République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Régularisation d'un problème maximal monotone

Présenté par :

Tiar Khadidja

Devant le jury :

Président	: Lounis Sabrina	MCA	Université de Jijel
Encadreur	: Arroud Chems Eddine	MCB	Université de Jijel
Examinateur	: Yakhlef Othman	MCB	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Soutenu le **06/2023**

Remerciements

Avant tout, mes vifs remerciements ; je les exprime à **ALLAH** qui m'a donné la santé, la volonté, la patience et le courage pour terminer ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à mon encadreur Monsieur **Arroud Chems Eddine** pour ses multiples conseils et pour m'avoir guidé qui m'a fait sur le droit chemin afin de réaliser ce modeste travail.

Je voudrais également être reconnaissante à l'ensemble des membres de jury : Madame **Lounis Sabrina** et Monsieur **Yakhlef Othman** de l'université de Jijel pour m'avoir honorée par leurs évaluation du travail en tant qu'examinateurs.

Enfin, je n'oublie pas tous mes enseignants au département de mathématiques de l'université de Jijel .

Merci à tous et à toutes.

$*\mathcal{D}$édicaces$*$

$\mathcal{J}$e dédie ce modeste travail :

$\mathcal{A}$ mes très chèrs parents.

$\mathcal{A}$ mes frère et mes soeurs.

$\mathcal{A}$ toute ma famille.

$\mathcal{A}$ tous mes amies de promotion 2^{eme} année master EDP et Applications.

$\mathcal{A}$ tous ceux qui ont participé à ma réussite.

$*\mathcal{K}$hadidja $*$

$\mathcal{R}$ésumé

Dans ce travail, en utilisant la technique de régularisation, on a établit l'existence et l'unicité de solutions pour un problème d'évolution régi par des opérateurs maximaux monotones, dépendant du temps de la forme

$$\frac{d}{dt}u(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t), \quad 0 < t < T,$$

Une application de ce problème a été établie dans le domaine de la Biologie, ce modèle mathématique présenté décrit le problème de la diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants.

$\mathcal{A}$bstract

In this work, using the regularization technique, we establish the existence and uniqueness of solutions for an evolution problem governed by time-dependent maximal monotone operators, of the form

$$\frac{d}{dt}u(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t), \quad 0 < t < T,$$

An application of this problem has been established to the biological domain. This mathematical model present the problem of oxygen diffusion in absorbent tissues.

Table des matières

0.1 Notations

- p.p : Presque partout.
- i.e. : C'est à dire.
- resp. : Respectivement.
- $\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.
- min,max,inf,sup : Minimum, maximum, infimum et supremum respectivement .
- H : Représente l'espace de Hilbert.
- $\{\varphi^t\} = \{\varphi^t; 0 \leq t \leq T\}, 0 < T < \infty$: Une famille de fonctions semi-continue inférieurement, propres et convexes sur H.
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$: Produit de dualité.
- $\|\cdot\|$: La norme de H.
- X^* : Dual topologique d'un espace normé X.
- $\overline{\mathbb{B}}_X$: La boule unité fermée de X.
- $N_C(x)$: Cône normal à un ensemble convexe C au point x.
- $proj_C(\cdot)$: L'application de projection sur C.
- $Int(A), \bar{A}$: L'intérieur et l'adhérence d'un ensemble A respectivement .
- $d(\cdot, C)$: La fonction distance .
- $F : X \rightrightarrows Y$: Désigne une application à valeurs multivoque (multi-application) de X dans Y.
- ∇ : L'opérateur de gradient .
- div : L'opérateur de divergence .

• ∂_ν : L'opérateur de la dérivée normale.

• $\partial\Omega$: La frontière d'un ensemble Ω.

• I : L'opérateur d'identité.

• $\delta_C(\cdot), \sigma_C(\cdot)$: La fonction indicatrice (resp. support) d'un ensemble C.

• $\partial f(x)$: Sous-différentiel d'une fonction convexe f au point x.

• $D(A)$: Domaine de l'opérateur A .

• $B(x_0, r)$: Boule ouvert centrée en x_0 de rayon r.

• $S(x_0, r)$: Sphère centrée en x_0 de rayon r.

• s.c.i, s.c.s : Semi-continue inférieurement et Semi-continue supérieurement respectivement.

• $C([0,T], H)$: Espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans H.

• $L^1([0,T], H)$: L'espace des applications intégrables sur $[0,T]$ à valeurs dans H.

• $L^2([0,T], H)$: L'espace de Hilbert des applications de carré intégrable sur $[0,T]$ à valeurs dans H.

• $L^\infty([0,T], H)$: L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H.

• $W^{1,2}([0,T], H)$: L'espace des fonctions u absolument continues définies sur $[0,T]$ à valeurs dans H tel que $\dfrac{du}{dt} \in L^2([0,T], H)$.

• $Ess.sup$: Borne supérieure essentielle.

Introduction

Les problèmes d'évolution non linéaires sont des concepts mathématiques puissants utilisés pour modéliser et analyser une grande variété de phénomènes dynamiques dans différents domaines scientifiques.

Un problème d'évolution non linéaire fait référence à une classe de problèmes mathématiques dans lesquels la dynamique d'un système évolue dans le temps en fonction de ses états antérieurs. Ces problèmes sont souvent décrits par des équations différentielles ou des systèmes d'équations différentielles non linéaires. Contrairement aux problèmes d'évolution linéaires, les termes non linéaires introduisent des dépendances complexes et non triviales entre les variables du système, ce qui peut conduire à des comportements dynamiques riches et souvent difficiles à résoudre analytiquement. Un de ces problème sont les inclusions différentielles qui offrent une généralisation des équations différentielles classiques, où au lieu d'une unique dérivée, nous considérons un ensemble de dérivées possibles pour une fonction donnée.

Les inclusions différentielles modélisent des systèmes dynamiques présentant des comportements non déterministes. Elles permettent de prendre en compte des phénomènes tels que les perturbations, les discontinuités, les interactions multivoques et les contraintes non linéaires. Les inclusions différentielles sont souvent utilisées pour modéliser des phénomènes physiques, économiques ou biologiques complexes dans lesquels des incertitudes ou des variations importantes peuvent influencer l'évolution du système.

Les problèmes d'inclusions différentielles permet de modéliser des systèmes dynamiques complexes et réalistes, où des effets non linéaires, des interactions multiples et des incertitudes peuvent coexister. La résolution et l'analyse de ces problèmes nécessitent souvent des techniques mathématiques avancées, telles que la théorie des opérateurs monotones, les méthodes variationnelles, les méthodes numériques avancées et les techniques d'analyse fonctionnelle. On trouvent plusieurs applications des inclusion différentielle dans de nombreux domaines, tels que la physique, la biologie, l'économie, la mécanique des fluides, la théorie du contrôle, la finance, l'optimisation, etc. Ils jouent un rôle essentiel dans la modélisation et la compréhension des phénomènes complexes du monde réel, ainsi que dans le développement de méthodes de résolution efficaces pour analyser et prédire le comportement des systèmes dynamiques.

L'étude de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles est un problème fondamental en mathématiques appliquées et en analyse, plusieurs approches peuvent être utilisées. Les méthodes couramment employées sont :
1. Méthodes de point fixe : Les méthodes de point fixe sont largement utilisées

pour prouver l'existence de solutions aux inclusions différentielles. Ces méthodes consistent à reformuler l'inclusion sous forme d'un problème de point fixe, où la solution de l'inclusion est le point fixe d'une certaine fonction.

2. Méthodes de compacité : Les méthodes de compacité sont utilisées pour prouver l'existence de solutions en exploitant des propriétés de compacité dans l'espace des fonctions ou des ensembles concernés. Ces méthodes impliquent souvent des techniques d'approximation, de passage à la limite ou d'extrapolation pour construire des suites convergentes et montrer l'existence de solutions dans des espaces fonctionnels appropriés.

3. Méthodes de régularisation : Les méthodes de régularisation sont utilisées pour transformer une inclusion différentielle non régulière en un problème équivalent avec des contraintes plus régulières. Ces méthodes impliquent souvent l'introduction de termes de régularisation ou l'utilisation de fonctions de régularisation pour simplifier l'analyse et prouver l'existence de solutions.

4. Méthodes numériques : Les méthodes numériques jouent un rôle essentiel dans l'étude et la démonstration de l'existence de solutions aux inclusions différentielles. Ces méthodes impliquent la discrétisation de l'inclusion et la résolution numérique des équations résultantes à l'aide de techniques telles que les schémas de différences finies, les méthodes d'éléments finis ou les méthodes de décomposition de domaine .

L'objectif de ce mémoire est de détailler l'article de Nobuyuki Kenmochi et Irena Pawlow intitulé " A Class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints [23]", les auteurs de ce dernier article ont étudié l'existence et l'unicité de solution d'une inclusion différentielle gouvernée par un opérateur maximal monotone comme suit

$$\begin{cases} u'(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t), \qquad 0 < t < T. \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

par la méthode de régularisation .

où $f \in L^2([0,T];H)$, A est un opérateur maximal monotone tel que $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et φ^t est une fonction semi-continue inférieurement, propre et convexe dans H. Il est intéressant de noter que ce problèmes nous donne un schéma particulière similaire à ce problème, nommé processus de la rafle avec $\varphi^t = \delta_{C(t)}$ comme suit

$$\begin{cases} u'(t) \in -N_{C(t)}(Au(t)) + f(t), \qquad 0 < t < T. \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

mais certaines hypothèses de compacité et de coercivité ne sont pas valables pour ce cas, ils devaient être remplacés par des conditions appropriés dans le cas du processus de la rafle.

Notre travail est également soutenu par une nouvel application dans le domaine biologique et médical, cette application est inspirée du papier [13].

Ce mémoire est constituée de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à des notions de base et quelques résultats auxiliaires que nous allons utiliser tout au long de ce travail. Le deuxième chapitre a pour but de montrer l'existence et l'unicité de solution du problème principale avec une méthode basée sur la régularisation de Yosida. On termine ce travail par une application qui décrit le problème de la diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants.

Chapitre 1

Définitions et Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres.

1.1 Quelques rappels d'analyse convexe

Définition 1.1.

1. *Un sous ensemble $C \subset X$ est dit convexe si pour tous $x, y \in C$ le segment reliant x à y reste dans C, i.e.,*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \textit{ pour tout } \lambda \in [0,1].$$

2. *Une fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si, pour tous $x, y \in D(f)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ l'inégalité suivante, dite "l'inégalité de convexité "est vérifiée*

$$\forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

où $D(f)$ est le domaine de f défini par

$$D(f) = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité de convexité est stricte (i.e. $\forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), \forall x, y \in D(f), x \neq y$). La définition de la convexité signifie que le segment reliant les deux points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ se trouve toujours au dessus de la courbe de f.

