République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahai - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.
Option : Èquation aux dérivées partielles et applications.

Thème

Sur l'existence d'un écoulement constant de fluide de Stokes

Présenté par :

Boubadja Fatima

Devant le jury composé de :

Président :	T. Haddad	Professeur	Université de Jijel.
Encadreur :	O. Yakhlef	MCB	Université de Jijel.
Examinateur :	W. Khellaf	MCB	Université de Jijel.

Promotion **2022/2023**

Soutenu le **24/06/2023**

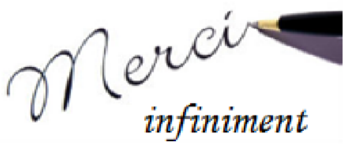
Remerciements

Il n'y a pas de remerciements sauf après avoir remercié ***Dieu*** *qui nous a donné la capacité et nous a donné la patience de continuer notre cheminement académique. Louange à* ***Dieu*** *qui nous a permis de terminer ce travail et nous ne l'aurions pas terminé sans sa grâce et succès.*

Quant à la suite, sur la base de ce que le Messager, *alrasul salaa allah ealayhi wassalam*, a dit **"Celui qui ne remercie pas les gens ne remercue pas Dieu"**. J'adresse mes sincères remerciements et non abondante gratitude au *Professeur Encadreur* **Mr Yakhlef Othmen** pour le suivi sur mon travail et me guider tout au long de la période de réalisation de cette Thèse, **que Dieu le récompense bien**.

J'e remercie aussi en particulier tous les enseignants du spécialité EDP.
J'e remercie les membres du jury qui ont accepté de juger non travail.
Mr **Haddad Tahar**, qui me fait l'honneur de **président** ce jury.
Mme **Khellaf Wahiba**, pour avoir accepter **examinateur** ce jury.

Enfin et surtout, j'adresse mes remerciements au professeur **Boutana Imen**, qui m'a deaucoup aidé dans la langue **LaTeX**, et à tous mes professeurs à tous les niveaux de l'enseignement.



DEDICACE

Dieu soit loué et merci à **Dieu** seigneur des mondes que je remercie sur quel civil de force et de patience, Jusqu'à ce que je termine ce travail.
Après cela. Avec toute ma gratitude et mon amour, je dédie cet humble acte en signe de respect et de gratitude à :

À la religion a recommandé **Dieu Tout Puissant** gentiment à eux, et recommandé *alrasul salaa allah ealayhi wassalam* accompagné de gratitude grâce à nous. Mes parents bien-aimés, maman "**May Akila**" et papa "**Boubaja Raheh**". que **Dieu les grades**.

À ceux qui ont partagé le ventre de la mère et la sympathie du père, mes frères et sœurs.

À ceux avec qui j'ai été heureux et leur grâce dans les chemins de vie que j'ai parcourus, à ceux qui ont été avec moi sur le chemin du succès et du bien .... mes amis.

À tous mes *Professeurs* qui ont joué un rôle dans ma réussite à toutes les étapes sans exception.

À tout ce qui j'aime.

⁕ *FATIMA* ⁕

Table des matières

Notations et abréviations

- D : ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.
- p.p : presque partout.
- dx : mesure de Lebesgue.
- $\langle .,. \rangle$: application produit scalaire .
- $\|.\|$: application norme .
- $\nabla f(x_0)$: le gradient de f au point x_0.
- $\partial f(x_0)$: le sous différentiel de f au point x_0.
- d_H la distance de Hausdorff.
- $dom\, f$ le domaine effectif de la fonction f.
- $epif$: epigraphe de f.
- H : espace de Hilbert $(E, \langle .,. \rangle)$: l'espace pré-helbertion.
- E' : espace dual de l'espace E.

$$L^p(D) := \{v : D \longrightarrow \mathbb{R}; v \;\; mesurable \;\; et \int_D |v(x)|^p dx < \infty\}.$$

En particulier :

$$L^2(D) := \{v : D \longrightarrow \mathbb{R}; v \;\; \text{mesurable et} \int_D |v(x)|^2 dx < \infty\}$$

. • $(L^2(D))^2$: espace produit.
- $L^\infty(D) := \{v \;\; mesurable \;\; dans \;\; D \;\; / \;\; \exists c \geq 0 \text{ vérifiant } |v| \leq c \;\; p.p.sur D\}$.

$|\alpha| = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i$, utilisé pour la définition des espace de Sobolev.

$$\partial^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial^{\alpha_1} x_1 . \partial^{\alpha_2} x_2}.$$

- $W^{m,p}(D)$: espace de Sobolev sur D défini par :

$$W^{m,p}(D) := \{v \in L^p(D); \partial^\alpha v \in L^p(D), \;\; \forall \alpha \;\in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\}.$$

- $H^m(D) := W^{m,2}(D) := \{v \in L^2(D); \partial^\alpha v \in L^2(D), \;\; \forall \alpha \;\in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\}$.
- $H^1(D) := W^{1,2}(D)$: espace de Sopolev d'ordre 1 sur D défini par :

$$H^1(D) := \{v \in L^2(D); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(D), i = 1, 2\}.$$

- $(H^1(D))^2$: espace produit.
- $supp(v) = \overline{\{x \in D; v(x) \neq 0\}}$: le support de v.
- $H_0^1(D) = \{v \in H^1(D), v = 0 \text{ sur } \partial D\}$.
- $(H_0^1(D))^2$: espace produit.
- $W^{m,\infty}(D)$: espace de Sobolev sur D défini par :

$$W^{m,\infty}(D) := \{v \in L^\infty(D); \partial^\alpha v \in L^\infty(D), \quad \forall \alpha \ \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\}.$$

- $W^{1,\infty}(D)$: espace de Sobolev sur D défini par :

$$W^{1,\infty}(D) := \{v \in L^\infty(D); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(D), \quad i = 1, 2\}.$$

- $(W^{1,\infty}(D))^2$: espace produit.

$$L_0^2(D) = \{v \in L^2(D); \int_D v(x)dx = 0\}.$$

- $\mathcal{D}(D)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support borné (espace des fonctions test).

Introduction générale

L'interaction fluide-structure (IFS) s'intéresse au comportement d'un système constitué par des entités mécaniques considérées comme distinctes : une structure mobile (rigide ou déformable) et un fluide (en écoulement ou au repos) autour ou à l'intérieur de la structure. L'évolution de chacune des deux entités dépendant de celle de l'autre. Plus précisément, le mouvement de la structure est influencé par l'écoulement du fluide à travers les efforts transmis à l'interface, et réciproquement, le mouvement de la structure influence l'écoulement du fluide par les déplacements de l'interface qui entraîne le fluide dans son mouvement, un phénomène de couplage apparaît.

Il existe de nombreux phénomènes physiques qui représentent l'interaction de la fluide-structure, nous prenons, par exemple, les ailes des avions et ainsi de suite. Les coefficients de l'équation fluide dépendent de la déformation de la structure, où nous utilisons l'équation de Stokes, et ainsi une solution approchée est obtenue dans un domaine fixe plus grand qui contient la structure. Pour en arriver là, on s'appuie sur la méthode de pénalisation. En combinant l'équation de structure avec l'équation de fluide fictif, une formulation faible qui ne contient pas de continuité de pression à l'interface peut être obtenue, un fait qui peut être considéré comme un avantage du modèle.

Le but principal de ce travail est d'essayer de détailler un peu les notions d'un article de A. Halanay, C. Murea, D. Tiba intitulé : Existence d'un écoulement constant de fluide de Stokes au-delà d'une structure élastique linéaire utilisant un domaine fictif [18]. On mentionne que le problème aux limites traité dans ce mémoire est différent à celui de [17]. En effet, dans ce travail nous avons un trou noté ω dans la structure Ω_u^S, de plus la structure n'a pas de contacte avec le domaine D d'où la différence.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres présentés comme suit :

Le premier chapitre, est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales que nous avons utilisé tout au long de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté le système de Stokes puis le système d'élasticité sous les formes fortes et faibles, en plus de cela nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution pour les doux formules liées aux système de Stokes et d'élasticité. Ensuite, nous avons présenté le problème de l'interaction fluide-structure sous sa forme forte.

Dans le troisième chapitre, nous avons d'abord présenté un concept de la méthode pénalisation qui nous a aidés à atteindre le but. Ensuite, nous prouvons la convergence des domaines. Nous avons également cherché à prouver l'existence d'une solution pour l'interaction fluide-structure.

Chapitre 1

Concepts de bases et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous présenterons un ensemble de définitions et concepts de base qui nous aideront à compléter le deuxième et troisième chapitre. Nous présentons quelques concepts d'analyse convexe et d'analyse fonctionnelle [4], [7].

1.1 Convexité

1.1.1 ensembles convexes

Définition 1.1. *Soit C une partie d'un espace vectoriel E. On dit que C est convexe si pour tout*

$$x, y \in C : \quad tx + (1-t)y \in C; \quad \forall t \in [0,1].$$

1.1.2 Fonctions convexes

Définition 1.2. *(Epigraphe) On appele épigraphe d'une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble défini par :*

$$epi(f) := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : \; f(x) \leq t\}.$$

On suppose maintenant que E est un **espace topologique**. Nous rappelons ce qui suit :

Définition 1.3. *(Domaine effectif) Soit la fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle domaine effectif de la fonction f l'ensemble défini par :*

$$dom f := \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.4. *(Fonction propre) La fonction f est dite propre si :*

$$dom f \neq \varnothing \text{ et } f(x) \neq -\infty; \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.5. *(Fonction convexe) La fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite convexe si :*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y); \quad \forall x, y \in E, \quad \forall t \in [0,1].$$

Nous utiliserons quelques propriétés élémentaires des fonctions convexes :
1. Si f est une fonction convexe, alors *epi* f est un ensemble convexe dans $E \times \mathbb{R}$; et inversement.
2. Si f est une fonction convexe, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[f \leq t]$ est convexe ; mais l'inverse n'est pas vrai.
3. Si f et g sont convexes, alors $f + g$ est convexe.

1.2 Multi-applications

Définition 1.6. *Soient X et Y deux ensembles non vides dans H. Nous appelons Multi-application (ou fonction multivoque) de X dans Y tout application T de X dans $\mathcal{P}(Y)$ (ensemble des parties de Y) et nous notons $T : X \to \mathcal{P}(Y)$ ou $T : X \rightrightarrows Y$. Alors $\forall x \in X : T(x) \subset Y$ est un sous-ensemble de Y.*

Définition 1.7. *On appelle domaine $(effictif)$ de T qu'on le note $D(T)$ le sous-ensemble de X défini par :*

$$D(T) = \{x \in X : \ T(x) \neq \phi\}.$$

Et l'image de T noté $R(T)$ le sous-ensemble de Y définie par :

$$R(T) = \{y \ \in Y; \ \exists x \in X : \ y \in T(x)\} = \bigcup_{x \in D(T)} T(x).$$

Définition 1.8. *On appelle graphe de T et on note $gph(T)$ le sous-ensemble de $X \times Y$ définie par :*

$$gph(T) = \{(x, y) \in X \times Y : \ x \in D(T), \ y \in T(x)\}.$$

1.3 Distance de Hausdorff

Définition 1.9. *(Fonction Distance). Soit $C \subset H$ une partie non vide. La fonction distance associée à C est définie par :*

$$d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Proposition 1.10. *Soit $C \subset H$ une partie non vide, alors :*
1. $d_C(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in adh(C)$.
2. *La fonction distance est continûment Lipschitzienne de rapport égale à 1.*

Définition 1.11. *(Distance de Hausdorff). Soient* $\boldsymbol{H}$ *un espace de Hilbert,* C_1 *et* C_2 *deux sous-ensembles fermés non vide de* $\boldsymbol{H}$*. On appelle distance de Hausdorff entre* C_1 *et* C_2 *la fonction numérique* $d_H(.,.)$ *définie par :*

$$\begin{aligned} d_H(C_1, C_2) &:= \sup_{y \in H} |d_{C_1}(y) - d_{C_2}(y)| \\ &:= \max_{y \in H}(\sup_{x \in C_1} d_{C_2}(x), \sup_{x \in C_2} d_{C_1}(x)). \end{aligned}$$

Théorème 1.12 (Théorème de point fixe de Schauder)**.** *[18] Soit* E *un espace de Banach,* C *est une convexe fermé de* E*, et* T *une application continue de* C *dans* C *telle que* $T(C)$ *est relativement compact (i.e* $\overline{T(C)}$ *est compact). Alors* T *admet un point fixe.*

1.4 Résultats de certaines théories

Nous travaillerons avec des champs vectoriels de fonctions $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 (\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, u_2) \text{ où } u_i : \Omega \to \mathbb{R}(i = 1, 2), \\ \mathbf{v} &= (v_1, v_2) \text{ où } v_i : \Omega \to \mathbb{R}(i = 1, 2), \\ \mathbf{w} &= (w_1, w_2) \text{ où } w_i : \Omega \to \mathbb{R}(i = 1, 2), \end{aligned}$$

