République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

№ d'ordre : ....
№ de série : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.
Option EDP et Applications.

Thème

Étude d'une inclusion différentielle gouvernée par le cône normal

présenté par
Bensaci Youssouf

Devant le jury

Président	Menniche Linda	MCA.	Université de Jijel
Encadreur	Lounis Sabrina	M.C.A	Université de Jijel
Examinateur	Kecis Ilyas	M.C.A	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

Je remercie en première lieu ***Allah*** *tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il ma donné durant ces longue années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*

Je tiens à remercier Madame ***Lounis Sabrina*** *pour le soutien et l'encadrement qu'elle ma donné.*

Je voudrais aussi remercie l'ensemble des membres de jury, Madame ***Menniche Linda*** *et Monsieur* ***Kecis Ilyas*** *pour m'avoir honorée par leurs évaluation du travail en tant qu'examinateurs.*

En fin, je remercie ma famille pour donner tout ce que j'en avais besoin pour réussir dans mes études.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes très chèrs parents Djamel et Nadjet

Qui sont la graine de mon existence et la source de ma réussite,

pour leurs encouragements et leurs sacrifices.

A mon frère. Walid

A mes soeurs. Amira Amina et Radja

A mes amies.

A mes enseignants.

Table des matières

Notations générales

$\mathbb{R}$	:	l'ensemble des nombres réels.
X	:	espace vectoriel normé.
X^*	:	le dual topologique de l'espace vectoriel normé X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	produit scalaire dans la dualité X^*, X.
$Dom(f)$	:	domaine effectif de f.
$\partial f(\overline{u})$	:	le sous différentiel de la fonction f au point $\overline{u}$.
i.e.	:	c'est à dire.
ssi.	:	si et seulement si.
$[0, T]$	:	intervalle de temps, $0 < T < \infty$
$epi(f)$	:	l'épigraphe de la fonction f
$C([0, T], X))$	:	l'espace des fonctions continues définies de $[0, T]$ à valeurs dans X.
$\mathcal{S}u(t)$	:	représente la valeur de la fonction Su au point t, i.e., $\mathcal{S}u(t) = (\mathcal{S}u)(t)$.
f^*	:	conjuguée de la fonction f.
f^{**}	:	biconjuguée de la fonction f.
$N_C(\bar{u})$	:	le cône normal à C en $\bar{u} \in C$
P_K	:	projection sur l'ensemble convexe fermé K
$int\ C$	:	l'intérieur de l'ensemble C.

Introduction

L'inclusion différentielle du premier ordre impliquant le Processus de Rafle a été élaborée pour modéliser les problèmes de frottement. Il est possible d'exprimer cette inclusion comme suit

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad p.p.\ t \in [0,T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $N_{C(t)}(\cdot)$ désigne le cône normal de l'ensemble $C(t)$.

La notion 'Processus de Rafle' est apparue pour la première fois au début des années 70 dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes par JJ. Moreau [14], [15]. Plusieurs améliorations ont été apportées sous lesquels nombre de résultats d'existence et d'unicité ont été établis (voir par exemple [5], [6], [7]).

Le but de ce travail est de détailler l'article de S. Adly et M. Sofonea intitulé : 'Time-dependent Inclusions and Sweeping Processes in Contact Mechanics' ([1] sections 03 et 04) où, les auteurs ont étudié en premier lieu une inclusion différentielle de la forme

$$-u(t) \in N_{C(Ru(t),t)}(Au(t) + Su(t)) \quad \forall t \in [0,T],$$

où $A : X \to X$ est un opérateur Lipschitz continu fortement monotone, $S : C([0,T],X) \to C([0,T],X)$ et $R : C([0,T],X) \to C([0,T],Y)$ sont des opérateurs non-linéaires éventuellement avec mémoire (X et Y étant des espaces de Hilbert). Les résultats obtenus ont été ultérieurement utilisés pour montrer l'existence de solution pour une nouvelle variante du Processus de Rafle, de la forme

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in -N_{C(R\dot{u}(t),t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + S\dot{u}(t)) \quad p.p.\ t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0), \end{cases}$$

où $B; X \to X$ est un opérateur Lipschitz continu.

Ce mémoire est séquencé en trois chapitres. Dans le premier, nous fournissons des notions de base et des résultats fondamentaux qui nous seront utiles par la suite. Dans le deuxième chapitre nous introduisons la notion d'opérateurs avec, et presqu'avec mémoire et nous donnons un résultat d'existence et d'unicité d'un point fixe pour ce type d'opérateurs. Enfin, le troisième chapitre est consacré à la démonstration du résultat principal de ce mémoire.

Chapitre 1

Notions de bases et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes de base qui nous seront utiles dans les chapitres suivants. Pour plus de détails voir [20], [3], [17], [18], [19].

1.1 Définitions de base

Définition 1.1. *soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. On appelle norme sur X toute application $x \to \|x\|$ définie de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $\|u\|_X \geq 0 \quad \forall u \in X$ *et* $\|u\|_X = 0$ *ssi.* $u = 0_X$.
2. $\|\alpha u\|_X = |\alpha| \|u\|_X \quad \forall u \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X \quad \forall u,\ v \in X$.

Le couple $(X, \|\cdot\|_X)$ est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et soient $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp.boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in X, \|x - y\|_X < r\},$$
$$(\textit{resp. } \bar{B}(x, r) = \{y \in X, \|x - y\|_X \leq r\}).$$

Définition 1.3. *Une suite $(u_n)_n$ dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ converge fortement vers $u \in X$ si*

$$\|u_n - u\|_X \to 0 \textit{ lorsque } n \to \infty.$$

Dans ce cas, u est appelé limite forte de la suite $(u_n)_n$ et on écrit

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ ou } u_n \to u \text{ dans } X.$$

Remarque 1.4. *Il est facile de vérifier que la limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Définition 1.5. *Une suite $(u_n)_n$ dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|u_n\|_X \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.6. *Une suite $(u_n)_n$ dans un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est dite de Cauchy si $\|x_n - x_m\|_X$ tend vers 0 lorsque n et m tendent vers l'infini,i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0, m \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_X < \epsilon.$$

Définition 1.7. *Un espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$ est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente .*

Définition 1.8. *Un espace vectoriel normé est dit de Banach s'il est complet.*

Définition 1.9. *soit X un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur X est une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)_X : X \times X \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes*

1. $(u, u)_X \geq 0 \quad \forall u \in X.$
2. $(u, u)_X = 0$ *si et seulement si* $u = 0_X$.
3. $(u, v)_X = (v, u)_X \quad \forall\ u, v \in X.$

Définition 1.10. *Soit X un espace vectoriel réel et soit $(.,.)_X$ un produit scalaire sur X, on associe au produit scalaire une norme, dite associée, en posant*

$$\|u\|_X = \sqrt{(u, u)_X} \quad \forall u \in X.$$

Définition 1.11. *On appelle espace préhilbertien le couple constitué par un espace vectoriel X et par un produit scalaire sur X.*

Proposition 1.12. *Dans un espace préhilbertien X muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de norme asociée $\|\cdot\|_X$, on a*

$$|(u, v)_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X,$$

cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, l'égalité suivante est satisfaite

$$\|u+v\|_X^2 + \|u-v\|_X^2 = 2(\|u\|_X^2 + \|v\|_X^2) \quad \forall u, v \in X.$$

Cette identité est appelée identité du parallélogramme.

Définition 1.13. *Un espace préhilbertien est dit espace de Hilbert s'il est complet par rapport à la norme associée.*

1.2 Éléments d'analyse convexe

Soit X un espace vectoriel réel.

1.2.1 Ensembles convexes

Définition 1.14. *Un ensemble $C \subset X$ est dit convexe si pour tous $x_1, x_2 \in C$ et $\lambda \in [0,1]$*

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C. \tag{1.1}$$

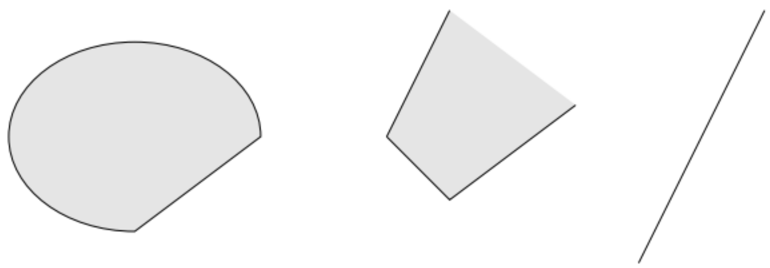

Figure 1.1 – Ensembles convexes

Exemple 1.15. *1. La somme de Minkowski*

$$A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\},$$

de deux ensembles convexes A, B d'un espace vectoriel X est convexe. En effet, soient $x, y \in A+B$ il existe $a, a' \in A$ et $b, b' \in B$ tels que $x = a+b$ et $y = a'+b'$. Alors, pour $\lambda \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(a+b) + (1-\lambda)(a'+b') \\ &= \lambda a + (1-\lambda)a' + \lambda b + (1-\lambda)b',\end{aligned}$$

comme A et B sont convexes, on en déduit donc que $\lambda a + (1-\lambda)a' \in A$ *et* $\lambda b + (1-\lambda)b' \in B$, *d'où*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in A + B.$$

2. *L'intersection arbitraire d'ensembles convexes est convexe.*

Définition 1.16. *(cône) Un ensemble non vide $K \subset X$ est un cône si pour tout $\lambda \geq 0$*

$$\lambda K \subset K. \tag{1.2}$$

Remarque 1.17. *Dans notre définition, un cône contient toujours l'origine. Dans la littérature, ce n'est pas nécessairement le cas.*

Proposition 1.18. *Une partie K d'un espace vectoriel X est un cône convexe s'il est stable par l'addition et par la multiplication par des réels strictement positifs.*

Définition 1.19. *Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de norme associée $\|\cdot\|_X$. Pour tout $x \in X$ donné, le sous ensemble de X noté et défini comme suit*

$$P_C(x) = \{k \in C, d_C(x) = \|x-k\|_X\},$$

s'appelle l'ensemble des points de meilleure approximation de x par rapport à C. On dit aussi que $P_C(x)$ est la projection de x sur C avec

$$d_C(x) = d(x,C) = \inf_{k \in C} \|x-k\|_X,$$

est la fonction distance de l'ensemble non vide C.