3. *On appelle épigraphe de $f : X \to \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $X \times \mathbb{R}$ noté et défini comme suit*

$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

1.2 Fonctions Lipschitziennes

Définition 1.2. *Soit X un espace de Banach et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est Lipschitzienne de rapport k s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X$.*

Définition 1.3. *Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est localement Lipschitzienne de rapport $k > 0$ au voisinage de x_0 si pour un certain $\varepsilon > 0$, f est Lipschitzienne de rapport k sur l'ensemble $x_0 + \varepsilon B(0,1) = B(x_0, \varepsilon)$.*

Théorème 1.4. *[7] Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonction, si f est Lipschitzienne. Alors f est localement Lipschitzienne.*

Définition 1.5. *Soient X un espace de Banach, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dit que f est contractante (ou bien est une contraction) si elle est k-Lipschitzienne avec $k < 1$.*

1.3 La Fonction distance et la projection

Définition 1.6. *Soit C un sous ensemble fermé non vide de H, la fonction de distance que l'on note $d_C(.)$ est donnée par :*

$$d_C(x) := \inf\{\|x - y\|; y \in C\}.$$

Définition 1.7. *Soit $C \in H$ non vide pour tout $x \in H$, on définie la projection de x sur C par*

$$proj_C(x) := \{y \in C; \quad \|x - y\| = d_C(x), \forall x \in H\}.$$

Proposition 1.8. *[6] Soit C un sous ensemble fermé non vide de H, alors les propositions suivant satisfait :*

• $x \in C \iff d_C(x) = 0, \forall x \in H,$

• *La fonction distance est continûment Lipschitzienne avec la constante de Lipschitz égale à* 1*,*

• $\forall x, y \in H : d_C(x + y) \leq d_C(x) + d_C(y),$

• $p = proj_C(x) \iff \{p \in C \text{ et } \forall y \in C, \langle y - p, x - p\rangle \leq 0\},$

• $\forall x, y \in H : \|proj_C(x) - proj_C(y)\|^2 \leq \langle x - y, proj_C(x) - proj_C(y)\rangle.$

1.4 Cône normal et sous-différentiel

Définition 1.9. ***(Cône)*** *Une partie $C \subset H$ est un cône si*

$$\forall x \in C, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in C.$$

Autrement dit, $\lambda C \subset C$, pour tout $\lambda \geq 0$.

Remarque 1.10.

- *Si C est convexe, il est alors appelé un cône convexe.*

Définition 1.11. ***(Cône normal)*** *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe. On appelle cône normal à C au point x_0 l'ensemble noté $N_C(x_0)$ défini par :*

$$N_C(x_0) = \begin{cases} \{\xi \in H : \langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \forall x \in C\} & si\ x_0 \in C \\ \\ \emptyset & si\ x_0 \notin C. \end{cases}$$

Définition 1.12. ***(Le sous-différentiel)*** *Soit $f : H \to]-\infty, +\infty[$ et soit $x \in C$ alors l'ensemble défini par :*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in H, \langle \zeta, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in H\}$$

est le sous-différentiel de f en x.

Exemple 1.13. *Considérons la fonction*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = |x|.$$

$\partial f(0) = [-1, 1]$. *En effet,*

$$\begin{aligned}
\partial f(0) &= \{y \in \mathbb{R} : f(x) \geq f(0) + \langle y, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : |x| \geq x \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : x \cdot y \leq x, \forall x > 0\} \cap \{y \in \mathbb{R} : x \cdot y \leq -x, \forall x < 0\} \cap \mathbb{R} \\
&= \{y \in \mathbb{R} : y \leq 1\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y \geq -1\} \cap \mathbb{R} \\
&= [-1, 1].
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\partial f(x_0) = \begin{cases} [-1, 1], & si x_0 = 0 \\ \{1\}, & si x_0 > 0 \\ \{-1\}, & si x_0 < 0. \end{cases}$$

Définition 1.14. ***(Le gradient)*** *Le gradient d'une fonction $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ qu'on note ∇f est le vecteur des composantes $\partial f / \partial x_i (i = 1, 2, ..., n)$, c-à-d les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées.*

1.5 La fonction indicatrice et la fonction support

Définition 1.15. ***(Fonction indicatrice)*** *Soit C un sous-ensemble non vide de H, la fonction indicatrice associée à C est définie par :*

$$\begin{aligned} \delta_C(.) :& H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & x \longmapsto \delta_C(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in C, \\ +\infty & si\ x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1.16.

La fonction $\delta_C(.)$ est convexe si et seulement si C est convexe dans H.

La fonction $\delta_C(.)$ est s.c.i si et seulement si C est fermé dans H.

Définition 1.17. ***(La fonction support)*** *Soient H un espace de Hilbert et C un ensemble non vide de X. La fonction support de C, notée $\delta^*(C,.)$ est définie par :*

$$\begin{aligned} \sigma(C,.) : & H \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ & \xi \longrightarrow \sigma(C,\xi) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle. \end{aligned}$$

1.6 Les Multi-applications

Définition 1.18. *Soient T, X deux ensembles non vides. On appelle multi-application ou fonction multivoque définie sur T à valeurs dans X, toute application F définie sur T à valeurs dans $\mathcal{P}(X)$, et on note*

$$F : T \to \mathcal{P}(X) \ \ ou \ F : T \rightrightarrows X.$$

Donc, $\forall t \in T, F(t)$ *est un sous ensemble de* X.

Définition 1.19. *Soient* T, X *deux ensembles non vides. Pour tout multi-application* $F : T \rightrightarrows X$, *on définit*

- *Le domaine (effectif) de* F *qu'on note dom*(F), *l'ensemble*

$$D(F) = \{t \in T : F(t) \neq \emptyset\}.$$

- *L'image de* F *qu'on note Im*(F) *l'ensemble*

$$Im(F) = \{x \in X : \exists t \in T, x \in F(t)\}.$$

- *Si* $A \subset T$, *on appelle image de* A *par* F *qu'on note* $F(A)$, *l'ensemble défini par*

$$F(A) = \bigcup_{t \in A} F(t) = \{x \in X : \exists t \in A, x \in F(t)\}.$$

- *La multi-application inverse* $F^{-1} : X \to \mathcal{P}(T)$ *défini par*

$$t \in F^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in F(t).$$

  Nous avons

$$(F^{-1})^{-1} = F, D(F^{-1}) = Im(F) \text{ et } Im(F^{-1}) = D(F).$$

- *Le graphe de* F *qu'on note* $\mathrm{gph}(F)$, *le sous-ensemble de* $T \times X$ *défini par*

$$\mathrm{gph}(F) = \{(t, x) \in T \times X : x \in F(t)\}.$$

1.7 L'application non expansive

Une application non expansive entre espaces normés est une application 1-lipschitzienne. Il s'agit donc du cas limite des applications contractantes, qui sont les applications K-lipschitziennes pour un k<1.

Contrairement aux applications contractantes, les applications non expansive n'ont pas nécessairement de point fixe (par exemple, une translation de vecteur non nul est non expansive et n'a pas de point fixe). Par ailleurs, même si une application non expansive T a un point fixe, une suite d'itérés $T^k(X)$ ne converge pas nécessairement vers un tel point (c'est le cas pour une symétrie centrale) ; on peut toute fois obtenir des résultats de convergence vers un point fixe d'au moins deux manières : soit en imposant des conditions plus restrictives sur l'application(sans toute fois aller jusqu'à la contraction), soit en modifiant la suite des itérés.

Définition 1.20. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, P un fermé de E et $T : P \longrightarrow E$ une application (non nécessairement linéaire).*

• *On dit que T est non expansive si*

$$\forall (x, y) \in P \times P \quad \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

• *Si l'espace E est un espace de Hilbert, on dit que T est fermement non expansive si*

$$\forall (x, y) \in P \times P \quad \langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \|Tx - Ty\|^2.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une application fermement non expansive *est non expansive, elle est aussi monotone.*

1.8 Autres résultats et définitions

Définition 1.21. *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$ et $-\infty \leq T < T' \leq \infty$. Alors $L^p([T,T'];X)$ représente l'espace de Banach de toutes les fonctions à valeurs X (fortement) mesurables sur $[T,T']$ dons la norme est donnée par*

$$\|f\|_{L^p([T,T'];X)} = \begin{cases} \left(\int_T^{T'} \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \underset{T \leq t \leq T'}{ess.sup} \|f(t)\|_X \quad si \quad p = \infty. \end{cases}$$

De plus par $W^{m,p}([T,T'];X)$, $m \geq 0$ et $1 \leq p < \infty$, on note l'espace de Banach de type Sobolev :

$$W^{m,p}([T,T'];X) = \{f \in L^p([T,T'];X); f^{(j)} \in L^p([T,T'];X), j = 1,2,...,m\}$$

avec norme

$$\|f\|_{W^{m,p}([T,T'];X)} = \{\|f\|^p_{L^p([T,T'];X)} + \sum_{j=1}^{m} \|f^{(j)}\|^p_{L^p([T,T'];X)}\}^{\frac{1}{p}},$$

Où $f^{(j)} = (d^j/dt^j)f$. Aussi, dans le cas où T et T' sont finis, $C([T,T'];X)$ représente l'espace de Banach de toutes les fonctions continues à valeurs X sur $[T,T']$ avec la sup-norme. Habituellement, dans le cas $X = R$, nous écrivons $L^p(T,T'), W^{m,p}(T,T')$ et $C([T,T'])$ pour $L^p([T,T'];X), W^{m,p}([T,T'];X)$ et $C([T,T'];X)$, respectivement.

Définition 1.22.

- *Soient* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in X$*, on dit que* f *est*

  (a) Propre si et seulement si

$$f(x) \neq -\infty, \forall x \in X \quad et \quad \exists y_0 \in X : f(y_0) \neq +\infty.$$

  (b) Semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) si pour tout $r \in]-\infty, f(x_0)]$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $f(V) \subset]r, +\infty]$*. La semi-continuité inférieure peut se caractériser par l'une des deux propriétés suivante :* epi (f) *est fermé dans* $X \times \mathbb{R}$ *ou les ensembles de niveau* $[f \leq r] := \{x \in X : f(x) \leq r\}$ *sont fermés dans* X *pour tout* $r \in \mathbb{R}$*.*

  (c) Semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) si pour tout $r \in [f(x_0), +\infty[$*, il existe un voisinage* V *de* x_0 *tel que* $f(V) \subset [-\infty, r[$*.*

  (d) f *est continue au point* x_0 *si et seulement si* f *est, à la fois, s.c.i et s.c.s au point* $x_0 \in X$*.*

1.9 Fonction absolument continues

Définition 1.23. *Soit* H *un espace de Hilbert, une fonction* $f : [a, b] \longrightarrow H$ *est dite absolument continue si pour tout réel* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\delta > 0$*, telle que pour toute suite* $([b_n, a_n])_{n \in N}$ *de sous intervalle de* $[a, b]$ *d'intérieurs disjoints on a,*

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Longrightarrow \sum_{n \geq 0} \|f(a_n) - f(b_n)\| < \varepsilon.$$

Théorème 1.24. *[4]*

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow E$ est absolument continue si et seulement si f est dérivable presque partout et elle est intégrable de sa dérivée c'est à dire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)ds$$

Remarque 1.25.

1. *Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est uniformément continue.*

1.10 Topologie faible

On appelle topologie faible sur X que l'on note $\sigma(X, X^*)$ la topologie la moins fine rendant continue toutes les applications $f \in X^* : X \to \mathbb{R}$, autrement dit, $\sigma(X, X^*)$ est la topologie la moins fine qui contient tous les ensembles $f^{-1}(I)$ pour tout $f \in X^*$ et tout intervalle I de $\mathbb{R}$. La notion de la convergence dans cette topologie est donnée dans la définition suivante

Définition 1.26 (Caractérisation séquentielle).
Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé X et $x \in X$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x et on écrit $x_n \rightharpoonup x$ ou $x = w - \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou bien $x_n \xrightarrow{w} x$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\langle f, x_n\rangle := f(x_n)\big) = \langle f, x\rangle \text{ pour tout } f \in X^*.$$

Notre tâche maintenant consiste à relier la notion de la convergence faible avec un nouveau concept de limite inférieure. Pour cela nous allons introduire la notions de la limite inférieure (resp. supérieure) pour une suite ordinaire de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 1.27. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big)$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Proposition 1.28. *Soient $(x_n)_n$ une suite dans un espace normé X et $x \in X$. Soient $(f_n)_n$ une suite dans X^* et $f \in X^*$. Alors*

(a) Si (x_n) converge vers x pour la norme (fortement), alors $(x_n)_n$ converge vers x pour la topologie faible (faiblement).