Pour un tel champ, nous écrirons les opérateurs vectoriels associés de la manière suivante :
Opérateur de divergence :

$$div\ \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

Opérateur de gradient et de Laplace :

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \text{ et } \Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{pmatrix}.$$

La norme d'un champ vectoriel $\mathbf{u}$ dans un espace de Hilbert $H^1(\Omega)^2$ est :

$$\| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)^2} := (\sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si u_i est un champ scalaire dans l'espace $H^1(\Omega)$ alors par la définition de la norme H^1 :

$$\| \nabla u_i \|_{L^2(\Omega)} := (\sum_{j=1}^{2} \| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \| u_i \|_{H^1(\Omega)} .$$

Théorème 1.13. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*
$\star$ ***Avec des sommes :***
Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v} \in \Omega(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$*. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{2} | u_i v_i | \leq (\sum_{i=1}^{2} | u_i |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{2} | v_i |^2)^{\frac{1}{2}}.$$

⋆ ***Avec des intégrales :***
Soit $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v} \in C([0,1],\mathbb{R})$. *Alors :*

$$\int_0^1 \mid \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v} \mid dx \leq (\int_0^1 \mid \boldsymbol{u} \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 \mid \boldsymbol{v} \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

⋆ ***Dans un espace de Hilbert :***
Soit $(E, <.,.>)$ *un espace pré-hilbertion. Alors, pour tous* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ *:*

$$|< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >| \leq \| \boldsymbol{u} \|_E \| \boldsymbol{v} \|_E .$$

Théorème 1.14 (Inégalité de Hölder). *[11] Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$. $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$, *telles que* $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. *Alors :*

$$\forall \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega), \quad \forall \boldsymbol{v} \in L^q(\Omega), \quad \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \in L^1(\Omega),$$

et :

$$\|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{u}\|_{L^p(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{L^q(\Omega)}.$$

En particulier on a : $\boldsymbol{uv} \in L^1(\Omega)$.

Remarque 1.15. *Cette inégalité devient l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour* $p = q = 2$.

Théorème 1.16 (Théorème de trace). *[2] Soit* Ω *un ouvert borné régulier (i.e. admettent au plus des point anguleux) de* $\mathbb{R}^n$.
$v \in H^1(\Omega)$ *n'est pas définie sur le bord, car les fonctions de* $H^1(\Omega)$ *ne sont pas continues si* $n \geq 2$.
On introduit la fonction trace :

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$$
$$v \to \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}.$$

qui est continue. Dans ces conditions,

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

où :

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), \quad \gamma_0 v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}.$$

Théorème 1.17 (Inégalité de Poincaré). *[1] Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$. *Alors, il existe une constante* $C_p > 0$ *tel que, pour toute fonction* $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C_p \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

1.4.1 Formule de Green et Formule de la divergence

Nous donnons quelques rappels utiles par la suite.

Formules de Green

Soit v et w de $H^1(\Omega)$ et $x = (x_1, x_2)$, $i = \overline{1,2}$ on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, dx = \int_{\partial\Omega} v n_i w \, d\sigma - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx.$$

1. Pour tous champs scalaires $v \in H^1(\Omega)$, $w \in H^2(\Omega)$ réguliers, on a :

$$-\int_{\Omega} (\Delta v) w \, dx = \int_{\Omega} \nabla v . \nabla w \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w \, d\sigma; \tag{1.1}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire extérieure à Ω.
2. Pour tous champs vectoriels $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ réguliers, on a :

$$-\int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} . \mathbf{w} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} . \mathbf{w} \, d\sigma; \tag{1.2}$$

avec $\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}$.
3. Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$, et $\mathbf{v} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel de classe C^2, et $\mathbf{p} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors :

$$\int_{\Omega} \nabla p . \mathbf{v} \, dx = -\int_{\Omega} p . \mathrm{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} (p \mathbf{n}) . \mathbf{v} \, d\sigma; \tag{1.3}$$

où $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$.

Formule de la divergence

Pour tout champ vectoriel $\mathbf{v}$ régulier, nous avons :

$$\int_{\Omega} \mathrm{div} \mathbf{v} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} . \mathbf{n} \, d\sigma, \tag{1.4}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire extérieure à Ω.

Soit E est un espace de Banach et E' son dual topologique, i.e :

$$E' := \{ f : E \to \mathbb{R}, \ f \text{ est forme linéaire continue} \}$$

tel que pour tout $f \in E'$:

$$\| f \|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} | < f, x > |.$$

Nous désignons par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) =< f, x >$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.18. *1.* ***Convergence faible :*** *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ ($u \in E$) converge faiblement vers $u \in E$ lorsque $n \to \infty$ si $\varphi_f(u_n) \to \varphi_f(u)$ pour tout $f \in E'$.*
2. ***Convergence forte :*** *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ converge fortement vers $u \in E$ lorsque $n \to \infty$ si $\lim_{n \to \infty} \| u_n - u \|_{n \in \mathbb{N}} = 0$.*

Définition 1.19. *(Demi-fermé).*
Un sous-ensemble A de $X \times X$ est dit demi-fermé s'il est fortement-faiblement fermé dans $X \times X$.
Autrement dit, $x_n \to x$, $y_n \to y$ et $[x_n, y_n] \in A$ implique que $[x, y] \in A$.
Un ensemble A est fermé si $[x_n, y_n] \in A$, $x_n \to x$ et $y_n \to y$ implique $[x, y] \in A$.

1.4.2 Théorème de Lax-Milgram

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert. On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $< ., . >$ et de norme $\| \, . \, \|$:

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in V : \\ a(u, v) = L(v); \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{1.5}$$

Les hypothèses sur a et L sont :
1. $L(.)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est -à-dire que $v \longrightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$| \, L(v) \, | \leq C \, \| \, v \, \| \quad \forall v \in V;$$

2. $a(., .)$ est une forme bilinéaire sur V, c'est-à-dire que $w \longrightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \longrightarrow a(w, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $w \in V$.
3. $a(., .)$ est continue , c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$| \, a(w, v) \, | \leq M \, \| \, w \, \| \| \, v \, \| \quad \forall w, v \in V;$$

4. $a(., .)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$a(v, v) \geq \nu \, \| \, v \, \|^2; \quad \forall v \in V.$$

Comme nous le verrons au cour de cette sous-section, toutes les hypothèses ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir résoudre (1.5). En particulier, la coersivité $a(., .)$ est essentielle.

Théorème 1.20. *[8] Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V, $a(., .)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V. Alors la formulation variationnelle (1.5) admet une unique solution. De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire L.*

Si on suppose de plus que la forme a est symétrique, alors l'élément u est caractérisé comme étant l'unique élément de V qui minimise la fonctionnalité $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - L(v), \quad \forall v \in V.$$

C'est-à-dire :

$$\exists! u \in V, \quad J(u) = \min_{v \in V} j(v). \tag{1.6}$$

1.4.3 Théorème de Babushka-Brezzi

Soit $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Hilbert, et deux formes bilinéaires :

$$a : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b : \mathbb{E} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Étant donné $f \in \mathbb{E}'$, nous cherchons $(v, p) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$, tel que :

$$a(v, w) + b(v, p) =< f, w >_{\mathbb{E}',\mathbb{E}} \qquad \forall w \in \mathbb{E} \tag{1.7}$$
$$b(v, q) = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{F} \tag{1.8}$$

Théorème 1.21. *[20] Nous donnons les hypothèses suivantes :*
1. *La forme $a(.,.)$ est continue sur $\mathbb{E}$ c'est-à-dire :*

$$\textit{Il existe } M > 0, \forall v, w \in \mathbb{E} :| a(v, w) |\leq M \parallel v \parallel_{\mathbb{E}} \parallel w \parallel_{\mathbb{E}} .$$

2. *La forme $a(.,.)$ est coercive sur $\mathbb{E}$ c'est-à-dire :*

$$\textit{Il existe } \alpha > 0, \forall w \in \mathbb{E} :| a(w, w) |\geq \alpha \parallel w \parallel^2_{\mathbb{E}} .$$

3. *La forme $b(.,.)$ est continue, c'est-à-dire :*

$$\textit{Il existe } N > 0, \forall w \in \mathbb{E}, \forall q \in \mathbb{F} :| b(w, q) |\leq N \parallel w \parallel_{\mathbb{E}} \parallel q \parallel_{\mathbb{F}} .$$

4. *La forme $b(.,.)$ satisfait la condition ' $\inf - \sup$ ' suivant :*

$$\textit{Il existe } \beta > 0 : \inf_{\substack{q\in\mathbb{F}\\ q\neq 0}} \sup_{\substack{w\in\mathbb{E}\\ w\neq 0}} \frac{b(w, q)}{\parallel w \parallel_{\mathbb{E}} \parallel q \parallel_{\mathbb{F}}} \geq \beta.$$

Alors le problème (1.7), (1.8) admet une unique solution $(v, p) \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

Corollaire 1.22. *[16]. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Alors L'opérateur div est un isomorphisme de $V^{\perp}$ sur $L^2_0(\Omega)$.*

Chapitre 2

Position du problème d'interaction fluide-structure

Dans ce chapitre, nous expliquons le problème de Stokes et d'élasticité afin de donner leurs formulations variationnelle. Enfin, nous présenterons également une formulation forte du problème d'interaction fluide-structure.

2.1 Problème de Stokes

Le système de Stokes modélise l'écoulement d'une fluide visqueux incompressible à petite vitesse. On suppose que le fluide occupe un domaine $D\backslash\overline{\omega}$ (un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$) et qu'il adhère à la paroi de celui-ci, c'est-à-dire que sa vitesse est nulle sur la frontière (ce qui conduit à une condition aux limites de Dirichlet), sous l'action d'une force $f(x)$ (une fonction de $D\backslash\overline{\omega}$ dans $\mathbb{R}^2$), la vitesse (un vecteur) du fluide $\mathbf{v}$ et la pression (un scalaire) du fluide p sont solutions de :

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p & = f \quad \text{dans } D\backslash\overline{\omega}, \\ \text{div } \mathbf{v} & = 0 \quad \text{dans } D\backslash\overline{\omega}, \\ \mathbf{v} & = 0 \quad \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{2.1}$$

C'est un problème elliptique linéaire avec une condition au bord de type Dirichlet homogéne, nous considèrons :
$D\backslash\overline{\omega}$ ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}$ réprésente le champ de vitesse du fluide $\mathbf{v} : D\backslash\overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
p : La pression du fluide $p : D\backslash\overline{\omega} \longrightarrow \mathbb{R}$.
f : Champ de force agissant sur la frontiére avec le coefficient de viscosité cinématique $\nu(\nu > 0)$.
Ici nous nous intéresserons uniquement au cas des fluides incompressibles régi par l'équation

$$div\ \mathbf{u} = 0.$$

Formulation variationnelle

On suppose $f \in (L^2(D\backslash\overline{\omega}))^2, \mathbf{v} \in (H^2(D\backslash\overline{\omega}))^2$ et p $\in L^2(D\backslash\overline{\omega})$.
nous multiplions la première équation par un champ vectoriel $\mathbf{w}$ dans l'espace des fonctions tests $(\mathcal{D}(D\backslash\overline{\omega}))^2$:

$$(-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p).\mathbf{w} = f.\mathbf{w}, \quad \forall\mathbf{w} \in (\mathcal{D}(D\backslash\overline{\omega}))^2.$$

nous intégrons sur $D\backslash\overline{\omega}$:

$$-\nu \int_{D\backslash\overline{w}} \Delta\mathbf{v}.\mathbf{w}\ d\mathbf{x} + \int_{D\backslash\overline{w}} \nabla p.\mathbf{w}\ d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{w}} \mathbf{f}.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}, \quad \forall\mathbf{w} \in (\mathcal{D}(D\backslash\overline{\omega}))^2.$$

En utilisant les formules de Green (1.2) et (1.3) :

$$\nu(\int_{D\backslash\overline{w}} \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{w}\ d\mathbf{x} - \int_{\partial(D\backslash\overline{w})} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{n}}.\mathbf{w}\ d\sigma) - \int_{D\backslash\overline{w}} p.\text{div }\mathbf{w}\ d\mathbf{x} + \int_{\partial(D\backslash\overline{w})} p\mathbf{n}.\mathbf{w}\ d\sigma = \int_{D\backslash\overline{w}} \mathbf{f}.\mathbf{w}\ d\mathbf{x};$$

$$\forall\mathbf{w} \in (\mathcal{D}(D\backslash\overline{\omega}))^2.$$

On suppose $\mathbf{w} := 0$ sur $(\partial(D\backslash\overline{\omega}))$. Nous définissons ainsi l'espace des fonctions tests :

$$W = \{\mathbf{w} \in (H^1(D\backslash\overline{w}))^2; \mathbf{w} = 0 \text{ sur } \quad \partial(D\backslash\overline{\omega})\}.$$

