République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Benyahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Équations différentielles abstraites

Présenté par :

Tiar Meriem

Devant le jury :

Président	: Touil Imene	M.C.A	Université de Jijel
Encadreur	: Zerroug Hassina	M.C.B	Université de Jijel
Examinateur	: Daikh Yasmina	M.C.A	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** tout-puissant, pour la volonté, et la patience qu'il m'a donnée durant mes années d'études et le courage pour terminer ce mémoire.

Je remercie mon encadreur Mme **Zerroug Hassina**, qui a présenté le sujet de ce mémoire et m'a guidée par ses précieux conseils et suggestions, qu'elle m'a fournis tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier profondément les membres du jury :

Mme **Touil Imene**, pour avoir accepté de présider ma soutenance.

Mme **Daikh Yasmina**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayont contribué de près ou de loin l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciement vont à ma famille et mes amis, et surtout mes **parents** pour leur soutien tout au long de mes études.

Merci à tous et à toutes.

$\mathcal{R}$ésumé

Dans ce travail, nous considérons un problème différentiel elliptique abstrait où l'équation et les conditions aux limites peuvent contenir un paramètre spectral.

Nous prouvons d'abord que ce problème génère un isomorphisme entre espaces appropriés et nous établissons une estimation plus précise appelée estimation de coercivité avec défaut.

Les résultats obtenus sont appliqués à l'étude de certaines classes de problèmes elliptiques, et aussi éventuellement dégénérés.

$\mathcal{A}$bstract

In this work, we consider an abstract elliptic differential problem where the equation and the boundary conditions may contain a spectral parameter.

We first prove that this problem generales an isomorphism between appropriate spaces and we establish a more precise estimate called coerciveness estimate with defect.

The results obtained are applied to study some classes of elliptic, and also possibly degenerate problems.

Table des matières

Introduction

Beaucoup de travaux concernant les équations différentielles abstraites (EDA) où les fonctions inconnues et leurs dérivées prennent leurs valeurs dans des espaces fonctionels abstraits sont déjà réalisés par S.G. Krein [15], S.Y.Yakubov [25], M.Denech [9],...etc.

L'objectif de ce mémoire est de détailler le travail de A. Aibeche, A. Favini, Ch. Mezoued [5], les auteurs sont interessés à un problème aux limites pour une équation différentielle abstraite elliptique du second ordre contenant un paramètre spectral dans l'équation et dans les conditions aux limites. Ce problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u''(x) - (A + \lambda I)^2 u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ \lambda(\alpha_1 u(0) + \beta_1 u(1)) + \delta_1 u'(0) + \gamma_1 u'(1) = f_1 \\ \alpha_2 u_2(0) + \beta_2 u(1) = f_2 \end{cases} \tag{P}$$

avec $\lambda, \alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1 \in \mathbb{C}$, $f_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$, $f_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$, $f \in L_p(0,1;H)$ et A un opérateur linéaire fermé dans H.

Ce travail comporte principalement trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présentons les outils et notions préliminaires nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, nous donnons quelques rappels sur les opérateurs linéaires, les semi-groupes linéaires et les espaces d'interpolations.

Au deuxième chapitre nous cherchons la solution du problème aux limites selon une technique de Krein qui consiste à écrire la solution sous la forme de la somme de la restriction de la solution de l'équation abstraite sur toute la droite et la solution d'un

problème aux limites où le second membre de l'équation est nul. Pour l'équation sur toute la droite, on applique la transformée de Fourier et on utilise pour conclure la théorie des multiplicateurs de Fourier dans les espaces des fonctions à valeurs vectorielles. Tandis que, pour le second problème, on écrit la forme générale de la solution de l'équation homogène à l'aide des semi-groupes, et on remplace dans les conditions aux limites, ainsi on montre l'existence et l'unicité de la solution.
Pour l'estimation on utilise, d'une part l'estimation obtenue pour la solution de l'équation sur toute la droite et d'autre part, les propriétés des espaces d'interpolations.

Dans le troisième chapitre, on donne quelques applications des résultats obtenus à des exemples concrets.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Afin de rendre facile la compréhension de ce travail, nous avons rappelé quelques définitions et théorèmes de base concernant les opérateurs linéaire fermé, les semi-groupes et générateurs infinitésimaux, et les espaces d'interpolation qui seront utilisées fréquemment au long de ce travail. Les références utilisées dans ce chapitre sont [5], [7], [10], [14], [16], [17], [19], [23], [24], [25], [28].

1.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.1. *Un espace vectoriel E est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$ *(séparation),*
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité),*
3. $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité traingulaire).*

En général on note la norme par $\|.\|$.

Définition 1.2. *On appelle espace de Banach E un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance déduite de la norme.*

Définition 1.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés.*

1. *Un opérateur linéaire de E dans F est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F, c'est-à-dire. tel que pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a*
   - $A(x + y) = Ax + Ay$
   - $A(\lambda x) = \lambda Ax$
2. *$D(A)$ est appelé le domaine de A. On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = E$, c'est-à-dire, si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = x$*
3. *On appelle noyau de A le sous-espace de E, noté* $\ker(A)$, *défini par :*

$$\ker(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$$

Définition 1.4. *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire,*

1. *On appelle graphe de A le sous espace vectoriel de $E \times F$, noté $G(A)$, défini par :*

$$G(A) = \{(x, y) \in E \times F;\ x \in D(A), y = A(x)\}$$

2. *On peut munir $D(A)$ d'une norme notée $\|.\|_{D(A)}$ et appelée norme du graphe, elle est définie pour tout $x \in D(A)$ par :*

$$\|x\|_{D(A)} := \|x\|_E + \|Ax\|_F.$$

1.2 Opérateur linéaires bornés

Définition 1.5. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés.*

Un opérateur linéaire A défini de E dans F et dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E,\ \forall x \in E.$$

On note $B(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F. On pose $B(E) = B(E, E)$.

On définit alors une norme sur $B(E,F)$ notée $\|.\|_{B(E,F)}$ et définie pour tout $A \in B(E,F)$ par :

$$\|A\|_{B(E,F)} := \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F.$$

Théorème 1.6. *[16] Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach E avec $\|A\|_{B(E)} < 1$. Alors $(I - A)$ est inversible dans $B(E)$ qui est donné par la série de Neumann*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

et satisfait

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Définition 1.7. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et soit A une application de E dans F. On dit que A est un isomorphisme d'espace vectoriel normé si A est linéaire, continue et bijective et $A^{-1} : F \longrightarrow E$ est continue.*

1.3 Opérateur linéaires fermés

Définition 1.8. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés.*

1. *Un opérateur linéaire de E dans F est fermé si son graphe est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$.*

2. *A est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow 0 \\ \\ Ax_n \longrightarrow y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Les convergences des suite x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace E.

Proposition 1.9. *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \text{ dans } E. \\ Ax_n \longrightarrow y \text{ dans } F. \end{cases}$$

On a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Corollaire 1.10. *[25] Si A dans l'espace de Banach E est fermé, alors*

$$(Au(x))' = Au'(x)$$

si les deux dérivées existent.

Définition 1.11. *Soit A un opérateur linéaire fermé sur E.*

1. *On appelle ensemble résolvant de A l'ensemble*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ est inversible dans } B(E)\}.$$

   Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

2. *Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante $R(\lambda, A)$ de A au point λ par :*

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

3. *Le spectre $\sigma(A)$ de A est l'ensemble*

$$\sigma(A) := \rho(A)/\mathbb{C}$$

   Un élément de $\sigma(A)$ est une valeur spectrale de A

Lemme 1.12. *[25] Soit A fermé dans E, $\forall\lambda,\ \mu \in \rho(A)$, on a l'identité de la résolvante*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Définition 1.13. *On dit qu'un opérateur A fermé, à domaine dense est positif si*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{c}{1 + |\lambda|},\ |\arg \lambda| \leq \pi.$$

1.4 Semi-groupes et générateurs infinitésimaux

Soit E un espace de Banach réel où complexe, considérons une famille $T(t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires et continue dans E.

Définition 1.14. *La famille $T(t)_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe si on a*

1. $T(0) = I_E$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Définition 1.15. *Le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe fortement continu et noté $\mathcal{C}_0$-semi-groupe si l'application $t \mapsto T(t)$ est continue pour la topologie forte d'opérateur sur $B(E)$ c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to t_0} \|T(t)f - T(t_0)f\| = 0$ pour tout $f \in E$ et $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$.*

Théorème 1.16. *[23] Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors*
$\exists \omega > 0, M \geq 1$ tels que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$

Définition 1.17. *Soit E un espace de Banach, $(T(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, on appelle générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur $(A, D(A))$ définie par :*

$$D(A) = \left\{ f \in E, \lim_{h\to 0} \frac{T(h)f - f}{h} \text{ existe dans } E \right\}$$

$$Af = \lim_{h\to 0} \frac{T(h)f - f}{h} \text{ pour } f \in D(A).$$

Il est clair que $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et A est linéaire de $D(A)$ dans E. On commence par résumer certaines propriétés.

Théorème 1.18. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe, A son générateur infinitésimal. Alors*

1. $\forall x \in E, \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$,
2. $\forall x \in E, \displaystyle\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ *et* $A\left(\displaystyle\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x$,
3. $\forall x \in D(A), T(t)x \in D(A)$ *et* $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$,
4. $\forall x \in D(A), T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau$.

Démonstration. 1. S'obtient immédiatement de la continuité de $t \longrightarrow T(t)x$.

2. Soit $x \in E, h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)x - T(s)x]ds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds,\end{aligned}$$

quand $h \longrightarrow 0$, le second membre tend vers $T(t)x - x$.

3. Soit $x \in D(A)$ et $h > 0$. Alors

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \longrightarrow T(t)Ax,$$

d'après la continuité forte de $T(t)$, d'où $T(t)x \in D(A)$ et $AT(t)x = T(t)Ax$. Donc

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Il reste à montrer que la dérivée à gauche de $T(t)x$ existe et est égale à $T(t)Ax$.

$$\begin{aligned}&\lim_{h\longrightarrow 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right] \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} T(t-h)\left[\frac{T(t)x - x}{h} - Ax\right] + \lim_{h\longrightarrow 0}(T(t-h)Ax - T(t)Ax),\end{aligned}$$

les deux termes du second membre sont nuls, le premier puisque $x \in D(A)$ et le second du à la continuité forte de $T(t)$.

4. Est obtenue par intégration de (3) entre t et s. L'affirmation (3) est très importante car elle montre le lien entre un semi-groupe et un problème de Cauchy.

■

Corollaire 1.19. *Soit A le générateur d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$.Alors*

1. *$D(A)$ est dense dans E,*
2. *A est fermé.*

Démonstration. Il est clair que $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et puisque

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma = x.$$

D'où il suffit de démontrer que $\int\limits_0^t T(\sigma)xd\sigma \in D(A)$.

$\forall x \in E$ et $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t [T(h+\sigma)x - T(\sigma)x]d\sigma \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\left\{\frac{1}{h}\int_0^t T(h+\sigma)xd\sigma - \frac{1}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma\right\} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(\sigma)xd\sigma - \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^t T(\sigma)xd\sigma,
\end{aligned}$$

d'ici on obtient $A\int\limits_0^t T(\sigma)xd\sigma = T(t)x - x$.

Montrons que A est fermé, en effet :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow x_0, Ax_n \longrightarrow y_0$. Remarquons tout d'abord que

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\sigma)Ax_n d\sigma = \int_0^t T(\sigma)y_0 d\sigma,$$

et donc

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{T(t)x_n - x_n}{t} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(\sigma)y_0 d\sigma = y_0,$$

c'est-à-dire $x_0 \in D(A)$ et $y_0 = Ax_0$. ■

Théorème 1.20. *[23] L'opérateur (non borné) A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$, si et seulement si*

1. *A est fermé,*
2. *$D(A)$ est dense dans E,*
3. *Il existe M, $\omega \in \mathbb{R}_+$, tels que*
   $\{\lambda \in \mathbb{C}, \Re e\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ et $\|(A-\lambda I)^{-k}\| \leq \dfrac{M}{(\Re e\lambda - \omega)^k}$, pour $k = 1, 2, ...$ si $\Re e\lambda \leq \omega$.

Soit le problème homogène

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 1.21. *[23] Soit A un opérateur fermé, de domaine dense dans E, dont l'ensemble résolvant et non vide.*
Le problème (1.1) *admet une solution $u(t) = T(t)x$ pour chaque $x \in D(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $T(t)$.*

Considérons le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.2}$$

Théorème 1.22. *[23] Soit $x \in D(A), f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; E)$ où $(f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; E))$, alors*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est une solution du problème (1.2)

1.5 L'espace $W_p^2(0,1;H_1,H)$

Définition 1.23. *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire dans H, $D(A)$ son domaine. On note $L_p((0,1);H)$, $(1 \leq p < \infty)$ l'espace des fonctions fortement mesurables $x \longmapsto u(x)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{0,p}^p = \int_0^1 \|u(x)\|_H^p dx.$$

qui en fait un espace de Banach.
On désigne par

$$H(A) := \{u \in D(A), \|u\|_{H(A)}^2 = \|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2 < \infty\},$$

le domaine de A quand il est muni de la norme Hilbertienne .
On note par $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus dans H.