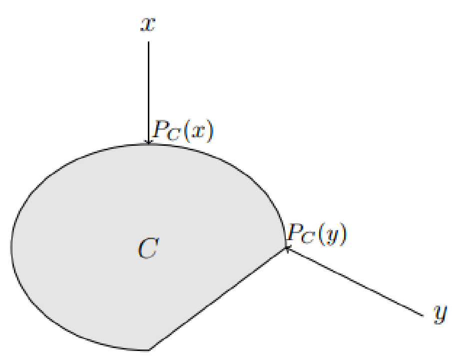

FIGURE 1.2 –

Présentons maintenant la caractérisation suivante de la projection.

Proposition 1.20. *Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert X et soit $w \in X$. Alors, $u = P_C(w)$ si et seulement si*

$$u \in C \quad (u, v-u)_X \geq (w, v-u)_X \quad \forall v \in C. \tag{1.3}$$

1.2.2 Fonctions convexes semi-continues inférieurement

Sauf indication, X désigne un espace vectoriel normé et $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Définition 1.21. *Le domaine effectif de f est l'ensemble des points où f est finie. En d'autres termes*

$$Dom(f) = \{x \in X : f(u) < +\infty\}.$$

Définition 1.22. *On dit que f est propre si $Dom(f) \neq \emptyset$ et $f(u) > -\infty$ pour tout $u \in X$.*

Définition 1.23. *L'épigraphe de f est le sous-ensemble de l'espace produit $X \times \mathbb{R}$ défini comme suit*

$$epi(f) = \{(x, \xi) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \xi\}.$$

Définition 1.24. *Soit $\xi \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$S_\xi(f) = \{x \in X : f(x) \leq \xi\}.$$

est appelé l'ensemble des ξ-sous-niveau de f.

Remarque 1.25. *On a l'équivalence suivante*

$$(x, \xi) \in epi(f) \Longleftrightarrow x \in S_\xi(f).$$

Définition 1.26. *On dit que la fonction f est convexe si pour tous x, $y \in Dom(f)$ et $t \in [0,1]$ on a*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{1.4}$$

La fonction f est strictement convexe si l'inégalité (1.4) est stricte pour $u \neq v$ et $t \in]0,1[$.

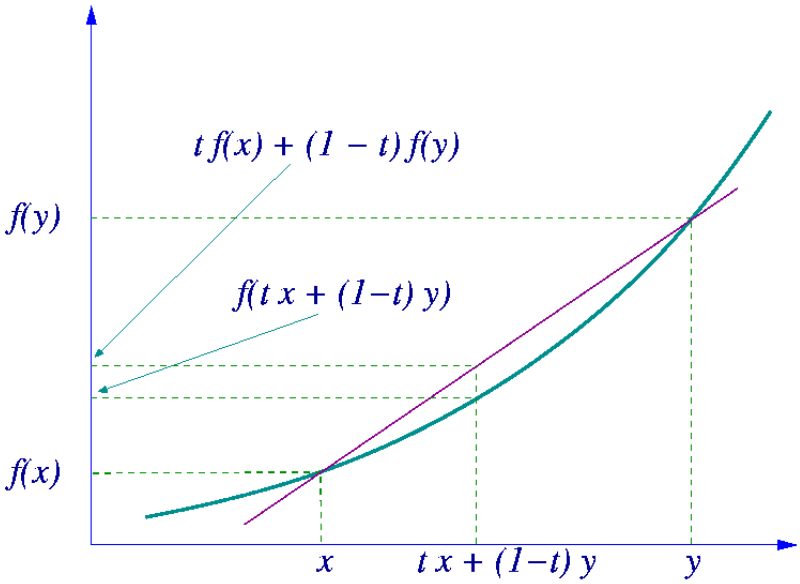

FIGURE 1.3 – Fonction convexe

Exemple 1.27. *Soit $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $f + g$ et λf sont également convexes.*

Proposition 1.28. *Une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si epi(f) est un ensemble convexe dans $X \times \mathbb{R}$.*

Définition 1.29. *(fonction indicatrice) Soit $C \subset X$ un sous-ensemble non vide, la fonction indicatrice de C, $I_C : X \to [0, \infty]$ est définie par*

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in C, \\ +\infty & si \quad x \notin C. \end{cases}$$

Définition 1.30. *(Fonction support) La fonction support de C (ou la fonction d'appui de C), est la fonction notée σ_C définie par*

$$\begin{aligned} \sigma_C : & X^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ & x \mapsto \sigma_C(x) := \sup_{s \in C} \langle x, s \rangle, \end{aligned}$$

Définition 1.31. *La fonction propre $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est dite sous linéaire si et seulement elle est sous additive et positivement homogène respectivement, i.e.,*

$$f(u + v) \leq f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in X,$$

et

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall u \in X, \, \lambda > 0.$$

Proposition 1.32. *La fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est sous additive si et seulement si elle est convexe positivement homogène.*

Définition 1.33. *Soit X un espace topologique et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. La limite inférieure de f en u_0 est définie par*

$$\liminf_{u \to u_0} f(x) = \sup_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \inf_{s \in V} f(s),$$

où $\mathcal{V}(x_0)$ est une base de voisinages de u_0 dans X.

Définition 1.34. *On dit que f est semi-continue inférieurement en $x \in X$ si*

$$\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geq f(x), \tag{1.5}$$

pour toute suite $(x_n)_n \subset K$ convergeant vers x dans X. D'une manière équivalente, f est semi-continue inférieurement en $x \in X$ si

$$\forall \xi \in]-\infty, f(x)[, \exists V \in \mathcal{V}(x) \quad \textit{tel que } f(V) \subset]\xi, +\infty[.$$

Si f est semi-continue inférieurement en tout point de X, on dit que f est semi-continue inférieurement dans X.

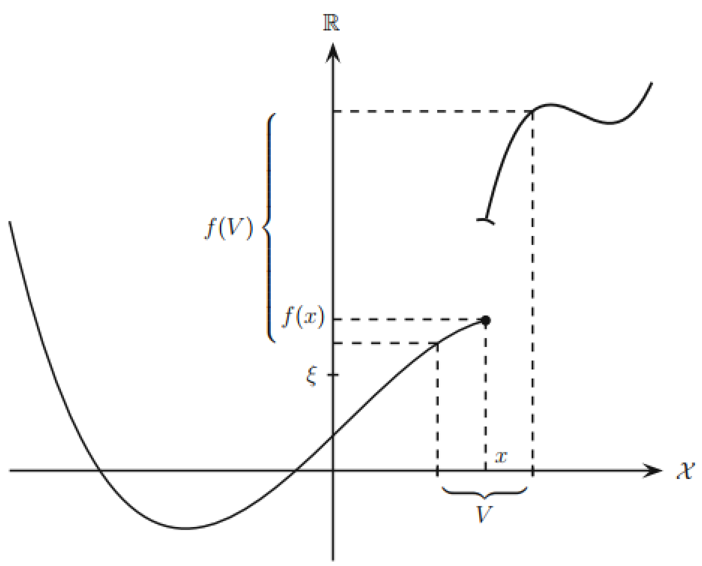

Figure 1.4 – Fonction semi-continue inférieurement

Exemple 1.35.

1. *si $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions semi-continues inférieurement et $\lambda \geq 0$, alors les fonctions $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ sont également semi-continues inférieurement. En d'autres termes, l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement est un cône convexe.*

2. *si* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue, alors elle est semi-continue inférieurement.*

Proposition 1.36. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. f *est semi-continue inférieurement sur* X.
2. *L'épigraphe de* f *est fermé dans* $X \times \mathbb{R}$.
3. *Pour tout* $\xi \in \mathbb{R}$, *l'ensemble* $\xi-$*sous-niveau* $S_\xi(f)$ *est fermé.*

Remarque 1.37. *Soit* K *un sous-ensemble non vide.*

1. *Le sous-ensemble* K *de* X *est convexe si et seulement si la fonction indicatrice* I_K *est convexe.*
2. *Le sous-ensemble* K *est fermé si et seulement si la fonction indicatrice* I_K *est semi-continue inférieurement.*
3. *D'une maniéré générale, si* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est une fonction convexe et* K *un sons ensemble convexe de* x, *alors, la fonction définie par*

$$\varphi(v) = \begin{cases} f(v) & si \quad v \in K, \\ +\infty & sinon \ , \end{cases}$$

est convexe sous la condition que $Dom(f) \cap K \neq \phi$ *(sinon* $\varphi \equiv +\infty$*). De plus,* φ *est semi-continue inférieurement si et seulement si* f *est semi-continue inférieurement.*

1.2.3 Transformée de Legendre-Fenchel

Définition 1.38. *La transformée de Legendre-Fenchel (ou conjuguée) de* f *est la fonction* $f^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ *définie par*

$$f^*(u^*) = \sup_{u \in X} (\langle u^*, u \rangle - f(u)) \quad \forall u^* \in X^*. \tag{1.6}$$

Définition 1.39. *Soit* $f^* : X^* \to \bar{\mathbb{R}}$, *Dans ce cas, la fonction* $f^{**} : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *définie par*

$$f^{**}(u) = \sup_{u^* \in X^*} (\langle u^*, u \rangle - f^*(u^*)) \quad \forall u \in X. \tag{1.7}$$

est appelée fonction biconjuguée de f.

