République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : EDP et Applications.

Thème

Existence et unicité de solution pour un problème elliptique non linéaire

Présenté par

Boumeshal Ahlam

Devant le jury composé de :

Président	:	Chikouche Wided	Professeur	Université de Jijel
Encadreur	:	Boufenouche Razika	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Examinateur	:	Zerroug Hassina	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

⁎Dédicaces⁎

Je dédie ce modeste travail spécialement :

A mes très chers parents

A mon mari

A ma sœur et mes frères

A toute la famille Boumeshal et Labiod

A toutes mes amis

A tous mes camarades de promotion.

⁎AHLAM⁎

⁎Remerciements⁎

Tout d'abord, je remercie **ALLAH**, le tout puissant, qui m'a donné la santé, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Madame **Boufenouche Razika**, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ces conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. Madame **Chikouche Wided**, qui me fait l'honneur de présider ce jury.Madame **Zerroug Hassina**, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	Espace euclidien de dimension N.
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.
$\overline{\Omega}$	La fermeture de Ω.
u	Fonction mesurable définie de Ω dans $\mathbb{R}$.
∇u	Gradient de u, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^N$.
Δu	Laplacien de u, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right)$.
p.p.	Presque partout.
i.e.	C'est-à-dire.
$mes(\Omega)$	Mesure de Lebesgue de Ω.
$u_n \to u$	Convergence forte de u_n vers u.
$\langle ., . \rangle$	Le produit dualité.
d	Degré topologique de Leray-Shauder.
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int\limits_\Omega \lvert u(x) \rvert^p dx < \infty\}$.
$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.
$H_0^1(\Omega)$	L'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$\lVert u \rVert_{H_0^1(\Omega)}$	$= \lVert \nabla u \rVert_{L^2(\Omega)^N} = \left(\int\limits_\Omega \lvert \nabla u(x) \rvert^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
$H^{-1}(\Omega)$	Dual de $H_0^1(\Omega)$.
Id	Opérateur identité.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) sont un outil classique pour étudier de nombreux phénomènes dans les domaines de la physique, la biologie et de la mécanique, en particulier la mécanique des fluides, la mécanique des milieux continus.
Aujourd'hui, l'application de ce puissant outil a été étendue à l'étude de modèles en finances, en technologie, et à bien d'autres domaines.
Ces équations sont définies comme une relation entre une fonction et ses dérivées partielles, sont divisées en trois types : hyperbolique, parabolique et elliptique, elles sont également classées selon leur linéarité dans les équations aux dérivées partiales linéaires, quasi linéaires et non linéaires.
Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'étude d'une équation aux dérivées partielles elliptique non linéaire, en utilisant les techniques du degré topologique, qui est un outil très puissant pour la résolution de certaines problèmes aux limites non linéaires.
La notion du degré à été introduite par Kronecker en 1869 pour les applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Poincaré, Böhl et Hadamard l'ont ensuite développé au début des années 1990, puis étendu au cas des fonctions continues, Luitzen Egbertus et Jan Brouwer l'ont généralisé pour les applications continues entre variétés compactes dans des espaces de dimension finie .
La théorie analytique du degré de Brower pour les applications de classe C^0 a été développée par Nagumo et Heinz, le degré de Leray Schauder qui conserve toute les propriétés de base du degré de Brower (normalisation, additivité et invariance par homotopie), c'est ce que nous utiliserons dans l'étude de l'existence et l'unicité du problème elliptique non

linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où : $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien.
$u = 0$: exprime la condition aux limites de Dirichlet sur la frontière Γ de Ω.

f : la densité des forces volumiques.

Ce mémoire contient deux chapitres principales comme le suivant :

- Le premier chapitre est un rappel d'analyse fonctionnelle, notamment Espace de Sobolev et quelques propriétés basé sur les espaces $L^p(\Omega)$ et les applications traces. On termine ce chapitre par quelques définitions dont nous avons besoin dans la suite.
- Le deuxième chapitre consiste à l'étude de l'existence et l'unicité de solution de notre problème. Dans ce chapitre, on va présenter un problème elliptique non linéaire gouverné par le Laplacien, pour cela commençons par établir la formulation variationnelle de ce problème. Ensuite, nous étudions l'existence de solution par les techniques du degré topologique de Leray Schauder. On termine ce chapitre par la démonstration de l'unicité de la solution sous des conditions que nous allons supposer.

On finira ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Espaces de Sobolev

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés des espaces de Sobolev dont nous avons besoin dans toute la suite de ce travail.

1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue.

Définition 1.1.1. *On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Définition 1.1.2. *[2] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$, on pose*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.3. *[2] On pose*

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ *mesurable et il existe une constante* C *telle que* $|f(x)| \leq C$ *p.p. sur* $\Omega\}$,

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \ \ p.p. \ sur \ \Omega\}.$$

Théorème 1.1.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient* f *et* g *deux fonctions respectivement dans* $L^p(\Omega), L^q(\Omega)$, *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Alors, le produit* fg *est dans* $L^1(\Omega)$ *et l'on a*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier où $p = q = 2$, *on obtient "l'égalité de Cauchy-Schwarz"*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Propriétés 1.1.5. *[2] Pour* $1 \leq p \leq \infty$.