Alors :

$$W := (H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2.$$

Concernant la pression, puisque l'équation de Stokes ne fait intervenir que les dérivées, nous sommes poussés à imposer une condition sur p qui nous fixe la constante d'intégration afin de garantir l'unicité d'une telle pression. Nous choisissons à cet effet l'espace des fonctions de carré sommable à moyenne nulle :

$$Q := L_0^2(D\backslash\overline{\omega}) := \{q \in L^2(D\backslash\overline{\omega}); \int_{D\backslash\overline{\omega}} q\ dx = 0\}.$$

Donc :

$$\nu \int_{D\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{w}\ d\mathbf{x} \underbrace{- \nu \int_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{n}}.\mathbf{w}\ d\sigma}_{0} - \int_{D\backslash\overline{\omega}} p.\text{div}(\mathbf{w})\ d\mathbf{x} \overbrace{+ \int_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} p\mathbf{n}.\mathbf{w}\ d\sigma}^{0} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}.\mathbf{w}\ d\mathbf{x};$$

$$\forall\mathbf{w} \in W.$$

Alors, on obtient :

$$\nu \int_{D\backslash\overline{\omega}} (\nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x} - \int_{D\backslash\overline{\omega}} p.\text{div }\mathbf{w}\ d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}.\mathbf{w}\ d\mathbf{x} \quad \forall\mathbf{w} \in W.$$

Nous obtenons la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{v} \in W, \text{et } p \in Q \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p) = F(\mathbf{w}); \quad \forall \mathbf{w} \in W. \\ \qquad\qquad b(\mathbf{v}, q) = 0; \quad \forall q \in Q. \end{cases} \tag{2.2}$$

Tel que, les formes bilinéaires sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} a : W \times W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longrightarrow a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \nu \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x}; \\ b : W \times Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{w}, q) &\longrightarrow b(\mathbf{w}, p) := - \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} p.\text{div } \mathbf{w} \, d\mathbf{x}; \end{aligned}$$

et la forme linéaire :

$$\begin{aligned} F : W &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{f}, \mathbf{w}) &\rightarrow F(w) := \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \mathbf{f}.\mathbf{w} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Théorème 2.1. *Il existe une unique solution* $(\boldsymbol{v}, p)$ *de problème* (2.2).

Preuve. On a $H_0^1(D\setminus\overline{\omega})$ et $L_0^2(D\setminus\overline{\omega})$ sont des espaces de Hilbert pour les norme $\|.\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}$ et $\|.\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}$. De plus :

1) La continuité de $a(.,.)$:
Soient $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$,

$$\begin{aligned} \mid a(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mid &:= \mid \nu \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} \mid \\ &\leq \nu \int\limits_{D\setminus\overline{w}} \mid \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \mid \, d\mathbf{x} \\ &\leq \nu \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \mid \, d\mathbf{x} \\ &\leq \nu \sum_{i,j=1}^{2} \| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \|_{0,D\setminus\overline{w}} \| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \|_{0,D\setminus\overline{w}} \\ &\leq \nu \sum_{i=1}^{2} \|v_i\|_{1,D\setminus\overline{\omega}} \|w_i\|_{1,D\setminus\overline{\omega}} \\ &\leq \nu \|\mathbf{v}\|_W \|\mathbf{w}\|_W. \end{aligned}$$

Donc, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue.

2) La coercivité de $a(.,.)$:

Soient $\mathbf{w} \in W$,

$$a(\mathbf{w},\mathbf{w}) := \nu \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \nabla\mathbf{w} : \nabla\mathbf{w}\, d\mathbf{x} = \nu \sum_{j=1}^{2} \int_{D\backslash\overline{\omega}} \nabla w_j.\nabla w_j\, d\mathbf{x} = \nu \sum_{j=1}^{2} \|\nabla w_j\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} = \nu \|\nabla\mathbf{w}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}}$$

d'après l'inégalité de Poincaré on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq C_p^2 \|\nabla\mathbf{w}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} &\Rightarrow \|\mathbf{w}\|^2_W \leq (1+C_p^2)\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} \\ &\Rightarrow \|\nabla\mathbf{w}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} \geq \frac{1}{1+C_p^2}\|\mathbf{w}\|^2_W \end{aligned}$$

Donc :

$$a(\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq \frac{\nu}{1+C_p^2}\|\mathbf{w}\|^2_W.$$

Alors, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercive, avec $\frac{\nu}{1+C_p^2} > 0$ la constante du coercivité. **3) La continuité de** $b(.,.)$:
Soient $\mathbf{w} \in W$, $p \in Q$

$$\begin{aligned} \mid b(\mathbf{w},p) \mid &\leq \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \mid p\; div\mathbf{w} \mid d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{k=1}^{2} \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mid p\; \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \mid d\mathbf{x} \\ &\leq (\sum_{k=1}^{2} \|\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}})^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{2} \|p\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\|\mathbf{w}\;\|_W \|p\;\|_Q\;. \end{aligned}$$

Alors, la forme $b(.,.)$ est continue.
4) Montrer que les espaces W et Q vérifient la propriété suivante :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall q \in Q\; \exists \mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \neq 0 : b(\mathbf{w},q) \geq \beta \|\mathbf{w}\;\|_W \|q\;\|_Q\;.$$

Soit :

$$W := \{\mathbf{w} \in H_0^1(D\backslash\overline{\omega})^2, div\; \mathbf{w} = 0\} \subset H_0^1(D\backslash\overline{\omega})^2.$$

grâce au corollaire (1.22), nous avons :

$$\begin{aligned} div : W^\perp &\overset{\text{isom}}{\longrightarrow} L_0^2(D\backslash\overline{\omega}) \\ \mathbf{w} &\longrightarrow div\; \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Soit $q \in Q$, donc il existe et unique $\mathbf{w} \in W^\perp$, telles que :

$$\text{div}\; \mathbf{w} = q$$

d'après la continuité de $(div)^{-1}$, nous avons :

$$\|div^{-1}\; \mathbf{w}\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})} \geq C\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}, \quad \forall \mathbf{w} \in W^\perp.$$

où $C > 0$. Donc :

$$\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2} \leq \frac{1}{C}\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})} \quad ...(*).$$

Par conséquent, si $\mathbf{w} \neq 0$, on a :

$$\frac{(q, div\ \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}} = \frac{(q,q)}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}} = \frac{\|q\|^2_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}},$$

Si $\mathbf{w} \neq 0$, $q \neq 0$, on a de $(*)$:

$$\frac{1}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}} \geq C\frac{1}{\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}},$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{(q, div\ \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}} &\geq \|q\|^2_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}C\frac{1}{\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}}\\ &\geq C\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}.\end{aligned}$$

d'ou :

$$(q, \mathrm{div}\ \mathbf{w}) \geq C\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}\|\mathbf{w}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}, \quad \forall q \in Q.$$

Soit $\mathbf{w} = -\mathbf{u} \in W^{\perp} \subset (H^1_0(D\backslash\overline{\omega}))^2$, alors :

$$(q, -div\ \mathbf{u}) \geq C\|q\|_{L^2(D\backslash\overline{\omega})}\|\mathbf{u}\|_{(H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2}, \quad \forall q \in Q.$$

Et de plus :

$$(q, -\mathrm{div}\ \mathbf{u}) = -(q, div\ \mathbf{u}),$$

$$-(q, \mathrm{div}\ \mathbf{u}) = b(\mathbf{u}, q).$$

Alors, le théorème de " Babushka-Brezzi" assure l'existence et l'unicité $(\mathbf{v}, p)$ solution de problème (2.2). □

2.2 Problème d'élasticité

Le *système d'élasticité linéaire* est un système d'équations aux dérivées partielles de type elliptique correspondant à un modèle physique stationnaire, qui modélise les phénomènes de flexions de poutre et les problèmes de plaques et membranes.

Soit $D\backslash\overline{\omega}$ un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème suivant : étant données des fonctions $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ de $(L^2(D\backslash\overline{\omega}))^2$, trouver une fonction $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} + f_i &= 0 \quad \text{dans } D\backslash\overline{\omega}\\ \qquad\qquad u_i &= 0 \quad \text{sur } \partial(D\backslash\overline{\omega}).\end{cases} \tag{2.3}$$

où : λ, μ : Les coefficients de Lamé, et

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) := \lambda(\sum_{k=1}^{2}(\mathbf{u})\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{u})); \quad i,j = \overline{1,2},$$

avec :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}); \quad i,j = \overline{1,2}.$$

Les équations du problème décrivent les petits déplacements $\mathbf{u}$ à partir de l'état naturel d'un solide élastique homogène et isotrope soumis à une densité volumique de force $\mathbf{f}$ dans $D\backslash\overline{\omega}$.

Formulation variationnelle

Soit $\mathbf{v} \in (H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$ une fonction test. En multipliant l'équation d'élasticité par $v_i \quad (i = \overline{1,2})$, on trouve que :

$$(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}\mathbf{u}}{\partial x_j} + f_i)v_i = 0; \quad i = \overline{1,2},$$

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i + f_i v_i = 0; \quad i = \overline{1,2},$$

$$-\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i = f_i v_i; \quad i = \overline{1,2}.$$

En intégrant sur $D\backslash\overline{\omega}$, on obtient :

$$-\int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i \, d\mathbf{x} = \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}; \quad i = \overline{1,2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$-\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} v_i \, d\mathbf{x} = \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}; \quad i = \overline{1,2}.$$

En utilisant la Formule de Green :

$$\sum_{j=1}^{2} [\int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} - \int\limits_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j \mathbf{n}_j \, d\sigma] = \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}; \quad i = \overline{1,2}.$$

On suppose que $\mathbf{v} = 0$ sur $\partial(D\backslash\overline{\omega})$, tel que $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ alors, l'espace des fonctions test

$$V := \{\mathbf{v} \in (H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2; \mathbf{v} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial(D\backslash\overline{\omega})\},$$

donc :

$$V := (H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2.$$

Alors :

$$\underbrace{-\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j \mathbf{n}_j \, d\sigma}_{0} + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = \int\limits_{D\backslash\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}; \quad i = \overline{1,2}.$$

Alors, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}; \quad i = \overline{1,2}.$$

Et par sommation sur i :

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}.$$

On obtient la formulation Variationnelle suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que :} \\ a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}); \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \tag{2.4}$$

Où, la forme bilinéaire $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x},$$

Et la forme linéaire F : V $\longrightarrow \mathbb{R}$:

$$F(\mathbf{v}) := \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{D\setminus\overline{\omega}} f_i v_i \, d\mathbf{x}.$$

Théorème 2.2. *Il existe une unique solution* $\mathbf{u}$ *de problème* (2.4).

Preuve. On a $H_0^1(D\setminus\overline{\omega})$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}$. De plus :

1. La continuité de $a(.,.)$:
Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in V$:

$$| \, a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \, | \leq M_a \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V$$

Alors la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue.
2. La coercivité de $a(.,.)$: Soit $\mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geq \alpha \parallel \mathbf{v} \parallel_V^2 .$$

Alors la forme bilinéaire a est coercive, avec α la constante de coercivité.
3. La continuité de $L(.)$: Soit $\mathbf{v} \in V$, nous avons :

$$| \, L(\mathbf{v}) \, | \leq M_L \parallel \mathbf{v} \parallel_V; \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

donc la forme L est continue, avec M_L la constante de continuité.
Alors d'après le théorème de Lax-Milgram il existe une unique solution du problème (2.4). □

2.3 Problème d'interaction fluide-structure

L'interaction entre fluide et une structure déformable, qui apparît dans un champ très large de problèmes industriels, fait depuis peu l'objet d'une attention croissante de la part de la communauté scientifique. Les simulations numériques de tels problèmes restent une tâche difficile. Une première difficulté vient du fait que l'ensemble de système est l'assemblage de deux sous systèmes de nature différentes. Nous nous pouvons alors soit considérer le système complet comme une partie entière et écrire une formulation variationnelle qui comprend les équations du fluide et de la structure, soit utiliser des solveurs appropriés pour chacun de ces sous systèmes. Le fluide est représenté par l'équation de Stokes et la structure représenté par l'équation d'élasticité.
Soient $\omega \subset\subset D \subset \mathbb{R}^2$ des domaines bornés de bords $\partial\omega$, respectivement ∂D.
Soit $\Omega_0^S \subset\subset D$ le domaine de structure non déformé, et supposons qu'il est doublent connexe et son bord admet la décomposition $\partial\Omega_0^S = \partial\omega \cup \Gamma_0$, tel que $\overline{\partial\omega} \cap \overline{\Gamma}_0 = \varnothing$. Sur $\partial\omega$ on impose un déplacement nul pour le structure et sur Γ_0 on imposons une condition aux limites de traction.
Supposons que la structure est élastique et notons $\mathbf{u} = (u_1, u_2) : \overline{\Omega}_0^S \longrightarrow \mathbb{R}$ son déplacement . Une particule de la structure dont la position initiale était le point $\mathbf{X}$ occupera la position $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$ dans la déformée domaine $\overline{\Omega}_u^S = \varphi(\overline{\Omega}_0^S)$.
On suppose que $\Omega_u^S \subset\subset Z$ pour tout déplacement admissible déplacements $\mathbf{u}$, où Z est un domaine ouvert borné à bord de Lipschitz tel que :

$$\omega \subset\subset Z \subset\subset D. \tag{2.5}$$

Le fluide occupe $\Omega_u^F = D \backslash (\overline{\Omega}_u^S \cup \overline{\omega})$.
Nous fixons $\Gamma_u = \varphi(\Gamma_0)$, alors la frontière de la structure déformée est $\partial\Omega_u^S = \partial\omega \cup \Gamma_u$ et la frontière du domaine fluide admet la décomposition $\partial\Omega_u^F = \partial D \cup \Gamma_u$. Nous observons que $\Omega_u^S \cup \Gamma_u \cup \Omega_u^F$ est le domaine $D \backslash \overline{\omega}$, qui est indépendant du déplacement $\mathbf{u}$.
La configuration géométrique fluide-structure est représentée dans la Figure 2.1.