Exemple 1.40. *Soit A un sous ensemble de X. Alors,*

$$I_A^*(u) = \sigma_A(u).$$

Remarque 1.41.
1. *Si $-\infty \in f(X)$, on a $f^* = +\infty$. Si $f \not\equiv +\infty$ alors f^* est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
2. *Si X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$, identifié à son dual X^*, la conjuguée est alors la fonction $f^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par*
$$f^*(v) = \sup_{u \in X} \left((v,u)_X - f(u) \right) \quad \forall v \in X.$$
3. *Les relations* (1.10) *et* (1.7) *donnent pour tout $u \in X$ et $u^* \in X^*$ l'négalité de Fenchel-Young :*
$$f(u) + f^*(u^*) \geq \langle u, u^* \rangle, \tag{1.8}$$
et
$$f^*(u^*) + f^{**}(u) \geq \langle u, u^* \rangle. \tag{1.9}$$

Proposition 1.42. *Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors*
1. *La fonction conjuguée f^* est convexe semi-continue inférieurement sur X^*.*
2. *Si f est convexe propre semi-continue inférieurement sur X, alors f^* est propre.*
3. *$f^{**} \leq f$.*

Théorème 1.43. *(Théorème de dualité de Fenchel-Moreau) Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors, f est s.c.i. et convexe si et seulement si $f^{**} = f$.*

Théorème 1.44. *[17] La fonction indicatrice et la fonction support d'un ensemble convexe fermé sont conjuguées l'une à l'autre.*

Remarque 1.45. *Une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ convexe semi-continue inférieurement positivement homogène est la fonction support de l'ensemble non vide convexe fermé*

$$C = \{\xi \ X / f(v) \geq \langle \xi, v \rangle \quad \forall v \in X\}.$$

1.2.4 Sous-différentielle d'une fonction convexe

Définition 1.46. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et $u \in Dom(f)$. Alors, le sous-différentiel de f est l'ensemble donné par*

$$\partial f(u) = \{\xi \in X^* : f(v) - f(u) \geq \langle \xi, v - u \rangle \quad \forall v \in X\}. \tag{1.10}$$

Pour $u \notin Dom(f)$, $\partial f(u)$ est vide.

Exemple 1.47. *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = |x|$ alors*

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x < 0, \\ [-1, 1] & si \;\; x = 0, \\ 1 & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

FIGURE 1.5 –

Proposition 1.48. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Pour chaque $u \in X$, l'ensemble $\partial f(u)$ est convexe fermé.*

Proposition 1.49. *Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Si f est semi-continue inférieurement en $u \in IntDom(f)$, alors $\partial f(u)$ est non vide borné.*

Remarque 1.50. *Remarquons que $u^* \in \partial f(u)$ si et seulement si $f(u) + f^*(u^*) = \langle u^*, u\rangle$. Donc, si f est propre, convexe et semi-continue inférieurement on a l'équivalence suivante*

$$u^* \in \partial f(u) \Leftrightarrow u \in \partial f^*(u^*).$$

1.2.5 Le cône normal

X est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$.

Définition 1.51. *Soit C un sous ensemble convexe de X et soit $\bar{u} \in C$. Le cône normal à C en $\bar{u}$ est défini par*

$$N_C(\bar{u}) := \{v \in X : (v, x - \bar{u})_X \leq 0 \;\; \forall x \in C\}.$$

Remarque 1.52.

1. *Il est clair que $N_C(\bar{u})$ soit un cône convexe fermé. Une normale est un vecteur s tel que l'angle entre s et $y - x$ est obtus pour tout $y \in C$.*
2. *$N_C(\bar{u}) = \{0\}$ pour $\bar{u} \in int\ C$.*
3. *On a toujours $\{0\} \subset N_C(\bar{u})$.*
4. *Par convention si $\bar{u} \notin C$, alors $N_C(\bar{u}) = \emptyset$.*

Proposition 1.53. *Soit C, C_1 et C_2 des convexes fermés de X, il est facile de vérifier que*

$$N_C(-u) = -N_{-C}(u) \quad \forall u \text{ tel que } u \in -C, \tag{1.11}$$

$$N_C(u+v) = N_{C-v}(u) \quad \forall u, v \text{ tels que } u+v \in C, \tag{1.12}$$

et

$$N_{C_1 \times C_2}(u_1, u_2) = N_{C_1}(u_1) \times N_{C_2}(u_2) \quad \forall (u_1, u_2) \in C_1 \times C_2.,$$

et

$$N_{C+a}(u+a) = N_{C(u)} \quad \forall u \in C, a \in X,$$

et

$$N_{C_1+C_2}(u_1+u_2) = N_{C_1}(u_1) \cap N_{C_2}(u_2); \quad \forall (u_1, u_2) \in C_1 \times C_2.$$

1.3 Inégalités variationnelles

Dans cette section, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité pour une inégalité variationnelle de la forme

$$u \in K, (Au, v-u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v-u)_X \quad \forall v \in K,$$

où K est un sous-ensemble d'un espace de Hilbert X, $A : K \to X$ un opérateur, $j : K \to \mathbb{R}$ une fonction et f un élément de X. Commençons par les définitions suivantes

Définition 1.54. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés. Une forme bilinéaire $a(.,.) : X \times Y \to \mathbb{R}$ est dite continue s'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$a(u,v) \leq M\|u\|_X\|v\|_Y \quad \forall u \in X,\ \forall v \in Y.$$

Dans le cas où $X = Y$, on dit que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est

1. *Symétrique si*

$$a(v,u) = a(u,v) \quad \forall u, v \in X. \tag{1.13}$$

2. *Positive si*

$$a(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in X.$$

3. *X-elliptique s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u,u) \geq m\|u\|_X^2 \quad \forall u \in X.$$

Définition 1.55. *[18] Soit X un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(.,.)_X$ et de norme associée $\|.\|_X$ et soit $A : X \to X$ un opérateur. On dit que*

1. *A est monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

2. *A est strictement monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X > 0 \quad \forall u, v \in X.u \neq v.$$

3. *$A : X \to X$ est fortement monotone s'il existe existe $m_A > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m_A\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X. \tag{1.14}$$

4. *A est non-expansif si*

$$\|Au - Av\|_X \leq \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

5. *A est Lipschitz continu s'il existe une constante $L_A > 0$ telle que*

$$\|Au - Av\|_X \leq L_A\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \tag{1.15}$$

6. *A est continu si*

$$u_n \to u \text{ dans } X \Longrightarrow Au_n \to Au \text{ dans } X.$$

Remarque 1.56. *Soit $A : X \to X$ un opérateur vérifiant les inégalités* (1.14), (1.15). *Alors,*

$$m_A \leq L_A. \tag{1.16}$$

Pour montrer le résultat principal de cette section, nous avons besoin du théorème suivant dit théorème du point fixe de Banach qui donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction.

Théorème 1.57. *[18](Théorème du point fixe de Banach) Soit K un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \to K$ est une contraction, i.e., il existe une constante $\alpha \in [0,1[$ telle que*

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq \alpha \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K. \tag{1.17}$$

Alors, il existe un élément unique $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$.

Démonstration Soit u_0 un élément quelconque de K et soit $(u_n)_n$ la suite de K définie par

$$u_{n+1} = \Lambda u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $\Lambda : K \to K$, alors la suite $(u_n)_n$ est bien définie. Montrons maintenant que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que Λ est une contraction on obtient

$$\|u_{n+1} - u_n\|_X \leq \alpha \|u_n - u_{n-1}\|_X \leq \ldots \leq \alpha^n \|u_1 - u_0\|_X.$$

Alors, pour tout $m > n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_X &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \|u_{n+j+1} - u_{n+j}\|_X \\ &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^{n+j} \|u_1 - u_0\|_X \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|u_1 - u_0\|_X. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha \in [0,1[$, il découle des inégalités précédentes que

$$\|u_m - u_n\|_X \to 0 \quad \text{lorsque} \quad m, n \to \infty,$$

par conséquent, $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans K. Comme K est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach X, alors, $(u_n)_n$ converge dans K et soit $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. En utilisant l'inégalité(1.17) et en faisant tendre n vers $+\infty$ on trouve que

$$\|\Lambda u_n - \Lambda u\|_X \leq \alpha \|u_n - u\|_X \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

et par conséquent $\lim_{n\to\infty} \Lambda u_n = \Lambda u$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \Lambda u = \Lambda u,$$

ce qui montre que $u = \Lambda u$, d'où l'existence d'un points fixe.
Supposons maintenant qu'il existe deux points fixe de Λ, $u_1, u_2 \in K$. Alors, $u_1 = \Lambda u_1$ et $u_2 = \Lambda u_2$ et donc

$$u_1 - u_2 = \Lambda u_1 - \Lambda u_2.$$

En utilisant (1.17), on trouve que

$$\|u_1 - u_2\|_X = \|\Lambda u_1 - \Lambda u_2\|_X \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X,$$

ce qui implique $\|u_1 - u_2\|_X = 0$, puisque $\alpha \in [0, 1[$. Par conséquent, $u_1 = u_2$ d'où l'unicité du point fixe.