- $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach c'est à dire un espace vectoriel normé complet.*
- *Lorsque* $p = 2$, $L^p(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*
- *Si* Ω *est un ouvert borné, alors*

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

  pour $1 \leq q \leq p \leq \infty$.
- *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, *alors pour tout* p *tel que* $1 < p < \infty$, *l'espace des fonctions test* $D(\Omega)$ *défini par :*

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega), \ \ il \ existe \ K \ \ un \ compact \ \ \subset \Omega, u \in D_K(\Omega)\},$$

  où

$$D_K(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) / supp(u) \subset K\},$$

  est dense dans $L^p(\Omega)$.
- $L^p(\Omega)$ *est séparable si* $1 \leq p < \infty$.

— *L'espace des fonctions continues $C_0(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < \infty$.*

— *Dual : Pour tout réel p dans $]1, +\infty[$, le dual de $L^p(\Omega)$ est isomorphe algébriquement à $L^q(\Omega)$, avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, l'application de dualité est définie par*

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \int_\Omega u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.6 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient $p \in [1, +\infty]$, alors pour deux fonctions mesurables f et g de $L^p(\Omega)$ on a :*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier, pour $f, g \in L^p(\Omega)$, on a $f + g \in L^p(\Omega)$.

Théorème 1.1.7 (de convergence dominée de Lebesgue)**.** *[2] Soit (f_n) une suite de fonction de $L^1(\Omega)$, on suppose que*

a) *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.*

b) *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour chaque n*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ p.p sur } \Omega.$$

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Théorème 1.1.8. *[2] Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. Alors il existe une sous-suite f_{n_k} telle que*

a) *$f_{n_k} \longrightarrow f(x)$ p.p. sur Ω.*

b) *$|f_{n_k}| \leq h(x), \forall k$ et p.p. sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.*

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.1. *[6] Soit* p *un élément de* $[1, +\infty]$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*, on appelle espace de Sobolev d'ordre 1, et on note* $W^{1,p}(\Omega)$ *l'ensemble*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)\}.$$

Théorème 1.2.2. *[?] Pour tout* $p \in [1, +\infty]$*, pour tout* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$*, on a les propriétés suivantes :*

1. *L'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$u \mapsto \|u\| = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, \infty[, \\ \max \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right), 1 \leq i \leq n & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

2. *Pour* $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u, v) \mapsto (u, v) = \int_\Omega u\bar{v}dx + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx.$$

3. *Pour* $1 < p < +\infty$*, l'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

4. *Pour* $1 \leq p < +\infty$*, l'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est séparable.*

1.3 Traces et formule de Green

Définition 1.3.1. *Soit* Ω *un ouvert borné lipschitzien, ou bien*

$$\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_n > 0\},$$

on définit l'application trace

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\overline{\Omega}) \cap C(\partial\overline{\Omega})$$
$$v \longmapsto \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}.$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$ *notée* γ_0*, en particulier il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega).$$

Remarque 1.3.2. *Grâce au théorème de trace, on peut donc parler de la valeur d'une fonction de* $H^1(\Omega)$ *sur le bord* $\partial\Omega$*. On note* $H_0^1(\Omega)$ *l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans l'espace* $H^1(\Omega)$ *i.e.*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{D(\Omega)} = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \, sur \, \partial\Omega\}.$$

et $H^{-1}(\Omega)$ *sont dual.*

Théorème 1.3.3 (Formule de Green)**.** *Soient* p *et* q *deux réels vérifiant* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* Ω *un ouvert borné lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$*, de bord* $\partial\Omega = \Gamma$*, alors on a la formule suivante dite la formule de Green*

$$\forall (u,v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) : \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx = \int_\Gamma uvn_i ds,$$

où n_i *est la* i^{me} *composante du vecteur unitaire de la normale* n *à* $\partial\Omega$ *sortant de* Ω*.*

Corollaire 1.3.4. *Pour tout* $u \in H^2(\Omega)$*,* $v \in H^1(\Omega)$ *on a :*

$$\int_\Omega \Delta u v dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Théorème 1.3.5 (Inégalité de Poincaré)**.** *[2]*

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *dans au moins une direction, alors il existe une constante*

$C(\Omega) > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(\Omega)\left(\sum_{j=1}^{n}\|\partial_j u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C(\Omega)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

où $\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1,n}$.

1.4 Opérateurs compacts

Définition 1.4.1. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique X est relativement compacte dans X si A est contenue dans une partie compacte de X.*

Définition 1.4.2. *Soient X et Y deux espaces de Banach, on note B_X la boule unité fermée de X.*
On dit qu'un opérateur A linéaire continu i.e. $A \in \mathcal{L}(X)$ est compact si $A(B_X)$ est un ensemble relativement compact pour la topologie forte de Y.

1.5 Injections continues et compactes de Sobolev

Théorème 1.5.1. *Soit $1 \leq p < N$, alors*
$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, *où p^* est donné par* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ *et il existe une constante*
$C = C(p, N)$ *telle que*

$$\|u\|_{\mathbb{R}^N} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbb{R}^N}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Corollaire 1.5.2. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a*

— *Si* $\forall 1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

— *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, \infty[$.