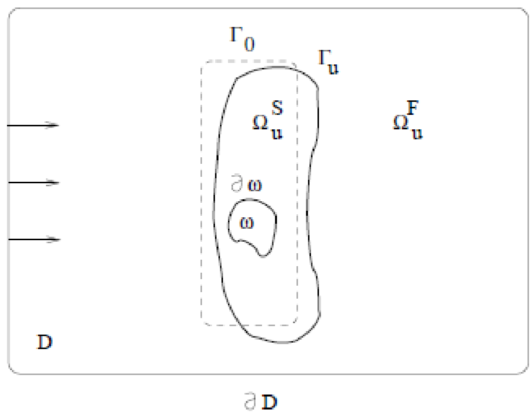


FIGURE 2.1 – La configuration géométrique

Nous supposons que :

$$\omega, D \text{ et } \Omega_0^S \text{ sont Lipschitz.} \tag{2.6}$$

Et :

$$\partial\Omega_u^S \text{ possède la propriété de cone uniforme et la géométrie du cone est indépendante de } \mathbf{u} \tag{2.7}$$

pour tous les " petits " déplacements de structure. Dans [9] il est prouvé qu'un domaine de Lipschitz possède la propriété de cône uniforme, c'est-à-dire la condition (2.7) lorsque $\mathbf{u} = 0$ est compatible avec (2.6).
Comme dans [12], nous supposons que le déplacement de la structure est généré par un nombre fini de modes, c'est-à-dire :

$$\mathbf{u} := \sum_{i=1}^{m} \xi_i \phi^i; \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}^* \tag{2.8}$$

Cela nous permet d'obtenir plus de régularité pour le problème de la structure.
Généralement, les équations de fluides sont décrites à l'aide de coordonnées eulériennes, tandis que pour les équations de structure, les coordonnées lagrangiennes sont utilisées. Les gradients par rapport aux coordonnées eulériennes $\mathbf{x} \in \Omega_u^F$ d'un champ scalaire $q : \Omega_u^F \longrightarrow \mathbb{R}$ ou un champ vectoriel $\mathbf{w} = (w_1, w_2) : \Omega_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont notés ∇q et $\nabla \mathbf{w}$. Les opérateurs de divergence par rapport aux coordonnées eulériennes d'un champ vectoriel $\mathbf{w} = (w_1, w_2) : \Omega_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et d'un tenseur $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \le i,j \le 2}$ sont désignés par $\nabla.\mathbf{w}$ et $\nabla.\sigma$. Lorsque les dérivées sont par rapport aux coordonnées lagrangiennes $\mathbf{X} \in \Omega_0^S$, on utilise les notations : $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}$, $\nabla_{\mathbf{X}}.\mathbf{u}$, $\nabla_{\mathbf{X}}\sigma$.
On utilise les notations :
∇ : Le gradient pour les coordonnées Eulériennes $\mathbf{x}$.
$\nabla.$: La divergence pour les coordonnées Eulériennes $\mathbf{x}$.
∇_X : Le gradient pour les coordonnées Lagrangiennes $\mathbf{X}$.
$\nabla_X.$: La divergence pour les coordonnées Lagrangiennes $\mathbf{X}$.
Si $\mathbf{A}$ est une matrice carrée, on note det$\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$ l'inverse de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ transposé de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-T}$ transposé de l'inverse de $\mathbf{A}$. On note, cof$\mathbf{A} = (\det\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T$ co-facteur de matrice $\mathbf{A}$. Et $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
On note :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{X})$$

le gradient de la déformation, et :

$$J(\mathbf{X}) := \det \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

le déterminant jacobien, où $\mathbf{I}$ est la matrice unitaire.

Formulation forte du problème d'interaction fluide structure

$$-\nabla_X.\sigma^S(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^S, \quad \text{dans } \Omega_0^S. \tag{2.9}$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\omega. \tag{2.10}$$

$$-\nabla.\sigma^F(\mathbf{v}, p) = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } \Omega_u^F. \tag{2.11}$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \Omega_u^F. \tag{2.12}$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \partial D. \tag{2.13}$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_u. \tag{2.14}$$

$$\|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\sigma^F(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}^F)\ o\ \varphi = -\sigma^S(\mathbf{u})\mathbf{n}^S, \quad \text{sur } \Gamma_0. \tag{2.15}$$

Tel que :

$$\|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2} = \|\text{cof } (\mathbf{F})\ \mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}, \quad \text{sur } \ \partial\Omega_0^S.$$

Et on a :

u : Déplacement de la structure défini par :

$$\mathbf{u} : \overline{\Omega}_0^S \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

v : La vitesse de fluide défini par :

$$\mathbf{v} : \overline{\Omega}_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

p : Pression de fluide défini par :

$$p : \overline{\Omega}_u^F \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\mathbf{f}^S$: Les forces volumiques de structure défini par :

$$\mathbf{f}^S : \overline{\Omega}_0^S \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{f}^F$: Les forces volumiques de fluides défini par :

$$\mathbf{f}^F : \overline{\Omega}_u^F \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{n}^S$: Est le vecteur extérieur de l'unité de structure normal défini sur $\partial\Omega_u^S$.
$\mathbf{n}^F$: Le vecteur extérieur de l'unité fluide normal défini sur $\partial\Omega_0^S$.
σ^S : Tenseur des contraintes de Cauchy de structure défini de :

$$\sigma^S : \Omega_0^S \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Et donné par :

$$\sigma^S(\mathbf{u}) := \lambda^S(\nabla_X.\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu^S\epsilon_X(\mathbf{u}).$$

Où : $\lambda^S, \mu^S > 0$, les Coefficients de Lamé, et $\epsilon_X(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla_X\mathbf{w} + (\nabla_X\mathbf{w})^T)$.
σ^F : Tenseur des contraintes de Cauchy de fluide défini de :

$$\sigma^F : \Omega_u^F \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Et donné par :

$$\sigma^F(\mathbf{v}, p) := -p\mathbf{I} + 2\mu^F\epsilon_X(\mathbf{v}).$$

Les équations (2.9), (2.10) concernent la structure, et les équation (2.11)-(2.13) concernent le fluide. Les équations (2.14), (2.15) représentent les conditions aux limites sur l'interface.

Chapitre 3

Approche de domaine fictif afin de montrer l'existence

Dans ce chapitre, on présente le problème d'interaction fluide-structure (IFS) pénalisé et sa formulation faible. Ensuite, on donne une étude sur l'existence d'un écolement constant de fluide-structure dans le domine fictif, et aussi la convergence de cette solution.

3.1 Méthode de pénalisation

La méthode du domaine fictif est souvent utilisée dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles dans un domaine avec des obstacles mobiles. Elle a été étudiée par certains auteurs : Peskin (2002) [22], Ilinca et Hètu (2011) [14]. Cette méthode est applicable à l'interaction fluide-structure.
L'idée fondatrice des approches de domaine fictifs est d'immerger le domaine original d'étude (ou domaine physique) dans un domaine fictif de forme géométrique plus simple qui devient le domaine de calcul. L'intérêt principal est d'utiliser un maillage cartésien sur le domaine de calcul permettant ainsi la résolution simple et rapide du problème fictif. Il y a plusieurs méthodes de domaine fictif, parmi ces méthodes : méthodes de pénalisation, méthode de la frontière élargie, méthodes de frontières immergées, méthodes de multiplicateur de Lagrange et méthodes de domaines fictifs stabilisées à éléments coupés et pour plus de détails sur ces méthodes, vous pouvez vous référer à [13], nous ne parlerons que de la méthode de pénalisation.
L'idée des méthodes de pénalisation est d'utiliser une unique équation sur le domaine fictif en perturbant le moins possible l'équation sur le domaine réel. Pour cela on introduit un terme de pénalisation. Ce terme est divisé par un paramètre de pénalisation que l'on note ε de telle sorte que le terme de pénalisation soit nul sur le domaine réel et qu'il tens vers l'infini sur le domaine extérieur. Des travaux ont été faites dans le cas des équations elliptiques scalaire avec des conditions aux limites de types Dirichlet, Neumann et Robin.

3.2 Convergence des domaines

Si Ω est un domaine arbitraire, notons $\|.\|_{1,\infty,\Omega}$, $\|.\|_{0,\infty,\Omega}$ les normes habituelles de les espaces de Sobolev $W^{1,\infty}(\Omega)$, $L^{\infty}(\Omega)$, respectivement et par $\|.\|_{m,\Omega}$ l'habituel norme de $H^m(\Omega)$, $m \geq 0$ avec la convention $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
La carte :

$$\mathbf{u} \longrightarrow \det\,(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})$$

Tel que : $\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$, et $\det\,(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \in \mathbb{R}$
est continue et vaut 1 pour u $= 0$. Alors, pour tout $0 < \delta < 1$, il existe $0 < \eta_\delta < 1$ tel que :

$$1 - \delta \leq \det\,(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \leq 1 + \delta; \qquad \mathbf{x} \in \Omega_0^S \tag{3.1}$$

pour tout $\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$ qui satisfont $\|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq \eta_\delta$.
Nous définissons :

$$B_\delta := \{\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2; \|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq \eta_\delta, \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\omega\}. \tag{3.2}$$

Ensuite, nous définissons les fonctions caractéristique $\mathcal{X}_u^S : D \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{X}_u^S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_u^S \\ 0, & \mathbf{x} \in D \backslash \Omega_u^S \end{cases}$$

Nous suivons la terminologie de [21], Annexe 3, p .456. Nous disons que les ensembles ouverts $\Omega_{u_n}^F$ convergent vers l'ensemble ouvert Ω_u^F dans le "Hausdorff-Pompeiu" sens complémentaire si et seulement si les ensembles compacts $\overline{D} \backslash \Omega_{u_n}^F$ converge vers le ensemble compact $\overline{D} \backslash \Omega_u^F$ au sens de la distance "Hausdorff-Pompeiu".

Lemme 3.1. *Soit Ω_0^S être un domaine ouvert et délimité avec une frontière de Lipschitz et $\boldsymbol{u}_n \in B_\delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $\boldsymbol{u}_n \to \boldsymbol{u}$ fortement dans $(W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$. Alors :*
1) $\Omega_{u_n}^S \to \Omega_u^S$ et $\Omega_{u_n}^F \to \Omega_u^F$ au sens complémentaire "Hausdorff-Pompeiu" sens.
2) $\mathcal{X}_{u_n}^S \to \mathcal{X}_u^S$ presque partout dans D.