■

Nous somme maintenant en mesure de donner le résultat principal de cette section.

Théorème 1.58. *[18] Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ de norme associée $\|\cdot\|_X$. Supposons que K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de X, $A : K \to X$ un opérateur Lipschitz continu fortement monotone et $j : K \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement convexe. Alors, pour chaque $f \in X$, il existe une solution unique pour l'inégalité variationnelle.*

$$u \in K, (Au, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \tag{1.18}$$

La preuve de ce théorème se fera en deux étape. La première étape consiste *à* résoudre (1.18) dans le cas où A est l'opérateur identité.

Lemme 1.59. *Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ de norme associée $\|\cdot\|_X$. Supposons que K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de X, et $j : K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors, pour chaque $f \in X$, il existe un élément unique u tel que*

$$u \in K, (u, v - u)_X + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K. \tag{1.19}$$

De plus, si u_1 et u_2 désignent les solutions de l'inégalité (1.19) *pour $f_1, f_2 \in X$ respectivement, alors,*

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq \|f_1 - f_2\|_X. \tag{1.20}$$

Démonstration La première partie du lemme est une conséquence directe du Corollaire suivant

Corollaire 1.60. *[18] Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ de norme associée $\|\cdot\|_X$. Supposons que K est un sous-ensemble convexe fermé non vide* *de X, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue symétrique et X-elliptique et $j : K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors, pour chaque $f \in X$, il existe un élément unique u tel qu'on ait*

$$u \in K, \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K$$

Supposons maintenant que $f_1, f_2 \in X$ et que $u_1, u_2 \in K$ sont tels que

$$(u_1, v - u_1)_X + j(v) - j(u_1) \geq (f_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K, \tag{1.21}$$

$$(u_2, v - u_2)_X + j(v) - j(u_2) \geq (f_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K. \tag{1.22}$$

En posant $v = u_2$ dans (1.21), et $v = u_1$ dans (1.22) et en additionnant les deux inégalités résultantes on trouve que

$$\|u_1 - u_2\|_X^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X, \tag{1.23}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\|u_1 - u_2\|_X^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X \leq \|f_1 - f_2\|_X \times \|u_1 - u_2\|_X, \tag{1.24}$$

ce qui implique (1.20).

■

Le Lemme 1.59 nous permet d'introduire la définition suivante

Définition 1.61. *[18] Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ de norme associée $\|\cdot\|_X$. Supposons que K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de X, et $j : K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Alors, Pour chaque $f \in X$, la solution u de l'inégalité variationnelle* (1.19) *est appelée l'élément proximal de f par rapport à la fonction j et elle est généralement noté $prox_j f$. L'opérateur $prox_j : X \to K$ défini par $f \to prox_j f$ est appelé l'opérateur de proximité de la fonction j.*

Remarque 1.62. *1. Les opérateurs de proximité ont été introduits pour la première fois dans [14]. Notons que le Lemme 1.59 indique que $prox_j$ est un opérateur non-expansif, i.e,*

$$\|prox_j f_1 - prox_j f_2\|_X \leq \|f_1 - f_2\|_X \quad \forall f_1, f_2 \in X. \tag{1.25}$$

2. *Il découle de* (1.23) *que* $prox_j$ *est un opérateur monotone, car*

$$(prox_j f_1 - prox_j f_2, f_1 - f_2) \geq 0 \quad \forall f_1, f_2 \in X.$$

3. *Si* K *est un sous-ensemble convexe fermé non vide de* X*, on peut considérer l'opérateur de proximité de la fonction zéro sur* K*, noté* $prox_K$*. Il découle de la Définition 1.61 que* $u = prox_K f$ *si et seulement si*

$$u \in K, \quad (u, v-u)_X \geq (f, , v-u)_X \quad \forall v \in K.$$

Par conséquent, en utilisant la Proposition 1.20, on obtient $prox_K = P_K$*, où* P_K *désigne l'opérateur de projection sur* K*. Alors, on conclut d'après ce qui précède que les opérateurs de projection représentent un cas particulier des opérateurs de proximité.*

Démonstration du Théorème 1.58 Soit $f \in X$ et soit $\rho > 0$ un paramètre à choisir ultérieurement. Puisque $\rho_j : K \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe semi-continue inférieurement, on peut alors définir un opérateur $S_\rho : K \to K$ par

$$S_\rho(v) = prox_{\rho j}(\rho f - \rho A v + v) \quad \forall v \in K. \tag{1.26}$$

De plus, en utilisant (1.26) et (1.25), on trouve que

$$\forall v, u \in K \quad \|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq \|(u-v) - \rho(Au - Av)\|_X,$$

alors pour tous $v, u \in K$, on a

$$\begin{aligned}\|S_\rho u - S_\rho v\|_X^2 &\leq \|(u-v) - \rho(Au - Av)\|_X^2 \\ = \|u-v\|_X^2 - 2\rho(Au - Av, u-v)_X &+ \rho^2 \|Au - Av\|_X^2.\end{aligned}$$

En utilisant (1.14) et (1.15), on obtient

$$\forall v, u \in K \quad \|S_\rho u - S_\rho v\|_X^2 \leq (1 - 2\rho m_A + \rho^2 L_A^2)\|u-v\|_X^2.$$

Il est facile de voir que si $0 < \rho < \frac{2m_A}{L_A^2}$, alors

$$0 \leq 1 - 2\rho m_A + \rho^2 L^2 < 1.$$

Par conséquent, avec ce choix de ρ, il s'en suit que

$$\|S_\rho u - S_\rho v\|_X \leq K(\rho)\|u-v\|_X, \tag{1.27}$$

où $K(\rho) = (1 - 2\rho m_A + \rho^2 L_A^2)^{\frac{1}{2}} \in [0, 1[$, m_A et L_A sont les constantes dans (1.14) et (1.15), respectivement. Alors, en utilisant le Théorème1.57, on trouve qu'il existe $u \in K$ tel que

$$S_\rho u = prox_{\rho j}(\rho f - \rho Au + u) = u.$$

Par la Définition 1.61, on obtient

$$(u, v - u)_X + \rho j(v) - \rho j(u) \geq (\rho f - \rho Au + u, v - u)_X \quad \forall v \in K,$$

i.e.,

$$\rho[(Au, v - u)_X + j(v) - j(u)] \geq \rho(f, v - u)_X \quad \forall v \in K.$$

Puisque $\rho > 0$, on en déduit de l'inégalité ci-dessus que u est une solution de l'inégalité variationnelle (1.18) ce qui prouve l'existence de solution.
Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions $u_1, u_2 \in K$ de l'inégalité variationnelle (1.18). Dans ce cas, on a

$$(Au_1, v - u_1)_X + j(v) - j(u_1) \geq (f, v - u_1)_X \quad \forall v \in K,$$
$$(Au_2, v - u_2)_X + j(v) - j(u_2) \geq (f, v - u_2) \quad \forall v \in K.$$

Prenons $v = u_2$ dans la première inégalité, $v = u_1$ dans la seconde et en additionnant les inégalités résultantes, on obtient

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \leq 0, \tag{1.28}$$

combinons cette inégalité avec (1.14), on trouve

$$m_A \|u_1 - u_2\|_X^2 \leq 0,$$

comme $m_A > 0$, il découle $u_1 = u_2$ ce qui prouve l'unicité du point fixe.

■

Chapitre 2

Les opérateurs avec et presque avec mémoire

Tout au long de ce chapitre $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ et $(Z, \|.\|_Z)$ sont des espace normés réels $I = [0,\, T]$ ou $I = [0,\, +\infty[$.

On désigne par

1. Si $[0, T] = [0, T]$
$$C([0, T]; X) = \{v : [0, T] \to X \ : v \ \text{ est continue}\},$$
l'espace des fonctions continues définies de $[0, T]$ à valeurs dans X. muni de la norme
$$\|v\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_X.$$
Si X est un espace de Banach, alors $C([0, T]; X)$ est également un espace de Banach. Pour un sous-ensemble $K \subset X$, nous utilisons encore le symbole $C([0, T]; K)$ pour l'ensemble des fonctions continues définies sur I avec des valeurs dans K.

2. Si $I = \mathbb{R}_+$
$$C(\mathbb{R}_+; X) = \{v : \mathbb{R}_+ \to X \ : v \ \text{ est continue}\},$$
l'espace des fonctions continues définies de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans X. Pour un sous-ensemble $K \subset X$, nous utilisons encore le symbole $C(\mathbb{R}_+; K)$ pour L'ensemble des fonction continues définies sur $\mathbb{R}_+$ avec des valeurs dans K

3. $C^1([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continûment dérivable sur $[0, T]$ à valeurs

dans X muni de la norme

$$\|v\|_{C^1([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_X + \max_{t\in[0,T]} \|\dot{v}(t)\|_X.$$

Alors, $v \in C^1([0,T];X)$ si et seulement si $v \in C([0,T];X)$ et $\dot{v} \in C([0,T];X)$, où $\dot{v}$ représente la dérivée de la fonction v. De plus, pour un sous-ensemble $K \subset X$, on désigne par $C^1([0,T];K)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivable sur $[0,T]$ à valeurs dans K.