— *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.

avec injections continues.

Théorème 1.5.3 (Rellich-kondrachov). *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *variété lipschitzienne, alors l'injection*

$$Id : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

est compacte, et on dit que $H_0^1(\Omega)$ *s'injecte de façon compacte dans* $L^2(\Omega)$.

1.6 Définitions

Définition 1.6.1. *Soit* $(V, \|\cdot\|_V)$ *un espace de Banach, on dit que l'opérateur* A *défini de* V *dans* V' *(dual de* V*) est*

1. *borné s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|A(u)\|_{V'} \leq C\|u\|_V, \forall u \in V,$$

2. *coercif s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$(A(u), u) \geq \alpha\|u\|_V^2, \forall u \in V,$$

ou bien

$$\frac{(A(u), u)}{\|u\|_V} \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_V \to +\infty.$$

Définition 1.6.2. *Soit* A *une application d'un espace vectoriel normé* X *dans un espace vectoriel normé* Y, A *est dite bornée si l'image par* A *de tout borné de* X *est un borné de* Y.

Théorème 1.6.3 (Lax-Milgram). *Soit* H *un espace de Hilbert sur* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$), $a(u, v)$ *une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout* $\varphi \in H'$ *il existe* $u \in H$ *unique* *tel que*

$$a(u,v) =< \varphi, v >, \ \forall v \in H.$$

Chapitre 2

Existence et unicité de solution

L'objectif principal de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution du problème variationnelle de notre problème par les techniques de compacité appelé le degré topologique de Leray Schauder en dimension infinie.

2.1 Existence de solution du problème

Dans cette section, nous donnons la formulation variationnelle de notre problème avec quelques propriétés de l'opérateur qui nous aides à prouver l'existence de la solution.

2.1.1 Notations et position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, à frontière lipschitzienne $\Gamma = \partial\Omega$.
Étant donné f, on cherche une fonction u solution du problème elliptique non linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f(x, u(x)) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

où : $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ est le Laplacien de u.
$u = 0$: exprime la condition aux limites de Dirichlet sur la frontière.

f : une fonction dépendante de u qui exprime la densité des forces volumiques.

2.1.2 Formulation variationnelle

On travaille dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et supposons que $u \in H^2(\Omega)$.

Multipliant la première équation du problème (P) par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$, et on intègre sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \left(-\Delta u(x)v(x) + u(x)v(x)\right) dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx.$$

Utilisant la formule de Green, il suit

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx - \int_\Gamma \nabla u(x) \cdot v(x) \cdot nds + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx.$$

Grâce au conditions aux limites et le fait que $v \in H_0^1(\Omega)$, on trouve

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx.$$

Donc la formulation variationnelle du problème (P) est comme suit

$$(PV)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Soit T l'opérateur défini de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par

$$T(u) = -\Delta u + Id(u) = -\Delta u + u. \tag{2.1}$$

2.1.3 Quelques propriétés de l'opérateur T

Lemme 2.1.1. *L'opérateur T défini de $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ par (2.1) est borné.*

Démonstration. Par définition

$$\|Tu\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} \left| \langle Tu, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right|.$$

$$\begin{aligned}
\left| \langle Tu, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| = \left| \langle -\Delta u + u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| &= \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x) v(x) dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| \, dx + \int_\Omega |u(x) v(x)| \, dx.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\left| \langle Tu, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

et d'après l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
\left| \langle Tu, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C(\Omega) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \max(1, C(\Omega)) \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \\
\sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} \left| \langle Tu, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right| &\leq \max(1, C(\Omega)) \|u\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

donc T est borné. ∎

Lemme 2.1.2. *L'opérateur T défini de $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ par (2.1) est continu.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$, donc d'après la continuité du gradient

$$\langle Tu_n, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega u_n(x)v(x)dx,$$

converge vers

$$\langle Tu, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

ce qui donne la continuité de T. ■

Lemme 2.1.3. *L'opérateur T défini de $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ par* (2.1) *est coercif.*

Démonstration. On veut montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$\langle Tu, u\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned}\langle Tu, u\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u(x)^2dx + \int_\Omega u(x)^2dx \\ &\geq \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

ce qui montre que T est coercif, de constante de coercivité $\alpha = 1$. ■

2.1.4 Degré topologique

Avant de donner le théorème d'existence, on a besoin de parler un peu du degré topologique.

Le degré topologique est un outil qui permet d'assurer qu'une équation de la forme $f(x) = y$ ait au moins une solution dans l'espace où l'on travaille.

Il y a deux types de degré, le degré topologique de Brower en dimension finie concernant les applications continues, mais en dimension infinie, on ne peut pas toujours définir le degré pour toutes les applications continues d'un Banach dans lui même, il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence selon la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique, le degré que nous allons utiliser dans ce travail est appelé le degré topologique de Leray-Schauder qui nous permet parfois d'obtenir le théorème d'existence de solution recherché (voir par exemple [3], [4], [5]).