Définition 1.24. *Soient H, H_1 deux espaces de Hilbert tels que $H_1 \subset H$ avec injection continue, on définie l'espace*

$$W_p^2((0,1); H_1, H) := \{u \in L_p((0,1); H_1); u'' \in L_p((0,1); H)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W_p^2((0,1);H_1,H)} := \|u\|_{L_p((0,1);H_1)} + \|u''\|_{L_p((0,1);H)}.$$

1.6 Espaces d'interpolations

Soient E_0 , E_1 deux espaces de Banach qui s'injectent continument dans l'espace de Banach E, la paire $\{E_0, E_1\}$ est un couple d'interpolation.

Considérons l'espace de Banach

$$E_0 + E_1 := \left\{ \begin{array}{c} u : u \in E, \exists u_j, j = 0, 1 \text{ avec } u = u_0 + u_1, \\ \|u\|_{E_0+E_1} := \inf\limits_{u=u_0+u_1; u_j \in E_j} (\|u_0\|_{E_0} + \|u_1\|_{E_1}) \end{array} \right\}$$

et la fonctionnelle

$$K(t,u) := \inf_{u=u_0+u_1; u_j \in E_j} (\|u_0\|_{E_0} + t\|u_1\|_{E_1}), \quad u \in E_0 + E_1.$$

Définition 1.25. *L'espace d'interpolation pour le couple $\{E_0, E_1\}$ par K-méthode est défini comme suit :*

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} := \left\{ \begin{array}{c} u : u \in E_0 + E_1, \|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} := \left(\int\limits_0^\infty t^{-1-\theta p} K^p(t,u) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \\ 0 < \theta < 1, 1 \leq p < \infty \end{array} \right\},$$

$$(E_0, E_1)_{\theta,\infty} := \left\{ u : u \in E_0 + E_1, \|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,\infty}} := \sup_{t \in]0,\infty[} t^{-\theta} K(t,u) < \infty, 0 < \theta < 1 \right\}.$$

Lemme 1.26. *[28] Soit $\{E_0, E_1\}$ un couple d'interpolation. Alors pour $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$,*

on a

1. $(E_0, E_1)_{\theta,p} = (E_1, E_0)_{1-\theta,p}$,
2. $\forall u \in E_0 \cap E_1, \|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq c\|u\|_{E_0}^{1-\theta}\|u\|_{E_1}^{\theta}$,
3. $E_0 \cap E_1$ *est dense dans* $(E_0, E_1)_{\theta,p}$,
4. *Si* $E_0 = E_1$, *alors* $(E_0, E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1$.

Théorème 1.27. *[28] Soit* $\{E_0, E_1\}$ *un couple d'interpolation,* $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $0 < \lambda < 1, 1 \leq p \leq \infty$. *Alors*

$$((E_0, E_1)_{\theta_0}, (E_0, E_1)_{\theta_1})_{\lambda,p} = (E_0, E_1)_{\theta,p}, \quad \theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1.$$

Lemme 1.28. *[28] Soit* $\{E_0, E_1\}$ *un couple d'interpolation ,alors pour* $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$,

$$|\lambda|^{\theta}\|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq c(\|u\|_{E_0} + |\lambda|\|u\|_{E_1}), \quad u \in E_0 \cap E_1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Lemme 1.29. *[28] Soit* A *un opérateur positif dans* E.

1. *Si* $\alpha > 0$, *alors* A^{α} *est un isomorphisme de* $E(A^{\alpha})$ *sur* E, *de* $E(A^{\alpha+\mu})$ *sur* $E(A^{\alpha})$, $\mu > 0$ *et de* $(E, E(A^m))_{\frac{\alpha+\mu}{m},p}$ *sur* $(E, E(A^m))_{\frac{\mu}{m},p}$, *où* $\mu > 0$, $1 \leq p < \infty, m = 1.2$, $\alpha + \mu < m$.
2. *Si* $0 < \alpha < \beta < \infty, 1 \leq p \leq \infty$ *,et* $0 < \theta < 1$ *alors*

$$(E, E(A^{\alpha}))_{\theta,p} = (E, E(A^{\beta}))_{\frac{\alpha}{\beta}\theta,p}$$

Lemme 1.30. *[28] Soient* A *un opérateur dans* E *positif et* α, β *vérifient* $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ *, alors*

$$(E(A^{\alpha}), (E(A^{\beta}))_{\theta,p} = (E, E(A^{\beta}))_{\frac{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}{\beta},p},$$

où $1 \leq p < \infty, 0 < \theta < 1$.

Théorème 1.31. *[5] Soit* $(-A)$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* e^{-tA}, $t > 0$, *est décroissant à l'infini c'est-à-dire qu'il existe* $\beta < 0$ *tels que* $\|e^{-tA}\| \leq ce^{\beta t}$ *alors,*

$$(H, H(A^m))_{\theta,p} = \left\{ \begin{array}{c} u \in H, \|u\|_{m,\theta}^p = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{m(1-\theta)p-1}\|A^m e^{-tA}u\|_H^p dt \leq \infty \\ 1 \leq p < \infty, 0 < \theta < 1, m \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

$\|.\|_{\theta,p}$ *désigne la norme de* $(H, H(A^m))_{\theta,p}$. *On note par*

$$(H(A^n), H)_{0,p} := H(A^n), \quad (H(A^n), H)_{1,p} := H$$

Théorème 1.32. *[19] Pour* $u \in W_p^m((0,1), H_1, H)$ *on a*

$$u^{(j)} \in \mathcal{C}^0\left([0,1]; (H_1, H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}\right), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

l'application $u \mapsto u^{(j)}$ *est linéaire continue de* $W_p^m((0,1), H_1, H)$ *dans* $\mathcal{C}^0\left([0,1], (H_1, H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}\right)$.

Remarque 1.33. .

1. *D'après le théorème précédent* $u^{(j)}(0) \in (H_1, H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}$ *et* $u^{(j)}(1) \in (H_1, H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}$
2. *Les espaces "intermédiaires"* $(H_1, H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}$ *apparaissent comme les espace parcours par les "traces"* $u^{(j)}(0)$ *d'où la terminologie "Espace de traces" .*

   En plus on a l'estimation suivante :

$$\|u^{(j)}(0)\|_{(H_1,H)_{\frac{j+\frac{1}{p}}{m},p}} \leq C_j\left(h^{-j-\frac{1}{p}}\|u\|_{L_p((0,1),H_1)} + h^{m-j-\frac{1}{p}}\|u^{(m)}\|_{L_p((0,1),H)}\right).$$

Théorème 1.34. *[19] Si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. $\{E_0, E_1\}$ *est une couple d'interpolation ,*
2. $\ell = 1, 2, ...,$ *et* ,$1 \leq p \leq \infty$,
3. s *est un entier* $0 \leq s \leq \ell - 1, 0 < s + \frac{1}{p} < p$,
4. $\theta = \dfrac{s + \frac{1}{p}}{\ell}$.

Alors, pour $u \in W_p^l((0,1), E_0, E_1)$, *on a*

$$\|u^{(s)}(0)\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq c\left(\|u\|_{L_p((0,1),E_0)} + \|u^{(\ell)}(t)\|_{L_p((0,1),E_1)}\right).$$

1.7 Inégalité de Young

Pour $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \varepsilon > 0, a, b > 0.$

$$ab \leq \frac{1}{p}(\varepsilon a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^q.$$

Chapitre 2

Problème aux limites pour une équation différentielle abstraite

Dans ce chapitre, en utilisant une technique de krein pour montrer que l'opérateur qui aux donnés du problème aux limites (P) associe la solution est un isomorphisme dans des espaces à valeurs vectorielles convenables et en plus, il ya une estimation par rapport au paramètre spectral.

2.1 Multiplicateur de Fourier

Définition 2.1. *Considérons la transformation de Fourier*

$$(Fu)(\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma x} u(x)dx, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

et l'inverse de la transformation de Fourier

$$(F^{-1}v)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x} v(\sigma)d\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

$\forall u, v \in L_1(\mathbb{R}, H)$.

La transformée de Fourier a un certain nombre de propriétés remarquables. L'une d'elles *est la suivante :*

$$(Fu^{(k)})(\sigma) = (i\sigma)^k (Fu)(\sigma), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.2. *La fonction $T : \mathbb{R} \to B(H)$ est dite multiplicateur de Fourier de type (p,p), ($p > 1$) si et seulement si*

$$\|F^{-1}TFu\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq c\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}, \quad \forall u \in L_p(\mathbb{R}; H).$$

Théorème 2.3. *[5] **(Mikhlin Schwartz).** La fonction*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\to B(H) \\ \sigma &\mapsto T(\sigma) \end{aligned}$$

continument différentiable vérifiant $\|T\|_{B(H)} \leq c$, et $\| \dfrac{\partial T}{\partial \sigma} \|_{B(H)} \leq \dfrac{c}{|\sigma|}$, pour $\sigma \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Fourier de type (p,p) tel que $p > 1$.

2.2 Équation différentielle abstraite non homogène sur $\mathbb{R}$

Considérons l'équation différentielle non homogène suivante :

$$u''(x) - (A + \lambda I)^2 u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est un opérateur fermé, λ un paramètre complexe et $f \in L_p(\mathbb{R}; H)$.

Notons par $L_0(\lambda)$ l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} L_0(\lambda) : W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H) &\longrightarrow L_p(\mathbb{R}; H) \\ u &\longmapsto L_0(\lambda)u = u''(x) - (A + \lambda I)^2 u(x). \end{aligned}$$

On va montrer que l'opérateur $L_0(\lambda)$ est un isomorphisme de $W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H)$ sur $L_p(\mathbb{R}; H)$ et on établira en plus une estimation dans un secteur .

Théorème 2.4. *Soit A un opérateur fermé à domaine $D(A)$ dense dans H et*

$$\|R(s,A)\| \leq \frac{C}{1+|s|} \quad \textit{pour} \quad |\arg s| \geq \frac{\pi}{2} \ \textit{ et } \ \Re e(s) \ \textit{assez grand} .$$

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $|\lambda|$ assez grand, l'opérateur $L_0(\lambda)$ est un isomorphisme de $W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H)$ sur $L_p(\mathbb{R}; H)$ et en outre pour ces λ on a

$$\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|A^2 u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda| \|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda|^2 \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq C \|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}.$$

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, nous examinerons les lemmes suivants :

Lemme 2.5. *[5] Soit $\sigma \in \mathbb{R}$, et $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, on a :*

$$|i\sigma + \lambda| \geq c(|\sigma| + |\lambda|) \ \textit{ et } \ |-i\sigma + \lambda| \geq c(|\sigma| + |\lambda|).$$

Lemme 2.6. *Soit A un opérateur fermé, λ un paramètre complexe, on a $A(A-(i\sigma-\lambda)I)^{-1} = (A-(i\sigma-\lambda)I)^{-1}A$.*

Preuve : On pose $\mu = i\sigma - \lambda$, alors

$$\begin{aligned}
A(A-\mu I)^{-1} &= (A - \mu I + \mu I)(A-\mu I)^{-1} \\
&= (A-\mu I)(A-\mu I)^{-1} + \mu(A-\mu I)^{-1} \\
&= I + \mu(A-\mu I)^{-1} \\
&= (A-\mu I)^{-1}(A-\mu I) + \mu(A-\mu I)^{-1} \\
&= (A-\mu I)^{-1}(A-\mu I+\mu I) \\
&= (A-\mu I)^{-1}A.
\end{aligned}$$

■

Démonstration. (du théorème) L'opérateur $L_0(\lambda)$ est linéaire continu de $W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H)$

dans $L_p(\mathbb{R}; H)$; en effet

$$\begin{aligned} L_0(\lambda)(\alpha u+\beta v) &= (\alpha u+\beta v)''(x) - (A+\lambda I)^2(\alpha u+\beta v)(x) \\ &= (\alpha u)''(x) + (\beta v)''(x) - (A+\lambda I)^2[(\alpha u)(x) + (\beta v)(x)] \\ &= \alpha u''(x) + \beta v''(x) - (A+\lambda I)^2 \alpha u(x) - (A+\lambda I)^2 \beta v(x) \\ &= \alpha(u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x)) + \beta(v''(x) - (A+\lambda I)^2 v(x)) \\ &= \alpha L_0(\lambda) u + \beta L_0(\lambda) v \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v \in W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H). \end{aligned}$$

Donc $L_0(\lambda)$ est linéaire .