Commençons ce chapitre par la définition suivante :

Définition 2.1. *On dit qu'un opérateur $S : C(I;X) \to C(I;Y)$ est avec mémoire, si pour tout ensemble compact $J \subset I$, il existe $L_J^S > 0$ tel que*

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq L_J^S \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$
$$\forall u_1, u_2 \in C(I;X), t \in J. \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. *1. Comme $[0;T]$ est un ensemble compact, alors $S : C([0,T];X) \to C([0,T];Y)$ est un opérateur avec mémoire si et seulement s'il existe $L^S > 0$ tel que*

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq L^S \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$
$$\forall u_1, u_2 \in C([0,T];X), t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

2. Si $I = \mathbb{R}_+$, on remarque alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $[0,n]$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}_+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $K \subset [0,n]$. Alors $S : C(\mathbb{R};X) \to (\mathbb{R};Y)$ est un opérateur avec mémoire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $L_n > 0$ tel que

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq L_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_Y ds$$
$$\forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+;X), t \in [0,n]. \tag{2.3}$$

Exemple 2.3. *Soit $u_0 \in X$ et $S : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ soit l'opérateur intégral donné par*

$$Su(t) = \int_0^t u(s)ds + u_0 \quad \forall u \in C([0,T];X), \; t \in [0,T].$$

Alors, pour tous $u_1, u_2 \in C([0,T];X)$, on a

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_X \leq \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds,$$

par conséquent, la condition (2.1) *est valable avec $L_J^S = 1$. Alors, on conclut que l'opérateur S est un opérateur avec mémoire.*

Exemple 2.4. *Soient $u_0 \in X$ et $R : X \to Y$ un opérateur Lipschitz continu, i.e., un opérateur qui satisfait l'inégalité*

$$\|Ru_1 - Ru_2\|_Y \leq L_R \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X,$$

avec un certain $L_R > 0$. Soit $S : C([0,T];X) \to C([0,T];Y)$ l'opérateur donné par

$$Su(t) = R\left(\int_0^t u(s)ds + u_0\right) \quad , Pour\ tout\ \ u \in C([0,T];X),\ \ et\ tout\ t \in [0,T].$$

Alors, pour tous $u_1, u_2 \in C(I;X)$, on a

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq L_R \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds,$$

la condition (2.1) *est vérifiée avec $L_J = L_R$ et par conséquent, S est un opérateur avec mémoire.*

Exemple 2.5. *Soit $S : C(\mathbb{R}_+;X) \to C(\mathbb{R}_+;X)$ l'opérateur intégral défini par*

$$Su(t) = \int_0^t su(s)ds \quad \forall u \in C(\mathbb{R}_+;X),\ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0,n]$ et $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+;X)$. Alors

$$\begin{aligned} \|Su_1(t) - Su_2(t)\|_X &\leq \|\int_0^t su_1(s)ds - \int_0^t su_2(s)ds\|_X \\ &\int_0^t |s|\|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \leq n\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds. \end{aligned}$$

Donc, S est un opérateur avec mémoire.

Définition 2.6. *On dit que l'opérateur $S : C(I;X) \to C(I;Y)$ est un opérateur presque avec mémoire si pour tout ensemble compact $J \subset I$, il existe $l_J^S \in [0,1[$ et $L_J^S > 0$ tels que*

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq l_J^S \|u_1(t) - u_2(t)\|_X$$
$$+ L_J^S \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \quad \forall u_1, u_2 \in C(I;X), t \in J. \tag{2.4}$$

Comme dans le cas des opérateurs avec mémoire, on peut spécifier la définition précédente dans les cas $I = [0;T]$ ou $I = \mathbb{R}_+$ respectivement.

Remarque 2.7. *1. Un opérateur $S : C([0,T];X) \to C([0,T];Y)$ est appelé un opérateur presque avec mémoire si et seulement s'il existe $l^S \in [0,1[$ et $L^S > 0$ tels que*

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq l^S \|u_1(t) - u_2(t)\|_X$$
$$+ L^S \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \quad \forall u_1, u_2 \in C([0,T];X), t \in [0,T]. \tag{2.5}$$

2. Un opérateur $S : C(\mathbb{R}_+;X) \to C(\mathbb{R}_+;Y)$ est appelé un opérateur presque avec mémoire si et seulement si pour tout $n\mathbb{N}^*$, il existe $l_n \in [0,1[$ et $L_n > 0$ tel que

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq l_n \|u_1(t) - u_2(t)\|_X$$
$$+ L_n \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \quad \forall u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+;X), t \in [0,n]. \tag{2.6}$$

Exemple 2.8. *Considérons l'opérateur $S : C(\mathbb{R}_+, X) \to C(\mathbb{R}_+, X)$ défini par*

$$S(u(t)) = (1 - e^{-t})u(t) + \int_0^t su(s)ds \quad \forall u \in C(\mathbb{R}_+, X),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0,n]$ et $u_1, u_2 \in C(\mathbb{R}_+, X)$. Alors

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_X \leq \|(1 - e^{-t})u_1(t) + \int_0^t su_1(s)ds - (1 - e^{-t})u_2(t) - \int_0^t su_2(s)ds\|_X$$
$$\leq (1 - e^{-t})\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + \int_0^t |s|\|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$
$$\leq (1 - e^{-n})\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + n\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

Alors, S est un opération presque avec mémoire $l_n = 1 - e^{-n} \in [0,1[$ et $L_n = n$.

Remarque 2.9. *1. Tout opérateur avec mémoire est presque avec mémoire. La réciproque est fausse.*

2. Si $S : C([0,T],X) \to C(I,X)$ est avec mémoire, alors l'opérateur $kI + S : C([0,T],X) \to C([0,T],X)$ est presque avec mémoire, pour tout $k \in [0,1[$. En effet, soient $u_1, u_2 \in C([0,T],X)$ alors

$$\begin{aligned}
&\|(kI_X + S)u_1(t) - (kI_X + S)u_2(t)\|_X = \|(u_1(t) - u_2(t)) + Su_1(t) - Su_2(t)\|_X \\
&\leq k\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + \|Su_1(t) - Su_2(t)\|_X \\
&\leq k\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + L_J^S \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.
\end{aligned}$$

D'une manière générale, si $A : X \to X$ est un opérateur Lipschitz continue de rapport L et $S : C([0,T],X) \to C([0,T],X)$ un opérateur avec mémoire, alors l'opérateur $kA + S$ est presque avec mémoire pour tout $k \in [O, \frac{1}{L}[$.

Proposition 2.10. *Si $S : C(I;X) \to C(I;Y)$ et $R : C(I;Y) \to C(I;Z)$ deux opérateurs avec mémoire, alors le produit $RS : C(I,X) \to C(I,Z)$ est presque avec mémoire*

Démonstration Soit K un ensemble compact se I. Comme S et R sont presque avec mémoire, alors il existe $l_K, l'_K \in [0,1[$ et $L_K, L'_K > 0$ tels que

$$\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y \leq l_K\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + L_K \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds,$$

$u_1,\ u_2 \in C(I;X)$ et

$$\|Ru_1(t) - Ru_2(t)\|_Z \leq l'_K\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + L'_K \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds,$$

pour tous u_1, $u_2 \in C(I;Y)$. Soient $u_1, u_2 \in C([0,T],X)$ et $t \in K$. Posons ΛRS, alors

$$\|\Lambda u_1 - \Lambda u_2\| = \|(RS)u_1(t) - (RS)u_2(t)\|_Z = \|R(Su_1(t)) - R(Su_2(t))\|_Z$$

$$\leq l'_K\|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y + L'_K \int_0^t \|Su_1(s) - Su_2(s)\|_Y ds$$

$$\leq l'_K\Big(l_K\|u_1(t) - u_2\|_X + L_K \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds\Big) + L'_K \int_0^t \Big(l_K\|u_1(s) - u_2(s)\|_X$$

$$+ L_K \int_0^s \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\Big) ds$$

$$\leq l'_K l_K\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + (l'_K L_K + L'_K l_K) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds$$

$$+ L'_K L_K \int_0^t \left(\int_0^s \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\right) ds.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\int_0^s \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\right) ds &\leq \int_0^t \left(\int_0^t \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\right) ds \\ &= \left(\int_0^t \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\right) \left(\int_0^t ds\right) \\ &= t \int_0^t \|u_1(z) - u_2(z)\|_X ds.\end{aligned}$$

On note par M_K la borne supérieure de l'ensemble K, on obtient

$$\int_0^t \left(\int_0^s \|u_1(z) - u_2(z)\|_X dz\right) ds \leq M_K \int_0^t \|u_1(z) - u_2(z)\|_X ds,$$

et par suite

$$\|\Lambda u_1 - \Lambda u_2\| \leq l'_K l_K\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \quad +(l'_K L_K + l_K L'_K + M_K L'_K) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

Comme $l_K, l'_K \in [0,1[$ alors $l_K l'_K \in [0,1[$, ce qui montre que Λ est presque avec mémoire.

■

Il existe un important théorème du point fixe pour les opérateurs avec mémoire et presque avec mémoire. ce théorème est très utile pour montrer l'existence de solution de diverses classes d'équations non linéaires et d'inégalités variationnelles.