(b) Si (x_n) converge faiblement vers x alors la suite $(\|x_n\|)_n$ est bornée et

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

(c) Si (x_n) converge faiblement vers x et f_n converge fortement vers f dans X^* alors

$$\langle f_n, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, x\rangle.$$

(d) Si $(u_n)_n$ est bornée et si chaque sous-suite faiblement convergente de $(u_n)_n$ converge vers la même limite $u \in H$ alors $(u_n)_n$ converge faiblement vers u.

1.11 Opérateurs maximaux monotones

Définition 1.29. *Un opérateur A de H est dit monotone si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \quad \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

Ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2; \quad \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0.$$

De plus, il est dit strictement monotone si

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle > 0, \quad x_1 \neq x_2.$$

Définition 1.30. *Un opérateur A de H est maximal monotone si et seulement si A est monotone et pour tout $x, y \in H \times H$ tel que,*

$$\langle y - A\xi, x - \xi \rangle \geq 0 \qquad \forall \xi \in D(A).$$

Exemple 1.31. *[8] Soit A un opérateur maximal monotone de H, les opérateurs A^{-1} et λA pour $\lambda > 0$ sont maximaux monotones.*
Par contre A et B peuvent être maximaux monotones sans qu'il en soit ainsi de $A + B$ car on peut avoir $D(A) \cap D(B) = \emptyset$.

Définition 1.32. *Soit l'opérateur $A : X \longrightarrow Y$, l'opérateur $A^0 : X \longrightarrow Y$ définie par*

$$A^0 z = \begin{cases} \{y \in Az; \|y\|_Y = \min_{v \in Az} \|v\|_Y\} \quad si \quad z \in D(A), \\ \\ \emptyset \quad sinon. \end{cases}$$

est appelé la section principale (norme minimal) de A.

Théorème 1.33. *[29] Étant donné un opérateur $A : H \rightrightarrows H$, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes*

(a) A est maximal monotone ;

(b) A est monotone et $(I + \lambda A)$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$, i.e,

$\mathcal{R}(I + \lambda A) = H$;

(c) $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction partout définie sur H pour tout $\lambda > 0$.

Proposition 1.34. *[8] Soit A est maximal monotone et soit $\lambda > 0$. Alors*

1. *la résolvante de A définie par $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ est une application non expansive à valeur unique de H à H.*

2. *l'approximation de Yosida de A définie par $A_\lambda = \lambda^{-1}(I - J_\lambda)$ satisfait.*

   (a) A_λ est continûment lipschitzien avec un constante $\dfrac{1}{\lambda}$ et maximal monotone.

   (b) si $x \in D(A)$, alors $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ où $A^0 x$ est l'élément de Ax de norme minimale.

1.12 Enveloppe de Moreau

Définition 1.35. *Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction et $\lambda > 0$, l'enveloppe de Moreau de f de paramètre λ est la fonction $e_\lambda f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ défini par*

$$e_\lambda f(x) = \inf_{y \in H}(f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2) \quad \text{pour tout } x \in H.$$

Propriétés. [6] Soit $f \in \Gamma_0(H)$, $x \in H$. Alors on a :

1. $e_\lambda f(.) = \dfrac{1}{2\lambda} d^2_{C(.)}(.)$, $\lambda > 0$.
2. $\forall \lambda > 0$, $e_\lambda f$ est convexe.
3. $(e_\lambda f)_{\lambda > 0}$ est décroissant.
4. $e_\lambda f(x) \longrightarrow f(x)$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$ et $e_\lambda f(x) \longrightarrow \inf_{y \in H} f(y)$ lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$.
5. $e_\lambda f$ est différentiable sur H avec le gradient λ^{-1}-Lipschitz.

■

1.13 Régularisation de Moreau-Yosida

Proposition 1.36. *Soit $f \in \Gamma_0(H)$. Alors la régularisation de Yosida de ∂f pour tout $\lambda > 0$ est le gradient $\nabla e_\lambda f$ associé à l'enveloppe de Moreau $e_\lambda f$.*

Exemple 1.37. *Pour $f = \delta_{C(t)}$ où $C(t)$ est un ensemble convexe fermé et non vide, $\lambda > 0$*

$$\begin{aligned} e_\lambda \delta_{C(t)}(x) &= \inf_{y \in H} (\delta(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \quad \forall x \in H) \\ &= \inf_{y \in H} \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2 \quad \forall x \in H \\ &= \frac{1}{2\lambda} d^2_{C(t)}(x). \end{aligned}$$

1.14 Résultats de convergence

Théorème 1.38. *(* ***conséquences du théorème d'Arzela-Ascoli****)[4] Considérons une suite de fonctions absolument continues $x_k(\cdot)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à un espace de Banach X satisfaisant*

i) $\forall t \in I, \{x_k(t)\}_k$ *est un sous-ensemble relativement compact de* X*,*

ii) il existe une fonction positive $C(\cdot) \in L^1(I)$ *telle que, pour presque tout* $t \in I, \|x'_k\| \leq C(t)$.

Alors il existe une sous-suite $x_k(\cdot)$ *convergeant vers une fonction absolument continue* $x(\cdot)$ *de* I *vers* X *au sens où*

i) $x_k(\cdot)$ *converge uniformément vers* $x(\cdot)$ *sur des sous-ensembles compacts de* I*,*

ii) $x'_k(\cdot)$ *converge faiblement vers* $x'(\cdot)$ *dans* $L^1(I, X)$.

1.15 Inégalité de Gronwall

Lemme 1.39. *[31](****lemme de Gronwall****) Soit* $b, c, \zeta : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *trois fonctions intégrables de Lebesgue à valeurs réelles. Si la fonction* $\zeta(\cdot)$ *est absolument continue sur l'intervalle* $[t_0, t_1]$ *et si pour presque tout* $t \in [t_0, t_1]$

$$\dot{\zeta}(t) \leq b(t) + c(t)\zeta(t),$$

alors pour tout $t \in [t_0, t_1]$

$$\zeta(t) \leq \zeta(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} c(\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} c(\tau)d\tau\right) ds.$$

Chapitre 2

Existence et Unicité de solution pour un problème d'évolution maximal monotone

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème d'évolution non linéaire suivant

$$(P)\begin{cases} u'(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t), & 0 < t < T. \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in L^2([0,T];H)$, A est un opérateur maximal monotone tel que: $D(A) \subset H \rightrightarrows H$ et φ^t est une fonction semi-continue inférieurement, propre et convexe dans H.

Avant de présenter nos résultats, on donne la liste des hypothèses que l'on va utiliser pour la démonstration de notre théorème principale.

2.1 Hypothèses

- **(H1)**

Soient C_1 et α_0 deux constantes positives. telle que,

(a1) $\varphi^t(u) \geq C_1\|u\|_H^2$ pour tout $\quad t \in [0,T]$ et $u \in H$;

(a2) Soient les fonctions $a \in W^{1.2}(0,T)$ et $b \in W^{1.1}(0,T)$ telles que $\|a'\|_{L^1(0,T)} \leq \alpha_0$, $\|a'\|_{L^2(0,T)} \leq \alpha_0$, et $\|b'\|_{L^1(0,T)} \leq \alpha_0$, pour tout $s,t \in [0,T]$ avec $s \leq t$ et pour tout $u \in D(\varphi^s)$. Alors il existe une fonction $\bar{u} \in D(\varphi^t)$ vérifiant les inégalités suivantes :

$$\|\bar{u} - u\|_H \leq |a(t) - a(s)|(1 + [\varphi^s(u)]^{\frac{1}{2}}),$$

$$\varphi^t(\bar{u}) - \varphi^s(u) \leq |b(t) - b(s)|(1 + \varphi^s(u));$$

(a3) L'ensemble $\{u \in H; \varphi^t(u) \leq r\}$ est compact dans H pour chaque $t \in [0,T]$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- **(H2)**

Soit C_2 une constante positive quelconque. L'opérateurs maximal monotone $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, vérifie les deux conditions suivantes :

(b1) $\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \geq C_2\|u_1 - u_2\|_H^2$ pour tout $u_i \in D(A)$, i=1,2 ;

(b2) A est le sous-différentiel d'une fonction s.c.i, propre et convexe j sur H (i.e. $A = \partial j$).

Maintenant nous dénonçons la définition d'une solution pour le problème (2.1)

Définition 2.1. *La fonction $u : [0,T] \longrightarrow H$ est une solution du problème* (2.1) *si u vérifie :*

1. $u \in W^{1.2}([0,T];H)(\subset C([0,T];H))$,

2. $u(0) = u_0$,

3. $Au \in L^2([0,T];H)$ *et* $Au(t) \in Au(t) \cap D(\partial\varphi^t)$,

4. $f(t) - u'(t) \in \partial\varphi^t(Au(t))$ *pour tout* $t \in [0,T]$.

Définition 2.2. *Soit A un opérateur vérifie l'hypothèse **(H2)** et γ est une fonction continue, convexe, non négative sur H telle que*

$$\gamma(z) + \gamma(-z) = 0 \quad \textit{si et seulement si } z = 0. \tag{2.2}$$

*Alors on note l'ensemble des famille $\{\varphi^t\}$ vérifie l'hypothèse **(H1)** tel que pour tout $t \in [0,T]$, $\partial\varphi^t \circ A$ est γ-accrétif dans H. (i.e. si $\bar{Az_i} \in \partial\varphi^t(Az_i)(i =$ $1,2)$, alors $\langle \bar{Az_1} - \bar{Az_2}, w\rangle \geq 0$) pour $w \in \partial\gamma(z_1 - z_2)$ où $\partial\gamma$ est le sous-différentiel de γ en H.*

2.2 Théorème d'Existence

Théorème 2.3. *Supposons que les hypothèses **(H1)** et **(H2)** sont vérifies, $f \in W^{1.1}([0,T];H)$ et $u_0 \in D(A)$ tel que $Au_0 \cap D(\varphi^0) \neq \emptyset$. Alors il existe au moins une solution u pour le système (2.1) satisfait*

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u'\|_{L^2([0,T];H)} \leq M_0(\|u_0\|_H + \|\varphi^0(Au_0)\| + \|f\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|f'\|_{L^1([0,T];H)})$$

et

$$\varphi^t(Au(t)) \leq M_0(\|u_0\|_H + \|\varphi^0(Au_0)\| + \|f\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|f'\|_{L^1([0,T];H)}), \quad \forall t \in [0,T],$$

Où $M_0 = M_0(.) : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction bornée sur des ensembles bornés dans* $\mathbb{R}$ *et* $Au_0 \in Au_0 \cap D(\varphi^0)$.

Nous démontrerons ce théorème en utilisant la technique de régularisation. Le régularisé du système (2.1) *est le problème suivant*

$$(P_\mu)\begin{cases} u'_\mu(t) \in -\partial\varphi^t(A_\mu u_\mu(t)) + f(t), \quad 0 < t < T, \\ u_\mu(0) = u_{\mu,0}, \end{cases} \tag{2.3}$$

où A_μ *est le régularisé de Moreau-Yosida de* A*,* $u_{0,\mu} = A_\mu^{-1} Au_0$ *et* $\mu > 0$*, avec* $Au_0 \in Au_0 \cap D(\varphi^0)$.

D'autre part, on peut aussi approximé le problème (2.3) *par le problème suivant ;*

$$(P_{\lambda,\mu})\begin{cases} u'_{\lambda,\mu}(t) = -\partial\varphi^t_\lambda(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) + f(t) \quad 0 < t < T, \\ u_{\lambda,\mu}(0) = u_{\mu,0}, \end{cases} \tag{2.4}$$

Où φ^t_λ *est la régularisation de la fonction convexe* φ^t.