Définition 2.1.4. *Soit E un espace de Banach (réel), B une partie de E et f une application de B dans E. On dit que f est compacte si f vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *f est continue.*
2. *$\{f(x), x \in C\}$ est relativement compacte dans E pour toute partie C bornée de B.*

Dans la suite, nous donnons quelques définitions et théorèmes nécessaires pour continuer.

Définition 2.1.5 (Homotopie)**.** *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues.*
On dit que f est homotope à g s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ telle que

$$\forall x \in X, h(x,0) = f(x) \text{ et } h(x,1) = g(x).$$

On dit alors que h est une homotopie de f à g.

Remarque 2.1.6. *L'homotopie est une déformation continue des applications.*

Définition 2.1.7. *Soit E un espace de Banach (réel), on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets $(Id - f, \Omega, y)$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, f est une application compacte de $\overline{\Omega}$ dans E (ce qui est équivalent à dire que f est continue et $\{f(x), x \in \overline{\Omega}\}$ est une partie relativement compacte dans E) et $y \in E$ telle que $y \notin \{x - f(x), x \in \partial\Omega\}$.*

Théorème 2.1.8 (Leray-Schauder 1934)**.** *Soit E un espace de Banach (réel), et $\mathcal{A}$ donné par la Définition 2.1.7.*

Il existe alors une application d de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{Z}$, appelée degré topologique vérifiant les trois conditions suivantes :

i) Normalisation : $d(Id, \Omega, y) = 1$ *si* $y \in \Omega$.

ii) Additivité : Si Ω_1 *et* Ω_2 *sont des ouverts disjoints inclus dans* Ω *tels que*

$$y \notin \{x - f(x), x \in \overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)\},$$

on a

$$d\big(Id - f, \Omega, y\big) = d\big(Id - f, \Omega_1, y\big) + d\big(Id - f, \Omega_2, y\big).$$

iii) Invariance par homotopie : Si h *est une application compacte de* $[0,1] \times \overline{\Omega}$ *dans* E *(ce qui est équivalent à dire que* h *est continue et* $\{h(t,x), t \in [0,1], x \in \overline{\Omega}\}$ *est une partie relativement compacte de* E*),* $y \in C([0,1], E), y(t) \notin \{x - h(t,x), x \in \partial\Omega\}$ *pour tout* $t \in [0,1]$*, alors on a*

$$d\big(Id - h(t,\cdot), \Omega, y(t)\big) = d\big(Id - h(0,\cdot), \Omega, y(0)\big) = d\big(Id - h(1,\cdot), \Omega, y(1)\big), \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

L'une des propriétés du degré topologique de Leray Schauder est $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ implique qu'il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.

Définition 2.1.9 (Fonction de Carathéodory)**.** *[?] Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*, une fonction* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite une fonction de Carathéodory si elle vérifie*

(i) L'application : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to f(x,t)$ *est continue pour presque tout* $x \in \Omega$.

(ii) L'application : $\Omega \to \mathbb{R}, x \to f(x,t)$ *est mesurable pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

On définit alors l'application F *qui à* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *associe*

$$F(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F\big(u(x)\big) = f(x, u(x)).$$

Proposition 2.1.10. *[6] Soit* f *une fonction de Carathéodory, alors* F *applique l'ensemble* *des fonctions numériques mesurables sur Ω dans lui-même.*

Théorème 2.1.11. *[6] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, F une application continue de $L^1(\Omega)$ dans lui-même, associée à la fonction de Carathéodory f, alors on a*

$$\exists a \in L^1(\Omega), \exists \eta > 0 \Longrightarrow |f(x,t)| \leq a(x) + \eta|t| \ p.p. \ \ x \in \Omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.1.5 Théorème d'existence

On reprend la formulation variationnelle du problème (P)

$$(PV) \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx = \int\limits_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On impose les hypothèses suivantes

$(\mathcal{H}_1)$: f est une fonction de Carathéodory, et il existe $C_2 \geq 0$ et $d \in L^2(\Omega)$ tel que

$$|f(x,s)| \leq d(x) + C_2|s| \ \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et } \forall t \in [0,1].$$

$(\mathcal{H}_2)$: $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0.$

Théorème 2.1.12. *Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$, il existe une solution du problème (PV).*

Démonstration. D'abord on réécrit le problème (PV) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx = \langle F(u), v \rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

tel que

$$\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x.u(x))v(x)dx.$$

$F(u)$ est un élément de $H^{-1}(\Omega)$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$. En effet

1. F est borné :

$$\|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} \left|\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right|.$$

$$\begin{aligned}
\left|\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| &= \left|\int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx\right| \\
&\leq \int_\Omega |f(x, u(x))|\,|v(x)|\,dx \\
&\leq \int_\Omega (d(x) + C_2|u(x)|)\,|v(x)|\,dx \\
&= \int_\Omega d(x)|v(x)|dx + \int_\Omega C_2|u(x)||v(x)|dx.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\left|\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| \leq \|d\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}
\left|\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| &\leq C(\Omega)\|d\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C(\Omega)^2C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} \left|\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| &\leq \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|\leq 1}} C(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\right)\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Soit B un borné de $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\exists R > 0, \forall u \in B : \|u\| \leq R,$$

ceci implique que

$$\|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2R\right), \forall u \in B. \tag{2.2}$$

Ainsi l'image de B par F est bornée dans $H^{-1}(\Omega)$.