Théorème 2.11. *Soit X un espace de Banach et soit $\Lambda : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ être un opérateur avec mémoire. Alors, Λ a un point fixe unique,i.e.,il existe un élément unique $\eta^* \in C([0,T];X)$ tel que $\Lambda\eta^* = \eta^*$.*

Démonstration Notons par

$$\|\eta\|_\beta = \max_{t\in[0,T]} e^{-\beta t}\|\eta(t)\|_Y, \tag{2.7}$$

avec $\beta > 0$ qui sera ultérieurement choisi, Il est clair que $\|.\|_\beta$ définie une norme sur l'espace $C([0,T];X)$. Cette norme est équivalente à la norme habituelle $\|.\|_{C([0,T];X)}$. Par conséquent, l'espace $C([0,T];X)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\beta$. Soit $t \in [0,T]$. En utilisant la Remarque 2.2, on trouve que il existe $k \in [0,1[$ et $c > 0$ tels que

$$\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq k\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_Y + c\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_Y ds$$

d'après (2.7), on a

$$e^{-\beta t}\|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)\|_X \leq ke^{-\beta t}\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_X + ce^{-\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_X e^{\beta s} ds$$

$$\leq k\|\eta_1 - \eta_2\|_\beta + ce^{-\beta t}\|\eta_1 - \eta_2\|_\beta \int_0^t e^{\beta s} ds$$

$$= k\|\eta_1 - \eta_2\|_\beta + \frac{c}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\|\eta_1 - \eta_2\|_\beta,$$

pour tous $\eta_1, \eta_2 \in C([0,T];X)$, par conséquent

$$\|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2\|_\beta \leq (k + \frac{c}{\beta}) \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in C([0,T];Y), \tag{2.8}$$

choisissons β tel que $\beta > \frac{c}{1-k}$, ce choix est possible car $k \in [0,1[$. Alors,

$$k + \frac{c}{\beta} < 1,$$

ce que implique que l'opérateur Λ est une contraction sur l'espace $C([0,T];X)$ muni de la norme $\|.\|_\beta$. Par le Théorème 1.57 (théorème du point fixe de Banach), il s'ensuite que Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in C([0,T];X)$.

Chapitre 3

Inclusion différentielle gouvernée par le cône normal

3.1 Inclusion dépendante du temps

Dans cette section, on donne la démonstration du résultat principal de ce chapitre, qui assure l'existence et l'unicité de solution pour une certaine classe d'inclusions différentielles gouvernées par des opérateurs non-linéaire. Tout au long de ce chapitre X et Y deux espaces de Hilbert réels muni des produit scalaires$(\cdot,\cdot)_X$ $(\cdot,\cdot)_Y$ des normes associées $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_Y$ respectivement. Nous désignons par $Y\times X$ l'espace produit de Y et X muni du produit scalaire $(.,.)_{Y\times X}$ et de la norme associée $\|.\|_{Y\times X}$. Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

$(\mathcal{K})$ $K\subset X$ est un cône convexe fermé non vide (et, par conséquent,$0_X\in K$).

$$(\mathcal{A})\begin{cases} A : X\to X \text{ un opérateur } L_A \text{ Lipschitz continu et } m_A \text{ fortement monotone}\\ \text{avec } L_A \text{ et } m_A \text{ positifs.}\end{cases}$$

$$(\mathcal{R})\begin{cases} \mathcal{R} : C([0,T];X)\to C([0,T];Y) \text{ et pour tout ensemble compact}\\ \mathcal{J}\subset[0,T], \text{ il existe } \ l^R_{\mathcal{J}}>0 \text{ et } L^R_{\mathcal{J}}>0 \text{ tels que}\\ \|\mathcal{R}u_1(t)-\mathcal{R}u_2(t)\|_Y\leq l^R_{\mathcal{J}}\|u_1-u_2\|_X+L^R_{\mathcal{J}}\int\limits_0^t\|u_1-u_2\|_X ds,\\ \text{pour tous } u_1,u_2\in C([0,T];X) \text{ et tout } t\in\mathcal{J}\ .\end{cases}$$

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} \mathcal{S}: C([0,T];X) \to C([0,T];X) \text{ et pour tout ensemble compact} \\ \mathcal{J} \subset [0,T], \text{ il existe } l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} > 0 \text{ et } L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} \|u_1 - u_2\|_X + L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} \int\limits_0^t \|u_1 - u_2\|_X ds, \\ \text{pour tous } u_1, u_2 \in C([0,T];X), \text{ et tout } t \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

$$(j)\quad \begin{cases} j \text{ une fonction définie de } Y \times K \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \text{ telle que} \\ (a)\ j(\eta,.) : K \to \mathbb{R} \text{ est une fonction Lipschitz continue convexe et} \\ \text{positivement homogène et } j(\eta,0) = 0 \text{ pour tout } \eta \in Y. \\ (b) \text{ Il existe } \alpha_j \geq 0 \text{ tel que} \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \leq \alpha_j \|\eta_1 - \eta_2\|_Y \|v_1 - v_2\|_X, \\ \text{pour tous } \eta_1, \eta_2 \in Y \text{ et tous } v_1, v_2 \in K. \end{cases}$$

$(\mathcal{F})$ $f \in C([0,T];X)$.

Exemple 3.1. *Considérons l'opérateur* $\mathcal{R} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ *défini par*

$$\mathcal{R}u(t) = e^t u(t) + \int\limits_0^t su(s) \quad \forall u \in C(I;X), t \in I.$$

Il est alors facile de voir que $(\mathcal{R})$ *satisfait à la condition* $\mathcal{R}$ *avec*

$$l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = \max_{t \in \mathcal{J}} e^t \qquad et\ L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = \max_{t \in \mathcal{J}} t. \tag{3.1}$$

De plus, notons que $\mathcal{R}$ *n'est pas un opérateur presque avec mémoire.*

Prolongeons maintenant la fonction j de $Y \times K$ à l'espace produit $Y \times X$ en introduisant la fonction $J : Y \times X \to]-\infty, +\infty]$ définie par

$$J(\eta, v) = \begin{cases} j(\eta, v) & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K. \end{cases} \qquad \forall \eta \in Y. \tag{3.2}$$

En utilisant les hypothèses $(\mathcal{K})$ et $(\mathcal{J})$, il est facile de montrer que pour tout $\eta \in Y, J(\eta,.)$ est propre, positivement homogène, convexe et semi-continue inférieurement. De plus , $J(\eta, 0_X) = 0$. Notons par $C(\eta)$ le sous-différentiel de $J(\eta,.)$ au point 0_X, *i.e.*,

$$C(\eta) = \partial J(\eta, 0_X) = \{\xi \in X : J(\eta, v) \geq (\xi, v)_X \forall v \in X\}, \tag{3.3}$$

et pour tout $t \in I$, soit
$$C(\eta, t) = f(t) - C(\eta). \tag{3.4}$$
Notons que, d'après les hypothèses $(\mathcal{K})$, $(\mathcal{J})$ et $(\mathcal{F})$, on a pour tout $\eta \in X$ et tout $t \in [0, T]$, l' ensemble $C(\eta, t)$ est un sous-ensemble non vide convexe fermé de X.
Après avoir donner ces notations, on arrive a énoncer le problème principal de ce chapitre.

Problème 1. Trouver une fonction $u : [0, T] \to X$ telle que
$$-u(t) \in N_{C(\mathcal{R}u(t)),t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)), \ \forall t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Avant de donner le résultat d'existence et d'unicité du Problème 1. Nous commençons par des résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la démonstration du théorème d'existence de solution.

Lemme 3.2. *On suppose que les hypothèses $(\mathcal{K})$ et $(j)(a)$ sont satisfaites, soient également $f : [0, T] \to X$, $\eta \in Y$, u, $z \in X$, $t \in [0, T]$ et soient $J, C(\eta), C(\eta, t)$ donnés par* (3.2), (3.3) *et* (3.4) *respectivement. Alors, on a l'équivalence suivante*
$$u \in K, j(\eta, v) - j(\eta, u) \geq (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in K \Longleftrightarrow -u \in N_{C(\eta,t)}(z). \tag{3.6}$$

Démonstration En utilisant (3.2) et la définition du sous-différentiel, nous avons les équivalences
$$\begin{aligned} &u \in K, \ j(\eta, v) - j(\eta, u) \geq (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in K \\ &\Longleftrightarrow J(\eta, v) - J(\eta, u) \geq (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in X \\ &\Longleftrightarrow f(t) - z \in \partial J(\eta, u), \end{aligned}$$
et donc d'après la Remarque 1.50, on trouve que
$$\begin{aligned} &u \in k, j(\eta, v) - j(\eta, u) \geq (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in K \\ &\Longleftrightarrow u \in \partial J^*(\eta, f(t) - z), \end{aligned} \tag{3.7}$$
comme $J(\eta, .) : X \to] - \infty, +\infty]$ est positivement homogène semi-continue inférieurement avec $J(\eta, 0_X) = 0$, alors $J(\eta, .) = I^*_{C(\eta)}(.)$. Ce qui implique que $J^*(\eta, .) = I^{**}_{C(\eta)}(.) = I_{C(\eta)}(.)$. Il s'en suit donc que $\partial J^*(\eta, \cdot) = N_{C(\eta)}(\cdot)$, et par conséquent
$$u \in \partial J^*(\eta, f(t) - z) \Longleftrightarrow u \in N_{C(\eta)}(f(t) - z). \tag{3.8}$$

Enfin, d'après (1.11) et (1.12), nous déduisons que

$$u \in N_{C(\eta)}(f(t) - z) = N_{C(\eta)-f(t)}(-z) \Longleftrightarrow -u \in N_{f(t)-C(\eta)}(z) \tag{3.9}$$

En utilisant la notation (3.4), on trouve que (3.6) est satisfaite.