Avant d'établir la preuve de notre théorème principale (2.3) *on donne quelques notations, qui seront utilisées dans le reste du travail :*

$$\varphi^t_\lambda(z) = \inf_{W\in H}\{\frac{1}{2\lambda}\|z - W\|_H^2 + \varphi^t(W)\}, \quad z \in H, \quad t \in [0,T], \quad \lambda > 0;$$

$$j_\mu(z) = \inf_{W\in H}\{\frac{1}{2\mu}\|z - W\|_H^2 + j(W)\}, \quad z \in H, \quad \mu > 0;$$

$$J^t_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi^t)^{-1}, \quad t \in [0,T], \quad \lambda > 0;$$

$$J^A_\mu = (I + \mu A)^{-1}, \quad A_\mu = \frac{1}{\mu}(I - J^A_\mu), \quad \mu > 0,$$

où I *est l'identité dans* H.

2.3 Résultats auxiliaire

Dans cette partie nous donnons quelques propriétés générales sur le sous différentielle des fonctions convexes, son régularisé et le régularisé de Yosida.

Proposition 2.4. *Soit ψ une fonction propre, s.c.i. et convexe dans un espace de Hilbert H. Pour $\lambda > 0$ on pose $J_\lambda = (I + \lambda\partial\psi)^{-1}$, où I est l'identité dans H et on note ψ_λ la régularisation de ψ, définie par*

$$\psi_\lambda(z) = \inf_{W \in H}\{\frac{1}{2\lambda}\|z - W\|^2 + \psi(W)\}, z \in H.$$

Les propriétés suivantes ((h1)-(h8)) sont vérifiés (cf.[22])

(h1) Pour chaque $\lambda > 0, R(I + \lambda\partial\psi) = H$, et J_λ est univoque.

(h2) ψ_λ est continue et convexe sur H avec $D(\psi_\lambda) = H$, et

$$\psi_\lambda(z) = (\frac{1}{2\lambda})\|z - J_\lambda z\|_H^2 + \psi(J_\lambda z)$$

pour tout $z \in H$ et $\lambda > 0$. De plus, pour chaque $z \in H$ et $0 < \lambda < \mu, \psi_\lambda(z) \geq \psi_\mu(z)$ et $\psi_\lambda(z) \longrightarrow \psi(z)$ lorsque $\lambda \longrightarrow 0$.

(h3) $\partial\psi_\lambda$ est une fonction univoque et Lipschitzienne sur H, avec la constante de Lipschitz $\frac{1}{\lambda}$. De plus, $\partial\psi_\lambda(z) = (\frac{1}{\lambda})(z - J_\lambda z) \in \partial\psi(J_\lambda z)$ pour tout $z \in H$ et $\lambda > 0$.

(h4) Si $z \in D(\partial\psi)$ alors $\|\partial\psi_\lambda(z)\|_H \leq \|(\partial\psi)^0(z)\|_H$ pour tout $\lambda > 0$, et $\partial\psi_\lambda(z) \longrightarrow (\partial\psi)^0(z)$ fortement dans H lorsque $\lambda \to 0$, où $(\partial\psi)^0$ est la section principale de $\partial\psi$.

(h5) Si $\lambda_n \to 0 (n \to \infty)$ et z_n est une suite dans H, tel que $\partial\psi_{\lambda_n}(z_n) \to Az$ faiblement dans H et $z_n \to z$ fortement dans H, alors $Az \in \partial\psi(z)$.

(H6) Si $\lambda_n \to 0$ et z_n est une suite dans H, telle que z_n fortement dans H, alors $\liminf\limits_{n\to\infty} \psi_{\lambda_n}(z_n) \geq \psi(z)$.De plus, si $\partial\psi_{\lambda_n}(z_n)$ est borné dans H, alors $\psi_{\lambda_n}(z_n) \to \psi(z)$.

(h7) $\|\varphi_\lambda(x)-\varphi_\lambda(y)\|_H \leq (2\|\partial\psi_\lambda(z)\|_H + \frac{\|x-z\|_H}{\lambda} + \frac{\|y-z\|_H}{\lambda})\|x-y\|_H$ pour tout $x, y, z \in H$, et $\lambda > 0$.

(h8) Si v est une fonction de $[0,T]$ dans H, différentiable en $t = t_0 \in [0,T]$ et $v(t_0) \in D(\partial\psi)$, alors

$$\frac{d}{dt}\psi(v(t))|_{t=t_0} = \langle v'(t_0), Az\rangle \quad \text{pour tout } Az \in \partial\psi(v(t_0)).$$

La proposition suivante donne quelques propriétés sur l'opérateur A.

Lemme 2.5. *Soit A un opérateur vérifie l'hypothèse **(H2)**, alors :*

1. *A^{-1} est un opérateur Lipschitz continue et monotone de $D(A^{-1}) = H$ dans H, tel que*

$$\langle A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2, z_1 - z_2\rangle \geq C_2\|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\|_H^2$$

   pour tout $z_1, z_2 \in H$;

2. *$\|J_\mu^A z\| \leq \|z\| + 2\|z_0\| + \mu\|Az_0\|$ pour tout $z \in H, \mu > 0, z_0 \in D(A)$;*
3. *$\langle A_\mu z_1 - A_\mu z_2, z_1 - z_2\rangle \geq \left(\frac{C_2}{(1+\mu C_2)}\right)\|z_1 - z_2\|^2$ pour tout $z_1, z_2 \in H$ et $\mu > 0$;*
4. *$j_\mu(z) \geq j_\mu(z_0) + \left(\frac{C_2}{(8(1+\mu C_2))}\right)\|z\|^2 - \left(\frac{C_2}{(2(1+\mu C_2))}\right)\|z_0\|^2 - \left(\frac{(1+\mu C_2)}{C_2}\right)\|Az_0\|^2$ pour tout $z \in H, \mu \geq 0, z_0 \in D(A)$, où $j_0 = j$;*
5. *$A_\mu^{-1}z = A^{-1}z + \mu z$ pour tout $z \in H$ et $\mu > 0$;*
6. *$0 \leq j_\mu(A_\mu^{-1}z) - j_\mu(A^{-1}z) \leq \mu\|z\|^2$ pour tout $z \in H$ et $\mu > 0$.*

Démonstration. :

(1) est un résultat direct de l'hypothèse (b_1) de **(H2)**.

en effet,

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \geq C_2 \|u_1 - u_2\|_H^2$$

si on pose $Au_1 = z_1$ et $Au_2 = z_2$ on obtient $u_1 = A^{-1}z_1$ et $u_2 = A^{-1}z_2$ et en remplaçant dans l'équation précédente, on trouve

$$\langle z_1 - z_2, A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2 \rangle \geq C_2 \|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\|_H^2$$

$$\Leftrightarrow \langle A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2, z_1 - z_2 \rangle \geq C_2 \|A^{-1}z_1 - A^{-1}z_2\|_H^2$$

(2) est une conséquence des propriétés générales $(h1)-(h3)$ du Proposition (2.4)

$$\begin{aligned}\|J_\mu^A z\| &\leq \|J_\mu^A z - J_\mu^A z_0\| + \|J_\mu^A z_0\| \leq \|z - z_0\| + \|z_0 - \mu A_\mu z_0\| \\ &\leq \|z\| + 2\|z_0\| + \mu\|A_\mu z_0\| \qquad \text{pour tout} \quad \mu > 0, z \in H, z_0 \in D(A).\end{aligned}$$

de $(b1)$ et $(h3)$, on a pour $\mu > 0$ et $z_1, z_2 \in H$

$$\begin{aligned}\langle A_\mu z_1 - A_\mu z_2, z_1 - z_2 \rangle &\geq \frac{1}{\mu}\|(z_1 - J_\mu^A z_1) - (z_2 - J_\mu^A z_2)\|^2 + C_2\|J_\mu^A z_1 - J_\mu^A z_2\|^2 \\ &= \frac{1}{\mu}(\|z_1 - z_2\|^2 + (1 + \mu C_2)\|J_\mu^A z_1 - J_\mu^A z_2\|^2 \\ &- 2\langle z_1 - z_2, J_\mu^A z_1 - J_\mu^A z_2 \rangle).\end{aligned}$$

par conséquent, en tenant compte du fait que

$$\langle z_1 - z_2, J_\mu^A z_1 - J_\mu^A z_2 \rangle \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \mu C_2}\|z_1 - z_2\|^2 + (1 + \mu C_2)\|J_\mu^A z_1 - J_\mu^A z_2\|^2\right),$$

on obtient

$$\langle A_\mu z_1 - A_\mu z_2, z_1 - z_2 \rangle \geq \frac{C_2}{1 + \mu C_2}\|z_1 - z_2\|^2.$$

cela prouve (3). A l'aide de (3) on peut conclure (4) de la manière suivante, pour $\mu > 0, z \in H$, et $z_0 \in D(A)$

$$\begin{aligned}
j_\mu(z) - j_\mu(z_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} j_\mu(r(z-z_0)+z_0)dr \\
&= \int_0^1 \langle A_\mu(r(z-z_0)+z_0) - A_\mu z_0, z-z_0\rangle dr + \langle A_\mu z_0, z-z_0\rangle \\
&\geq \int_0^1 \frac{C_2 r}{1+C_2}\|z-z_0\|^2 dr + \langle A_\mu z_0, z-z_0\rangle \\
&\geq \frac{C_2}{2(1+\mu C_2)}\|z-z_0\|^2 - \|Az_0\|\|z-z_0\| \\
&\geq \frac{C_2}{8(1+\mu C_2)}\|z\|^2 - \frac{C_2}{2(1+\mu C_2)}\|z_0\|^2 - \frac{1+\mu C_2}{C_2}\|Az_0\|^2.
\end{aligned}$$

De plus, si $z \in D(j)$, alors en laissant $\mu \to 0$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient

$$j(z) - j(z_0) \geq \frac{C_2}{8}\|z\|^2 - \frac{C_2}{2}\|z_0\|^2 - \frac{1}{C_2}\|Az_0\|^2.$$

cela montre (4).