On a

$$\begin{aligned} \|L_0(\lambda)u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} &= \|u'' - A^2 u - \lambda^2 u - 2A\lambda u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \\ &\leq \|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|A^2 u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda|^2 \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + 2|\lambda| \|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)}. \end{aligned}$$

On va estimer les quatre terme de $\|L_0(\lambda)u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$:

a. Estimation de $\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$

On sait que

$$\begin{aligned} \|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} &\leq \|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|A^2 u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \\ &= \|u\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)}, \end{aligned}$$

donc

$$\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq \|u\|\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)}. \tag{2.1}$$

b. Estimation de $\|A^2 u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$

D'après la définition (1.23), on a

$$\|A^2 u\|_H \leq \|u\|_{H(A^2)},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \|A^2 u\|_H^p \leq \int_{\mathbb{R}} \|u\|_{H(A^2)}^p$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|A^2 u\|_H^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|u\|_{H(A^2)}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} &\leq \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))}\\ &\leq \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))} + \|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\\ &\leq \|u\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)},\end{aligned}$$

alors

$$\|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq \|u\||_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)}. \tag{2.2}$$

c. Estimation de $|\lambda|^2\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$

d'après la définition (1.23), on a

$$\|u\|_H \leq \|u\|_{H(A^2)},$$

donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|u\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|u\|_{H(A^2)}^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))},$$

alors, il vient

$$\begin{aligned}|\lambda|^2\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} &\leq c(\lambda)\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))}\\ &\leq c(\lambda)(\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))})\\ &\leq c(\lambda)\|u\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2);H)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

d. Estimation de $|\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$

On a

$$\|Au\|_H \leq \|u\|_{H(A)}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|Au\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|u\|_{H(A)}^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

donc

$$\begin{aligned}|\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)} &\leq |\lambda|\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A))}\\ &\leq |\lambda|\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H(A^2))} + |\lambda|\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\\ &\leq c(\lambda)\|u\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2);H)}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

De l'inégalité (2.1) ,(2.2) ,(2.3) et (2.4) ; on obtient

$$\|L_0(\lambda)u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq c(\lambda)\|u\|_{W_p^2(\mathbb{R};H(A^2);H)}.$$

Ce qui montre la continuité de l'opérateur $L_0(\lambda)$ de $W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)$ dans $L_p(\mathbb{R};H)$.

Maintenant, montrons que pour tout $f \in L_p(\mathbb{R};H)$, il existe une solution $u \in W_p^2(\mathbb{R};H(A^2),H)$ vérifiant

$$u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x) = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Prenant la transformée de Fourier de deux membres, on obtient

$$F(u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x)) = F(f(x)), x \in \mathbb{R}$$

$$F(u''(x)) - (A+\lambda I)^2 F(u(x)) = F(f(x))$$

et comme on a

$$(Fu^{(k)})(\sigma) = (i\sigma)^k (Fu)(\sigma), \quad k \in \mathbb{N}.$$

on obtient

$$((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)Fu = Ff \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)$ est inversible ;

on a

$$\begin{aligned}(i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2 &= (i\sigma + (A+\lambda I))(i\sigma - (A+\lambda I)) \\ &= -(A - (-i\sigma - \lambda)I)(A - (i\sigma - \lambda)I),\end{aligned}$$

vérifions que pour $|\arg \lambda| < \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon, (i\sigma - \lambda)$ et $(-i\sigma - \lambda)$ sont dans l'ensemble résolvant ;

on a

$$\|(A - sI)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+|s|}, \text{ pour } |\arg s| \geq \frac{\pi}{2} \text{ et } \Re e(s) \text{ assez grand}$$

et puisque

$$\Re e(i\sigma - \lambda) = -\Re e\lambda < 0, \ \text{ d'où } |\arg(i\sigma - \lambda)| \geq \frac{\pi}{2},$$

et

$$\Re e(-i\sigma - \lambda) = -\Re e\lambda < 0, \ \text{ d'où } |\arg(-i\sigma - \lambda)| \geq \frac{\pi}{2},$$

alors on obtient, $(-i\sigma-\lambda)$ et $(i\sigma-\lambda)$ sont dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, d'où $(A-(-i\sigma-\lambda))(A-(i\sigma-\lambda))$ sont inversibles. Il vient alors, que l'opérateur $(i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2$ est inversible. A partir de là, Fu peut être écrit sous cette forme

$$Fu = ((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1} Ff, \sigma \in \mathbb{R},$$

d'où

$$u = F^{-1}((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1} Ff, \sigma \in \mathbb{R}$$

d'après la définition (2.1), on obtient

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1} Ff \ d\sigma.$$

Donc $L_0(\lambda)$ est un isomorphisme de $W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2); H)$ sur $L_p(\mathbb{R}; H)$.

Maintenant, il reste de montrer l'estimation suivante.

$$\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda|^2 \|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|A^2 u\|\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda| \|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq c \|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}.$$

Pour estimer les termes de $\|L_0(\lambda)u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$; on pose

$$T_k(\sigma,\lambda) = \lambda^{2-k}(i\sigma)^k((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1}, \ k = 0, 1, 2,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|T_k(\sigma,\lambda)\| &= \|\lambda^{2-k}(i\sigma)^k((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1}\| \\
&= |\lambda|^{2-k}|\sigma|^k \|((A+\lambda I)^2 - (i\sigma)^2)^{-1}\| \\
&= |\lambda|^{2-k}|\sigma|^k \|(A-(-i\sigma-\lambda)I)^{-1}(A-(i\sigma-\lambda)I)^{-1}\| \\
&= |\lambda|^{2-k}|\sigma|^k \|(A-(-i\sigma-\lambda)I)^{-1}\| \|(A-(i\sigma-\lambda)I)^{-1}\|,
\end{aligned}$$

comme

$\|(A-(i\sigma-\lambda)I)^{-1}\| \leq c\ (1+|i\sigma-\lambda|)^{-1}$ et $\|(A-(-i\sigma-\lambda)I)^{-1}\| \leq c\ (1+|-i\sigma-\lambda|)^{-1}$,

alors

$$\|T_k(\sigma,\lambda)\| \leq c|\lambda|^{2-k}|\sigma|^k|i\sigma-\lambda|^{-1}|-i\sigma-\lambda|^{-1},$$

d'après le lemme (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}\|T_k(\sigma,\lambda)\| &\leq c\ |\lambda|^{2-k}|\sigma|^k(|\sigma|+|\lambda|)^{-2}\\ &\leq c\frac{|\lambda|^{2-k}|\sigma|^k}{(|\sigma|+|\lambda|)^2},\end{aligned}$$

or

$$|\lambda|^{2-k}|\sigma|^k \leq (|\sigma|+|\lambda|)^2,\ pour\ k=0,1,2,$$

par conséquent

$$\frac{|\lambda|^{2-k}|\sigma|^k}{(|\sigma|+|\lambda|)^2} \leq 1,\ k=0,1,2,$$

d'où

$$\|T_k(\sigma,\lambda)\| \leq c, \quad c\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}T_k(\sigma,\lambda) &= \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\lambda^{2-k}(i\sigma)^k((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\right)\\ &= ki\lambda^{2-k}(i\sigma)^{k-1}((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\\ &+\lambda^{2-k}(i\sigma)^k((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}2i\sigma((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}.\end{aligned}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T_k(\sigma,\lambda)\| \leq k|\lambda|^{2-k}|\sigma|^{k-1}\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|+\|T_k(\sigma,\lambda)\|\ |2\sigma|\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|,$$

comme

$$\|T_k(\sigma,\lambda)\| \leq c \ \text{ et } \|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\| \leq c'\ (|\sigma|+|\lambda|)^{-2}, \quad c'\in\mathbb{R}$$

donc

$$\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T_k(\sigma,\lambda)\| \leq c'\ k\frac{|\lambda|^{2-k}|\sigma|^{k-1}}{(|\sigma|+|\lambda|)^2}+cte\frac{2|\sigma|}{(|\sigma|+|\lambda|)^2}, \tag{2.6}$$

et comme aussi

$$|\lambda|^{2-k}|\sigma|^k \leq (|\sigma|+|\lambda|)^2, \quad k=0,1,2$$

et

$$|\sigma|^2 \leq (|\sigma|+|\lambda|)^2,$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T_k(\sigma,\lambda)\right\| &\leq \ c'\frac{k}{|\sigma|}+\frac{c}{|\sigma|}\\ &\leq \frac{cte}{|\sigma|}.\end{aligned}$$

D'après le théorème (2.3), T_k est un multiplicateur de Fourier de type (p,p), mais comme

$$u^{(k)} = F^{-1}(i\sigma)^k((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}Ff,$$

alors

$$\begin{aligned}|\lambda|^{2-k}u^{(k)} &= F^{-1}\lambda^{2-k}((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}Ff\\ &= F^{-1}T_k(\sigma,\lambda)Ff,\end{aligned}$$

trouvons donc l'inégalité suivante

$$\sum_{k=0}^{2}|\lambda|^{2-k}\|u^{(k)}\|_{L_p(\mathbb{R},H)} \leq \sum_{k=0}^{2}\|F^{-1}T_k(\sigma,\lambda)Ff\|_{L_p(\mathbb{R},H)} \leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R},H)}. \tag{2.7}$$

Maintenant, déduisons les estimations de

$$\|u''\|_{L_p(\mathbb{R},H)}, |\lambda|^2\|u\|_{L_p(\mathbb{R},H)}, \|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R},H)} \text{ et } |\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R},H)},$$

de l'inégalité (2.7), et pour $k=0$, on obtient

$$\begin{aligned}|\lambda|^2\|u\|_{L_p(\mathbb{R},H)} &\leq \|F^{-1}T_0(\sigma,\lambda)Ff\|_{L_p(\mathbb{R},H)}\\ &\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R},H)},\end{aligned}$$

de l'inégalité (2.7), et pour $k=2$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u''\|_{L_p(\mathbb{R},H)} &\leq \|F^{-1}T_2(\sigma,\lambda)Ff\|_{L_p(\mathbb{R},H)}\\ &\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R},H)},\end{aligned}$$

* Estimation de $\|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R},H)}$

  On a

$$\begin{aligned}\|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R},H)} &= \|F^{-1}FA^2u\|_{L_p(\mathbb{R},H)}\\ &= \|F^{-1}A^2Fu\|_{L_p(\mathbb{R},H)}\\ &= \|F^{-1}A^2((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}Ff\|_{L_p(\mathbb{R},H)},\end{aligned}$$

on pose

$$T(\sigma, \lambda) = A^2((i\sigma)^2 - (A + \lambda I)^2)^{-1},$$

montrons que $T(\sigma, \lambda)$ est un multiplicateur de Fourier de type (p,p), pour $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. On a
$\|T(\sigma, \lambda)\| = \|A^2((i\sigma)^2 - (A+\lambda I)^2)^{-1}\| = \|A^2(A-(i\sigma-\lambda I))^{-1}(A-(-i\sigma-\lambda I))^{-1}\|$.
Pour estimer cette quantité, nous avons d'après le lemme (2.6) que A commute avec $(A - (i\sigma - \lambda I))^{-1}$, alors

$$\begin{aligned}
\|T(\sigma, \lambda)\| &= \|AA((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}(A - (-i\sigma - \lambda)I)^{-1}\| \\
&\leq \|A((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\|\|A(A - (-i\sigma - \lambda)I)^{-1}\| \\
&\leq \|[A - (i\sigma - \lambda)I + (i\sigma - \lambda)I]((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\| \\
&\quad \times \|(A - (-i\sigma - \lambda)I + (-i\sigma - \lambda)I)(A - (-i\sigma - \lambda)I)^{-1}\| \\
&\leq \| - I + (i\sigma - \lambda I)((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\| \\
&\quad \times \| - I + (-i\sigma - \lambda)((-i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\| \\
&\leq \left(\|I\| + \|(i\sigma - \lambda)((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\|\right) \\
&\quad \times \left(\|I\| + \|(-i\sigma - \lambda)((-i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\|\right) \\
&\leq \left(1 + |i\sigma - \lambda|\|((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\|\right) \\
&\quad \times \left(1 + | - i\sigma - \lambda|\|((-i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\|\right),
\end{aligned}$$

mais comme
$\|((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\| \leq c\ |(i\sigma - \lambda)|^{-1}$ et $\| - ((i\sigma - \lambda)I - A)^{-1}\| \leq c\ |(i\sigma + \lambda)|^{-1}$,
alors

$$\begin{aligned}
\|T(\sigma, \lambda)\| &\leq \left(1 + c(|i\sigma - \lambda|\ |i\sigma - \lambda|^{-1})\right)\left(1 + c|i\sigma + \lambda|\ |i\sigma + \lambda|^{-1}\right) \\
&\leq Cte.
\end{aligned}$$

D'autre part ;

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T(\sigma,\lambda)\| &= 2|\sigma|\|A^2((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\| \\ &= 2|\sigma|\|T(\sigma,\lambda)((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\| \\ &\leq 2|\sigma|\|T(\sigma,\lambda)\|\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|,\end{aligned}$$

or

$$\|T(\sigma,\lambda)\|\leq c \ \text{ et } \|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|\leq c' \ (|\sigma|+|\lambda|)^{-2}, \quad c,c'\in\mathbb{R}$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T(\sigma,\lambda)\| &\leq \ cte \ \frac{|\sigma|}{(|\sigma|+|\lambda|)^2} \\ &\leq \frac{cte}{|\sigma|}\frac{|\sigma|^2}{(|\sigma|+|\lambda|)^2} \\ &\leq \frac{cte}{|\sigma|}.\end{aligned}$$

D'après de théorème (2.3), $T(\sigma,\lambda)$ est un multiplicateur de Fourier de type (p,p).