Preuve. 1) Voir le [17], Proposition 3 :
Soit $\mathbf{u}_n, \mathbf{u} \in B_\delta$, tel que $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ fortement dans $(W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2$ au sens de "Hausdorff-Pompeiu".
Montrons que $\Omega_{u_n}^S \to \Omega_u^S$, i.e :

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_{u_n}^S = \Omega_u^S$$

Nous prouvons l'égalité en incluant les deux cotés, i.e :

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_{u_n}^S \subset \Omega_u^S \ \text{ et } \ \Omega_u^S \subset \lim_{n \to \infty} \Omega_{u_n}^S$$

• $\lim\limits_{n \to \infty} \Omega_{u_n}^S \overset{?}{\subset} \Omega_u^S$:
D'après la compacité de la métrique de "Hausdorff-Pompeiu", la limite existe sur une sous-suite (à nouveau désigné par n) et on a :

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_{u_n}^S := \{y \in \mathbb{R}^2; \exists x_n \in \Omega_0^S, \quad y = \lim_{n \to \infty} (x_n + u_n(x_n))\}.$$

Supposons que pour $n \to \infty$, $x_n \to x_0$, alors : $y = x_0 + \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_n)$.
On ajoute : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0) - \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0)$. Donc :

$$\begin{aligned} y &:= x_0 + \lim_{n\to\infty} u_n(x_n) + \lim_{n\to\infty} (u_n(x_0) - u_n(x_0)) \\ &:= x_0 + \lim_{n\to\infty} u_n(x_0) + \lim_{n\to\infty} (u_n(x_n) - u_n(x_0)) \\ &:= x_0 + \lim_{n\to\infty} u_n(x_0) \end{aligned}$$

Tel que : $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n(x_n) - u_n(x_0)) = 0$.
Et on a $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$, alors :

$$y := x_0 + u(x_0).$$

Par la propriété Lipschitz uniforme de $\mathbf{u}_n \in B_\delta$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \Omega^S_{u_n} \subset \Omega^S_u.$$

• $\Omega^S_u \overset{?}{\subset} \lim\limits_{n\to\infty} \Omega^S_{u_n}$:
$\forall z \in \Omega^S_0$, $y \in \Omega^S_u$, tel que :

$$y := z + u(z)$$

et on a $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ pour $n \to \infty$, alors :

$$\begin{aligned} y &:= z + \lim_{n\to\infty} u_n(z) \\ &:= \lim_{n\to\infty} (z + u_n(z)) \end{aligned}$$

Comme la limite est unique, la convergence est valide sans prendre de sous-suites. D'après les propriétés de régularité de Ω^S_u, $\Omega^S_{u_n}$, ce qui précède la convergence des ensembles ouverts $\Omega^S_{u_n} \to \Omega^S_u$ au sens complémentaire de " Hausdorff-Pompieu " [[21], p . 465].
($\Omega^F_{u_n} \to \Omega^F_u$ prouver de la même manière.)
2) Montrons que $\mathcal{X}^S_{u_n} \to \mathcal{X}^S_u$ presque partout dans D :
Elle est similaire à la Proposition A.3.5 de [21], p.464 en utilisant ça $\partial\Omega^S_u$ a une mesure nulle.
Soit $\mathbf{x} \in \Omega^S_u$, alors il existe $\mathbf{K}$ compact tel que :

$$\mathbf{x} \in \mathbf{K} \subset \Omega^S_u.$$

La convergence complémentaire "Hausdorff-Pompeiu" des sets a la propriété, voir [19], Proposition 2.2.15, p.32.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \mathbf{K} \subset \Omega^S_{u_n}. \tag{3.3}$$

On obtient que :
Si $\mathbf{x} \in \Omega^S_u$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}^S_{u_n}(\mathbf{x}) = 1 = \mathcal{X}^S_u(\mathbf{x})$$

Si $\mathbf{x} \in D \backslash \overline{\Omega}^S_u$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}^S_{u_n}(\mathbf{x}) = 0 = \mathcal{X}^S_u(\mathbf{x}).$$

Mais ; $D = \Omega^S_u \cup \Gamma_u \cup \partial\omega \cup (D \backslash \overline{\Omega}^S_u)$, et $\partial\Omega^S_u = \Gamma_u \cup \partial\omega$ a une mesure nulle.
Alors $\mathcal{X}^S_{u_n} \to \mathcal{X}^S_u$ presque partout dans D. □

3.3 Formulation faible utilisant la technique des domaines fictifs avec pénalisation

• On a Les équations (2.9), (2.10) concernent la structure :

$$-\nabla_X.\sigma^S(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^S, \quad \text{dans } \Omega_0^S.$$
$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\omega.$$

En multipliant le premier équation par la fonction test $\mathbf{w}^S : \Omega_0^S \to \mathbb{R}^2$

$$-\nabla_X.\sigma^S(\mathbf{u}).\mathbf{w}^S = \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S$$

En intègrant sur Ω_0^S :

$$-\int_{\Omega_0^S} \nabla_X.\sigma^S(\mathbf{u}).\mathbf{w}^S \; dX = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \; dX$$

En utilisant la formule de Green :

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_X.\mathbf{w}^S \; dX - \int_{\partial(\omega)} \sigma^S(\mathbf{u}).\mathbf{w}^S\mathbf{n}^S \; d\sigma = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \; dX$$

Et l'espace des fonctions tests est un espace de Hilbert, tel que :

$$W^S := \{\mathbf{w}^S \in (H^1(\Omega_0^S))^2; \quad \mathbf{w}^S = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega\}$$

Alors :

$$\int_{\Omega_0^S} \sigma^S(\mathbf{u}) : \nabla_X.\mathbf{w}^S \; dX = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \; dX$$

Et on a

$$\sigma^S(\mathbf{u}) := \lambda^S(\nabla_X.\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu^S\epsilon_X(\mathbf{u})$$

Donc :

$$\int_{\Omega_0^S} (\lambda^S(\nabla_X.\mathbf{u})(\nabla_X.\mathbf{w}^S) + 2\mu^S\epsilon_X(\mathbf{u}) : \epsilon_X(\mathbf{w}^S)) \; dX = \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \; dX.$$

Donc :

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{w}^S) = F(\mathbf{w}^S); \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S$$

tel que : $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega_0^S))^2$, et $\mathbf{f}^S \in (L^2(\Omega_0^S))^2$.

La forme bilinéaire :

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{w}^S) := \int_{\Omega_0^S} (\lambda^S(\nabla_X.\mathbf{u})(\nabla_X.\mathbf{w}^S) + 2\mu^S\epsilon_X(\mathbf{u}) : \epsilon_X(\mathbf{w}^S)) \; dX.$$

Et la forme linéaire :

$$F(\mathbf{w}^S) := \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \; dX.$$

• D'autre part, nous avons :
En multipliant (2.11) par la fonction test $\mathbf{w}$:

$$-\nabla.\sigma^F(\mathbf{v},p).\mathbf{w} = \mathbf{f}^F.\mathbf{w}$$

En intégrant sur $D\backslash\overline{\omega}$:

$$-\int_{D\backslash\overline{\omega}} \nabla.\sigma^F(\mathbf{v},p).\mathbf{w}\ d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}$$

En utilisant la formule de Green :

$$\int_{D\backslash\overline{\omega}} \sigma^F(\mathbf{v},p).(\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x} - \int_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} \sigma^F(\mathbf{v},p).\mathbf{w}\ \mathbf{n}^F\ d\sigma = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}$$

On suppose que $\mathbf{w} = 0$ sur $\partial(D\backslash\overline{\omega})$, alors l'espace des fonctions test est un espace de Hilbert, tel que :

$$W := \{\mathbf{w} \in (H^1(D\backslash\overline{\omega}))^2,\ \ \mathbf{w} = 0\ \text{ sur } D\backslash\overline{\omega}\}.$$

Donc :

$$\int_{D\backslash\overline{\omega}} \sigma^F(\mathbf{v},p).(\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x} \underbrace{- \int_{\partial(D\backslash\overline{\omega})} \sigma^F(\mathbf{v},p).\mathbf{w}\ \mathbf{n}^F\ d\sigma}_{=0} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}$$

Et on a,

$$\sigma^F(\mathbf{v},p) := -p\mathbf{I} + 2\mu^F\epsilon_X(\mathbf{v})$$

Donc :

$$\int_{D\backslash\overline{\omega}} (-p\mathbf{I} + 2\mu^F\epsilon_X(\mathbf{v})).(\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}$$

$$\int_{D\backslash\overline{\omega}} 2\mu^F\epsilon_X(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w})\ d\mathbf{x} - \int_{D\backslash\overline{\omega}} p(\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}$$

Tel que : $\mathbf{v} \in (H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$, $p \in Q$, $\mathbf{f}^F \in (L^2(D\backslash\overline{\omega}))^2$, et Q est un espace de Hilbert, et :

$$Q := L_0^2(D\backslash\overline{\omega}) := \{q \in L^2(D\backslash\overline{\omega});\ \int_{D\backslash\overline{\omega}} q\ dx = 0\}.$$

Donc :

$$a_F(\mathbf{v},\mathbf{w}) + b_F(\mathbf{w},p) = F(\mathbf{w})$$

tel que les formes bilinéaire

$$a_F(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \int_{D\backslash\overline{\omega}} 2\mu^F\epsilon_X(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w})\ d\mathbf{x}$$

et ;

$$b_F(\mathbf{w},p) := -\int_{D\backslash\overline{\omega}} p\ (\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x}$$

et la forme linéaire

$$F(\mathbf{w}) := \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x}.$$

3.3.1 Formulation du fluide faible utilisant un domaine fictif

Pour un $\mathbf{u} \in B_\delta$ donné, on définit la vitesse du fluide $\mathbf{v}_\varepsilon \in W$ et la pression du fluide $p_\varepsilon \in Q$, comme solution du problème suivant :

$$a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w}) + b_F(\mathbf{w}, p_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla \mathbf{v}_\varepsilon : \nabla \mathbf{w})\, d\mathbf{x} = \int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{w} \in W \quad (3.4)$$

$$b_F(\mathbf{v}_\varepsilon, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (3.5)$$

3.3.2 Formulation de la structure faible

Pour donné $\mathbf{u} \in B_\delta$, $\mathbf{v}_\varepsilon \in W$ et $p_\varepsilon \in Q$, nous définissons le déplacement de la structure $\mathbf{u}_\varepsilon \in W^S$ comme solution de :

$$\begin{aligned} a_S(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}^S) = & \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S\, d\mathbf{X} + \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) \circ \varphi)\mathbf{F}^{-T} : \nabla_X \mathbf{w}^S\, d\mathbf{X} + \\ & \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_0^S} J((\mathbf{v}_\varepsilon \circ \varphi).\mathbf{w}^S + (\nabla \mathbf{v}_\varepsilon \circ \varphi).\mathbf{F}^{-T} : \nabla_X \mathbf{w}^S)\, d\mathbf{X} \\ & - \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi).\mathbf{w}^S\, d\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où : $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$, $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X})$, et $J(\mathbf{X}) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X})$.
On peut prouver comme dans [17] que la somme des trois derniers termes de (3.6) est égale aux forces fluides agissant sur la structure.
La forme bilinéaire a_S est symétrique, continue et de l'inégalité de Kôrn on obtient l'ellipticité (voir [10], Théorème 6.3-4, p. 292). L'encastrement de $H^1(\Omega_0^S)$ dans $L^2(\Omega_0^S)$ est compact, alors on obtient que l'opérateur $T_S : (L^2(\Omega_0^S))^2 \to (L^2(\Omega_0^S))^2$, défini par $\mathbf{u} = T_S \mathbf{f}$, où :

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{w}^S) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}^S), \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S$$

est compacte. Suivent [Voir [6], secte. IX.8], il existe une suite croissante de valeurs propres :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$$

et une base orthonormée $\{\phi^i, i \in \mathbb{N}^*\}$ de $L^2(\Omega_0^S)$ constitué des fonctions propres normalisées vérifiant :

$$a_S(\phi^i, \mathbf{w}^S) := \lambda_i \int_{\Omega_0^S} \phi^i.\mathbf{w}^S\, dX, \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S. \quad (3.7)$$

Et :

$$\int_{\Omega_0^S} \phi^i.\phi^j\, dX = \delta_{ij}. \quad (3.8)$$

Où :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Et [3] :

$$\phi^i(X) = \begin{cases} \frac{X_{i+1}-X}{h}, & \text{si} \quad X \in [X_i, X_{i+1}]; \\ \frac{X-X_{i-1}}{h}, & \text{si} \quad X \in [X_{i-1}, X_i]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tel que : $h_i = X_{i+1} - X_i$, et $h = \max\{h_i\}$ pour $i = \overline{1, N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ être donné. Soit $\mathbf{u}_\varepsilon^m$ la projection orthogonale de $\mathbf{u}_\varepsilon$ sur

$$\text{portée}(\phi^i, i = 1, ..., m)$$

dans $L^2(\Omega_0^S)$, alors $\mathbf{u}_\varepsilon^m := \sum_{i=1}^m \xi_i \phi^i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}$.
Nous définissons :

$$B_\delta^m := \{\mathbf{u} \in (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2;\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\omega,\ \|\mathbf{u}\|_{1,\infty,\Omega_0^S} < \eta_\delta,\ \mathbf{u} = \sum_{i=1}^m \xi_i \phi^i, \xi_i \in \mathbb{R}.\} \tag{3.9}$$

Nous avons $B_\delta^m \subset B_\delta$. Pour chaque $\mathbf{u} \in B_\delta$, on définit l'opérateur non linéaire :

$$T_\varepsilon^m(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_\varepsilon^m.$$

Soit $\mathbf{u}_\varepsilon^m$ un point fixe de T_ε^m dans B_δ^m. Une solution du problème pénalisé d'interaction fluide-structure sera, par définition ,$\mathbf{u}_\varepsilon^m$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε, où $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε est la solution de (3.4)-(3.5) pour $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon^m$.