Pour prouver (5), posons $y_\mu = A_\mu^{-1}z$ et $y = A^{-1}z$. Alors $z = A_\mu y_\mu = \frac{1}{\mu}(y_\mu - J_\mu^A y_\mu)$, donc $J_\mu^A y_\mu = y_\mu - \mu z$. Ce qui implique que

$$z \in A(y_\mu - \mu z), \quad i.e. \quad y_\mu - \mu z = A^{-1}z.$$

par conséquent, $y = y_\mu - \mu z$. Pour montrer (6), on utilise (5) (avec la même notation que ci-dessus)

$$\begin{aligned}
\mu\|z\|^2 = \langle z, A_\mu^{-1}z - A^{-1}z\rangle = \langle A_\mu y_\mu, y_\mu - y\rangle \geq j_\mu(y_\mu) - j_\mu(y) \\
\geq j(J_\mu^A y_\mu) - j(y) = 0, \quad J_\mu^A y_\mu = y.
\end{aligned}$$

Cela donne (6). ■

Lemme 2.6. *([22],Lemme 1.2.1, 1.2.2) Supposons que φ^t vérifie l'hypothèse* ***(H1)****. Alors :*

1. *Il existe une constant $C_1 \geq 0$, telle que*

$$\|J_\lambda^t z\| \leq \|z\| + C_1 \quad et \quad \|\partial\varphi_\lambda^t(z)\| \leq \frac{1}{\lambda}(2\|z\| + C_1')$$

pour tout $t \in [0, T], z \in H$ et $\lambda > 0$;

2. *$\varphi_\lambda^t(z) \geq (\frac{C_1}{2})\|z\|^2$ pour tout $t \in [0, T], z \in H$ et $\lambda \in [0, \frac{1}{2C_1}]$;*

3. *Si $z_n \to z$ faiblement dans H et $t_n \longrightarrow t$, alors*

$$\varphi^t(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi^{t_n}(z_n);$$

4. *La fonction $\Phi : L^2([0, T]; H) \to \mathbb{R}_+$ défini par*

$$\Phi(v) = \int_0^T \varphi^t(v(t))dt \quad pour \quad v \in L^2([0, T]; H),$$

est propre, s.c.i et convexe sur $L^2([0, T]; H)$. de plus ,pour tout $\lambda > 0$ la régularisation de Φ_λ de Φ est donnée par

$$\Phi_\lambda(v) = \int_0^T \varphi_\lambda^t(v(t))dt \quad pour\ tout \quad v \in L^2([0, T]; H);$$

5. *pour $v, v^* \in L^2([0, T]; H), v^* \in \partial\Phi(v)$ si et seulement si*

$$v^*(t) \in \partial\varphi^t(v(t)) \quad pour\ tout \quad t \in [0, T].$$

Lemme 2.7. *Soit l'hypothèse* ***(H1)*** *vérifié, $v \in W^{1,1}([0, T]; H)$ et $\lambda > 0$. Alors la fonction $t \longrightarrow \varphi_\lambda^t(v(t))$ est différentiable p.p sur $[0, T]$, sa dérivée $\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(v(t))$ est intégrable sur $[0, T]$ et satisfait,*

$$\varphi_\lambda^t(v(t)) - \varphi_\lambda^s(v(s)) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau}\varphi_\lambda^\tau(v(\tau))d\tau \quad pour\ tout \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (2.5)$$

de plus

$$\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(v(t)) - \langle v'(t), \partial\varphi_\lambda^t(v(t))\rangle \leq \|a'(t)\|\|\partial\varphi_\lambda^t(v(t))\|_H(1+[\varphi_\lambda^t(v(t))]^{\frac{1}{2}}) + \|b'(t)\|(1+\varphi_\lambda^t(v(t))) \quad \textit{pour tout} \quad t\in[0,T]. \tag{2.6}$$

Preuve. Supposons que v soit une fonction constante sur $[0,T]$, $v(t) = z$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors, par l'hypothèse $(a2)$ de **(H1)**, pour tout $s,t \in [0,T]$ avec $s \leq t$ il existe $\overline{z} \in D(\varphi^t)$ tel que,

$$\|\overline{z} - J_\lambda^s z\| \leq \|a(t)-a(s)\|(1+[\varphi^s(J_\lambda^s z)]^{\frac{1}{2}}),$$

et

$$\varphi^t(\bar{z}) - \varphi^s(J_\lambda^s z) \leq \|b(t)-b(s)\|(1+\varphi^s(J_\lambda^s z)).$$

Noter que

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^t(z) - \varphi_\lambda^s(z) &\leq \frac{1}{2\lambda}\|z-\overline{z}\|_H^2 + \varphi^t(\bar{z}) - \frac{1}{2\lambda}\|z - J_\lambda^s z\|_H^2 - \varphi^s(J_\lambda^s z)\\
&= \frac{1}{\lambda}\langle J_\lambda^s z - \overline{z}, z - J_\lambda^s z\rangle + \frac{1}{2\lambda}\|\overline{z} - J_\lambda^s z\|_H^2 + \varphi^t(\bar{z}) - \varphi^s(J_\lambda^s z)\\
&\leq \|a(t)-a(s)\|\|\partial\varphi_\lambda^s(z)\|(1+[\varphi^s(J_\lambda^s z)]^{\frac{1}{2}}) \qquad (2.7)\\
&+ \frac{1}{2\lambda}\|a(t)-a(s)\|^2(1+[\varphi^s(J_\lambda^s z)]^{\frac{1}{2}})^2\\
&+ \|b(t)-b(s)\|(1+\varphi^s(J_\lambda^s z)).
\end{aligned}$$

Par le Lemme (2.6), les fonctions $s \longmapsto \partial\varphi_\lambda^s(z)$ et $s \longmapsto \varphi^t(J_\lambda^s z)$ sont bornés sur $[0,T]$ pour tout $\lambda > 0$ et $z \in H$ donc d'après (2.7) nous obtenons

$$\varphi_\lambda^t(z) - \varphi_\lambda^s(z) \leq C\int_s^t \{\|a'(\tau)\| + \|b'(\tau)\|\}d\tau$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, où C est une constante. La fonction $t \to \varphi_\lambda^t(z)$ peut donc être représentée comme la somme d'une fonction non croissante et d'une fonction absolument continue sur $[0,T]$. Donc la fonction $t \to \varphi_\lambda^t(z)$ est différentiable p.p. sur $[0,T]$ et sa dérivée $(\frac{d}{dt})\varphi_\lambda^t(z)$ est intégrable sur $[0,T]$, de plus,

$$\varphi_\lambda^t(z) - \varphi_\lambda^s(z) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau}\varphi_\lambda^\tau(z)d\tau. \tag{2.8}$$

En divisant (2.7) par $t-s$ et en passant a la limite $t \longrightarrow s$ nous obtenons,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\varphi_\lambda^s(z) &\leq \|a'(s)\|\partial\varphi_\lambda^s(z)\|(1+[\varphi^s(J_\lambda^s z)]^{\frac{1}{2}}) + \|b'(s)\|(1+\varphi^s(J_\lambda^s z)) \\ &\leq \|a'(s)\|\partial\varphi_\lambda^s(z)\|(1+[\varphi_\lambda^s(z)]^{\frac{1}{2}}) + \|b'(s)\|(1+\varphi_\lambda^s(z)) \quad \textit{pour tout} \quad s \in [0,T].\end{aligned} \tag{2.9}$$

Supposons maintenant que $v \in W^{1.1}([0,T];H)$. Les inégalités (2.8) et (2.9) prises avec $z = v(s)$ pour tout $s,t \in [0,T]$ avec $s < t$ on a

$$\begin{aligned}&\varphi_\lambda^t(v(t)) - \varphi_\lambda^s(v(s)) - \langle v(t)-v(s), \partial\varphi_\lambda^t(v(t))\rangle \\ &\leq \varphi_\lambda^t(v(s)) - \varphi_\lambda^s(v(s)) \\ &\leq \int_s^t \{\|a'(\tau)\|\|\partial\varphi_\lambda^\tau(v(s))\|(1+[\varphi_\lambda^\tau(v(s))]^{\frac{1}{2}}) + \|b'(\tau)\|(1+\varphi_\lambda^\tau(v(s)))\}d\tau.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Puisque les fonctions $(\tau,s) \longmapsto \partial\varphi_\lambda^\tau(v(s))$ et $(\tau,s) \longmapsto \varphi_\lambda^\tau(v(s))$ sont bornés sur $[0,T]\times[0,T]$ (Lemme(2.6))

la fonction $t \to \varphi_\lambda^t(v(t))$, en tant que somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction non croissante sur $[0,T]$, est au vu de(2.10) différentiable p.p. sur $[0,T]$, de plus, la dérivée $\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(v(t))$ est intégrable sur

$[0,T]$ et (2.5) est vraie. Ainsi par les propriétés générales $(h2)$, $(h3)$ et $(h7)$

$$\|\partial\varphi_\lambda^\tau(v(s)) - \partial\varphi_\lambda^\tau(v(\tau))\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v(s) - v(\tau)\|_H$$

ainsi que

$$\varphi_\lambda^\tau(v(s)) \leq \varphi_\lambda^\tau(v(\tau)) + C\|v(s) - v(\tau)\|_H$$

pour tout $\tau \leq s$, avec la constante finie C. Par conséquent, en divisant les deux côtés de (2.10) par $t - s$ et ensuite en laissant $s \longrightarrow t$, on conclut (2.6). ∎

2.4 Preuve de théorème d'Existence

Dans cette partie on vas donner une démonstration détaillé du Théorème (2.3). Supposons que les hypothèses de **(H1)** et **(H2)** sont vérifies, $u_0 \in D(A)$ avec $Au_0 \cap D(\varphi^0) \neq \emptyset$ et on choisi tout élément $Au_0 \in Au_0 \cap D(\varphi^0)$. Alors, pour $\lambda, \mu > 0$ donné, l'opérateur $\partial\varphi_\lambda^t \circ A_\mu$ est lipschitzienne en H pour tout $t \in [0,T]$, et la fonction $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(A_\mu z)$ est bornée et mesurable pour tout $z \in H$, donc d'après le Théorème de Cauchy le problème (2.4) possède une unique solution $u_{\mu,\lambda}$ dans $W^{1.2}([0,T];H)$.

On utilisera la notation suivante

$$J_0 = \{r; 0 < r \leq \min\{1, \frac{1}{2C_1}, \frac{1}{C_2}\}\}.$$

Afin d'obtenir des estimations uniformes sur $\{u_{\lambda,\mu}; \lambda, \mu > 0\}$, nous appliquons d'abord le Lemme (2.7) avec $v = A_\mu u_{\lambda,\mu}$, on obtient

$$\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) - \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) \leq \int_s^t \frac{d}{d\tau}\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))d\tau \tag{2.11}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) &\leq \|a'(t)\|\|\partial\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t))\|(1+[\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t))]^{\frac{1}{2}}) \\ &+ \|b'(t)\|(1+\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t))) + \langle\frac{d}{dt}A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), \partial\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t))\rangle\end{aligned} \tag{2.12}$$

de (2.11) et (2.12) on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) - \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) \leq &\int_s^t \|a'(\tau)\|\|\partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\| \\ &(1+[\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))]^{\frac{1}{2}})d\tau \\ &+\int_s^t \|b'(\tau)\|(1+\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)))d\tau \\ &+\int_s^t \langle\frac{d}{d\tau}A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), \partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\rangle d\tau\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) - \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) - &\int_s^t \langle\frac{d}{d\tau}A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), \partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\rangle d\tau \\ \leq &\int_s^t \|a'(\tau)\|\|\partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\|_H(1+[\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))]^{\frac{1}{2}})d\tau \\ +&\int_s^t \|b'(\tau)\|(1+\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)))d\tau\end{aligned} \tag{2.13}$$

de (2.4) on a

$$\partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)) = f(\tau) - u'_{\lambda,\mu}(\tau) \quad \text{pour tout} \quad \tau \in [0,T]$$

donc

$$\langle\frac{d}{dt}A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), \partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\rangle = \langle\frac{d}{d\tau}A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f(\tau)\rangle - \langle\frac{d}{d\tau}A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), u'_{\lambda,\mu}(\tau)\rangle$$

Alors (2.13) devient donc

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) - \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) - \int_s^t \langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f(\tau)\rangle d\tau \\
+ \int_s^t \langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), u'_{\lambda,\mu}(\tau)\rangle d\tau \\
\leq \int_s^t \|a'(\tau)\| \|\partial\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\|_H (1 + [\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))]^{\frac{1}{2}}) d\tau \\
+ \int_s^t \|b'(\tau)\| (1 + \varphi_\lambda^\tau)(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)) d\tau \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Par l'insertion (3) de Lemme (2.5)

$$\langle A_\mu z_1 - A_\mu z_2, z_1 - z_2\rangle \geq \frac{C_2}{1+\mu C_2}\|z_1 - z_2\|^2$$

on pose $z_1 = u_{\lambda,\mu}(t+h)$ et $z_2 = u_{\lambda,\mu}(t)$ on obtient

$$\langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t+h) - A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), u_{\lambda,\mu}(t+h) - u_{\lambda,\mu}(t)\rangle \geq \frac{C_2}{1+\mu C_2}\|u_{\lambda,\mu}(t+h) - u_{\lambda,\mu}(t)\|^2$$

divisions par h et on passe à la limite lorsque $h \longrightarrow 0^+$ on trouve

$$\langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), u'_{\lambda,\mu}(\tau)\rangle \geq \frac{C_2}{1+\mu C_2}\|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|_H^2, \quad \text{pour tout} \quad \tau \in [0,T].$$

et donc

$$\int_s^t \langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), u'_{\lambda,\mu}(\tau)\rangle d\tau \geq \frac{C_2}{1+\mu C_2}\int_s^t \|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|^2 d\tau \quad \text{pour tout} \quad \tau \in [0,T] \qquad (2.15)$$

calculons maintenant l'intégrale $\int_s^t \langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f(\tau)\rangle d\tau$ par partie,

$$f = f(\tau), \qquad f' = f'(\tau)$$

$$g' = \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), \quad g = A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)$$