Donc, on obtient

$$\|F^{-1}T(\sigma,\lambda)Ff\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$$

alors

$$\|A^2u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}. \tag{2.8}$$

* Estimation de $|\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$

On a

$$\begin{aligned}\|\lambda Au\| &= |\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \\ &= \|F^{-1}F\lambda Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \\ &= \|F^{-1}\lambda AFu\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \\ &= \|F^{-1}\lambda A((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}Ff\|_{L_p(\mathbb{R};H)},\end{aligned}$$

on pose $\quad T(\sigma,\lambda)=\lambda A((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}$,

$$\begin{aligned}
\|T(\sigma,\lambda)\| &= |\lambda|\|A((i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}((-i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\| \\
&\leq |\lambda|\|A((i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\|\|((-i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\| \\
&\leq |\lambda|\|-I+(i\sigma-\lambda)((i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\|\|((-i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\| \\
&\leq |\lambda|(\|I\|+|i\sigma-\lambda I|\|((i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\|\|((-i\sigma-\lambda)I-A)^{-1}\|) \\
&\leq C|\lambda|\left(\|I\|+c|i\sigma-\lambda||(i\sigma-\lambda)|^{-1}|i\sigma+\lambda|^{-1}\right) \\
&\leq C\frac{|\lambda|}{|\sigma|+|\lambda|}\leq C.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T(\sigma,\lambda)\| &\leq |2\sigma|\|\lambda A((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\| \\
&\leq |2\lambda|\|T(\sigma,\lambda)\|\|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|,
\end{aligned}$$

mais comme

$$\|T(\sigma,\lambda)\|\leq C \quad \text{et} \quad \|((i\sigma)^2-(A+\lambda I)^2)^{-1}\|\leq c'(|\sigma|+|\lambda|)^{-2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial}{\partial\sigma}T(\sigma,\lambda)\| &\leq \ cte\frac{|\sigma|}{(|\sigma|+|\lambda|)^2} \\
&\leq \ \frac{cte}{|\sigma|}\frac{|\sigma|^2}{(|\sigma|+|\lambda|)^2} \\
&\leq \frac{cte}{|\sigma|}.
\end{aligned}$$

En vertu du théorème (2.3), $T(\sigma,\lambda)$ est un multiplicateur de Fourier de type (p,p). D'où

$$\|F^{-1}T(\sigma,\lambda)Ff\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)},$$

on obtient, alors

$$|\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}. \tag{2.9}$$

Des formules (2.7),(2.8) et (2.9), on obtient

$$\|u''\|_{L_p(\mathbb{R};H)}+|\lambda|^2\|u\|_{L_p(\mathbb{R};H)}+\|A^2u\||_{L_p(\mathbb{R};H)}+|\lambda|\|Au\|_{L_p(\mathbb{R};H)}\leq c\|f\|_{L_p(\mathbb{R};H)}.$$

■

2.3 Équation différentielle abstraite homogène

Considérons l'équation différentielle abstraite homogène suivante :

$$u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x) = 0,\ \ x \in [0,1].$$

Lemme 2.7. *Supposons que A est un opérateur fermé à domaine dense dans H et*

$$\|(A-sI)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+|s|},\ \ |\arg s| \geq \frac{\pi}{2} \ \ \text{et} \ \ \Re e(s) \ \text{assez grand}\ .$$

$u \in W_p^2([0,1]; H(A^2), H)$ est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$u(x) = e^{-xA_\lambda} g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda} g_2 \tag{2.10}$$

avec $A_\lambda = A + \lambda I$ et $g_1, g_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Démonstration. Soit $u \in W_p^2((0,1); H(A^2), H)$ une solution de cette équation

$$u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x) = 0,\ \ x \in [0,1]. \tag{2.11}$$

On peut écrire l'équation (2.11) comme suite

$$(D-(A+\lambda I))(D+(A+\lambda I))u(x) = 0, \tag{2.12}$$

où D est la dérivée par rapport à x.

On pose

$$v(x) = (D+(A+\lambda I))u(x),$$

en remplaçant l'expression de v dans l'équation (2.12), on obtient

$$(D-(A+\lambda I))v(x) = 0,$$

cela donne

$$v'(x) = (A+\lambda I)v(x),$$

par changement de variable $x = 1-y$

$$\begin{cases} v'(1-y) = -(A+\lambda I)v(1-y) \\ v(1) = \beta. \end{cases}$$

On a $(-A_\lambda)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe $e^{-xA_\lambda}, x > 0$; alors d'après la résolution des équation homogènes

$$v(x) = e^{-(1-x)A_\lambda} v(1), \tag{2.13}$$

montrons d'abord que $v \in W_p^1((0,1); H(A), H)$:

On a

$$v(x) = (D + (A + \lambda I))u(x).$$

Comme $u \in W_p^2((0,1); H(A^2), H)$, donc $u' \in W_p^1((0,1); H(A), H)$. ceci équivalant à

$$Au' \in L_p((0.1); H) \text{ et } u'' \in L_p((0.1); H)$$

mais comme $(Au)' = Au'$ donc, on obtient

$$Au' = (Au)' \in L_p((0.1); H),$$

et on a

$$A(Au) = A^2 u \in L_p((0.1); H),$$

alors, $Au \in L_p((0.1); H(A))$ ce qui entraine $Au \in W_p^1((0,1); H(A), H)$

d'où $v \in W_p^1((0,1); H(A), H)$.

Le théorème (1.32) donne

$$v(1) \in (H(A), H)_{\frac{1}{p},p} = (H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p},$$

on obtient

$$u'(x) = -A_\lambda u(x) + e^{-(1-x)A_\lambda} v(1),$$

tel que, $v(1) \in (H(A), H)_{\frac{1}{p},p} = (H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p}$, d'après le théorème (1.22), on a

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-A_\lambda x}u(0) + \int_0^x e^{-A_\lambda(x-y)}e^{-(1-y)A_\lambda}v(1)dy \\ &= e^{-A_\lambda x}u(0) + \frac{1}{2}e^{-(1+x)A_\lambda}A_\lambda^{-1}v(1)[e^{2A_\lambda y}]_0^x \\ &= e^{-A_\lambda x}u(0) + \frac{1}{2}e^{-(1+x)A_\lambda}A_\lambda^{-1}v(1)[e^{2A_\lambda x} - 1] \\ &= e^{-A_\lambda x}u(0) + \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}v(1)[e^{A_\lambda x}e^{-A_\lambda} - e^{-(1+x)A_\lambda}] \\ &= e^{-A_\lambda x}u(0) + \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}[e^{(x-1)A_\lambda} - e^{-A_\lambda x}e^{-A_\lambda}]v(1) \\ &= e^{-A_\lambda x}\left(u(0) - \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}e^{-A_\lambda}v(1)\right) + e^{(x-1)A_\lambda}\left(\frac{1}{2}A_\lambda^{-1}v(1)\right), \end{aligned}$$

posons

$$g_1 = u(0) - \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}e^{-A_\lambda}v(1) \text{ et } g_2 = \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}v(1),$$

d'où la solution $u(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x) = e^{-A_\lambda x}g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda}g_2. \tag{2.14}$$

Maintenant montrons, que $g_1, g_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} &= \|u(0) - \frac{1}{2}A_\lambda^{-1}e^{-A_\lambda}v(1)\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ &\leq \|u(0)\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + \|\frac{1}{2}A_\lambda^{-1}e^{-A_\lambda}v(1)\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ &\leq \|u(0)\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + c\|A_\lambda^{-1}v(1)\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}, \end{aligned}$$

d'après le lemme (1.29) l'opérateur A est un isomorphisme de $H(A)$ dans H et de $H(A^2)$ sur $H(A)$ et de $(H(A), H(A^2))_{1-\frac{1}{p},p}$ sur $(H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p}$ donc A_λ^{-1} est défini de $(H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p} = (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ sur $(H(A), H(A^2))_{1-\frac{1}{p},p} = (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$
cela donne

$$\begin{aligned} v(1) \in (H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p} &\Rightarrow A_\lambda^{-1}v(1) \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p} \\ &\Rightarrow \|A_\lambda^{-1}v(1)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty, \end{aligned}$$

et on a

$$u(0) \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p} \Rightarrow \|u(0)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty,$$

donc

$$\|g_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty,$$

et

$$\|g_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} = \|\frac{1}{2}A_\lambda^{-1}v(1)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty.$$

Montrons la réciproque, c'est-à-dire que la solution u de la forme (2.10) appartient à l'espace $W_p^2((0,1);H(A^2),H)$.

On a

$$u(x) = e^{-xA_\lambda}g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda}g_2$$

en dérivant $u(x)$; on obtient

$$u'(x) = -A_\lambda e^{-xA_\lambda}g_1 + A_\lambda e^{-(1-x)A_\lambda}g_2,$$

on dérivant $u(x)$ pour la deuxième fois ; on trouve

$$\begin{aligned} u'' &= A_\lambda^2(e^{-xA_\lambda}g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda}g_2) \\ &= A_\lambda^2 u(x) \end{aligned}$$

d'où

$$u'' - A_\lambda^2 u(x) = 0,$$

maintenant on montre que $u \in W_p^2((0,1);H(A^2),H)$

$$u \in W_p^2((0,1);H(A^2),H) \text{ si et seulement si } A^2u \in L_p((0,1);H) \text{ et } u'' \in L_p((0,1);H),$$

on a

$$u'' = A_\lambda^2 u,$$

alors

$$u'' \in L_p((0,1);H) \text{ si et seulement si } A_\lambda^2 u \in L_p((0,1);H),$$

donc, il est suffisant de montrer que

$$A_\lambda^2(e^{-xA_\lambda}g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda}g_2) \in L_p((0,1);H),$$

signifie que

$$A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} g_1 \in L_p((0,1);H) \text{ et } A_\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda} g_2 \in L_p((0,1);H).$$

D'après le théorème (1.31)

$$\int_0^1 \|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} g_1\|_H^p dx = \|g_1\|_{(H,H(A_\lambda^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty,$$

et

$$\int_0^1 \|A_\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda} g_2\|_H^p dx = \|g_1\|_{(H,H(A_\lambda^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} < \infty.$$

D'où $u \in W_p^2((0,1);H(A^2),H)$.

Ce qui achève la démonstration. ■

2.4 Problème aux limites

Considérons dans $L_p((0,1);H)$ le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ \lambda(\alpha_1 u(0) + \beta_1 u(1)) + \delta_1 u'(0) + \gamma_1 u'(1) = f_1 \\ \alpha_2 u_2(0) + \beta_2 u(1) = f_2 \end{cases} \tag{2.15}$$

avec A est un opérateur fermé, λ un paramètre complexe,

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \gamma_1 \in \mathbb{C}$, $f \in L_p((0,1);H)$, $f_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$, et $f_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Notons $\mathcal{L}_0(\lambda)$ l'opérateur suivant :

$$\mathcal{L}_0(\lambda) : W_p^2((0,1);H(A^2),H) \longrightarrow L_p((0,1);H) \times (H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \times (H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$$

$$u \longmapsto (L_0(\lambda)u, L_{10}(\lambda)u, L_{20}(\lambda)u),$$

avec

$$L_0(\lambda)u = u''(x) - (A+\lambda I)^2 u(x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

$$L_{10}(\lambda)u = \lambda(\alpha_1 u(0) + \beta_1 u(1)) + \delta_1 u'(0) + \gamma_1 u'(1) = f_1,$$

$$L_{20}(\lambda)u = \alpha_2 u(0) + \beta_2 u(1) = f_2.$$

Notre but est de montrer que $\mathcal{L}_0(\lambda)$ réalise un isomorphisme entre les espaces ci dessus et en plus on a une estimation pour les λ dans un secteur.

Théorème 2.8. *Supposons*

1. *A est un opérateur fermé à domaine dense dans H et*

$$\|(A - sI)^{-1}\| \leq \frac{c}{1+|s|}, \ |\arg s| \geq \frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \Re(s) \ \textit{assez grand.}$$

2. $\eta_2 \neq 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 0$ *avec* $\eta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, $\eta_2 = \begin{vmatrix} \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 \end{vmatrix}$.

3. $\exists\, \delta \in (0, \frac{\pi}{2}), \ |\arg(1+\beta_1\gamma_1^{-1})| < \delta, \ \gamma_1 \neq 0, \ |\arg(1-\alpha_1\delta_1^{-1})| \leq \delta, \delta_1 \neq 0.$

   Alors, pour λ *tel que* $|\arg\lambda| \leq \dfrac{\pi}{2} - \delta$ *et* $|\lambda|$ *assez grand, l'opérateur*

   $\mathcal{L}_0(\lambda) : u \longmapsto (L_0(\lambda)u, L_{10}(\lambda)u, L_{20}u)$ *est un isomorphisme de* $W_p^2((0,1); H(A^2), H)$

   sur $L_p((0,1); H) \times (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \times (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

   En plus pour ces λ, u *vérifie :*

$$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au\|_{L_{p((0,1);H)}} + |\lambda|^2\|u\|_{L_{p((0,1);H)}}$$
$$\leq C \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|\|f\|_{L_{p((0,1);H)}} + \|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H \\ +\|f_2\|_{(H;H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H \end{array} \right\}.$$

Démonstration. Il est clair que $L_0(\lambda)$ est un opérateur linéaire continu de $W_p^2((0,1); H(A^2), H)$ sur $L_p((0,1); H)$, et aussi $L_{10}(\lambda)$ et $L_{20}(\lambda)$ des opérateurs linéaire continus grâce au théorème (1.32) et remarque (1.33)

$$\begin{cases} u(0) \in C^0([0,1], (H, H(A^2)))_{1-\frac{1}{2p}} \\ u(0) \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p}} \\ u(1) \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p}} \end{cases}$$

$u(0)$ et $u(1)$ continue de $[0,1]$ dans $(H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$, $u'(0)$ et $u'(1)$ continue de $[0,1]$ dans $(H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$,

par conséquent $\mathcal{L}_0(\lambda)$ est un opérateur linéaire continu de $W_p^2((0,1); H(A^2), H)$ dans $L_p((0,1); H) \times (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} \times (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Montrons maintenant que pour tout $f \in L_p((0,1);H)$, $f_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ et $f_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$, le problème (2.15) admet une solution $u \in W_p^2((0,1); H(A^2), H)$.