2. Montrons à présent que F est continue.

   On a

$$F : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$
$$u \mapsto F(u).$$

F est continue si : Pour $(u_n)_n$ une suite de $L^2(\Omega)$ converge vers u, alors

$$F(u_n) \to F(u) \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ i.e. } \|F(u_n) - F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Soit $u, u_1 \in L^2(\Omega)$, on a pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\langle F(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx,$$
$$\langle F(u_1), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x, u_1(x))v(x)dx.$$

Donc

$$\|F(u) - F(u_1)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \left|\langle F(u) - F(u_1), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right|.$$

$$\left|\langle F(u) - F(u_1), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| = \left|\int_\Omega \left(f(x, u(x)) - f(x, u_1(x))\right) v(x)dx\right|.$$

Donc, si $(u_n)_n$ une suite de $L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u_1$ dans $L^2(\Omega)$, on a

$$\|F(u_n) - F(u_1)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|=1}} \int_\Omega |f(x, u_n(x)) - f(x, u_1(x))v(x)dx|.$$

Il existe une sous suite $(u_n)_n$ telle que $u_n(x) \to u_1(x)$ p.p. dans Ω et il existe une constante $K \in L^2(\Omega)$ tel que

$$|u_n(x)| \leq K(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

D'après la continuité de f

$$f(x.u_n(x)) \to f(x, u_1(x)) \text{ dans } \Omega,$$

et l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ nous donne

$$\begin{aligned} |f(x, u_n(x))| &\leq d(x) + C_2 \, |u_n(x)| \\ &\leq d(x) + C_2 K \text{ p.p. dans } \Omega \ . \end{aligned}$$

Posons $g(x) = d(x) + C_2 K$ et montrons que $g \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int\limits_\Omega |d(x) + C_2 K|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|d(x) + C_2 K\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \|d(x)\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|K\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq Cte + C_2\left(\int_\Omega |K|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq Cte + C_2K(mes(\Omega))\\ &\leq cte,\end{aligned}$$

donc $g \in L^2(\Omega)$. Vu le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\|F(u_n) - F(u_1)\|_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty,$$

ce qui donne la continuité de F .

Pour $S \in H^{-1}(\Omega)$, le problème linéaire

$$\begin{cases}\text{Trouver } \omega \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,}\\ \int_\Omega \nabla\omega(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega \omega(x)v(x)dx = \langle S, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},\end{cases} \tag{2.3}$$

admet une solution unique d'après le théorème de Lax-Milgram (voir par exemple [6]). Notons par B_u l'opérateur qui pour S dans $H^{-1}(\Omega)$ associe ω solution de (2.3) . L'opérateur B_u est linéaire continue de $H^{-1}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et comme $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que B_u est compact de $H^{-1}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Donc la résolution du problème (PV) est équivalent à trouver un point fixe du problème

$$u = B_u(F(u)),$$

pour cela on va utiliser les techniques du degré topologique de Leray-Schauder utilisées dans l'article de Zoubai et Merouani [7] avec des modifications dont nous avons besoin dans notre problème i.e. nous allons montrer que le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(\Omega) \text{ tel que,} \\ u = B_u(F(u)), \end{cases}$$

admet une solution.

D'abord on va construire pour tout $t \in [0,1]$, une application dite homotopie notée h définie par

$$h : [0,1] \times L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$(t,u) \longmapsto h(t,u) = B_u(tF(u)).$$

Pour $R > 0$, posons

$$B_R = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|u\|_{L^2(\Omega)} < R\},$$

et on doit vérifier les trois conditions suivantes :

1. $\exists R > 0$ tel que $(u - h(t,u) = 0, t \in [0,1], u \in L^2(\Omega)) \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R$.
2. h est continue de $[0,1] \times \overline{B}_R$ dans $\overline{B}_R$.
3. $\{h(t,u), t \in [0,1], u \in \overline{B}_R\}$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$.

Notons que, si on suppose que nous avons montré $(1), (2), (3)$, on assure que l'équation $u - h(t,u) = 0$ n'admet pas une solution sur la frontière de la boule B_R, donc le degré $d(Id - h(t,.), B_R, 0)$ est bien défini et on a

$$d(Id - h(t,.), B_R, 0) = d(Id - h(0,.), B_R, 0) = d(Id, B_R, 0) = 1.$$

D'après les propriétés de d, on en déduit l'existence de $u \in B_R$ telle que

$$u - h(1,u) = 0 \Leftrightarrow u = B_u(f(u)).$$

Donc u est solution de (PV).

a) Commençons premièrement par prouver la condition (3).

Pour $R > 0$, supposons $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R$.