■

Lemme 3.3. *Pour tout* $\theta = (\eta, \xi) \in C([0,T]; Y \times X)$*, il existe une fonction unique* $u_\theta \in C([0,T]; K)$ *telle que*

$$-u_\theta(t) \in N_{C(\eta(t),t)}(Au_\theta(t) + \xi(t)) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.10}$$

De plus, si $u_i \in C([0,T]; K)$ *représente la solution de l'inclusion* (3.10) *pour* $\theta_i = (\xi_i, \eta_i) \in C([0,T]; Y \times X), i = 1, 2,$ *alors*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_X \leq \frac{1}{m_A}(\alpha_j \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_Y + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_X) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.11}$$

Démonstration Soit $\theta = (\eta, \xi) \in C([0,T]; Y \times X)$. En utilisant le Lemme 3.2, on trouve que l'inclusion différentielle (3.10) est équivalente au problème suivant :
Trouver une fonction $u_\theta : [0,T] \to X$ telle que

$$\begin{aligned} u_\theta(t) \in K, j(\eta(t), v) - j(\eta(t), u_\theta(t)) &\geq (f(t) - Au_\theta(t) - \xi(t), v - u_\theta(t))_X \\ \forall v \in K, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Prouvons que cette inégalité variationnelle dépendante du temps possède une solution unique $u_\theta \in C([0,T]; K)$. Pour ce but, fixons un élément arbitraire $t \in [0,T]$. Alors, en utilisant les hypothèses ($\mathcal{K}$), ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{J}$), il en résulte du Théorème 1.58 qu'il existe un élément unique $u_\theta(t)$ qui résout (3.12). Montrons que application $t \to u_\theta(t) : [0,T] \to K$ est continue. Pour cela, considérons $t_1, t_2 \in [0,T]$ et pour simplifier l'écriture, no note $\eta(t_i) = \eta_i, \xi(t_i) = \xi_i, u_\theta(t_i) = u_i, f(t_i) = f_i$ pour $i = 1, 2$. En utilisant (3.12), on obtient

$$u_1 \in K, j(\eta_1, v) - j(\eta_1, u_1) \geq (f_1 - Au_1 - \xi_1, v - u_1)_X \quad \forall v \in K, \tag{3.13}$$

$$u_2 \in K, j(\eta_2, v) - j(\eta_2, u_2) \geq (f_2 - Au_2 - \xi_2, v - u_2)_X \quad \forall v \in K. \tag{3.14}$$

En prenant $v = u_2$ dans (3.13), $v = u_1$ dans (3.14) et en additionnant les inégalités obtenues, on obtient

$$\begin{aligned} &(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \leq j(\eta_1, u_2) - j(\ \eta_1, u_1) + j(\eta_2, u_1) - j(\eta_2, u_2) \\ &+ (\xi_1 - \xi_2, u_1 - u_2)_X + (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_X. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En utilisant les hypothèses $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{J})(b)$, on trouve que

$$m_A\|u_1-u_2\|_X^2 \leq \alpha_j\|\eta_1-\eta_2\|_Y\|u_1-u_2\|_X + (\xi_1-\xi_2, u_1-u_2)_X + (f_1-f_2, u_1-u_2)_X,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$m_A\|u_1-u_2\|_X^2 \leq \alpha_j\|\eta_1-\eta_2\|_Y\|u_1-u_2\|_X + \|\xi_1-\xi_2\|_X\|u_1-u_2\|_X + \|f_1-f_2\|_X\|u_1-u_2\|_X,$$

et par suite

$$m_A\|u_1-u_2\|_X \leq \alpha_j\|\eta_1-\eta_2\|_Y + \|\xi_1-\xi_2\|_X + \|f_1-f_2\|_X. \tag{3.16}$$

L'inégalité (3.16) avec l'hypothèse $(\mathcal{F})$ nous donnent la continuité de l'application $t \to u_\theta(t) : [0,T] \to K$ ce qui implique l'existence de solution. L'unicité est une conséquence directe de l'unicité de la solution $u_\theta(t)$ de l'inégalité (3.12), pour chaque $t \in [0,T]$, garantie par le Théorème 1.58.
Si $u_i \in C([0,T];K)$ représente la solution de l'inégalité (3.12) pour $\theta_i = (\xi_i, \eta_i) \in C([0,T]; Y \times X), i = 1,2$, alors, par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve d'existence de solution pour l'inégalité (3.16), on peut démontrer que (3.11) est satisfaite.

■

Lemme 3.4. *L'opérateur Λ définie de $C([0,T];Y\times X)$ à valeurs dans $C([0,T];Y\times X)$ par*

$$\Lambda\theta = (\mathcal{R}u_\theta, \mathcal{S}u_\theta) \qquad \forall \theta \in C([0,T]; Y \times X), \tag{3.17}$$

possède un unique point fixe $\theta^* = (\eta^*, \xi^*) \in C([0,T]; Y \times X)$.

Démonstration Soit $\theta_1 = (\eta_1, \xi_1), \theta_2 = (\eta_1, \xi_2) \in C([0,T]; Y \times X)$ et désignons par u_i la solution de l'inégalité variationnelle (3.12) pour $\theta = \theta_i$, *i.e.*, $u_i = u_{\theta_i}, i = 1,2$. Soit $\mathcal{J}$ un sous-ensemble compact de $[0,T]$ et $t \in \mathcal{J}$. Alors, en utilisant (3.17) et les hypothèses $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$, on obtient

$$\|\Lambda\theta_1(t) - \Lambda\theta_2(t)\|_{Y\times X} \leq \|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\|_Y + \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X$$

$$\leq (l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} + l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}})\|u_1(t) - u_2(t)\|_X + (L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} + L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}) \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds.$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité (3.11) et les inégalités élémentaires $\|\eta\|_Y \leq \|\theta\|_{Y\times X}$, et $\|\xi\|_X \leq \|\theta\|_{Y\times X}$, valables pour tout $\theta = (\eta, \xi) \in Y \times X$, impliquent que

$$\|\Lambda\theta_1(t) - \Lambda\theta_2(t)\|_{Y\times X} \leq \frac{(\alpha_j + 1)(l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} + l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}})}{m_A}\|\theta_1(t) - \theta_2\|_{Y\times X}$$
$$+ \frac{(\alpha_j + 1)(L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} + L_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}})}{m_A}\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{Y\times X}.$$

Par (3.18), on trouve que l'opérateur Λ est presque avec mémoire. Par conséquent, d'après le théorème 2.11, on en déduit l'existence d'un point fixe pour l'opérateur Λ.

■

Énonçons maintenant le résultat principal de ce chapitre

Théorème 3.5. *Supposons que les hypothèse ($\mathcal{K}$)-($\mathcal{F}$) sont satisfaites, Supposons également l'hypothèse de petitesse suivante*

$$(\alpha_j + 1)(l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} + l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}) \leq m_A. \tag{3.18}$$

Alors, le problème 1 a une solution unique avec la régularité $u \in C([0, T]; K)$.

Démonstration du théorème 3.5 Soit $\theta^* = (\eta^*, \xi^*) \in C([0, T]; Y \times X)$ le point fixe de l'opérateur Λ et soit $u^* = u_{\theta^*} \in C([0, T]; K)$, la solution du problème intermédiaire (3.10) pour $\theta = \theta^*$. Alors, en utilisant l' égalité $\theta^* = \Lambda\theta^*$ on trouve que $\eta^* = \mathcal{R}u^*$ et $\xi^* = \mathcal{S}u^*$. En substituant ces égalités dans (3.10), on conclut que u^* est une solution du problème 1. L'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ, garantie par le Lemme 3.4.

■

Nous terminons cette section par quelques conséquences de ce théorème.

Corollaire 3.6. *Supposons que les hypothèses ($\mathcal{K}$), ($\mathcal{A}$), (j), ($\mathcal{F}$) soient satisfaites, et supposons de plus que $\mathcal{R} : C([0, T]; X) \to C([0, T]; Y)$ et $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \to C([0, T]; X)$ sont des opérateurs avec mémoire. Alors, le problème 1 a une solution unique avec la régularité $u \in C([0, T]; K)$*

Démonstration La Définition 2.1 montre que dans ce cas les conditions $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$ sont satisfaites avec $l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} = 0$ et donc, la condition de petitesse (3.18) est satisfaite. Le Corollaire 3.6 est maintenant une conséquence directe du Théorème 3.5.

■

Par une application directe du Théorème 3.5, on obtient le corollaire

Corollaire 3.7. *Supposons les hypothèses $(\mathcal{K})$, $(\mathcal{A})$,$(\mathcal{F})$ soient satisfaites supposons de plus que $\mathcal{S} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ est un opérateur avec mémoire et j satisfasse la condition (j) avec $Y = X$ et*

$$\alpha_j + 1 < m_A. \tag{3.19}$$

Alors, il existe une unique fonction $u \in C([0,T];K)$ telle que

$$-u(t) \in N_{C(u(t),t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.20}$$

Démonstration Prenons $Ru = u$ pour tout $u \in C([0,T];X)$. Alors, en utilisant la Définition 2.1 on trouve que les conditions $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$ sont satisfaites avec $l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = 1$ et $l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} = 0$, respectivement. Par conséquent, (3.19) implique que la condition de petitesse (3.18) est également valable, par le Théorème 3.5 on obtient le résultat.

■

Considérons maintenant le cas particulier où la fonction j ne dépend pas de la première variable, i.e., $j : K \to \mathbb{R}$ .Dans ce cas, nous définissons la fonction $J : X \to]-\infty, +\infty]$ et les ensembles C, $C(t) \subset X$ par les égalités

$$J(v) = \begin{cases} j(v) & \text{si } \ v \in K, \\ +\infty & \text{si } \ v \notin K, \end{cases}$$

$$C = \partial J(0_X), \quad C(t) = f(t) - C \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.21}$$

Avec ces notations, nous avons le résultat suivant qui représente une conséquence directe du Théorème 3.5.