Cherchons la solution u sous la forme $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ où $u_1(x)$ est la restriction à $[0,1]$ de $\tilde{u}_1(x)$ solution de

$$L_0(\lambda)\tilde{u}_1(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in [0,1] \tag{2.16}$$

où

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

et $u_2(x)$ est la solution du problème homogène

$$\begin{cases} L_0(\lambda)u_2(x) = 0 & x \in [0,1] \\ L_{10}(\lambda)u_2(x) = f_1 - L_{10}(\lambda)u_1(x) \\ L_{20}(\lambda)u_2(x) = f_2 - L_{20}(\lambda)u_1(x) \end{cases} \tag{2.17}$$

du le théorème (2.4) l'équation (2.16) admet une unique solution
$\tilde{u}_1(x) \in W_p^2(\mathbb{R}; H(A^2), H)$ vérifiant,
$\|\tilde{u}_1''\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + \|A^2\tilde{u}_1\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda|\|A\tilde{u}_1\|_{L_p(\mathbb{R};H)} + |\lambda|^2\|\tilde{u}_1\|_{L_p(\mathbb{R};H)} \leq c\|\tilde{f}\|_{L_p(\mathbb{R};H)}$,
alors,

$$\|u_1''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} \leq c\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

pour $|\arg\lambda| \leq \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $|\lambda| \to \infty$.
Maintenant, montrons, l'existence et l'unicité de u_2.
D'après les hypothèse du théorème précédente, $(-A_\lambda)$ est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe e^{-xA_λ} pour $x > 0$. D'où la solution générale de l'équation homogène du problème (2.17) s'écrit sous la forme

$$u_2(x) = e^{-A_\lambda x}g_1 + e^{-(1-x)A_\lambda}g_2,$$

avec $g_1, g_2 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$ et $A_\lambda = A + \lambda I$, d'où l'existence de u_2. Reste à vérifier que cette solution est unique, en remplaçant l'expression de $u_2(x)$ dans les conditions aux limites de problème (2.17), on trouve

$$\begin{cases} \lambda(\alpha_1(g_1+e^{-A_\lambda}g_2)+\beta_1(e^{-A_\lambda}g_1+g_2))+\delta_1(-A_\lambda g_1+A_\lambda e^{-A_\lambda}g_2)+\gamma_1(-A_\lambda e^{-A_\lambda}g_1+A_\lambda g_2) \\ = f_1 - L_{10}(\lambda)u_1 \\ \alpha_2(g_1+e^{-A_\lambda}g_2)+\beta_2(e^{-A\lambda}g_1+g_2) = f_2 - L_{20}(\lambda)u_1. \end{cases}$$

Ce système s'écrit alors,

$$\begin{cases} [(\lambda\alpha_1 I-\delta_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\beta_1 I-\gamma_1 A_\lambda)]g_1+[(\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda)]g_2 \\ = f_1 - L_{10}(\lambda)u_1 \\ (\alpha_2 I+\beta_2 e^{-A_\lambda})g_1+(\alpha_2 e^{-A_\lambda}+\beta_2 I)g_2 = f_2 - L_{20}(\lambda)u_1 \end{cases}$$

on utilise la méthode de Cramer's pour résoudre ce système comme suit

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda\alpha_1 I-\delta_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\beta_1 I-\gamma_1 A_\lambda) & (\lambda\beta_1 I-\gamma_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda) \\ \alpha_2+\beta_2 e^{-A_\lambda} & \alpha_2 e^{-A_\lambda}+\beta_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \left[(\lambda\alpha_1 I-\delta_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\beta_1 I-\gamma_1 A_\lambda)\right]\left(\alpha_2 e^{-A_\lambda}+\beta_2\right) \\ &\quad - \left[(\lambda\beta_1 I-\gamma_1 A_\lambda)+e^{-A_\lambda}(\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda)\right]\left(\alpha_2+\beta_2 e^{-A_\lambda}\right) \\ &= \lambda(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)+A_\lambda(-\delta_1\beta_2-\gamma_1\alpha_2)+(\lambda\beta_1\alpha_2 I-\gamma_1\alpha_2 A_\lambda-\lambda\alpha_1\beta_2 I-\delta_1\beta_2 A_\lambda)e^{-2A_\lambda} \\ &\quad + (-2\delta_1 A_\lambda\alpha_2-2\gamma_1\beta_2 A_\lambda)e^{-A_\lambda} \\ &= \lambda\eta_1+A_\lambda\eta_2+R(\lambda) \\ &= \lambda\eta_1+\lambda\eta_2+A\eta_2+R(\lambda) \\ &= \lambda(\eta_1+\eta_2)+A\eta_2+R(\lambda). \end{aligned}$$

Mais comme $\eta_1 = -\eta_2$, alors

$$D(\lambda) = \eta_2 A + R(\lambda) = \eta_2 A(I + A^{-1}\eta_2^{-1}R(\lambda)),$$

avec

$R(\lambda) = (\lambda\beta_1\alpha_2 I-\gamma_1\alpha_2 A_\lambda-\lambda\alpha_1\beta_2 I-\delta_1\beta_2 A_\lambda)e^{-2A_\lambda}+(-2\delta_1 A_\lambda\alpha_2-2\gamma_1\beta_2 A_\lambda)e^{-A_\lambda}$,

tel que $\|R(\lambda)\| \longrightarrow 0$, quand $|\lambda| \longrightarrow +\infty$.

$D(\lambda)$ est inversible, en effet

$\eta_2 \neq 0,\ |\arg\lambda| \leq \dfrac{\pi}{2} - \delta,\ \ |\lambda| \longrightarrow +\infty$ et $\|A^{-1}\eta_2^{-1}R(\lambda)\| \leq q < 1$ donc , $(I + A^{-1}\eta_2^{-1}R(\lambda))$ est inversible et en plus

$$(I + A^{-1}\eta_2^{-1}R(\lambda))^{-1} = I + T(\lambda) \quad \text{où} \quad T(\lambda) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k(A^{-1}\eta_2^{-1}R(\lambda))^k.$$

Alors

$$D(\lambda)^{-1} = (I + T(\lambda))\eta_2^{-1}A^{-1}.$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\begin{vmatrix} f_1 - L_{10}u_1 & \lambda\beta_1 I + \gamma_1 A_\lambda + e^{-A_\lambda}(\lambda\alpha_1 I + \delta_1 A_\lambda) \\ f_2 - L_{20}u_1 & \alpha_2 e^{-A_\lambda} + \beta_2 I \end{vmatrix}}{D(\lambda)} \\ &= D(\lambda)^{-1}\left\{ \begin{array}{c} [((f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)(\alpha_2 e^{-A_\lambda} + \beta_2 I))] \\ -[\lambda\beta_1 I + \gamma_1 A_\lambda + e^{-A_\lambda}(\lambda\alpha_1 I + \delta_1 A_\lambda)](f_2 - L_{20}(\lambda)u_1) \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 I - \delta_1 A_\lambda - (\gamma_1 A_\lambda - \lambda\beta_1 I)e^{-A_\lambda} & f_1 - L_{10}u_1 \\ (\alpha_2 I + \beta_2 e^{-A_\lambda}) & f_2 - L_{20}(\lambda)u_1 \end{vmatrix}}{D(\lambda)} \\ &= D(\lambda)^{-1}\left\{ \begin{array}{c} [(\lambda\alpha_1 I - \delta_1 A_\lambda - (\gamma_1 A_\lambda - \lambda\beta_1 I)e^{-A_\lambda})(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1)] \\ -[(\alpha_2 I + \beta_2 e^{-A_\lambda})(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)] \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

on obtient

$$g_1 = D(\lambda)^{-1}\left\{(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1) - (\lambda\beta_1 I + \gamma_1 A_\lambda + R_{12}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1)\right\},$$

$$g_2 = D(\lambda)^{-1}\left\{(\lambda\alpha_1 I - \delta_1 A_\lambda - R_{21}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1) - (\alpha_2 I + R_{22}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)\right\},$$

avec

$$\begin{aligned} R_{11}(\lambda) &= \alpha_2 e^{-A_\lambda}, \\ R_{12}(\lambda) &= (\lambda\alpha_1 I + \delta_1 A_\lambda)e^{-A_\lambda}, \\ R_{21}(\lambda) &= (\gamma_1 A_\lambda - \lambda\beta_1 I)e^{-A_\lambda}, \\ R_{22}(\lambda) &= \beta_2 e^{-A_\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème (2.17) admet une unique solution donnée par

$$\begin{aligned}
u_2(x) = {} & e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I+R_{11}(\lambda))(f_1-L_{10}(\lambda)u_1) \\
& - e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda+R_{12}(\lambda))(f_2-L_{20}(\lambda)u) \\
& - e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda+R_{21}(\lambda))(f_2-L_{20}(\lambda)u_1) \\
& + e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I-R_{22}(\lambda))(f_1-L_{10}(\lambda)u_1).
\end{aligned}$$

Maintenant, simplifions l'expression de u_2, commençons par le terme

$\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda+R_{12}(\lambda)$,

on a

$$\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda+R_{12}(\lambda)=\gamma_1(A+\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1}))+R_{12}(\lambda), \tag{2.18}$$

comme

$$\begin{aligned}
|\arg(\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1}))| &= |\arg\lambda+\arg(1+\beta_1\gamma_1^{-1})| \\
&\leq |\arg\lambda|+|\arg(1+\beta_1\gamma_1^{-1})| \\
&\leq \frac{\pi}{2}-\delta+\delta=\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

alors $A+\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1})$ est inversible et on obtient ;

$\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda+R_{12}(\lambda)=\gamma_1(A+\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1}))\left(I+\gamma_1^{-1}(A+\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1}))^{-1}R_{12}(\lambda)\right)$,

on pose $\mu=\lambda(1+\beta_1\gamma_1^{-1})$ donc l'équation (2.18) devient

$$\lambda\beta_1 I+\gamma_1 A_\lambda+R_{12}(\lambda)=\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda)).$$

On simplifier maintenant le terme $(-\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda+R_{21}(\lambda))$,

$$\begin{aligned}
-\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda+R_{21}(\lambda) &= \delta_1(-\lambda\alpha_1\delta_1^{-1}I+A_\lambda)+R_{21}(\lambda) \\
&= \delta_1(A+\lambda(1-\alpha_1\delta_1^{-1}))+R_{21}(\lambda),
\end{aligned}$$

on pose $\mu'=\lambda(1-\alpha_1\delta_1^{-1})$, on obtient

$$\begin{aligned}
-\lambda\alpha_1 I+\delta_1 A_\lambda+R_{21}(\lambda) &= \delta_1(A+\mu')+R_{21}(\lambda) \\
&= \delta_1 A_{\mu'}(I+\delta_1^{-1}A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda)),
\end{aligned}$$

mais comme

$$|\arg\lambda(1-\alpha_1\delta_1^{-1})| = |\arg\lambda + \arg(1-\alpha_1\delta_1^{-1})| \le \frac{\pi}{2} - \delta + \delta = \frac{\pi}{2},$$

donc

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)\\
&\quad - e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1)\\
&\quad + e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)\\
&\quad - e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+\delta_1^{-1}A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1).
\end{aligned}$$

- Estimons $\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)}$, $\|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)}$, $|\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)}$, $|\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)}$.

1. Estimation de $\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)}$.

   On pose $u_2''(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + v_4(x)$, avec

   $v_1(x) = A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)$,

   $v_2(x) = -A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I + A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1)$,

   $v_3(x) = A_\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))(f_1 - L_{10}(\lambda)u_1)$,

   $v_4(x) = -A_\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I + A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))(f_2 - L_{20}(\lambda)u_1)$.

   Il suffit d'estimer chaque terme de u_2'' en $L_p((0,1);H)$

   a) Estimation de $\|v_1\|_{L_p((0,1);H)}$.

      Posons,

      $$h_1 = f_1 - L_{10}(\lambda)u_1 \in (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p},$$

      donc

      $$\begin{aligned}
      \|v_1\|_{L_p((0,1);H)} &= \|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)}\\
      &\le C\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)}
      \end{aligned}$$

      comme $A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}$est commute avec $(I + T(\lambda))$ et commute avec $(\beta_2 I +$

$R_{11}(\lambda))$; on obtient

$$\begin{aligned}
\|v_1\|_{L_p((0,1);H)} &\le C\|I+T(\lambda)\|\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}(\beta_2 I+R_{11}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)}\\
&\le C\|I+T(\lambda)\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))}\\
&\quad\times\|(\beta_2 I+R_{11}(\lambda))\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))}\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)}\\
&\le C(\|A^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)}+2|\lambda|\|Ae^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)}\\
&\quad+|\lambda|^2\|e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)})
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\|(I+T(\lambda))\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))} &\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{-1}R(\lambda)\|^k_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))}\\
&\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}q^k, \qquad (q<1)\\
&\le M
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|(\beta_2 I+R_{11}(\lambda))\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))} &\le |\beta_2|+\|R_{11}(\lambda)\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))}\\
&\le |\beta_2|+|\alpha_1|\le c.
\end{aligned}$$

On va estimer alors chacun des trois termes de l'expression précédente.