On a

$$F(u) \in H^{-1}(\Omega) \text{ et } < F(u), v >_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx.$$

D'après (2.2)

$$\|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2R\right),$$

donc

$$\begin{aligned} t\|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq tC(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2R\right) \\ &\leq C(\Omega)\left(\|d\|_{L^2(\Omega)} + C(\Omega)C_2R\right) = R_1, \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Posons $h(t,u) = B_u(tF(u)) = \omega$ et montrons qu'il existe R_2 dépendant seulement de R, C_2 et α tel que

$$\|h(t,u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R_2 \Leftrightarrow \|\omega\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R_2.$$

Par définition, ω est solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\omega(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega \omega(x)v(x)dx = \langle tF(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

On prend $v = \omega$ dans (2.4), on trouve

$$\int_\Omega |\nabla\omega(x)|^2dx + \int_\Omega \omega(x)^2dx = < tF(u), \omega >_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\|\omega\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\omega\|^2_{L^2(\Omega)} &=< tF(u), \omega >_{H^{-1}(\Omega)\times H^1_0(\Omega)}\\ &\leq \|tF(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)}\\ &\leq \|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\frac{1}{C(\Omega)^2}\|\omega\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|\omega\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)},$$

ce qui implique

$$\left(1 + \frac{1}{C(\Omega)^2}\right)\|\omega\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)},$$

d'où

$$\left(1 + \frac{1}{C(\Omega)^2}\right)\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \|F(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = R_1,$$

ce qui donne

$$\|\omega\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{R_1}{1 + \frac{1}{C(\Omega)^2}}.$$

D'après le théorème de Rellich (Théorème 1.5.3), on en déduit que l'ensemble $\{h(t,u), t \in [0,1], u \in \overline{B}_R\}$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre (3).

b) Montrons à présent que h est continue de $[0,1] \times \overline{B}_R$ dans $\overline{B}_R$:

Soit $(t_n)_n$ une suite de $[0,1]$ qui converge vers t quand $n \longrightarrow +\infty$ et $(u_n)_n$ une suite de $L^2(\Omega)$ qui converge vers u quand $n \longrightarrow +\infty$, et on va montrer que

$$h(t_n, u_n) \longrightarrow h(t,u) \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Posons $h(t_n, u_n) = \omega_n$ et $h(t, u) = \omega$, ça veut dire on montre que $\omega_n \longrightarrow \omega$ dans $L^2(\Omega)$.

On prend le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_n \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla\omega_n(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int\limits_\Omega \omega_n(x)v(x)dx = t_n \int\limits_\Omega f(x, u_n(x))v(x)dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

et on montre que ce problème tend vers le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla\omega(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int\limits_\Omega \omega(x)v(x)dx = t \int\limits_\Omega f(x, u(x))v(x)dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.6}$$

quand $n \to +\infty$.

On a la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $\omega_n = h(t_n, u_n)$ donc ω_n est bornée dans $L^2(\Omega)$, et par conséquent on peut extraire une sous suite notée aussi $(\omega_n)_n$ telle que ω_n converge faiblement vers ω_1 dans $H_0^1(\Omega)$ et $\omega_n \longrightarrow \omega_1$ dans $L^2(\Omega)$, puisque

$$\omega_n \longrightarrow \omega_1 \text{ p.p. dans } L^2(\Omega) \text{ et il existe } H \in L^2(\Omega) \text{ tel que}$$

$$|\omega_n(x)| \leq H(x), \forall n \text{ p.p. sur } \Omega \tag{2.7}$$

et

$$\nabla\omega_n \longrightarrow \nabla\omega_1, \text{ et il existe } H_1 \in L^2(\Omega) \text{ telle que } \|\nabla\omega_n\| \leq H_1. \tag{2.8}$$

$$u_n \longrightarrow u \text{ p.p. et il existe } L \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq L \text{ p.p.} \tag{2.9}$$

D'une part grâce à la continuité de l'opérateur ∇

$$\lim_{n\to+\infty}(\nabla\omega_n(x)\cdot\nabla v(x)+\omega_n(x)v(x))=\nabla\omega_1(x)\cdot\nabla v(x)dx+\omega_1(x)v(x).$$

Et d'autre part

$$|\nabla\omega_n(x)\cdot\nabla v(x)+\omega_n(x)v(x)|\leq|\nabla\omega_n(x)\cdot\nabla v(x)|+|\omega_n(x)v(x)|.$$

Posons $g_1=|\nabla\omega_n(x)v(x)|+|\omega_n v(x)|$ et montrons que $g_1\in L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_1(x)dx&=\int_\Omega|\nabla\omega_n(x)v(x)|+|\omega_n(x)v(x)|dx\\&=\int_\Omega|\nabla\omega_n(x)v(x)|dx+\int_\Omega|\omega_n(x)v(x)|dx,\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les relations (2.7), (2.8)

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_1(x)dx&\leq\|\nabla\omega_n\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+\|\omega_n\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\\&\leq cte,\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Les conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant vérifiées, on en déduit que

$$\int_\Omega\nabla\omega_n(x)\cdot\nabla v(x)dx+\int_\Omega\omega_n(x)v(x)dx\longrightarrow\int_\Omega\nabla\omega(x)\cdot\nabla v(x)dx+\int_\Omega\omega(x)v(x)dx,\ \text{quand } n\to+\infty.$$