Alors

$$\int_s^t \langle \frac{d}{d\tau} A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f(\tau)\rangle d\tau = \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), f(t)\rangle - \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(s), f(s)\rangle$$
$$- \int_s^t \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f'(\tau)\rangle d\tau \quad \textit{pour tout } 0 \le s \le t \le T \tag{2.16}$$

En remplaçant(2.15)et (2.16) dans (2.14) on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) &- \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) - \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), f(t)\rangle + \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(s), f(s)\rangle \\
&+ \int_s^t \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f'(\tau)\rangle d\tau + \frac{C_2}{1+\mu C_2} \int_s^t \|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\le \int_s^t \|a'(\tau)\| \|\partial \varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))\|_H (1 + [\varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))]^{\frac{1}{2}}) d\tau \\
&+ \int_s^t \|b'(\tau)\| (1 + \varphi_\lambda^\tau)(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau)) d\tau - \int_s^t \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f'(\tau)\rangle d\tau
\end{aligned}$$

On utilisons l'inégalité suivante de young $uv \le (\frac{\beta}{2})u^2 + \frac{1}{2\beta}v^2$, $\forall u, v \in \mathbb{R}$ *et* $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) &- \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) - \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), f(t)\rangle + \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(s), f(s)\rangle \\
&+ \frac{C_2}{4} \int_s^t \|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|^2 d\tau \\
&\le \int_s^t k(\tau)(1 + \varphi_\lambda^\tau(A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau))) d\tau - \int_s^t \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(\tau), f'(\tau)\rangle d\tau
\end{aligned} \tag{2.17}$$

pour tout $0 \le s \le t \le T$ et $\lambda, \mu > 0$, où

$$k(\tau) = \frac{2}{C_2}\|a'(\tau)\|^2 + 2\|a'(\tau)\|\|f(\tau)\|_H + \|b'(\tau)\|, \quad \tau \in [0, T].$$

Maintenant, on pose

$$X_{\lambda,\mu}(t) = \varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) - \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), f(t)\rangle, \quad t \in [0, T].$$

et

$$X_{\lambda,\mu}(s) = \varphi_\lambda^s(A_\mu u_{\lambda,\mu}(s)) - \langle A_\mu u_{\lambda,\mu}(t), f(s)\rangle, \quad s \in [0,T].$$

D'où le Lemme (2.6)(2) on a

$$\frac{C_1}{4}\|A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)\|^2 - \frac{1}{C_1}\|f(t)\|^2 \leq X_{\lambda,\mu}(t) \tag{2.18}$$

et

$$\varphi_\lambda^t(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) \leq 2X_{\lambda,\mu}(t) + \frac{2}{C_1}\|f(t)\|_H^2 \tag{2.19}$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\lambda, \mu \in J_0$. De plus, (2.17)-(2.19) donnent ensemble

$$X_{\lambda,\mu}(t) - X_{\lambda,\mu}(s) + \frac{C_2}{4}\int_s^t \|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_s^t k_1(\tau)X_{\lambda,\mu}(\tau)d\tau + \int_s^t k_2(\tau)d\tau \tag{2.20}$$

pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $\lambda, \mu \in J_0$, où

$$k_1(\tau) = 2k(\tau) + \frac{4}{C_1}\|f'(\tau)\|_H$$
$$k_2(\tau) = k(\tau)\left[1 + \frac{2}{C_1}\|f(\tau)\|_H^2\right] + \|f'(\tau)\|_H\left[1 + \frac{4}{C_1}\|f(\tau)\|_H^2\right].$$

Les estimations uniformes pour les solutions de (2.4) sont données par le Lemme suivant .

Lemme 2.8. *Il existe une constante positive*

$M_1 = M_1(\|u_0\|_H, \varphi^0(Au_0), \|a'\|_{L^2(0,T)}, \|a'\|_{L^1(0,T)}, \|b'\|_{L^1(0,T)}, \|f\|_{L^\infty([0,T];H)},$

$\|f'\|_{L^1([0,T];H)})$ *telle que*

$$\|u_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u'_{\lambda,\mu}\|_{L^2([0,T];H)} \leq M_1 \quad \textit{pour tout} \quad \mu, \lambda \in J_0 \tag{2.21}$$

et

$$\varphi^t_\lambda(A_\mu u_{\mu,\lambda}(t)) \leq M_1 \quad \textit{pour tout } t \in [0,T] \quad \textit{et} \quad \mu, \lambda \in J_0. \tag{2.22}$$

Preuve. : Observez que

$$\begin{aligned} \|X_{\lambda,\mu}(0)\| &\leq \varphi^0_\lambda(A_\mu u_{0,\mu}) + \|A_\mu u_{0,\mu}\|_H \|f(0)\|_H \\ &\leq \varphi^0_\lambda(v_0) + \|v_0\|_H \|f(0)\|_H \quad \text{pour tout } \mu, \lambda \in J_0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Où $v_0 = Au_0$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} & X_{\lambda,\mu}(t) - X_{\lambda,\mu}(s) + \frac{C_2}{4}\int_s^t \|u'_{\lambda,\mu}(\tau)\|^2 d\tau \leq \int_s^t k_1(\tau) X_{\lambda,\mu}(\tau)d\tau + \int_s^t k_2(\tau)d\tau \\ \Longleftrightarrow\; & X_{\lambda,\mu}(t) - X_{\lambda,\mu}(s) \leq \int_s^t k_1(\tau) X_{\lambda,\mu}(\tau)d\tau + \int_s^t k_2(\tau)d\tau \\ \Longleftrightarrow\; & \int_s^t \dot{X}_{\lambda,\mu}(\tau)d\tau \leq \int_s^t k_1(\tau) X_{\lambda,\mu}(\tau)d\tau + \int_s^t k_2(\tau)d\tau \\ \Longleftrightarrow\; & \dot{X}_{\lambda,\mu}(t) \leq k_1(t) X_{\lambda,\mu}(t) + k_2(t) \end{aligned}$$

appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} X_{\lambda,\mu}(t) &\leq X_{\lambda,\mu}(0) \exp\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right) + \int_0^t k_2(s) \exp\left(\int_s^t k_1(\tau)d\tau\right) ds \\ &\leq X_{\lambda,\mu}(0) \exp\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right) + \int_0^t k_2(s) \exp\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right) ds \\ &\leq \left(X_{\lambda,\mu}(0) + \int_0^t k_2(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t k_1(\tau)d\tau\right) \\ &\leq (X_{\lambda,\mu}(0) + \|k_2\|_{L^1(0,T)}) \exp \|k_1\|_{L^1(0,T)} \\ &\leq (\varphi^0(Au_0) + \|Au_0\|_H \|f(0)\|_H + \|k_2\|_{L^1(0,T)}) \exp \|k_1\|_{L^1(0,T)} \\ &\equiv M'_1 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T] \quad \textit{et} \quad \mu, \lambda \in J_0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

alors d'après (2.20) on a,

$$\int_s^t \|u'_{\mu,\lambda}(\tau)\|_H^2 d\tau \leq \frac{4}{C_2}(\int_s^t k_1(\tau)X_{\mu,\lambda}(\tau)d\tau + \int_s^t k_2(\tau)d\tau + X_{\mu,\lambda}(s) - X_{\mu,\lambda}(t))$$

qui nous donne,

$$\begin{aligned}\|u'_{\mu,\lambda}\|^2_{L^2([0,T];H)} &\leq \frac{4}{C_2}(\int_s^t k_1(\tau)\|X_{\mu,\lambda}(\tau)\|d\tau + \int_s^t \|k_2(\tau)\|d\tau \\ &+ \|X_{\mu,\lambda}(s)\| + \|X_{\mu,\lambda}(t)\|) \\ &\leq \frac{4}{C_2}(M'_1\|k_1\|_{L^1(0,T)} + \|k_2\|_{L^1(0,T)} + 2M'_1) \equiv M_2\end{aligned}$$

pour tout $\lambda, \mu \in J_0$

par (2.19) et (2.24) on a,

$$\varphi^t_\lambda(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) \leq 2M'_1 + \frac{2}{C_1}\|f\|^2_{C([0,T];H)} \equiv M_3 \ \textit{pour tout}\ t \in [0,T]\ \textit{et}\ \lambda, \mu \in J_0$$

Par le Lemme(2.6)(2), $\varphi^t_\lambda(A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)) \geq \frac{C_1}{2}\|A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)\|^2_H$. Aussi, nous avons $\|A_\mu u_{\lambda,\mu}(t) - A_\mu u_{0,\mu}\|_H \geq \frac{C_2}{2}\|u_{\lambda,\mu}(t) - u_{0,\mu}\|$ et $u_{0,\mu} = u_0 + \mu A u_0$ par (3) et (5) du Lemme (2.5) respectivement.

Ainsi, à l'aide de l'inégalité $u^2 \geq \frac{1}{2}(u-v)^2 - v^2 \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}M_3 &\geq \frac{C_1}{2}\|A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)\|^2_H \\ &\geq \frac{C_1}{2^2}\|A_\mu u_{\lambda,\mu}(t) - A_\mu u_{0,\mu}\|^2 - \frac{C_1}{2}\|A_\mu u_{0,\mu}\|^2 \\ &\geq \frac{C_1}{2^2}\frac{C_2^2}{2^2}\|u_{\lambda,\mu}(t) - u_{0,\mu}\|^2_H - \frac{C_1}{2}\|A_\mu u_{0,\mu}\|^2_H \\ &\geq \frac{C_1 C_2^2}{2^4}\|u_{\lambda,\mu} - u_0\|^2_H - \frac{C_1}{2}\|Au_0\|^2_H\end{aligned}$$

Et donc

$$\|u_{\mu,\lambda} - u_0\|_H^2 \leq \frac{2^4}{C_1C_2^2}M_3 + \frac{2^3}{C_2^2}\|Au_0\|_H^2$$
$$\Longrightarrow \|u_{\lambda,\mu} - u_0\| \leq \left(\frac{2^4}{C_1C_2^2}M_3 + \frac{2^3}{C_2^2}\|Au_0\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\|u_{\lambda,\mu}\|_{L^\infty([0,T],H)} \leq \{2^4C_1^{-1}C_2^{-2}M_3 + 2^3C_2^{-2}\|Au_0\|_H^2\}^{\frac{1}{2}} + \|u_0\|_H \equiv M_4$$

Ainsi (2.21) et (2.22) sont valables pour une constante positive M_1. ■

Maintenant, on va montrer que $u_{\lambda,\mu}(t)$ converge lorsque $\lambda \longrightarrow 0^+$ vers une solution de (2.3) pour μ fixé. A cet effet, noter que par $(h2)$ du Proposition (2.4) que

$$\varphi^t(J_\lambda^t A_{\mu,\lambda}(t)) \leq M_1 \ \ pour\ tout\ \ t \in [0,T],\ \ \lambda, \mu \in J_0$$

Ainsi, en vertu du Lemme (2.8) et pour chaque fixe $\mu \in J_0$ il existe une suite $\{\lambda_n\}$ avec $\lambda_n \longrightarrow 0^+$, un sous-ensemble dense dénombrable E_0 de $[0,T]$ et une fonction $u_\mu \in W^{1,2}([0,T];H)$ avec $u_\mu(0) = u_{\mu,0}$, tel que

$$u_{\lambda_n,\mu}(t) \longrightarrow u_\mu(t) \ \ faiblement\ dans\ H\ pour\ tout\ t \in [0,T], \tag{2.25}$$

$$u'_{\lambda_n,\mu} \longrightarrow u'_\mu \ \ faiblement\ \ dans\ \ L^2([0,T],H) \tag{2.26}$$

et

$$J_{\lambda_n}(A_\mu u_{\mu,\lambda_n}(t)) \ \ converge\ \ fortement\ en\ \ H\ \ pour\ \ tout\ \ t \in E_0. \tag{2.27}$$

Lemme 2.9. *u_μ est une solution de (2.3) et les estimations suivantes sont valables :*

$$\|u_\mu\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u'_\mu\|_{L^2([0,T];H)} \leq M_1, \tag{2.28}$$

et

$$\varphi^t(A_\mu u_\mu(t)) \leq M_1 \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,T], \tag{2.29}$$

où M_1 est la même constante que dans le Lemme (2.8).