(i)

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1\|A^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1\|A^2 e^{-x(A+\lambda I)}A^{-1}h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda}\|A^2 e^{-xA}A^{-1}h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

car on a

$$A^k e^{-xA}=e^{-xA}A^k,$$

et comme $x\in[0,1]$, et $|\arg\lambda|\le\dfrac{\pi}{2}-\delta$,

donc

$$-xp\Re e\lambda<0\Longrightarrow e^{-xp\Re e\lambda}<1,$$

alors, on obtient

$$\left(\int_0^1 \|A^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 \|A e^{-xA} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C\|h_1\|_{(H,H(A))_{1-\frac{1}{p},p}}$$

or

$$(H, H(A))_{1-\frac{1}{p},p} = (H, H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$$

on trouve

$$\left(\int_0^1 \|A^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}. \tag{2.19}$$

(ii)

$$\left(\int_0^1 \|2\lambda A e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda} A A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2|\lambda| \left(\int_0^1 \|e^{-xA_\lambda} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2|\lambda| \left(\int_0^1 \|e^{-x(A+\lambda I)} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2|\lambda| \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} \|e^{-xA} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq C|\lambda| \|h_1\|_H \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

car

$$\|e^{-xA} h_1\| \leq C\|h_1\|_H,$$

et comme

$$\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} dx = \frac{-1}{p\Re e\lambda}(e^{-p\Re e\lambda} - 1) = \frac{1}{p\Re e\lambda}(-e^{-p\Re e\lambda} + 1)$$
$$\leq \frac{c}{p\Re e\lambda}$$
$$\leq \frac{C}{|\lambda|},$$

on obtient

$$\left(\int_0^1 \|2\lambda A e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C|\lambda| \left(\frac{C}{|\lambda|}\right)^{\frac{1}{p}} \|h_1\|_H$$
$$\leq C|\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|h_1\|_H. \tag{2.20}$$

(iii)

$$\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|^2 \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} \|e^{-xA} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

comme

$$\|e^{-xA} A^{-1} h_1\|_H \leq C \|A^{-1} h_1\|_H,$$

et

$$\|A^{-1}\|_{B(H,H)} \leq C,$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_1\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq |\lambda|^2 \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} dx\right)^{\frac{1}{p}} \|A^{-1}\|_{B(H,H)} \|h_1\|_H \\
&\leq C|\lambda|^2 |\lambda|^{-\frac{1}{p}} \|h_1\|_H \\
&\leq C|\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|h_1\|_H. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

A partir des inégalités (2.19), (2.20), et (2.21), on obtient

$$\|v_1\|_{L_p((0,1),H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|h_1\|_H + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|h_1\|_H \\ +\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\} \qquad (2.22)$$

b) Estimation de $\|v_2\|_{L_p((0,1),H)}$:

$$\begin{aligned}
\|v_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1}(I+T(\lambda))(I+\gamma_1^{-1} A_\mu^{-1} R_{12}(\lambda)) A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\leq C\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1}(I+\gamma_1^{-1} A_\mu^{-1} R_{12}(\lambda)) A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)},
\end{aligned}$$

avec

$$h_2 = f_2 - L_{20}(\lambda) u_1 \in (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p},$$

comme $A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1}$ commute avec $(I+\gamma_1^{-1} A_\mu^{-1} R_{12}(\lambda))$, il vient alors

$$\begin{aligned}
\|v_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C\|(I+\gamma_1^{-1} A_\mu^{-1} R_{12}(\lambda)) A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\leq C\|(I+\gamma_1^{-1} A_\mu^{-1} R_{12}(\lambda))\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))} \\
&\quad \times \|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\leq C\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)},
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\|(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))\|_{B(L_p((0,1);H),L_p((0,1);H))} &\leq 1+c\|A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda)\|_{L_p((0,1);H)}\\ &\leq 1+q\left(\frac{c}{1+\mu}\right)\\ &\leq Cte.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|v_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C\|A_\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)}\\ &= C\|(A^2+2\lambda A+\lambda^2)e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)}\\ &\leq C\|A^2e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)}+\|2\lambda Ae^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)}\\ &+|\lambda^2|\|e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)}.\end{aligned}$$

Estimation les termes qui composant $v_2(x)$

(i)

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\|A^2e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1\|Ae^{-xA_\lambda}AA^{-1}A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_0^1\|Ae^{-xA_\lambda}A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int_0^1\|Ae^{-xA_\lambda}(A+\mu I)h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \|Ae^{-xA_\lambda}Ah_2\|_{L_p((0,1);H)}+\|Ae^{-xA_\lambda}\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

on va estimer les deux termes, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1\|Ae^{-xA_\lambda}Ah_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda}\|A^2e^{-xA}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_0^1\|A^2e^{-xA}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}},\end{aligned}$$

et

$$\left(\int_0^1\|Ae^{-xA_\lambda}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda}\|Ae^{-xA}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et comme

$$\mu = \lambda(1 + \beta_1 \gamma_1^{-1}),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |\mu| &= |\lambda||1 + \beta_1 \gamma_1^{-1}| \\ &\leq c|\lambda|, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \|Ae^{-xA_\lambda}\mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq c|\lambda| \left(\int_0^1 \|Ae^{-xA}h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c|\lambda| \|h_2\|_{(H,H(A))_{1-\frac{1}{p},p}} \\ &\leq c|\lambda| \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}. \end{aligned}$$

On trouve

$$\left(\int_0^1 \|A^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} c|\lambda| \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ + \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\}. \quad (2.23)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 \|2\lambda A e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda} A A^{-1} A_\mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda} A_\mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda} A h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda} \mu h_2\|_H^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

on va estimer les deux termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda}Ah_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_0^1 |e^{-x\lambda}|^p \|2\lambda e^{-xA}Ah_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 e^{-px\Re e\lambda} \|2\lambda e^{-xA}Ah_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|\lambda| \left(\int_0^1 \|Ae^{-xA}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|\lambda| \|h_2\|_{(H,H(A))_{1-\frac{1}{p},p}} \\
&= C|\lambda| \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|2\lambda e^{-xA_\lambda}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C|\lambda||\mu| \left(\int_0^1 \|e^{-xA_\lambda}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|\lambda||\lambda| \left(\int_0^1 e^{-px\Re e\lambda}\|e^{-xA}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|\lambda|^2|\lambda|^{-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \\
&= C|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H,
\end{aligned}$$

alors

$$\left(\int_0^1 \|2\lambda Ae^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \end{array} \right\}. \tag{2.24}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}Ah_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

on va estimer les deux termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda|^2 \left(\int_0^1 \|e^{-xA_\lambda} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|^2 \left(\int_0^1 |e^{-x\lambda}|^p \|e^{-xA} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|^2 \left(\int_0^1 e^{-px\Re e\lambda} \|e^{-xA} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C|\lambda|^2 \left(\int_0^1 e^{-px\Re e\lambda} dx\right)^{\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\
&\leq C|\lambda||\lambda|^{-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\
&\leq C|\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda|^2|\mu| \left(\int_0^1 \|e^{-xA_\lambda} A^{-1} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|^2|\mu| \left(\int_0^1 |e^{-x\lambda}|^p \|e^{-xA} A^{-1} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq c|\lambda|^3 \left(\int_0^1 e^{-px\Re e\lambda} \|e^{-xA} A^{-1} h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

et comme

$$\|e^{-xA} A^{-1} h_2\|_H \leq C\|h_2\|_H,$$

il vient, alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1}\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C|\lambda|^3 \left(\int_0^1 e^{-xp\Re e\lambda} dx\right)^{\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\
&\leq C|\lambda|^3|\lambda|^{-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\
&= C|\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H.
\end{aligned}$$

On obtient, donc

$$\left(\int_0^1 \|\lambda^2 e^{-xA_\lambda} A^{-1} A_\mu h_2\|_H^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \end{array} \right\}. \tag{2.25}$$

A partir des inégalités (2.23), (2.24) et (2.25) on a

$$\|v_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|h_2\|_H \\ +\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\} \tag{2.26}$$

De même manière on estimons v_3 et v_4,

c) Estimation de $\|v_3\|_{L_p((0,1),H)}$:

$$\|v_3\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|A^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_1\|_{L_p(0,1;H)}$$
$$+ C\|2\lambda A e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_1\|_{L_p(0,1;H)}$$
$$+ C\|\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_1\|_{L_p(0,1;H)},$$

l'estimation de chaque terme nous donne

(i)

$$\|A^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_1\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}. \tag{2.27}$$

(ii)

$$\|\lambda A e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_1\|_{L_p((0,1);H)} \leq C|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H. \tag{2.28}$$

(iii)

$$\|\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} h_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq C|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H. \tag{2.29}$$

d'où

$$\|v_3\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H \\ +\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\} \tag{2.30}$$

d) Estimation de $\|v_4\|_{L_p((0,1),H)}$:

$$\|v_4\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|A^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} A_{\mu'} h_2\|_{L_p((0,1);H)}$$
$$+ C\|2\lambda A e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} A_{\mu'} h_2\|_{L_p((0,1);H)}$$
$$+ C|\lambda|^2\|e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} A_{\mu'} h_2\|_{L_p((0,1);H)},$$

l'estimation de chaque terme nous donne

(i)

$$\|A^2 e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} A_{\mu'} h_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} \|h_2\|_{H,H(A^2)_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\}. \tag{2.31}$$

(ii)

$$\|\lambda A e^{-(1-x)A_\lambda} A^{-1} A_{\mu'} h_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|\|h_2\|_{((H,H(A^2)))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \end{array} \right\}. \tag{2.32}$$

(iii)

$$\|\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}A_{\mu'}h_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte\left\{\begin{array}{c} |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \\ +|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \end{array}\right\}, \tag{2.33}$$

d'où

$$\|v_4\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte\left\{\begin{array}{c} |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \\ +\|h_2\|_{H,H(A^2)_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array}\right\}. \tag{2.34}$$

A partir des inégalités (2.22), (2.26), (2.30), et (2.34) on obtient,

$$\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte\left\{\begin{array}{c} \|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H \\ +|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H \end{array}\right\}.$$

2. Estimation de $\|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)}$

On a

$$\begin{aligned} A^2u_2 &= A^2e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1 \\ &- A^2e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))h_2 \\ &- A^2e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+\delta_1^{-1}A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))h_2 \\ &+ A^2e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))h_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq \|A^2e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|A^2e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|A^2e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+A_\mu^{-1}R_{21}(\lambda))h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|A^2e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)}, \end{aligned}$$

cela implique

$$\begin{aligned} \|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C_1\|A^2e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_2\|A^2e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_3\|A^2e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_4\|A^2e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}A_{\mu'}h_2\|_{L_p((0,1);H)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.19), (2.23), (2.27), et (2.31) on obtient

$$\|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte \left\{ \begin{array}{c} \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|\|h_2\|_{H,H(A^2)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \end{array} \right\}.$$

3. Estimation de $|\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)}$

$$\begin{aligned} \lambda Au_2 &= \lambda Ae^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1 \\ &- \lambda Ae^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))h_2 \\ &- \lambda Ae^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+\delta_1^{-1}A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))h_2 \\ &+ \lambda Ae^{-(1-x)}A_\lambda\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))h_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq \|\lambda Ae^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|\lambda Ae^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|\lambda Ae^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ \|\lambda Ae^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))h_1\|_{L_p((0,1);H)}, \end{aligned}$$

cela implique

$$\begin{aligned} |\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C_1\|\lambda Ae^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_2\|\lambda Ae^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_3\|\lambda Ae^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ &+ C_4\|\lambda e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}A_{\mu'}h_2\|_{L_p((0,1);H)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.20), (2.24), (2.28), et (2.32) on obtient

$$|\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte\left\{|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|\|h_2\|_{((H,H(A^2)))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H\right\}.$$

4. Estimations de $|\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)}$.

On a

$$\begin{aligned}
\lambda^2 u_2 &= \lambda^2 e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(\beta_2 I + R_{11}(\lambda))h_1 \\
&\quad - \lambda^2 e^{-xA_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\gamma_1 A_\mu(I+\gamma_1^{-1}A_\mu^{-1}R_{12}(\lambda))h_2 \\
&\quad - \lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))\delta_1 A_{\mu'}(I+A_{\mu'}^{-1}R_{21}(\lambda))h_2 \\
&\quad + \lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}\eta_2^{-1}A^{-1}(I+T(\lambda))(-\alpha_2 I - R_{22}(\lambda))h_1,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)} &\leq C_1\|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\quad + C_2\|\lambda^2 e^{-xA_\lambda}A^{-1}A_\mu h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\quad + C_3\|\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}A_{\mu'}h_2\|_{L_p((0,1);H)} \\
&\quad + C_4\|\lambda^2 e^{-(1-x)A_\lambda}A^{-1}h_1\|_{L_p((0,1);H)}.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.21), (2.25), (2.29), et (2.33) on obtient

$$|\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)} \leq Cte\left\{|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H\right\}.$$

Donc

$$\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$\leq Cte\left\{\begin{array}{c}\|h_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + \|h_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|\|h_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|h_2\|_H\end{array}\right\},$$

et puisque

$$h_1 = f_1 - L_{10}(\lambda)u_1,$$

$$h_2 = f_2 - L_{20}(\lambda)u_1.$$

Il vient,

$$\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$\leq Cte \left\{ \begin{array}{c} \|f_1 - L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + \|f_2 - L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|\|f_2 - L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|f_1 - L_{10}(\lambda)u_1\|_H \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1 - L_{10}(\lambda)u_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2 - L_{20}(\lambda)u_1\|_H \\ +|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2 - L_{20}(\lambda)u_1\|_H \end{array} \right\},$$

$$\leq Cte \left\{ \begin{array}{c} \|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + \|L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + \|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H \\ +|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H \end{array} \right\}.$$

- Estimation de $|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}$.