Montrons maintenant que

$$\int_\Omega f(x,u_n(x))v(x)dx\longrightarrow\int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx\ \text{ quand } n\longrightarrow+\infty.$$

f est continue, donc

$$f(x, u_n(x))v(x) \longrightarrow f(x, u(x))v(x).$$

De plus d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x, u_n)v(x)|dx &\leq \int_\Omega |(d(x) + C_2|u_n(x)|)v(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega |d(x)v(x) + C_2 L(x)v(x)|dx \\
&\leq \int_\Omega |d(x)v(x)| + \int_\Omega |C_2 L(x)v(x)|dx \\
&\leq \|d\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + C_2\|L\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&= cte.
\end{aligned}$$

Appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue une deuxième fois, on aura

$$\int_\Omega f(x, u_n(x))v(x)dx \longrightarrow \int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx,\ n \longrightarrow +\infty.$$

Par passage à la limite dans (2.5), on obtient

$$\int_\Omega \nabla\omega(x) \cdot \nabla v(x)dx + \int_\Omega \omega(x)v(x)dx = t\int_\Omega f(x, u(x))v(x)dx,$$

ce qui montre la continuité de l'application h.

c) Reste à montrer (1) i.e. l'existence de $R > 0$ telle que

$$\big(u - h(t, u) = 0, t \in [0, 1], u \in L^2(\Omega)\big) \Rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R.$$

Soit $t \in [0,1], u = h(t,u) = B_u\left(tF(u)\right)$, ça veut dire que

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx = t \int\limits_\Omega f(x,u(x))v(x)dx, \\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.10}$$

On prend $v = u$ dans (2.10), on aura

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \int\limits_\Omega \nabla u(x)^2 dx + \int\limits_\Omega u(x)^2 dx = t \int\limits_\Omega f(x,u(x))u(x)dx. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int\limits_\Omega f\left(x,u(x)\right)u(x)dx \leq \int\limits_\Omega \left|f\left(x,u(x)\right)u(x)\right| dx.$$

Dans ce qui suit, on va utiliser cette dernière inégalité pour montrer l'existence d'un $R > 0$ tel que $\|u\|_{L^2(\Omega)} < R$, à l'aide de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ i.e.

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(x,s)}{s} = 0.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons que R n'existe pas et qu'il existe une suite $(u_n)_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \geq n \text{ et } \alpha\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int\limits_\Omega |f\left(x,u_n(x)\right)u_n(x)|dx,$$

ceci est impossible. En effet :

Posons $(v_n)_n$ une suite telle que

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}, \tag{2.12}$$

on a alors $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, et

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega |f(x, u_n(x))\, v_n|\, \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} dx \\
&\leq \int_\Omega |f(x, u_n(x))\, v_n| \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \int_\Omega \frac{|f(x, u_n(x))\, v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} dx.$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$

$$|f(x,s)| \leq d(x) + C_2|s|,$$

donc

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega \frac{|(d(x) + C_2|u_n(x)|)v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{|d(x)v_n + C_2|u_n(x)|v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{|d(x)||v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} dx + C_2 \int_\Omega |v_n|^2 dx.
\end{aligned}$$

Grâce aux inégalités de Cauchy Schwarz et Poincaré

$$\begin{aligned}
\alpha\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{\|d(x)\|_{L^2(\Omega)}\|v_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} + C_2\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \\
&\leq \frac{C(\Omega)\|d\|_{L^2(\Omega)}\|v_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} + C_2\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \\
&\leq C(\Omega)\|d\|_{L^2(\Omega)}\|v_n\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \\
&\leq C(\Omega)\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|v_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega)\|d\|_{L^2(\Omega)} + C_2}{\alpha} = R_2,$$

et par conséquent la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, on en déduit qu'on peut extraire de $(v_n)_n$ une sous suite $(v_n)_n$ qui converge vers v dans $L^2(\Omega)$ et on a

$$v_n \longrightarrow v \text{ p.p. dans } \Omega,$$
$$|v_n| \leq R_2 \in L^2(\Omega).$$

Utilisant le fait que $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, on obtient

$$\alpha \leq \int_\Omega \frac{1}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} |f(x, u_n(x))v_n| \, dx.$$

Posons

$$X_n = \int_\Omega \frac{|f(x, u_n(x))v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} dx.$$

Maintenant on montre que $X_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, ceci impossible puisque : $X_n \geq \alpha$ et α une constante strictement positive (la constante de la coercivité).
D'abord Montrons que

$$\frac{|f(x, u_n(x))||v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow 0 \text{ p.p. .}$$

Puisque f est une fonction continue et $u_n \longrightarrow u$, on aura

$$\frac{f(x, u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} v_n \longrightarrow \frac{f(x, u(x))}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} v \text{ quand } n \longrightarrow +\infty,$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x,u_n(x))|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} &\leq \frac{|d(x)+C_2|u_n(x)||}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|d(x)|+C_2|u_n(x)|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \\
&\leq \frac{|d(x)|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} + C_2|v_n| \\
&\leq \frac{C(\Omega)|d(x)|}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} + C_2|v_n| \\
&\leq C(\Omega)|d(x)| + C_2R_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{|f(x,u_n(x))v_n|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \leq \left(C(\Omega)|d(x)| + C_2R_2\right) R_2 \in L^1(\Omega).$$