3.4 Estimations indépendantes de ε

Lemme 3.2. *Soit $\omega \subset\subset \Omega \subset\subset D$ tel que $\partial\Omega$ ait la propriété de cône uniforme. Alors, il existe un opérateur d'extension uniforme E de*

$$V = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega\backslash\overline{\omega}))^2;\ \nabla.\boldsymbol{v} = 0 \ \textit{dans}\ \Omega\backslash\overline{\omega}, \boldsymbol{v} = 0 \ \textit{sur}\ \partial\omega\}$$

pour $(H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$ tel que :

$$\nabla.E(\boldsymbol{v}) = 0,\ \textit{dans}\ D\backslash\overline{\omega}$$
$$E(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v},\ \textit{dans}\ \Omega\backslash\overline{\omega}$$
$$\|E(\boldsymbol{v})\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \leq K\|\boldsymbol{v}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}};$$

Où la constante $K > 0$ est indépendante de Ω, mais elle dépend de la géométrie du cône.

Preuve. Soit le $\mathbf{v}$ un élément de V. Si nous étendons $\mathbf{v}$ par zéro dans $\overline{\omega}$, nous obtenons un élément de $(H^1(D))^2$.
On considère le domaine fixe Z vérifiant (2.6) et on suppose que $\Omega \subset\subset Z$. Puisque $\partial\Omega$

a la propriété de cône uniforme, il découle de [9] que il existe un opérateur d'extension uniforme $e : (H^1(\Omega))^2 \to (H_0^1(Z))^2$, tel que :

$$
\begin{aligned}
e(\mathbf{v}) &= 0, \text{ dans } \overline{\omega} \\
e(\mathbf{v}) &= \mathbf{v}, \text{ dans } \Omega\backslash\overline{\omega} \\
\|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} = \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z} &\leq K_1\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega\backslash\overline{\omega}}
\end{aligned}
$$

où la constante $K_1 > 0$ est indépendante de Ω, mais elle dépend de la géométrie du cône. On note :

$$
\widetilde{e(\mathbf{v})} = \begin{cases} e(\mathbf{v}), & \textit{dans} \quad Z\backslash\overline{\omega} \\ 0, & \textit{dans} \quad D\backslash\overline{Z}. \end{cases}
$$

Puisque $e(\mathbf{v})$ appartient à $(H_0^1(Z\backslash\overline{\omega}))^2$, alors $\widetilde{e(\mathbf{v})}$ est dans $(H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$.
Maintenant, on résout le problème de Bogowskii en $D\backslash\overline{\Omega}$, voir par exemple [15]

Théorème 3.3. *Page 129. Il existe $\boldsymbol{w} \in (H_0^1(D\backslash\overline{\Omega}))^2$ tel que :*

$$
\nabla.\boldsymbol{w} = \nabla.\widetilde{e(\boldsymbol{v})}, \quad \textit{dans} \quad D\backslash\overline{\Omega} \tag{3.10}
$$

$$
\boldsymbol{w} = 0, \quad \textit{sur} \quad \partial D
$$

$$
\boldsymbol{w} = 0, \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega
$$

$$
\|\boldsymbol{w}\|_{1,D\backslash\overline{\Omega}} \leq K_2\|\nabla.\widetilde{e(\boldsymbol{v})}\|_{0,D\backslash\overline{\Omega}} \tag{3.11}
$$

où la constante $K_2 > 0$ est indépendante de Ω. En effet, le domaine obtenu par petite perturbation d'un domaine de Lipschitz est l'union d'une étoile domaines par rapport à chaque point de certaines boules, tel que le rayon des les balles est indépendant de la perturbation.

Nous introduisons :

$$
\widetilde{\mathbf{w}} = \begin{cases} \mathbf{w}, & \textit{dans} \quad D\backslash\overline{\Omega} \\ 0, & \textit{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \end{cases}
$$

Et nous avons $\widetilde{\mathbf{w}} \in (H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$.
L'opérateur d'extension uniforme à divergence libre est défini par

$$
E(\mathbf{v}) = \widetilde{e(\mathbf{v})} - \widetilde{\mathbf{w}}
$$

qui appartient à $(H_0^1(D\backslash\overline{\omega}))^2$.
De plus, il vérifie :

$$
E(\mathbf{v}) = \begin{cases} \widetilde{e(\mathbf{v})} = e(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, & \textit{dans} \quad \Omega\backslash\overline{\omega} \\ \widetilde{e(\mathbf{v})} - \mathbf{w}, & \textit{dans} \quad D\backslash\overline{\Omega}. \end{cases}
$$

Mais on a : $\nabla.\mathbf{v} = 0$ dans $\Omega\backslash\overline{\omega}$, et de (3.10) on a : $\nabla.\mathbf{w} = \nabla.\widetilde{e(\mathbf{v})}$ dans $D\backslash\overline{\Omega}$.
Alors :

$$
\nabla.E(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } D\backslash\overline{\omega}.
$$

De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|E(\mathbf{v})\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} &:= \|\widetilde{e(\mathbf{v})} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \\
&\leq \|\widetilde{e(\mathbf{v})}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|\widetilde{\mathbf{w}}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \\
&\overset{\text{déf}}{=} \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} + \|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\Omega}} \\
&\overset{(3.11)}{\leq} \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} + K_2\|\nabla.\widetilde{e(\mathbf{v})}\|_{0,D\backslash\overline{\Omega}} \\
&\overset{\text{de norme}}{\leq} \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} + K_3\|\widetilde{e(\mathbf{v})}\|_{1,D\backslash\overline{\Omega}} \\
&\overset{\text{déf}}{=} \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} + K_3\|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\Omega}} \\
&\leq \|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} + K_3\|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} \\
&= (1+K_3)\|e(\mathbf{v})\|_{1,Z\backslash\overline{\omega}} \\
&\overset{\text{déf}}{\leq} (1+K_3)K_1\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega\backslash\overline{\omega}}.
\end{aligned}$$

On suppose $K = (1+K_3)K_1$, alors :

$$\|E(\mathbf{v})\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \leq K\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega\backslash\overline{\omega}}.$$

Ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.4. *Ce lemme et sa preuve peuvent être principalement comparé à Corollaire 3.1, Chapitre 3, p. 136, de [15].*

Proposition 3.5. *Soit D et Ω_0^S ensembles ouverts bornés vérification* (2.6)*. Nous supposons que $\boldsymbol{f}^F \in (L^2(D\backslash\overline{\omega}))^2$ et $\boldsymbol{u} \in B_\delta$. Il existe une solution unique de* (3.4)-(3.5) *tel que $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in W$ et $p_\varepsilon \in Q$. De plus, il existe une constante C_1 indépendant de $\varepsilon > 0$ et $\boldsymbol{u} \in B_\delta$, tel que :*

$$\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq C_1\|\boldsymbol{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}. \tag{3.12}$$

Preuve. A suivre par exemple [16], les propriétés ci-dessous sont vérifiés :

$$\exists M_F > 0,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W, \quad |a_F(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq M_F\|\mathbf{v}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \tag{3.13}$$

$$\exists \alpha_F > 0,\ \forall \mathbf{w} \in W, \quad a_F(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha_F\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \tag{3.14}$$

$$\exists N_F > 0,\ \forall \mathbf{w} \in W,\ \forall q \in Q \quad |b_F(\mathbf{w}, q)| \leq N_F\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|q\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \tag{3.15}$$

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{\substack{q\in Q\\ q\neq 0}} \sup_{\substack{w\in W\\ w\neq 0}} \frac{b_F(\mathbf{w}, q)}{\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|q\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}} \geq \beta \tag{3.16}$$

Étant donné que le coefficient $\mathcal{X}_u^S$ est dans $L^\infty(D\backslash\overline{\omega})$ et $0 \leq \mathcal{X}_u^S \leq 1$.
Nous mettons :

$$a_x(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v} : \nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x}.$$

On a $a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est bilinéaire, de plus,
la continuité de $a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})$:
Soient $\mathbf{v},\mathbf{w}\in W$

$$\begin{aligned}
|a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})| &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S\ |(\mathbf{v}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{v}:\nabla\mathbf{w})|\ d\mathbf{x}\\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} |(\mathbf{v}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{v}:\nabla\mathbf{w})|\ d\mathbf{x}\\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\mathbf{v}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\|\nabla\mathbf{w}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\\
&\leq \max\{\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon}\}[\ \|\mathbf{v}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\nabla\mathbf{v}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\|\nabla\mathbf{w}\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}\ ]\\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}[(\|\mathbf{v}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\nabla\mathbf{v}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}})^{\frac{1}{2}}(\|\mathbf{w}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\nabla\mathbf{w}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}})^{\frac{1}{2}}]\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})| \leq M_F\|\mathbf{v}\|_{1,W}\|\mathbf{w}\|_{1,W}$$

Alors $a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est continue, avec $M_F := \frac{1}{\varepsilon}$ la constante de continuité.
La coercivité de $a_x(\mathbf{v},\mathbf{w})$:
Soit $\mathbf{w}\in W$,

$$\begin{aligned}
a_x(\mathbf{w},\mathbf{w}) &:= \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{w}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}:\nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\Omega_u^S} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{w}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}:\nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{w}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}:\nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S} (\mathbf{w}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{w}:\nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S} ((\mathbf{w})^2+(\nabla\mathbf{w})^2)\ d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} ((\mathbf{w})^2+(\nabla\mathbf{w})^2)\ d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}[\|\mathbf{v}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\nabla\mathbf{v}\|^2_{0,D\setminus\overline{\omega}}]\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{w}\|^2_{1,D\setminus\overline{\omega}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$a_x(\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq \alpha_x\|\mathbf{w}\|^2_W$$

donc, $a_x(\mathbf{w},\mathbf{w})$ est coercive.
Alors la forme :

$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) \mapsto a_F(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}.\mathbf{w}+\nabla\mathbf{v}:\nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x}$$

est bilinéaire, continu et coercive. Du théorème de Babushka-Brezzi, voir par exemple [16], le problème (3.4)-(3.5) a une solution unique $\mathbf{v}_\varepsilon \in W$ et $p_\varepsilon \in Q$. De plus, on suppose $\mathbf{w} = \mathbf{v}_\varepsilon$ dans (3.4) et en utilisant (3.5), on obtient :

$$a_F(\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{v}_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{v}_\varepsilon+\nabla\mathbf{v}_\varepsilon:\nabla\mathbf{v}_\varepsilon)\ d\mathbf{x} = \int_{D\setminus\overline{w}} \mathbf{f}^F.\mathbf{v}_\varepsilon\ d\mathbf{x}.$$

Et on a $\mathcal{X}_u^S \geq 0$, en utilisant (3.14), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}^2 \leq a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon) \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}.$$

Alors :

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}^2 \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}.$$

Donc ;

$$\alpha_F \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{u} \in B_\delta$, on a :

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \leq \frac{1}{\alpha_F} \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}. \tag{3.17}$$

Sous l'hypothèse (2.7) pour tout $\mathbf{u} \in B_\delta$, et en utilisant le lemme 3.2 avec $\Omega = \Omega_u^S \cup \overline{\omega}$, il existe $E(\mathbf{v}_\varepsilon) \in W$ tel que :

$$\nabla . E(\mathbf{v}_\varepsilon) = 0, \quad \text{dans} \quad D\backslash\overline{\omega} \tag{3.18}$$

$$E(\mathbf{v}_\varepsilon) = \mathbf{v}_\varepsilon, \quad \text{dans} \quad \Omega_u^S \tag{3.19}$$

$$\|E(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \leq K \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} \tag{3.20}$$

Où la constante $K > 0$ est indépendante de $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{u} \in B_\delta$.
En posant $\mathbf{w} = E(\mathbf{v}_\varepsilon)$ dans (3.4), on obtient :

$$a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, E(\mathbf{v}_\varepsilon)) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S (\mathbf{v}_\varepsilon . E(\mathbf{v}_\varepsilon) + \nabla \mathbf{v}_\varepsilon : \nabla E(\mathbf{v}_\varepsilon)) \, d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F . E(\mathbf{v}_\varepsilon) \, d\mathbf{x}.$$

Alors :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S (\mathbf{v}_\varepsilon . E(\mathbf{v}_\varepsilon) + \nabla \mathbf{v}_\varepsilon : \nabla E(\mathbf{v}_\varepsilon)) \, d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F . E(\mathbf{v}_\varepsilon) \, d\mathbf{x} - a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, E(\mathbf{v}_\varepsilon)).$$

On a, $\mathcal{X}_u^S = 1$ dans Ω_u^S, alors :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_u^S} (\mathbf{v}_\varepsilon . E(\mathbf{v}_\varepsilon) + \nabla \mathbf{v}_\varepsilon : \nabla E(\mathbf{v}_\varepsilon)) \, d\mathbf{x} = \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F . E(\mathbf{v}_\varepsilon) \, d\mathbf{x} - a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, E(\mathbf{v}_\varepsilon)).$$