On a

$$\big(H(A^2), H\big)_{1,p} = H \Rightarrow \big(H, H(A^2)\big)_{0,p} = H.$$

En appliquant le lemme (1.27), on obtient

$$\big(H, H(A^2)\big)_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p} = \Big((H, H(A^2))_{0,p}, (H, H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}\Big)_{\theta,p},$$

avec

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2p} = (1-\lambda)0 + \lambda(1 - \frac{1}{2p}),$$

et

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}{1 - \frac{1}{2p}} = \frac{p-1}{2p-1},$$

donc

$$\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} = \|f_2\|_{\left((H,H(A^2))_{0,p},(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}\right)_{\frac{p-1}{2p-1},p}}.$$

D'après le lemme (1.26), on a

$$\forall x \in E_0 \cap E_1, \quad \|u\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq c\|u\|_{E_0}^{1-\theta}\|u\|_{E_1}^{\theta},$$

donc

$$\begin{aligned}\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &\leq C\|f_2\|^{\frac{p}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{0,p}}\|f_2\|^{\frac{p-1}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ &= C\|f_2\|^{\frac{p}{2p-1}}_{H}\|f_2\|^{\frac{p-1}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}},\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &\leq C|\lambda|\|f_2\|^{\frac{p}{2p-1}}_{H}\|f_2\|^{\frac{p-1}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ &= C|\lambda|^{\frac{p-1}{2p-1}}|\lambda|^{\frac{p}{2p-1}}\|f_2\|^{\frac{p}{2p-1}}_{H}\|f_2\|^{\frac{p-1}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p}}} \\ &= C\left(|\lambda|\|f_2\|_H\right)^{\frac{p}{2p-1}}\left(|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}},\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on a

pour

$$\varepsilon = |\lambda|^{\frac{p-1}{2p-1}} \quad ,\alpha = \frac{2p-1}{p}, \quad \beta = \frac{2p-1}{p-1}$$

et

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = \frac{p}{2p-1}+\frac{p-1}{2p-1} = \frac{2p-1}{2p-1} = 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &\leq Cte\left\{\begin{array}{c}\left(|\lambda|^{\frac{p-1}{2p-1}}\left(|\lambda|\|f_2\|_H\right)^{\frac{p}{2p-1}}\right)^{\frac{2p-1}{p}} \\ +\left(|\lambda|^{\frac{-p+1}{2p-1}}\left(|\lambda|\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right)^{\frac{p-1}{2p-1}}\right)^{\frac{2p-1}{p-1}}\end{array}\right\} \\ &\leq Cte\left\{\left(|\lambda|\|f_2\|^{\frac{p}{2p-1}}_H\right)^{\frac{2p-1}{p}}+\left(\|f_2\|^{\frac{p-1}{2p-1}}_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right)^{\frac{2p-1}{p-1}}\right\} \\ &\leq Cte\left\{|\lambda|^{\frac{2p-1}{p}}\|f_2\|_H+\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right\} \\ &\leq Cte\left\{|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H+\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right\},\end{aligned}$$

donc

$$\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)}+\|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)}+|\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)}+|\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$\leq Cte\left\{\begin{array}{c}\|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}+\|L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ +\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}+|\lambda|\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ +\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}+|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H\\ +|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H+|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H\\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H+|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H+|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H\\ +|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H+|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H\end{array}\right\}.$$

Maintenant pour conclure, on doit se débarrasser des termes qui contiennent u_1, en les majorant par la norme de f.

D'après au théories d'interpolations, on a les estimations suivantes :

(a) Estimation de $\|L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}$

$$\begin{aligned}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &= \|\lambda(\alpha_1 u_1(0)+\beta u_1(1))+\delta_1 u_1'(0)+\gamma_1 u_1'(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ &\leq |\lambda|\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}+|\lambda|\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ &+\|u_1'(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}+\|u_1'(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &= \|u_1(0)\|_{(H,H(A))_{1-\frac{1}{p},p}}\\ &\leq Cte\left\{\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)}+\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},\end{aligned}$$

alors

$$|\lambda|\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\leq Cte\left\{|\lambda|\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)}+|\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}.$$

D'après l'inégalité (2.9), on a

$$|\lambda|\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)}\leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$|\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

donc

$$|\lambda|\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq Cte\left\{\|Au_1\|\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

donc

$$\begin{aligned}|\lambda|\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &\leq Cte\left\{|\lambda|\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)}.\end{aligned}$$

D'un autre coté, on a

$$\|u_1'(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq Cte\left\{\|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

de l'inégalité (2.8), on a

$$\|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

alors

$$\|u_1'\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)}$$

et

$$\|u_1'\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq Cte\left\{\|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\}$$

$$\leq Cte\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

donc

$$\|L_{10}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

(b) Estimation de $\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}$

$$\begin{aligned}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} &= \|\alpha_2u_1(0) + \beta_2u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\\ &\leq Cte\left\{\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + \|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}}\right\}\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} &\leq Cte\left\{\|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq Cte\|f\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} &\leq Cte\left\{\|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

alors

$$\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

(c) Estimation de $|\lambda|\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}$

$$\begin{aligned}|\lambda|\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} &= |\lambda|\|\alpha_2u_1(0)+\beta_2u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ &\leq Cte\left\{\begin{array}{c}|\lambda|\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\\ +|\lambda|\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}}\end{array}\right\}\end{aligned}$$

on a

$$|\lambda|\|u_1(0)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$|\lambda|\|u_1(1)\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

alors

$$|\lambda|\|L_{20}(\lambda)u_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

(d) Estimation de $|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H$

$$\begin{aligned}|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H &= |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|\lambda(\alpha_1u_1(0)+\beta_1u_1(1))+\delta_1u_1'(0)+\delta_1u_1'(1)\|_H\\ &\leq Cte|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\left\{\begin{array}{c}|\lambda|\|u_1(0)\|_H+|\lambda|\|u_1(1)\|_H\\ +\|u_1'(0)\|_H+\|u_1'(1)\|_H\end{array}\right\}\\ &\leq Cte\left\{\begin{array}{c}|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(0)\|_H+|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(1)\|_H\\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|u_1'(0)\|_H+|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|u_1'(1)\|_H\end{array}\right\}\end{aligned}$$

on a

$$\|u_1(0)\|_H \leq Cte\left\{h^{-\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + h^{1-\frac{1}{p}}\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

pour $h = |\lambda|^{-1}$, on a

$$\|u_1(0)\|_H \leq Cte\left\{|\lambda|^{\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^{-1+\frac{1}{p}}\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

alors

$$\begin{aligned}|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(0)\|_H &\leq Cte\left\{|\lambda|^3\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C|\lambda|\left\{|\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},\end{aligned}$$

comme

$$|\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$|\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)} \leq C\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

donc

$$|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(0)\|_H \leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

D'un autre coté

$$\|u_1(1)\|_H \leq \left\{h^{\frac{-1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + h^{1-\frac{1}{p}}\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

pour $h = |\lambda|^{-1}$, alors

$$\|u_1(1)\|_H \leq \left\{|\lambda|^{\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^{-1+\frac{1}{p}}\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}$$

d'où

$$\begin{aligned}|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(1)\|_H &\leq Cte\left\{|\lambda|^3\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq Cte|\lambda|\left\{|\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

en plus, on a

$$\|u_1'(0)\|_H \leq C\left\{h^{-1-\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + h^{1-\frac{1}{p}}\|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

pour $h = |\lambda|^{-1}$, on a

$$\|u_1'(0)\|_H \leq Cte\left\{|\lambda|^{1+\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^{-1+\frac{1}{p}}\|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

et

$$\begin{aligned}|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|u_1'(0)\|_H &\leq Cte\left\{|\lambda|^3\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq Cte|\lambda|\left\{|\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

d'où

$$|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H \leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

(e) Estimation de $|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H$.

On a

$$|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H \leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|L_{10}(\lambda)u_1\|_H \leq C\|f\||_{L_p((0,1);H)}.$$

(f) Estimation de $|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H$.

$$\begin{aligned}|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|L_{20}(\lambda)u_1\|_H &= |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|\alpha_2 u_1(0) + \beta_2 u_1(1)\|_H\\ &\leq Cte|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\left\{\|u_1(0)\|_H + \|u_1(1)\|_H\right\}\\ &\leq Cte\left\{|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(0)\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(1)\|_H\right\}\end{aligned}$$

on a

$$\|u_1(0)\|_H \leq C\left\{|\lambda|^{\frac{1}{p}}\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^{-1+\frac{1}{p}}\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\},$$

d'où

$$\begin{aligned}|\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|u_1(0)\|_H &\leq Cte\left\{|\lambda|^3\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq Cte|\lambda|\left\{|\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|u_1'\|_{L_p((0,1);H)}\right\}\\ &\leq C|\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)},\end{aligned}$$

on a aussi

$$\|u_1(1)\|_H \leq Cte \left\{ |\lambda|^{\frac{1}{p}} \|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^{-1+\frac{1}{p}} \|u_1'\|_{L_p((0,1);H)} \right\},$$

alors

$$\begin{aligned} |\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|u_1(1)\|_H &\leq Cte \left\{ |\lambda|^3 \|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2 \|u_1'\|_{L_p((0,1);H)} \right\} \\ &\leq Cte |\lambda| \left\{ |\lambda|^2 \|u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda| \|u_1'\|_{L_p((0,1);H)} \right\} \\ &\leq C |\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H)}, \end{aligned}$$

donc

$$|\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|L_{20}(\lambda) u_1\|_H \leq C |\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

(g) Estimation de $|\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|L_{20}(\lambda) u_1\|_H$.

On a

$$|\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|L_{20}(\lambda) u_1\|_H \leq C |\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

alors

$$|\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|L_{20}(\lambda) u_1\|_H \leq C \|f\|_{L_p((0,1);H)}.$$

On obtient, donc

$$\begin{aligned} &\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2 u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda| \|A u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2 \|u_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ &\leq Cte \left\{ \begin{array}{c} \|f\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda| \|f\|_{L_p((0,1);H)} + \|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ + \|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}} \|f_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|f_1\|_H \\ + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|f_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|f_2\|_H \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

En fin, en écrivant $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, on obtient

$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2 u\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda| \|Au\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2 \|u\|_{L_p((0,1);H)}$

$= \|(u_1 + u_2)''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2 (u_1 + u_2)\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda| \|A(u_1 + u_2)\|_{L_p((0,1);H)}$

$+ |\lambda|^2 \|(u_1 + u_2)\|_{L_p((0,1);H)}$

on a

$$\|(u_1 + u_2)''\|_{L_p((0,1);H)} = \|u_1'' + u_2''\|_{L_p((0,1);H)},$$

$$\|A^2(u_1+u_2)\|_{L_p((0,1);H)} = \|A^2u_1 + A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$\|A(u_1+u_2)\|_{L_p((0,1);H)} = \|Au_1 + Au_2\|_{L_p((0,1);H)},$$

d'où

$$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \|u_1''+u_2''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_1+A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_1+Au_2\|_{L_p((0,1);H)} \\ +|\lambda|^2\|u_1+u_2\|_{L_p((0,1);H)} \end{array} \right\}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{c} \|u_1''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_1\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_1\|_{L_p((0,1);H)} \\ +\|u_2''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au_2\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u_2\|_{L_p((0,1);H)} \end{array} \right\},$$

alors

$$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{c} \|f\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} \\ +\|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} + |\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H \end{array} \right\},$$

on a pour $|\lambda| \longrightarrow \infty$,

$$\|f\|_{L_p((0,1);H)} \leq |\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)},$$

et

$$|\lambda|^{1-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H \leq |\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H,$$

$$|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H \leq |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H,$$

d'où

$$\|u''\|_{L_p((0,1);H)} + \|A^2u\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|\|Au\|_{L_p((0,1);H)} + |\lambda|^2\|u\|_{L_p((0,1);H)}$$

$$\leq Cte \left\{ \begin{array}{c} |\lambda|\|f\|_{L_p((0,1);H)} + \|f_1\|_{(H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}} + \|f_2\|_{(H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}} \\ +|\lambda|^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_H + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}}\|f_2\|_H \end{array} \right\}.$$

En fin ; pour tout $f \in L_p((0,1);H)$, $f_1 \in (H,H(A^2))_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p},p}$ et $f_2 \in (H,H(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$, il existe une unique solution $u \in W_p^2(0,1;H(A^2),H)$ du problème (2.15), qui en plus satisfait l'inégalité de théorème (2.8) pour les λ vérifiant $|\arg\lambda| \leq \dfrac{\pi}{2} - \delta$ et $|\lambda|$ assez grand. ■

Chapitre 3

Applications

Dons ce chapitre, on donne quelques exemples d'applications.