Preuve. On a l'inégalité suivante

$$M_1 > \varphi^t_\lambda(A_\mu u_{\mu,\lambda}(t)) = \frac{1}{2\lambda}\|A_\mu u_{\mu,\lambda}(t) - J^t_\lambda A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)\|^2_H + \varphi^t_\lambda(J^t_\lambda A_\mu u_{\lambda,\mu}(t))$$

et par (2.27), $A_\mu u_{\lambda,\mu}(t)$ converge fortement dans H pour tout $t \in E_0$. Donc $u_{\mu,\lambda_n(t)} \to u_\mu(t)$ converge fortement en H pour tout $t \in E_0$. (2.25), (2.26) , implique que

$$u_{\lambda_n,\mu} \longrightarrow u_\mu \quad \textit{fortement dans } C([0,T];H) \tag{2.30}$$

et

$$J^{(\cdot)}_{\lambda_n} A_\mu u_{\mu,\lambda_n}(\cdot) \longrightarrow A_\mu u_\mu, \quad A_\mu u_{\lambda_n,\mu} \longrightarrow A_\mu u_\mu \quad \textit{fortement dans } C([0,T];H) \tag{2.31}$$

Par conséquent, (2.28) tient et, à cause de $(h6)$,

$$\varphi^t(A_\mu u_\mu(t)) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi^t_{\lambda_n}(A_\mu u_{\lambda_n,\mu}(t)) \leq M_1 \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,T]. \tag{2.32}$$

Donc (2.29) est vrai.

Maintenant on va montrer que

$$f(t) - u'_\mu(t) \in \partial\varphi^t(A_\mu u_\mu(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T]. \tag{2.33}$$

Soit $w \in L^2([0,T];H)$ tel que $\varphi^{(.)}(w(.)) \in L^1(0,T)$. Puisque

$$f(t) - u'_{\lambda_n,\mu}(t) \in \partial\varphi^t_{\lambda_n}(A_\mu u_{\lambda_n,\mu}(t)) \text{ pour tout } t \in [0,T],$$

nous avons

$$\int_0^T \langle f(t) - u'_{\lambda_n,\mu}, w(t) - A_\mu u_{\lambda_n,\mu}(t)\rangle dt \leq \Phi_{\lambda_n}(w) - \Phi_{\lambda_n}(A_\mu u_{\lambda_n,\mu}), \quad (2.34)$$

où Φ_λ est défini comme dans le Lemme (2.6). De (2.26), (2.31) et (2.32). passer a la limite dans (2.34) avec $n \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\int_0^T \langle f(t) - u'_\mu, w(t) - A_\mu u_\mu(t)\rangle dt \leq \Phi(w) - \Phi(A_\mu u_\mu),$$

Où Φ est comme dans le Lemme (2.6). Par $w \in L^2([0,T];H)$, $f - u'_\mu \in \partial\Phi(A_\mu u_\mu)$ de sorte que (2.33) a lieu (Lemme (2.6) (5)). ■

Maintenant on vas démontrer que u est une solution de notre problème principale (2.1).

Soit $\{u_\mu; \mu > 0\}$ la famille des solutions de (2.3) Alors d'après le Lemme (2.9), il existe une suite $\{\mu_n\}, \mu_n \longrightarrow 0^+$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, un sous-ensemble dense dénombrable E_1 de $[0,T]$ et une fonction $u \in W^{1,2}([0,T];H)$, $Au \in L^\infty([0,T];H)$, tel que

$$u_{\mu_n}(t) \rightharpoonup u(t) \quad \textit{dans} \quad H \quad \textit{pour tout} \quad t \in [0,T], \quad (2.35)$$

$$u'_{\mu_n}(t) \rightharpoonup u'(t) \quad \textit{dans} \quad L^2([0,T];H), \quad (2.36)$$

Pour tout $t \in E_1$,

$$A_{\mu_n} u_{\mu_n}(t) \quad \textit{converge} \quad \textit{fortement} \quad \textit{en} \quad H,$$

et

$$A_{\mu_n}u_{\mu_n}(t) \rightharpoonup Au \; fablement \; dans \; L^\infty([0,T];H) \tag{2.37}$$

Lemme 2.10. *Pour $u(0) = u_0$ on a,*

• $u_{\mu_n} \longrightarrow u$ *fortement dans* $C([0,T];H)$

•$j(u(t))$ *est absolument continue par rapport à* $t \in [0,T]$.

Preuve. Par (2.37), Lemme (2.5), (5) et le Lemme (2.9),

$$\|u_\mu(t) - J_\mu^A u_\mu(t)\|_H = \|u_\mu(t) - A^{-1}A_\mu u_\mu(t)\|_H = \mu\|A_\mu u_\mu(t)\|_H \leq \mu\left(\frac{M_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.38}$$

Pour tout $t \in [0,T]$ et $\mu \in J_0$, d'où, en particulier, $\|u_{0,\mu} - u_0\|_H \leq \mu\left(\frac{M_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. impliquant $u(0) = u_0$.

De plus, la convergence forte des $A^{-1}A_{\mu_n}u_{\mu_n}(t)$ en H pour tout $t \in E_1$, qui suit par (2.37), implique que

$$u_{\mu_n}(t) \longrightarrow u(t) \;\; fortement \; en \; H \; pour \; tout \; t \in E_1$$

En même temps, c'est la conséquence de (2.36) et (2.37)

$$u_{\mu_n} \longrightarrow u \quad et \quad J_{\mu_n}^A u_{\mu_n}(t) \longrightarrow u \;\; fortement \; en \; C([0,T];H).$$

par la définition du sous-différentiel, nous avons

$$\langle Au(t), u(s) - u(t)\rangle \leq j(u(s)) - j(u(t)) \leq \langle Au(s), u(s) - u(t)\rangle$$

donc

$$\|j(u(s)) - j(u(t))\| \leq \|Au\|_{L^\infty([0,T];H)}\|u(s) - u(t)\|_H \;\; pour \; tout \;\; s,t \in [0,T]$$

ce qui montre que $j(u(t))$ est absolument continue en t sur l'intervalle $[0, T]$

■

Lemme 2.11. *u est une solution du problème* (2.1)*, de plus on a les estimations suivantes :*

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];H)} + \|u'\|_{L^2([0,T];H)} \leq M_1 \quad \textit{et} \quad \varphi^t(Au(t)) \leq M_1 \ \textit{pour tout}\, t \in [0, T] \tag{2.39}$$

Preuve. Les estimations (2.39) résultent directement du Lemme (2.9). Il suffit de montrer que u est une solution du problème (2.1).

Puisque la fonction Φ est propre, s.c.s et convexe, nous avons

$$\Phi(Au) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \Phi(A_{\mu_n} u_{\mu_n}). \tag{2.40}$$

Par la Proposition (2.4)($h8$) et le Lemme (2.10) on a ;

$$\frac{d}{dt} j_{\mu_n}(u_{\mu_n}(t)) = \langle u'_{\mu_n}(t), A_{\mu_n} u_{\mu_n}(t) \rangle \ \text{ pour tout } \quad t \in [0, T], \tag{2.41}$$

$$\frac{d}{dt} j(u(t)) = \langle u'(t), Au(t) \rangle \ \text{ pour tout } \quad t \in [0, T]. \tag{2.42}$$

par ($h6$)

$$j_{\mu_n}(u_{\mu_n}(t)) \longrightarrow j(u(t)) \ \textit{ pour tout } \ t \in [0, T]. \tag{2.43}$$

Par conséquent, en prenant (2.41) jusqu'à (2.43) ensemble, nous pouvons conclure que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \langle u'_{\mu_n}, A_{\mu_n}u_{\mu_n}\rangle dt = \lim_{n\to\infty}\{j_{\mu_n}(u_{\mu_n}(T)) - j_{\mu_n}(u_{0,\mu_n})\}$$
$$= j(u(T)) - j(u_0) = \int_0^T \langle u', Au\rangle dt \qquad (2.44)$$

Maintenant, prenez n'importe quel $w \in L^2([0,T],H)$ tel que $\varphi^{(.)}(w(.)) \in L^1([0,T])$. Alors

$$\int_0^T \langle f - u'_{\mu_n}, w - A_{\mu_n}u_{\mu_n}\rangle dt \leq \Phi(w) - \Phi(A_{\mu_n}u_{\mu_n}) \qquad (2.45)$$

Laisser $n \longrightarrow \infty$ dans (2.45), d'après (2.40) et (2.44) on a

$$\int_0^T \langle f - u', w - Au\rangle dt \leq \Phi(w) - \Phi(Au). \qquad (2.46)$$

Cela implique que $f - u' \in \partial\Phi(Au)$, ainsi par le Lemme (2.6) (5),

$$f(t) - u'(t) \in \partial\varphi^t(Au(t)).$$

donc u est une solution de (2.1). ■

2.5 Théorème d'Unicité

Dans cette partie on vas démontrer que le problème (2.1) admet une solution unique.

Théorème 2.12. *Supposons que l'hypothèse **(H1)** est vérifié. Soient u et v les solutions des problèmes suivants*

$$\begin{cases} u'(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (2.47)$$

et

$$\begin{cases} v'(t) \in -\partial\varphi(Av(t)) + g(t) \\ \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{2.48}$$

respectivement.

Soit $u(t) - v(t) \in K$ *pour tout* $t \in [0, T]$. *Où* K *est un compact dans* H.
Alors il existe une constante $C \geq 0$ *dépendant de* γ *et* K *tel que*

$$\gamma(u(t) - v(t)) - \gamma(u(s) - v(s)) \leq C \int_s^t \|f(\tau) - g(\tau)\|_H d\tau \text{ pour tout } \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.49}$$

Si φ^t *est strictement convexe sur* $D(\varphi^t)$ *alors la solution* u *du problème* (2.1) *est unique.*

Démonstration. Soit K un compact dans H. Soient u et v deux solutions du (2.47) et (2.48), respectivement. Supposons que $u(t)-v(t) \in K$ pour tout $t \in [0, T]$.