Maintenant nous nous montrons que la convergence est presque partout, on a

$$v_n \longrightarrow v \text{ p.p.}$$

donc par définition

$$\exists A \text{ tel que } mes(A^c) = 0 \text{ et } v_n(x) \longrightarrow v(x), \forall x \in A.$$

On distingues trois cas :

Cas1 : Si $v(x) > 0, v_n(x) \longrightarrow v(x), \forall x \in A$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = +\infty,$$

donc

$$u_n(x) \longrightarrow +\infty,$$

car : d'après (2.12) : $u_n(x) = v_n(x)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}v_n(x) &= \frac{f(x,u_n(x))u_n(x)}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}u_n(x)}v_n(x)\\ &= \frac{f(x,u_n(x))}{u_n(x)}(v_n(x))^2.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ et l'utilisation de l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}v_n(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x,u_n(x))}{u_n(x)}(v_n(x))^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Cas2 : Si $v(x) < 0$, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}v_n(x) = 0,$$

puisque

$$\lim_{s\to-\infty}\frac{f(x,s)}{s} = 0.$$

Cas3 : Si $v(x) = 0$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}v_n(x)\right| &\leq \frac{|d(x)+C_2|u_n(x)||}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}|v_n(x)|\\ &\leq (|d(x)+C_2|u_n(x)||)|v_n(x)|.\\ \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}}v_n(x)\right| &\leq \lim_{n\to+\infty}(|d(x)+C_2|u_n(x)||)|v_n(x)|\\ &= (d(x)+C_2|u(x)|)\,|v(x)|\\ &= 0,\end{aligned}$$

et par suit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|f(x,u_n(x))v_n(x)|}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

En résumé :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left| \frac{f(x,u_n(x))}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} v_n(x) \right| dx = 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Les conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue étant satisfaites, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = 0,$$

qui est une contradiction puisque $X_n \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, nous avons montré qu'il existe $R > 0$ tel que

$$u = h(t,u) \Longrightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)} < R, \forall t \in [0,1], u \in \overline{B}_R.$$

Par conséquent on a montré l'existence de solution à (PV). Ceci termine la démonstration du Théorème 2.1.12. ■

2.2 Unicité de solution du problème

L'unicité de solution du problème (PV) est donné par les théorèmes suivants

Théorème 2.2.1. *Si f est une fonction de Caratéhodory qui ne dépend pas de u et vérifier les conditions $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$, alors (PV) admet une solution unique.*

Démonstration. Soient u_1, u_2 deux solutions de (PV), donc $(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u_1(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u_2(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Soustrayons (2.13) et (2.14) et posons $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$, on obtient

$$\int_\Omega (\nabla u_1(x) - \nabla u_2(x))^2 \, dx + \int_\Omega (u_1(x) - u_2(x))^2 \, dx = 0,$$

d'où

$$\|\nabla(u_1(x) - u_2(x))\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Donc

$$\|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

■

Théorème 2.2.2. *Si f est une fonction de Carathéodory qui dépend de u et vérifie les conditions $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$, de plus f est décroissante par rapport à la deuxième variable i.e.*

$$f(x, s_1) \leq f(x, s_2), \forall s_1 \geq s_2 \text{ tel que } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, p.p.\ x \in \Omega,$$

alors (PV) admet une solution unique.

Démonstration. Soient u_1, u_2 deux solutions de (PV), alors

$$\int_\Omega \nabla u_1(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u_1(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x, u_1(x)) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.15)$$

$$\int_\Omega \nabla u_2(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u_2(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x, u_2(x)) v(x) dx, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.16)$$

$$(2.15)-(2.16) \Longrightarrow \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(f(x, u_1(x)) - f(x, u_2(x))\right)(u_1 - u_2) dx \leq 0,$$

grâce à la décroissance de la fonction f, et par conséquent

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

ce qui implique

$$u_1 = u_2,$$

d'où l'unicité de la solution. ■

Conclusion

Ainsi, dans ce travail, nous avons appris à connaître l'une des méthodes importantes de compacité pour la résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires, qui est la méthode du degré topologique de Leray-Schauder et ses caractéristiques.
Grâce à cette méthode, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de solution d'un problème elliptique non linéaire où intervient le Laplacien dans un ouvert borné lipschitzienne Ω de $\mathbb{R}^N$, et f est une fonction de Carathéodory dépendente de u.

Bibliographie

[1] **G. Allaire**, Analyse Numérique et Optimisation, École polytechnique, 2007.

[2] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Massons. Paris 1987.

[3] **J. Dronion**, Degré topologiques et Applications, 2006.
https ://www.researchgate.net/publication/228382134.

[4] **P. H. Rabinowitz**, Théorie du degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires (Lecture note by **H. Berestycki**), Report 75010, Laboratoire d'analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1989.

[5] **O. Kavian**, Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer, 1994.

[6] **M. Thérèse Lacroix- Sonrier**, Distributions, Espaces de Sobolev, Applications, Ellipses Marketing, S. A, Paris, 1998.

[7] **F. Zoubai, B. Merouani**, Study of a mixed problem for a nonlinear elasticity system by topological degree, Stud. Univ. Babes- Bolyai Math. 66(2021), No.3, 537-551.