3.1 Application 1.

Considérons dans $L_p(0,1;L^2(0,1))$ le problème aux limites $(P1)$ suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda I\right)^2 u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(x,0) = u(x,1) = 0 = \dfrac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,1)}{\partial y^2}, & 0 < x < 1, \\ \lambda(\alpha_1 u(0,y) + \beta_1 u(1,y)) + \delta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \gamma_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = f_1(y), & 0 < y < 1, \\ \alpha_2 u(0,y) + \beta_2 u(1,y) = f_2(y), & 0 < y < 1, \end{cases}$$

où λ est un paramètre complexe et les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ sont donnée.
On prend l'opérateur A dans $L^2(0,1)$ avec $D(A) = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, et
$(Au)(y) = -u''(y) = -\dfrac{d^2u}{dy^2}(y)$.
Alors, il est bien connu que A est l'opposé du générateur d'un semi-groupe analytique sur $H = L^2(0,1)$ satisfaisant l'hypothèse 1 du théorème (2.8). Par conséquent, si les nombres $\alpha_1, \beta_1, \delta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ sont comme dans les hypothèses 2 et 3 du théorème (2.8), alors pour tout λ avec $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, où $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| \longrightarrow \infty$, le problème précédent admet une

unique solution $u \in W_p^2(0,1;D(A^2),H)$ pourvu que

$f_1 \in (L^2(0,1), H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1))_{1-\frac{1}{p},p}$, $f_2 \in (L^2(0,1), D(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$.

Rappelons que, à partir de [[21],théorème 3.2, p.59], $a \in (H, D(A^2))_{1-\frac{1}{2p},p}$ si et seulement si $a \in D(A)$ et $Aa \in (H, D(A))_{1-\frac{1}{p},p}$.

3.2 Application 2.

Considérons le problème $(P2)$ dégénéré elliptique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \left(y(1-y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda I \right)^2 u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ \lim\limits_{y \to 0,1} y(1-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 = \lim\limits_{y \to 0,1} \left(y(1-y)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x,y), & 0 < x < 1, \\ \lambda(\alpha_1 u(0,y) + \beta_1 u(1,y)) + \delta_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) + \gamma_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = f_1(y), & 0 < y < 1, \\ \alpha_2 u(0,y) + \beta_2 u(1,y) = f_2(y), & 0 < y < 1, \end{cases}$$

Ici on prend $H = H^1(0,1)$, muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(y)\bar{g}(y)dx + \int_0^1 f'(y)\bar{g}'(y)dy$.
Introduisons un opérateur A par $D(A) = \{u \in H^1(0,1); y(1-y)u'' \in H_0^1(0,1)\}$,
$(Au)y = -y(1-y)u''(y)$, où la dérivée u'' est vue au sens des distributions.
Alors, on sait de [12, 13] que $-A$ engendre un semi-groupe analytique dans H, de sorte que le théorème (2.8) s'applique immédiatement. Dans ce cas, l'interprétation des espaces d'interpolation semble compliquée, mais on peut supposer $f_1 \in D(A)$ et $f_2 \in D(A^2)$.

3.3 Application 3.

Considérons dans $L_p(0,1;L^2(0,1))$, le problème $(P3)$ suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + a(y)\dfrac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\left(a(y)\dfrac{\partial^{2m} u(x,y)}{\partial y^{2m}}\right) - 2\lambda a(y)\dfrac{\partial^{2m} u(x,y)}{\partial y^{2m}} & (1) \\ \quad +\lambda^2 u(x,y) = f(x,y), \qquad 0 < x,y < 1, & \\ \dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}(x,0) = 0 = \dfrac{\partial^k u}{\partial y^k}(x,1), \qquad 0 < x < 1, k = 0,...,m-1 & (2) \\ \dfrac{\partial^{k+2m}}{\partial y^{k+2m}}(x,0) = 0 = \dfrac{\partial^{k+2m} u}{\partial y^{k+2m}}(x,1), \qquad 0 < x < 1, k = 0,...,m-1 & (3) \\ \lambda(\alpha_1 u(0,y) + \beta_1 u(1,y)) + \delta_1 \dfrac{\partial u(0,y)}{\partial x} + \gamma_1 \dfrac{\partial u(1,y)}{\partial x} = f_1(y), \qquad 0 < y < 1, & (4) \\ \alpha_2 u(0,y) + \beta_2 u(1,y) = f_2(y) \qquad 0 < y < 1 & \end{cases}$$

où

$$f \in L_p(0,1;L^2(0,1)); f_1 \in (L^2(0,1), H^{2m}(0,1) \cap H_0^m(0,1))_{1-\frac{1}{p},p}$$

$$f_2 \in H^{2m}(0,1) \cap H_0^m(0,1), \frac{d^{2m} f_2}{dy^{2m}} \in (L^2(0,1), H^{2m}(0,1) \cap H_0^m(0,1))_{1-\frac{1}{p},p}.$$

Remarquez, voir encore [[28]. theorem 6,p.45], que le théorème de type Grisvard-Seeley s'applique, de sorte que.

$f_1 \in B_{2p}^{2m(1-\frac{1}{p})}(0,1), f_1^{(j)}(0) = 0 = f_1^{(j)}(1)$

pour tout $j \in \{0,1,...,m-1\}$ tel que $j < 2m(1-\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}$,

$f_2 \in H^{2m}(0,1) \cap H_0^m(0,1),\ \dfrac{d^{2m} f_2}{dy^{2m}} \in B_{2p}^{2m(1-\frac{1}{p})}(0,1),\ f_2^{(2m+j)}(0) = 0 = f_2^{(2m+j)}(1)$

pour tout $j \in \{0,1,...,m-1\}$ tel que $j < 2m(1-\frac{1}{p}) - \frac{1}{2}$.

Maintenant, nous pouvons établir le résultat comme suit :

Théorème 3.1. *Soit m un entier positif et supposons que*

1. *pour $\delta > 0$ on a*

$$\begin{cases} |\arg a(y)| \le \frac{\pi}{2} - \delta & \text{si } m \text{ impair} \\ |\arg A(y)| \ge \frac{\pi}{2} - \delta & \text{si } m \text{ pair} \end{cases}$$

2. $a(y) \in C^{2m}[0,1]; a(y) \neq 0; a(0) = a(1);$

3. $\eta_1 = -\eta_2, \eta_2 \neq 0,$ *avec*

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad et \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 \end{vmatrix}.$$

4. Il existe $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tel que*

- $|\arg(1 + \beta_1 \gamma_1^{-1})| \leq \delta$ *pour* $\gamma_1 \neq 0$.
- $|\arg(1 - \alpha_1 \delta_1^{-1})| \leq \delta$ *pour* $\delta_1 \neq 0$.

5. f, f_1, f_2 *satisfont l'hypothèse (4).*

Alors, pour tout λ *tel que* $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ *et* $|\lambda|$ *assez grand, le problème* $(P3)$ *admet une unique solution* u *tels que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D_x^2 u \in L^p(0,1;L^2(0,1)), \quad \frac{\partial^{4m} u}{\partial y^{4m}} = D_y^{4m} u \in L^p(0,1;L^2(0,1)).$$

De plus, la coercivité suivante une égalité avec défaut est valable

$$\|D_x^2 u\|_{L_p(0,1;L^2(0,1))} + |\lambda| \|D_y^{2m} u\|_{L^p(0,1;L^2(0,1))} + \|D_y^{4m} u\|_{L^p(0,1;L^2(0,1))} + |\lambda|^2 \|u\|_{L^p(0,1;L^p(0,1))}$$
$$\leq C \left\{ \begin{array}{c} |\lambda| \|f\|_{L^p(0,1;L^2(0,1))} + \|f_1\|_{B_{2,p}^{2m(1-\frac{1}{p})}(0,1)} + |\lambda|^{2-\frac{1}{p}} \|f_1\|_{L^2(0,1)} + |\lambda|^{3-\frac{1}{p}} \|f_2\|_{L^2(0,1)} \\ + \|f_2\|_{H^{2m}(0,1)} + \|D_y^{2m} f_2\|_{B_{2,p}^{2m(1-\frac{1}{p})}(0,1)} \end{array} \right\}.$$

Démonstration. On définit dans $L^2(0,1)$ l'opérateur suivant

$A = -a(y) D_y^{2m} = -a(y) \dfrac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}$ avec $D(A) = H^{2m}(0,1) \cap H_0^m(0,1)$.

et $D(A^2)$ est donné par

$$D(A^2) = \left\{ \begin{array}{c} u \in H^{4m}(0,1) \cap H_0^m(0,1) \text{ tel que } D_y^{2m+k} u(0) = 0 = D_y^{2m=k} u(1) \\ \text{pour } k = 0, ..., m-1 \end{array} \right\},$$

alors, le problème $(P3)$ peuvent être réécrits sous la forme (2.15). D'après [26], [[28], théorème 1.p 111], en prenant $H = L^2(0,1)$, l'opérateur A satisfait toutes les conditions du théorème (2.8). ∎

Bibliographie

[1] **S. Agmon, L. Nirenberg,** Properties of Solutions of Ordinary Differential Equation in Banach Spaces, Comm. Pure Appl. Math., 121-239, 16 (1963).

[2] **M. S. Agranovich, M. L. Visik,** Elliptic Problems with a Parameter and Parabolic Problems of General Type, Russian Math. Surveys, 53-161, 19 (1964).

[3] **A. Aibeche,** Coerciveness Estimates for a Class of Elliptic Problems, Diff. Equ. Dynam. Syst., 341-351, 4 (1993).

[4] **A. Aibeche,** Completeness of Generalized Eigenvectors for a Class of Elliptic Problems, Result. Math., 1-8, 31 (1998).

[5] **A. Aibeche, A. Favini, CH. Mezoued,** Deficient Coerciveness Estimate for an Abstract Differential Equation with a Parameter Dependent Boundary Conditions, Vol 10-B, Issue 3, 535-547, (2007).

[6] **W. Benhamada, H. Bouach,** Une Classe de Problème aux Limites pour une Équation Différentielle Abstraite, Mémoire de master, Université de Jijel, (2016).

[7] **PL. Butzer, H. Berens,** Semi-Groups of Operators and Approximation, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, (1967).

[8] **F. Cobos, D. L. Fernandez,** On Interpolation of Compact Operators, Ark. Mat., 211-217, 27 (1989).

[9] **M. Denche,** Abstract Differential Equation with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Result. Math., 217-227, 35 (1999).

[10] **N. Dunford, J. T. Schwartz,** Linear Operators. Part 1 : General Theory, Interscience Publishers, New York, (1958).

[11] **N. Dunford, J. T. Schwartz,** Linear Operators, Vol.II, Interscience, New York (1963).

[12] **A. Favini, J. A. Goldstein, S. Romanelli,** An Analytic Semigroup Associated to a Degenerate Evolution Equation, in Stochastic Processes and Functional Analysis, J.A. Goldstein, N.E. Gretsky and J.J. UhlJr.eds, Marcel Dekker, New York, 88-100, (1997).

[13] **A. Favini, A. Yagi,** Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, Marcel Dekker, New York (1999).

[14] **T. Kato,** Perturbation Theory for Linear Operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1966).

[15] **S. G. Krein,** Linear Differential Equations in Banach Spaces, American Mathematical Society, Providence (1971).

[16] **R. Kress,** Linear Integral Equation, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, (1999).

[17] **L. Lassoued,** Espace Vectoriels Normés pour le Calcul Différentiel, Ellipses, Paris, (2022).

[18] **J. L. Lions,** Sur les Espaces D'interpolation ; Dualité, Math. Scand., 147-177, 9 (1961).

[19] **J. L. Lions, E. Magenes,** Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1972).

[20] **J. L. Lions, E. Magenes,** Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. I, Dunod, Paris (1968).

[21] **J. L. Lions, J. Peetre,** Sur une Classe D'espaces D'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 5-68, 19 (1964).

[22] **Y. Naas,** Résolution D'équations Différentielles Elliptiques du Second Ordre dans des Espaces D'interpolation, Thèse de Doctorant, Université Oran 1 (Algérie), 2020.

[23] **A. Pazy,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-verlag, New York, (1983).

[24] **H. Triebel,** Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators, North Holland, Amsterdam (1978).

[25] **S. Y. Yakubov,** Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific and Technical, New York, (1994).

[26] **S. Y. Yakubov,** Linear Differential Equations and Applications, Baku, elm (1985).

[27] **S. Y. Yakubov,** Noncoercive Boundary Value Problems for the Laplace Equation with a Spectral Parameter, Semigroup Forum, 53, 298-316, (1996).

[28] **S. Y. Yakubov, Y. Y. Yakubov,** Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman and Hall/CRC Press, New York, (2000).