De (3.19), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} (\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}^2 + \|\nabla . \mathbf{v}_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}^2) \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|E(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + |a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, E(\mathbf{v}_\varepsilon))|.$$

Donc :

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}^2 \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|E(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + |a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, E(\mathbf{v}_\varepsilon))|.$$

Et de (3.13), alors :

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}^2 \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \|E(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + M_F \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \|E(\mathbf{v}_\varepsilon)\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}.$$

Et pour (3.20), alors :

$$\frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}^2 \leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} K \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} + M_F \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} K \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}.$$

Donc :

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} \leq K(\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}})$$

Et de (3.17), Donc :

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} \leq K(\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \frac{M_F}{\alpha_F}\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}).$$

On obtient que :

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} \leq K_1\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \tag{3.21}$$

tel que $K_1 = K(1+\frac{M_F}{\alpha_F})$ est indépendant de $\varepsilon > 0$, et $\mathbf{u} \in B_\delta$.
Maintenant, nous pouvons estimer la pression du fluide. De (3.4), en utilisant Cauchy-Schwarz, et (3.13), alors on a :

$$\begin{aligned}
|b_F(\mathbf{w}, p_\varepsilon)| &= |\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\; d\mathbf{x} - a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w}) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\mathbf{w})\; d\mathbf{x}| \\
&\leq \int_{D\backslash\overline{\omega}} |\mathbf{f}^F.\mathbf{w}|\; d\mathbf{x} + |a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w})| + \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\backslash\overline{\omega}} |\mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\mathbf{w})|\; d\mathbf{x} \\
&\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \\
&\leq \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} \\
&\leq (\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S})\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}
\end{aligned}$$

En tenant compte des estimation (3.17) et (3.21), on obtient :

$$\forall \mathbf{w} \in W, \quad |b_F(\mathbf{w}, p_\varepsilon)| \leq (1 + \frac{M_F}{\alpha_F} + K_1)\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}$$

allors si $\mathbf{w} \neq 0$

$$\frac{|b_F(\mathbf{w}, p_\varepsilon)|}{\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}} \leq (1 + \frac{M_F}{\alpha_F} + K_1)\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}$$

de $\inf - \sup$ la condition (3.16), implique que :

$$\beta\|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq \sup_{\substack{\mathbf{w}\in W\\ \mathbf{w}\neq 0}} \frac{b_F(\mathbf{w}, p_\varepsilon)}{\|\mathbf{w}\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}} \leq (1 + \frac{M_F}{\alpha_F} + K_1)\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}$$

Alors :

$$\beta\|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq (1 + \frac{M_F}{\alpha_F} + K_1)\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}$$

Donc :

$$\|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq K_4\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \tag{3.22}$$

tel que $K_4 = \dfrac{1 + \frac{M_F}{\alpha_F} + K_1}{\beta} > 0$.
En additionnant (3.17) par (3.22), on obtient :

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} \leq C_1\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}.$$

Tel que : $C_1 = (\frac{1}{\alpha_F} + K_4)$. Alors, on obtient (3.12). $\square$

Proposition 3.6. *Soient D et Ω_0^S des ensembles ouverts bornés vérifiant* (2.6). *Nous supposons que $\boldsymbol{f}^S \in (L^2(\Omega_0^S))^2$, $\boldsymbol{f}^F \in (L^2(D\backslash\overline{\omega}))^2$, et $\boldsymbol{u} \in B_\delta$.*
Si $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in W$ et $p_\varepsilon \in Q$ sont solutions de (3.4)-(3.5), *alors le problème* (3.6) *admit une unique solution $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in W^S$, et il existe une constante C_2 indépendant de $\varepsilon > 0$ et $\boldsymbol{u} \in B_\delta$, tel que :*

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega_0^S} \leq C_2(\|\boldsymbol{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \|\boldsymbol{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}). \tag{3.23}$$

Preuve. On définit le second membre de (3.6) par :

$$\begin{aligned}< G, \mathbf{w}^S >:= &\int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} + \int_{\Omega_0^S} J(\sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) \circ \varphi)\mathbf{F}^{-T} : \nabla_X \mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_0^S} J((\mathbf{v}_\varepsilon \circ \varphi).\mathbf{w}^S + (\nabla\mathbf{v}_\varepsilon \circ \varphi)\mathbf{F}^{-T} : \nabla_X \mathbf{w}^S) \, d\mathbf{X} \\ &- \int_{\Omega_0^S} J(\mathbf{f}^F \circ \varphi).\mathbf{w}^S \, d\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S.\end{aligned}$$

Définissons $\widetilde{\mathbf{w}}^S : \Omega_u^S \to \mathbb{R}^2$ par $\widetilde{\mathbf{w}}^S = \mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1}$. On comprend $\widetilde{\mathbf{w}}^S \in (H^1(\Omega_u^S))^2$ et $\widetilde{\mathbf{w}}^S = 0$ sur $\partial\omega$. Les trois dernières intégrales de la définition de G peuvent être écrites sur le domaine Ω_u^S. Des détails sur ce type de transformation peuvent être trouvés dans [10], section 1.7.

$$\begin{aligned}< G, \mathbf{w}^S > :=& \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S \, d\mathbf{X} + \int_{\Omega_u^S} \sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S}(\mathbf{v}_\varepsilon.\widetilde{\mathbf{w}}^S + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S)d\mathbf{x} \\ &- \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}^S d\mathbf{x} \\ :=& \int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Omega_u^S} 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}_\varepsilon) : \epsilon(\widetilde{\mathbf{w}}^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_u^S}(\nabla.\widetilde{\mathbf{w}}^S)p_\varepsilon d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S}(\mathbf{v}_\varepsilon.\widetilde{\mathbf{w}}^S + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}^S d\mathbf{x}\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}|< G, \mathbf{w}^S >| :=& |\int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Omega_u^S} 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}_\varepsilon) : \epsilon(\widetilde{\mathbf{w}}^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_u^S}(\nabla.\widetilde{\mathbf{w}}^S)p_\varepsilon d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S}(\mathbf{v}_\varepsilon.\widetilde{\mathbf{w}}^S + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_u^S} \mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}^S d\mathbf{x}| \\ \leq& \int_{\Omega_0^S}|\mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S|d\mathbf{X} + \int_{\Omega_u^S}|2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}_\varepsilon) : \epsilon(\widetilde{\mathbf{w}}^S)|d\mathbf{x} + \int_{\Omega_u^S}|(\nabla.\widetilde{\mathbf{w}}^S)p_\varepsilon|d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_u^S}|(\mathbf{v}_\varepsilon.\widetilde{\mathbf{w}}^S + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S)|d\mathbf{x} + \int_{\Omega_u^S}|\mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}^S|d\mathbf{x} \\ \leq& \|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S}\|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{1,\Omega_u^S} + N_F\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{1,\Omega_u^S} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}(\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} + \|\nabla\mathbf{v}_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S}) + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} \\ \leq& \|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S}\|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} + M_F\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{1,\Omega_u^S} + N_F\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{1,\Omega_u^S} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{1,\Omega_u^S} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\Omega_u^S}\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S}\end{aligned}$$

De plus $\widetilde{\mathbf{w}}^S \circ \varphi = \mathbf{w}^S$. Alors l'égalité suivante est vraie :

$$\int_{\Omega_u^S} |\widetilde{\mathbf{w}}^S|^2 d\mathbf{x} := \int_{\Omega_0^S} |\mathbf{w}^S|^2 J d\mathbf{X},$$

Alors de Cauchy Schwarz : $\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} \leq \|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} \|J\|_{0,\Omega_0^S}$.
mais on a $J(X) = \det\mathbf{F}(X) = \det(\mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u}(X))$. Alors, on déduit de (3.1) que $\|J\|_{0,\Omega_0^S} = \sqrt{1+\delta}$
Donc : $\|\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} \leq \sqrt{1+\delta}\|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S}$.
De la règle de la chaine, nous avons : $\nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S = (\nabla_X \mathbf{w}^S)\mathbf{F}^{-1}$.
De Cauchy Schwarz : $\|\nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} \leq \|\nabla_X \mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} \|\mathbf{F}^{-1}\|_{0,\Omega_0^S}$.
Alors de (3.1), et $\mathbf{u} \in B_\delta$, on obtient :

$$\|\nabla\widetilde{\mathbf{w}}^S\|_{0,\Omega_u^S} \leq M(\delta, \eta_\delta)\|\nabla_X \mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S}$$

Où $M(\delta, \eta_\delta)$ est constante liée à δ et η.
Nous avons ça :

$$\begin{aligned} |< G, \mathbf{w}^S >| \leq{}& \|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S}\|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} + M^1\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} + M^2\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} \\ &+ M^3\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} + M^4\|\mathbf{f}^F\|_{0,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{0,\Omega_0^S} \end{aligned}$$

où M^1, M^2, M^3, M^4 des constante. Donc :

$$\begin{aligned} |< G, \mathbf{w}^S >| \leq{}& \|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} + M^1\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} + M^2\|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} \\ &+ M^3\frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} + M^4\|\mathbf{f}^F\|_{0,\Omega_u^S}\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} \\ \leq{}& M_1(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} + \|p_\varepsilon\|_{0,\Omega_u^S} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,\Omega_u^S} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,\Omega_u^S})\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} \end{aligned}$$

où $M_1 = \max\{M^1, M^2, M^3, M^4\}$.
Mais $\|.\|_{0,\Omega_u^S} \leq \|.\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}$, et $\|.\|_{1,\Omega_u^S} \leq \|.\|_{1,D\backslash\overline{\omega}}$, et (3.21), on obtient :

$$\frac{|< G, \mathbf{w}^S >|}{\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S}} \leq M_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}), \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S$$

L'application $\mathbf{w}^S \to < G, \mathbf{w}^S >$, tel que $< G, \mathbf{w}^S > \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{w}^S \in W^S$, est linéaire et continue, et a_S bilinéaire continu, et coercive dans W^S.
Par conséquent, le problème variationnelle (3.6) a une solution unique $\mathbf{u}_\varepsilon \in W^S$.
Donc :

$$\frac{\alpha\|\mathbf{w}^S\|^2_{1,\Omega_0^S}}{\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S}} \leq \frac{|< G, \mathbf{w}^S >|}{\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S}} \leq M_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}), \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S$$

où constante $\alpha > 0$.
Alors :

$$\|\mathbf{w}^S\|_{1,\Omega_0^S} \leq C_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}), \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S$$

Donc

$$\|\mathbf{u}_\epsilon\|_{1,\Omega_0^S} \leq C_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\backslash\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\backslash\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}), \quad \text{pour } \mathbf{u}_\epsilon \in W^S$$

où $C_2 = \frac{M_2}{\alpha} > 0$. $\square$

Proposition 3.7. *Si Ω_0^S est de classe C^4 et $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in W^S$ est la solution de (3.6), alors $\boldsymbol{u}_\varepsilon^m \in C^2(\overline{\Omega}_0^S) \subset W^{1,\infty}(\Omega_0^S)$ et :*

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon^m\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq C_3 \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_0^S}. \tag{3.24}$$

Preuve. De la régularité de la solution faible du déplacement linéarisé problème de traction, voir [10], p. 298.
On a $\Omega_0^S \subset \mathbb{R}^2$ est de classe C^4, et le membre de droite de (3.7) est dans $(L^2(\Omega_0^S))^2$. Alors, ϕ^i appartient à $(H^2(\Omega_0^S))^2$.
Nous rappelons cette limite de Ω_0^S a deux parties distinctes $\partial\omega$ et Γ_0, telles que :

$$\overline{\partial\omega} \cap \overline{\Gamma}_0 = \phi.$$

Dans le cas contraire $\overline{\partial\omega} \cap \overline{\Gamma}_0 \neq \phi$, cette régularité du déplacement linéarisé problème de traction peut échouer.
Par récurrence, si le second membre de (3.7) est dans $(H^2(\Omega_0^S))^2$, alors le fonction propre ϕ^i appartient à$(H^4(\Omega_0^S))^2$, et :

$$\|\phi^i\|_{4,\Omega_0^S} \leq k_i \|\phi^i\|_{0,\Omega_0^S} = k_i.$$

Où la constante k_i dépend de Ω_0^S et λ_i.
Nous fixons $K_1 = \max\{k_i, \quad 1 \leq i \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
D'après le théorème d'encastrement de Sobolev [[1], p. 98] on a le compact encastrement continu :

$$H^4(\Omega_0^S) \subset C^2(\overline{\Omega}_0^S) \subset W^{1,\infty}(\Omega_0^S).$$

et on obtient que :

$$\|\phi^i\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq K_2.$$

Où la constante K_2 dépend de Ω_0^S et K_1.
De plus on a : $\mathbf{u}_\varepsilon^m := \sum_{i=1}^m \xi_i \phi^i$. Alors :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon^m\|_{1,\infty,\Omega_0^S} := \|\sum_{i=1}^m \xi_i \phi^i\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq \sum_{i=1}^m \mid \xi_i \mid \|\phi^i\|_{1,\infty,\Omega_0^S} &\leq K_2 \sum_{i=1}^m \mid \xi_i \mid \\ &\leq K_2 \sqrt{m \sum_{i=1}^m \xi_i^2}\end{aligned}$$