Corollaire 3.8. *Supposons $(\mathcal{K})$, $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{F})$ sont satisfaite et $\mathcal{S} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ est un opérateur avec mémoire. Si de plus $j : K \to \mathbb{R}$ est convexe positivement homogène et Lipschitz continue, alors, il existe une fonction unique $u \in C([0,T];X)$ telle que*

$$-u(t) \in N_{C(t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)) \qquad \forall t \in [0,T].$$

3.2 Processus de Rafle

Dans cette section, nous utilisons le Théorème 3.5 et ses conséquences afin d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité de solution pour le processus de Rafle . Supposons que les hypothèse $(\mathcal{K}) - (\mathcal{F})$ soient satisfaites et considérons un opérateur $B : X \to X$ et une donnée initiale u_0 tels que

$(\mathcal{B})$ $\quad$ $B : X \to X$ est un opérateur Lipschitz continu de rapport L_B,

(u_0) $\quad$ $u_0 \in X$.

Nous commençons cette section par considérer le processus de Rafle suivant

Problème 2.

Trouver une fonction $u : [0,T] \to X$ de telle sorte que

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(R\dot{u}(t),t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)) \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.22}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.23}$$

Le premier résultat d'existence dans cette section est le suivant

Théorème 3.9. *Supposons les hypothèse $(\mathcal{K}) - (\mathcal{F})$,$(\mathcal{B})$, (u_0) soient satisfaites , et supposons que* (3.18) *soit valable. Alors, le problème 2 a une solution unique avec la régularité $u \in C^1([0,T];X)$ et $\dot{u} \in C([0,T];K)$.*

Démonstration Nous introduisons l'opérateur $\widetilde{\mathcal{S}} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ défini par

$$\widetilde{\mathcal{S}}v(t) = B\left(\int_0^t v(s)ds + u_0\right) + \mathcal{S}v(t), \tag{3.24}$$

pour tout $t \in [0,T]$, $v \in C([0,T];X)$. Considérons le problème auxiliaire suivant trouver une fonction $v : [0,T] \to X$ telle que

$$-v(t) \in N_{C(\mathcal{R}v(t),t)}(Av(t) + \widetilde{\mathcal{S}}v(t)) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.25}$$

En utilisant les hypothèses ($\mathcal{S}$) et ($\mathcal{B}$) on trouve que, pour toutes fonctions $v_1, v_2 \in C([0,T];X)$ et tout $t \in [0,T]$, on a l'inégalité suivante

$$\|\widetilde{\mathcal{S}}v_1(t) - \widetilde{\mathcal{S}}v_2(t)\|_X \leq l_J^S\|v_1(s) - v_2(t)\|_X \ + (L_B + L_J^S) \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_X ds.$$

Il s'en suit alors que l'opérateur $\widetilde{\mathcal{S}}$ satisfait à la condition (S) avec $l_{\mathcal{J}}^{\widehat{\mathcal{S}}} = l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}$. Par conséquent, d'après le Théorème 3.5 on obtient l'existence d'une unique fonction $v \in C([0,T];K)$ qui satisfait (3.25). Notons par $u : [0,T] \to X$ la fonction définie par

$$u(t) = \int_0^t v(s) + u_0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.26}$$

Alors, (3.24)-(3.26) et l'hypothèse (u_0) impliquent que u est une solution du Problème 2 avec la régularité $u \in C^1([0,T];X)$ et $\dot{u} \in C([0,T];K)$. L'unicité de la solution découle de l'unicité de solution pour le problème auxiliaire (3.25), garantie par le Théorème 3.5.

■

Corollaire 3.10. *Supposons les hypothèses ($\mathcal{K}$), ($\mathcal{A}$), (j), ($\mathcal{F}$),($\mathcal{B}$), (u_0) soient satisfaites et, supposons de plus que $\mathcal{R} : C([0,T];X) \to C([0,T];Y)$ et $\mathcal{S} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ sont des opérateurs avec mémoire. Alors, le problème 2 possède une solution unique avec la régularité $u \in C^1([0,T];X)$ et $\dot{u} \in C([0,T];K)$.*

Démonstration La Définition 2.1 montre que dans ce cas les conditions ($\mathcal{R}$) et ($\mathcal{S}$) sont satisfaites avec $l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}}$ et par conséquent, la condition de petitesse (3.18) est satisfaite. Alors, le Corollaire 3.10 est une conséquence directe du Théorème 3.9.

■

Corollaire 3.11. *Supposons les hypothèses ($\mathcal{K}$), ($\mathcal{A}$), ($\mathcal{F}$), ($\mathcal{B}$), (u_0) soient satisfaites et $S : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ un opérateur avec mémoire. Supposons également que j satisfait la condition (j) avec $Y = X$. Alors, il existe une fonction unique $u \in C^1([0,T];X)$ telle que*

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(u(t),t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)) \quad \forall t \in [0,T],$$

$$u(0) = u_0.$$

De plus, $\dot{u} \in C([0,T];K)$.

Démonstration Considérons l'opérateur $\mathcal{R} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ défini par l'égalité

$$\mathcal{R}v(t) = \int_0^t v(s)ds + u_0 \quad \forall v \in C([0,T];K),\ t \in [0,T].$$

Ensuite, en utilisant la Définition 2.1, on trouve que dans ce cas les conditions $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{S})$ sont satisfaites avec $l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{R}} = l_{\mathcal{J}}^{\mathcal{S}} = 0$ respectivement. Par conséquent, la condition de petitesse (3.18) est satisfaite. De plus, $\mathcal{R}\dot{u} = u$ pour tout $u \in C(I;X)$. En appliquant donc le Corollaire 3.10, on obtient le résultat.

■

Corollaire 3.12. *Supposons* $(\mathcal{K})$, $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{B})$, (u_0) *soient satisfaites et* $S : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ *est un opérateur avec mémoire. De plus, supposons que* j *satisfait la condition* (j) *avec* $Y = X$. *Alors, il existe une fonction unique* $u \in C([0,T];K)$ *telle que*

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(u(t),t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + Su(t)) \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.27}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.28}$$

De plus, $\dot{u} \in C([0,T];K)$

Démonstration Considérons l'opérateur $\widetilde{S} : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ défini par l'égalité

$$\widetilde{S}v(t) = S\left(\int_0^t v(s)ds + u_0\right) \quad \forall v \in C([0,T];X),\ t \in [0,T]. \tag{3.29}$$

Ensuite, en utilisant la Définition 2.1, il est clair que $\widetilde{\mathcal{S}}$ est un opérateur avec mémoire. De plus, $\widetilde{\mathcal{S}}\dot{u} = \mathcal{S}u$ pour tout $u \in C^1([0,T];X)$. Le corollaire 3.12 est une conséquence directe du Corollaire 3.11.

■

Bibliographie

[1] **S. Adly and M. Sofonea** *Time-dependent inclusions and sweeping processes in contact mechanics*, Z. Angew. Math. Phys. 70, 39 (2019).

[2] **V. Barbu and T.Precupanu**, *Convexity and optimization in banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics (2012).

[3] **H.Brézis.** *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer ,New York (2011).

[4] **A. Capatina**, *Variational inequalities frictional contact problems*, Advances in Mechanics and Mathematics 31, Springer, New York, (2014).

[5] **C. Castaing** : *Quelques problèmes d'évolution du second ordre.* Sém. d'Anal.Conv. Montp (1988).

[6] **C. Castaing**, A. G. Ibrahim, M. F Yarou : *Some contributions to nonconvex sweeping process.* J. Nonlinear Convex Anal. 10, 1-20 (2009).

[7] **C. Castaing, M. D. P. Monteiro-Marques** : *B V periodic solutions of an evolution problem associated with continuons moving convex sets.* Set. Valued Anal, 3(4) :381-399(1995)

[8] **P. L. Combettes et H. H. Bauschke**, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York (2011).

[9] **C. Corduneanu**, *Problémes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Ann. Math. Pure Appl. 67, 349-1363 (1965).

[10] **A. Dhara et D. Joydeep.** *Optimality conditions in convex optimization : a finite dimensional view.* Springer (2011).

[11] **T. Hoheisel.** *Topics in convex analysis in matrix space.* Spring school on variational analysis (2019).

[12] **J. B. Hiriart-Urrut et C. Lemaréchal.** *Fundamentals of convex analysis.* Springer, 1st edition (2001).

[13] **J.J. Massera et J. J.Schäer** , *Linear Differntial equations and function spaces.* Academic press, New York, London (1966).

[14] **J.J.Moreau**, *Rafle par un convexe variable I.*Sém. Anal. convexe Montp. Exp. 15, 43 (1971).

[15] **J.J.Moreau**, *Rafle par un convexe variable II.*Sém. Anal. convexe Montp. Exp. 3, 36 (1972).

[16] **J. Peypouquet**,*Convex optimization in normed spaces : theory, methods and examples* Springer (2015).

[17] **Rockafellar, R.T.**, *Convex Analysis.* Princeton university press, Princeton (1969).

[18] **M. Sofonea and A. Matei**, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical society lecture note Series 398, Cambridge university press (2012).

[19] **M. Sofonea and S. Migórski**, *Variational-Hemivariational inequalities with applications*, Pure and applied mathematics, Chapman et Hall/CRC Press, Boca Raton-London (2018).

[20] **J. Sontag**,*Topologie et Analyse Fonctionnelle.* Ellipses, Berllin (1997).