension finie (voir [19]). En appliquant un résultat d'existence pour les inclusions différentielles impliquant une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées, on a, dans une première étape, démontré l'existence et l'unicité de l'IVDI. Dans une seconde étape, on a utilisé ce résultat d'existence pour étudier la stabilité de la solution du problème considéré lorsque l'ensemble des contraintes et la multi-application régissant l'inclusion, sont soumis à des perturbations par deux paramètres différents.

Abstract

The aim of this thesis is to study a class of inverse differential variational inequalities (IVDI for short) in a finite dimensional space (see [19]). By applying an existence result for differential inclusions involving a non-empty, convex and closed upper semi-continuous set-valued map, we first prove the existence and uniqueness of the IVDI. Then, we used this existence result to study the stability of the solution of the considered problem when the set of constraints and the set-valued map governing the inclusion are subject to perturbations by two different parameters.