Les propriétés générales des fonctions convexes nous donne que $D(\partial\gamma) = H, \gamma$ est continue de Lipschitz sur K et $\partial\gamma$ est bornée. En conséquence, il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\|z^*\|_H \leq C \quad \text{pour tout } z \in K \quad et \quad z^* \in \partial\gamma(z). \tag{2.50}$$

D'autre part de $(h8)$ on a

$$\frac{d}{dt}\gamma(u(t) - v(t)) = \langle u'(t) - v'(t), z^* \rangle \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \quad et \quad z^* \in \partial\gamma(u(t) - v(t)). \tag{2.51}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, il existe $z^*(t) \in \partial\gamma(u(t) - v(t))$ tel que

$$\langle f(t) - u'(t), z^*(t) \rangle \geq 0,$$

et

$$\langle g(t) - v'(t), z^*(t) \rangle \geq 0,$$

par substraction des deux inégalités on trouve

$$\langle (f(t) - u'(t)) - (g(t) - v'(t)), z^*(t) \rangle \geq 0,$$

$$\text{i.e.} \quad \langle u'(t) - v'(t), z^*(t) \rangle \leq \langle f(t) - g(t), z^*(t) \rangle \tag{2.52}$$

En prenant (2.51) dans $z^*(t)$ comme z^*, et en utilisant ensuite (2.50)-(2.52), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\gamma(u(t) - v(t)) \leq C\|f(t) - g(t)\|_H \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T].$$

Ainsi, par l'intégration sur $[s, t]$, on a

$$\gamma(u(t) - v(t)) - \gamma(u(s) - v(s)) \leq C \int_s^t \|f(\tau) - g(\tau)\|_H d\tau, \text{pour tout} \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{2.53}$$

En particulier, si $f = g$ et $u_0 = v_0$, alors (2.53) implique que

$$\gamma(u(t) - v(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma(v(t) - u(t)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0, T], \text{d'où} \quad u = v.$$

De plus, φ^t est strictement convexe sur $D(\varphi^t)$, alors $\partial\varphi^t$ est strictement monotone p.p.$t \in [0, T]$.

Alors la solution u de (2.1) est unique ■

Chapitre 3

Application a un problème elliptique parabolique avec obstacle dépendant du temps

3.1 Introduction au problème

Dans ce chapitre un modèle mathématique est présenté qui décrit le problème de la diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants.

Lorsqu'il s'agit de comprendre la manière dont l'oxygène se diffuse à travers les tissus absorbants du corps humain, les modèles de diffusion jouent un rôle crucial. Ces modèles sont utilisés pour étudier comment l'oxygène se propage à partir d'une source, telle que les vaisseaux sanguins, vers les tissus environnants.

Le modèle de diffusion de l'oxygène dans les tissus absorbants repose sur des principes physiologiques et mathématiques. Il prend en compte des facteurs tels que la concentration initiale d'oxygène, les taux de consommation d'oxygène par les cellules et les processus de diffusion à travers les tissus. En utilisant des équations différentielles, ce modèle mathématique décrit comment la concentration d'oxygène évolue dans le temps et l'espace à l'intérieur des tissus absorbants. Il prend également en considération les caractéristiques spécifiques des tissus, telle que leur structure géométrique et leurs propriétés de perméabilité.

La résolution de ce modèle de diffusion permet de mieux comprendre comment l'oxygène se distribue dans les tissus et comment il peut être affecté par des facteurs où des anomalies dans les processus de diffusion.

Un exemple qui nous explique l'importance d'étudier ce modèle est celui des traitement du cancer pour radiothérapie est principalement dicté par la capacité à administrer une dose de radiation suffisamment élevée pour causes des dommages importantes aux cellules cancéreuses sans endommages les cellules saines environnantes, tout en restant dans la limite de tolérance tissulaire à la radiation. La sensibilité des cellules cancéreuses à la radiation a été démontrée comme étant accrue avec l'augmentation des concentrations d'oxygène à l'intérieure de la tumeur [13].

3.2 Formulation mathématique

Les mécanismes complexe de transport de l'oxygène dans les tissus absorbants peuvent être simplifies en supposant que le transport est régi par la diffusion dans les sections "solide" du tissu et sur les surfaces de ses réseaux poreux. Ces deux mécanismes de diffusion sont traites comme un seul dans ce travail car leurs descriptions mathématiques sont identique. Le mécanisme de transport est considéré comme unidimensionnel et il est supposé qu'un équilibre local existe entre le tissu et l'oxygène à chaque point.

L'équation différentielle partielle corresponde à ce problème peut être formulée de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C(\theta)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C(\theta)}{\partial x^2} + f \\ C(\cdot, 0) = C_0 \quad in \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 1) \quad \text{un domaine bornée.} \end{cases} \tag{3.1}$$

où

• $C(\cdot)$ est la concentration d'oxygène dans le tissu en fonction du temps (t) est la position x.

• D représente le coefficient de diffusion de l'oxygène dans le tissu.

• $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ indique la variation de la concentration dans le temps.

• $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ indique la variation de la concentration dans l'espace.

• f est la source de l'oxygène, représente la quantité d'oxygène apportée au tissu à partir des vaisseaux sanguins ou d'autres sources externes.

Pour reformuler l'équation (3.1) en un problème de Cauchy gouverné par un opérateur maximal monotone, nous pouvons procéder comme suit :

1. **Définir les notations :**

   • Soit B un opérateur qui représente la partie diffusive de l'équation.

   • Soit $\theta(t)$ la fonction inconnue, qui représente la concentration d'oxygène dans le tissu.

   • Soit f un sous-ensemble fermé de l'espace approprié.

2. **Réécrire l'équation différentielle partielle sous forme d'inclusion différentielle :**

$$\begin{cases} \dfrac{dB\theta(t)}{dt} + \partial\varphi^t(\theta(t)) \in f(t), \quad 0 < t < T \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

   dans un espace de Hilbert H, où B est un opérateur monotone et Lipschitz et $\varphi^t(.) := \dfrac{\partial C(.)}{\partial x}$. Réécrit avec $A = B^{-1}$ et posons $u(t) = B\theta(t)$, le problème (3.2) réduit à :

$$\begin{cases} \dfrac{d(u(t))}{dt} \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

   Alors d'après notre Théorème (2.3) et (2.12) ce problème admet une unique solution.

conclusion

Dans ce mémoire, l'existence et l'incité de solution pour une classe d'équation elliptique parabolique non linéaire de la forme

$$\begin{cases} u'(t) \in -\partial\varphi^t(Au(t)) + f(t), & 0 < t < T. \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

à été établie. Contraste du inclusion différentielle classique (A = id), ce problème est dégénéré, car il n'ya peut être aucune solution. La difficulté de ce type de problème est le composé de l'opérateurs avec le sous différentielle d'une fonction convexe.

En perspective, nous proposons une étude de ce problème (3.3) dans le cas non convexe.

Bibliographie

[1] **S.Adly**, A variational Approach to Nonsmooth Dynamics, Springer Briefs in Mathematics, 2017.

[2] **H.W.Alt, S.Luckhaus.**, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations,Math.Z. 183, 311-341(1983).

[3] **H.W.Alt, S.Luckhaus, A.Visintin.**, On nonstationary flow through porous media, Annali Mat.pura appl.136, 303-316(1984).

[4] **J.P.Aubin, A.Cellina**, Differential inclusion, Set-valued Maps and Viability theory, Springer-Verlag, Berlin Heildelberg New York Tokyo (1984)

[5] **D.Azzam-Laouir**, Cours d'analyse multivoque, Laboratoire de Mathématiques Purs et Appliquées, Université de Jijel, (2009).

[6] **H.H.Bauschke, P.L.Combettes**, Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[7] **H. Brezis** , Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson, Paris, (1983).

[8] **H. Brezis**, Opéerateurs maximaux monotones, North Holland Publ. Company, Amsterdam, 1973.

[9] **R.W.Carroll, R.E.Showalter**, Singular and degenerate Cauchy problems, in Mathematics in Science and Engineering, Vol. 127, Academic press, New York (1976).

[10] **F.H.Clarke, YU.S.Ledyaev, R.J.Stern , P.R.Wolenski**, Nonsmooth Analysis and Control Theory, Springer-Verlag New York Barlin Heidelberg,1991.

[11] **E.Dibenedetto, R.Gariepy**, Local behaviour of solutions of an elliptic-parabolic equation, Research Report, MRC, University of wisconsin-Madison(1984).

[12] **E.Dibenedetto, R.E.Showalter**, Implicit degenerate evolution equations and applications, SIAM J. Math, Analysis 12, 731-751 (1981).

[13] **M.Ebert , A.Howard** , Current Topics in Radiation Reasearch, Vol.5, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, NY(1969).

[14] **C.M.Elliott**, A variational inequality formulation of a steady state electrochemical machining free boundary problem, in free boundary problems : Theory and Applications (Edited by A.Fasano and M.Primicerio), Vol. 79, pp. 505-512, Research Notes in Mathematics, Pitman, Boston (1983).

[15] **C.M.Elliott, J.R.Ockendon**, Weak and Variational Methods for Moving Boundary Problems, Research Notes in Mathematics, Vol. 59, Pit-

man, Boston (1982).

[16] **A.Fasano, M.Primicerio**, Partially saturated porous media.J.Inst. math. Applic. 23,503-517 (1979).

[17] **O.Grange, F.Mignot**, Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques d'évolution, J.funct. Analysis 11, 77-92 (1972).

[18] **U.Hornung**, A parabolic-elliptic variational inequality, Manuscripta Math. 39, 155-172 (1982).

[19] **U.Hornung**, A unilateral boundary value problem for unsteady waterflow in porous media, in Applied Nonlinear Functional Analysis, Methoden und Verfahren der Mathematische Physik (Edited by R. Gorenflo and K.-H.Hoffmann) Vol. 25,pp. 59-94, Peter Lang, Frankfurt/Main (1983).

[20] **N.Kenmochi**, Méthode de compacité et résolution de problèmes variationnels paraboliques quasi-linéaires ou semilinéaires,Thèse,Univ.Paris VI (1979).

[21] **N.Kenmochi**, On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles, Nonlinear Analysis 5, 71-80 (1981).

[22] **N.Kenmochi**, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Bull. Fac. Education, chiba Univ.30, (Part II) 1-87 (1981).

[23] **N. Kenmochi, I. Pawlow**, A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints, Nonlinear Anal. 10(1986)1181 –

1202.

[24] **N.Kenmochi, I.Pawlow**, Elliptic-parabolic variational inequalities with time dependent constraints arising from free boundary problems, in preparation.

[25] **D.Kroner**, Parabolic regularization and behaviour of the free boundary for unsaturated flow in a porous medium.J. reine angew. Math.348, 180-196 (1984).

[26] **D.Kroner, J.F.Rodriguez**, Global behaviour for bounded solutions of a porous media equation of elliptic parabolic type, Preprint No. 619, SFB 72, Universität Bonn (1983).

[27] **K.L.Jr. Kuttler**, Degenerate variational inequalities of evolution, Nonlinear Analysis 8, 837-850 (1984).

[28] **J.A. Mcghough**, Free and moving boundary problems in electrochemical machining and flame fronts, in Free Boundary Problems : Theory and Application (Edited by A. Fasano and M. Primicerio), Vol. 79,pp.472-482. Research Notes in Mathematics, Pitman, Boston (1983).

[29] **G.Minty**, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J. 29 341-346 (1962).

[30] **U. Mosco**, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Adv. Math. 3, 510-585 (1969).

[31] **M. Sene, L. Thibault**, Regularization of dynamical systems associated with prox-regular moving sete, Journal of Nonlinear and Convex

Analysis Volume 15, Number 4 or 5.

[32] **Jan Van Tiel**, Convex analysis an introductory text, Winey, (1984).

[33] **J.Wayanabe** , Approximation of nonlinear problems of a certain type, in Numerical Analysis of Evolution Equations, Lecture Notes in Numer. Appl. Analysis 1, 147-163 (1979).