Et :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \xi_i^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^m \xi_i^2 (\phi^i)^2} := \sqrt{\sum_{i=1}^m (\xi_i \phi^i)^2} := \|\mathbf{u}_\varepsilon^m\|_{0,\Omega_0^S} \leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_0^S}$$

Donc :

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^m\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \leq C_3 \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_0^S}$$

telles que $C_3 := K_2 \sqrt{m}$. □

3.5 Existence d'une solution pour l'interaction fluide-structure

Lemme 3.8. *Soit $a \in L^\infty(D\backslash\overline{\omega})$, et $a_n \in L^\infty(D\backslash\overline{\omega})$, tel que :*

$$\|a_n\|_{0,\infty,D\backslash\overline{\omega}} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et a_n converge vers a presque partout dans $D\backslash\overline{\omega}$.
Soit h, $g \in L^2(D\backslash\overline{\omega})$, et $g_n \in L^2(D\backslash\overline{\omega})$ tel que g_n converge faiblement vers g dans $L^2(D\backslash\overline{\omega})$.
Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D\backslash\overline{\omega}} a_n g_n h \; dx := \int_{D\backslash\overline{\omega}} agh \; dx.$$

Preuve. Ce résultat est similaire au lemme 4.21 de [25].
De plus

$$\|a_n\|_{0,\infty,D\backslash\overline{\omega}} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Et on a,

$$|a_n| \leq \|a_n\|_{0,\infty,D\backslash\overline{\omega}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$|a_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'autre part on a :

$$|a_n \; h|^2 := |a_n|^2 |h|^2$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{D\backslash\overline{\omega}} |a_n \; h|^2 \; dx &:= \int_{D\backslash\overline{\omega}} |a_n|^2 |h|^2 \; dx \\
&\leq \int_{D\backslash\overline{\omega}} M^2 |h|^2 \; dx \\
&= M^2 \int_{D\backslash\overline{\omega}} |h|^2 \; dx \\
&< +\infty \quad \text{car } h \in L^2(D\backslash\overline{\omega}).
\end{aligned}$$

Pour obtenir la limite ci-dessus, nous allons appliquer le Théorème de la convergence dominé de Lebesgue. En effet
1. La suite $(a_n \; h)$ mesurable par définition.
2. Comme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ presque partout dans $D\backslash\overline{\omega}$.
Alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n \; h := a \; h, \text{ presque partout dans } D\backslash\overline{\omega}$$

Donc
$$\lim_{n\to\infty}\int_{D\backslash\overline{\omega}}(a_nh)^2\ dx := \int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2\ dx.$$
En plus de :
$$\begin{aligned}\|a_nh-ah\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} &:= \|a_nh\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}}+\|ah\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}}-2<a_nh,ah>\\ &=\int_{D\backslash\overline{\omega}}(a_nh)^2\ dx+\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2\ dx-2\int_{D\backslash\overline{\omega}}a_nah^2\ dx.\end{aligned}$$
Alors :
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|a_nh-ah\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}} &:= \lim_{n\to\infty}(\int_{D\backslash\overline{\omega}}(a_nh)^2\ dx+\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2\ dx-2\int_{D\backslash\overline{\omega}}a_nah^2\ dx)\\ &=\lim_{n\to\infty}\int_{D\backslash\overline{\omega}}(a_nh)^2\ dx+\lim_{n\to\infty}\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2dx-2\lim_{n\to\infty}\int_{D\backslash\overline{\omega}}a_nah^2\ dx\\ &=\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2dx+\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2dx-2\int_{D\backslash\overline{\omega}}(ah)^2\ dx\\ &=0\end{aligned}$$
Donc :
$$\lim_{n\to\infty}\|a_nh-ah\|^2_{0,D\backslash\overline{\omega}}=0.$$
Et on a g_n converge faiblement vers g dans $L^2(D\backslash\overline{\omega})$. Et a_nh converge fortement vers ah dans $L^2(D\backslash\overline{\omega})$.
Donc :
$$\lim_{n\to\infty}\int_{D\backslash\overline{\omega}}a_n\ g_n\ h\ dx := \int_{D\backslash\overline{\omega}}\lim_{n\to\infty}a_n\ g_n\ h\ dx := \int_{D\backslash\overline{\omega}}a\ g\ h\ dx.$$
□

Théorème 3.9. *Si $\boldsymbol{f}^F$ et $\boldsymbol{f}^S$ sont "petits", plus précisément, si :*
$$C_3C2((C_1+1)\|\boldsymbol{f}^F\|_{0,D\backslash\overline{\omega}}+\|\boldsymbol{f}^S\|_{0,\Omega_0^S})\leq\eta_\delta,$$
où C_1 , C_2 , et C_3 sont les constantes des (3.12), (3.23), (3.24).
Alors l'opérateur non linéaire T_ε^m a au moins un point fixe dans B_δ^m.

Preuve. En utilisant le "Théorème du point fixe de Schauder". On va montrer que $T_\varepsilon^m(B_\delta^m)\subset B_\delta^m$, et l'opérateur T_ε^m est continue.
Étape 01 : $T_\varepsilon^m(B_\delta^m)\subset B_\delta^m$
Pour $\mathbf{u}\in B_\delta$, on a :
$$T_\varepsilon^m(\mathbf{u}) := \mathbf{u}_\varepsilon^m$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
\|T_\varepsilon^m(\mathbf{u})\|_{1,\infty,\Omega_0^S} &:= \|\mathbf{u}_\varepsilon^m\|_{1,\infty,\Omega_0^S} \\
&\overset{(3.24)}{\leq} C_3\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\Omega_0^S} \\
&\leq C_3\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega_0^S} \\
&\overset{(3.23)}{\leq} C_3C_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + \|\mathbf{v}_\varepsilon\|_{1,D\setminus\overline{\omega}} + \|p_\varepsilon\|_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}) \\
&\overset{(3.12)}{\leq} C_3C_2(\|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S} + C_1\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^F\|_{0,D\setminus\overline{\omega}}) \\
&\leq C_3C_2((C_1+1)\|\mathbf{f}^F\|_{0,D\setminus\overline{\omega}} + \|\mathbf{f}^S\|_{0,\Omega_0^S}) \\
&\leq \eta_\delta
\end{aligned}
$$

De plus $B_\delta^m \subset B_\delta$, alors :

$$T_\varepsilon^m(B_\delta^m) \subset B_\delta^m.$$

Étape 02 : T_ε^m continue

L'opérateur T_ε^m est la composition de trois opérateurs :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_\varepsilon &: B_\delta \to (W,Q), \quad \mathcal{F}_\varepsilon(\mathbf{u}) = (\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon), \\
\mathcal{S}_\varepsilon &: (B_\delta, W, Q) \to W^S, \quad \mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) = \mathbf{u}_\varepsilon, \\
\mathcal{P}^m &: W^S \to B_\delta, \quad \mathcal{P}^m(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbf{u}_\varepsilon^m
\end{aligned}
$$

Plus précisément :

$$T_\varepsilon^m(\mathbf{u}) := \mathcal{P}^m(\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathcal{F}_\varepsilon(\mathbf{u}))).$$

Soit $\mathbf{u}_n \in B_\delta$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\mathbf{u}_n \to \mathbf{u} \ \text{ fortement dans } (W^{1,\infty}(\Omega_0^S))^2.$$

Nous mettons :

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\mathbf{u}_n) = (\mathbf{v}_n, p_n), \quad \mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, p_n) = \mathbf{d}_n.$$

Nous voulons prouver que : $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}_\varepsilon$ faiblement dans W, $p_n \to p_\varepsilon$ faiblement dans Q, et $\mathbf{d}_n \to \mathbf{u}_\varepsilon$ faiblement dans W^S :

En utilisant la proposition 3.5, la suite $(\mathbf{v}_n, p_n)$ est bornée dans $W \times Q$.

Alors il existe $(\mathbf{v}', p')$, tel que $(\mathbf{v}_n, p_n)$ converge faiblement vers une sous-suite $(\mathbf{v}', p')$ dans $W \times Q$.

En utilisant le lemme 3.1, **2)**, et lemme 3.8 avec $a_n = \mathcal{X}_{u_n}^S$.

Alors il est possible de passer à la limite en (3.4)-(3.5) et on obtient que :

$$\mathcal{F}_\varepsilon = (\mathbf{v}', p')$$

Mais le problème fluide (3.4)-(3.5) a une unique solution.

Alors toute la suite $(\mathbf{v}_n, p_n)$ converge faiblement vers $(\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ dans $W \times Q$, i.e :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_n &\to \mathbf{v}_\varepsilon \text{ faiblement dans } W, \\
p_n &\to p_\varepsilon \text{ faiblement dans } Q.
\end{aligned}
$$

Maintenant, nous allons montrer que $\mathbf{d}_n \to \mathbf{u}_\varepsilon$ faiblement dans W^S :
Utilisation des notations :

$$\varphi_n(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_n(\mathbf{X}),$$
$$\mathbf{F}_n(\mathbf{X}) = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_n(\mathbf{X}),$$
$$\mathbf{J}_n(\mathbf{X}) = \det\, \mathbf{F}_n(\mathbf{X}).$$

Dénotons :

$$\begin{aligned} < G_n, \mathbf{w}^S >:= &\int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Omega_0^S} J_n(\sigma^F(\mathbf{v}_n, p_n)\circ\varphi_n)\mathbf{F}_n^{-T} : \nabla_X \mathbf{w}^S d\mathbf{X} \\ &+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_0^S} J_n((\mathbf{v}_n\circ\varphi_n).\mathbf{w}^S + (\nabla\mathbf{v}^n\circ\varphi_n)\mathbf{F}_n^{-T} : \nabla_X\mathbf{w}^S)d\mathbf{X} \\ &- \int_{\Omega_0^S} J_n(\mathbf{f}^F\circ\varphi_n).\mathbf{w}^S d\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{w}^S \in W^S. \end{aligned}$$

Définissons $\widetilde{\mathbf{w}}_n^S : \Omega_{u_n}^S \to \mathbb{R}^2$ par $\widetilde{\mathbf{w}}_n^S = \mathbf{w}^S\circ\varphi_n^{-1}$. On comprend ça :

$$\widetilde{\mathbf{w}}_n^S \in (H^1(\Omega_{u_n}^S))^2 \;\text{ et }\; \widetilde{\mathbf{w}}_n^S = 0 \;\text{ sur }\; \partial\omega.$$

Comme dans la prouve du proposition 3.6, on peut écrire les trois dernières intégrales de G_n sur le domaine $\Omega_{u_n}^S$.
Ensuite, en utilisant les fonctions caractéristiques, on les écrit sur le domaine $D\backslash\overline{\omega}$:

$$\begin{aligned} < G_n, \mathbf{w}^S > := &\int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{\Omega_{u_n}^S} 2\mu^F\epsilon(\mathbf{v}_n) : \epsilon(\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{u_n}^S} (\nabla.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)p_n d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_{u_n}^S} (\mathbf{v}_n.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S + \nabla\mathbf{v}_n : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)d\mathbf{x} - \int_{\Omega_{u_n}^S} \mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S d\mathbf{x} \\ := &\int_{\Omega_0^S} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S d\mathbf{X} + \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S 2\mu^F\epsilon(\mathbf{v}_n) : \epsilon(\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)d\mathbf{x} - \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S(\nabla.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)p_n d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{v}_n.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S + \nabla\mathbf{v}_n : \nabla\widetilde{\mathbf{w}}_n^S)\; d\mathbf{x}\mathcal{X}_{u_n}^S - \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S \mathbf{f}^F.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S\; d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Prenons par exemple le terme :

$$\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S \mathbf{v}_n.\widetilde{\mathbf{w}}_n^S\; d\mathbf{x} := \int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_{u_n}^S \mathbf{v}_n.(\mathbf{w}^S\circ\varphi_n^{-1})\; d\mathbf{x}$$

Et nous alors prouver qu'il converge vers $\int_{D\backslash\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S \mathbf{v}_\varepsilon.(\mathbf{w}^S\circ\varphi^{-1})d\mathbf{x}$, si $\mathbf{w}^S$ est assez lisse.
Précisons qu'il n'est pas possible d'appliquer le lemme 3.8 directement.
Si $\mathbf{x} \in D\backslash\overline{\Omega}_u^S$, du lemme 3.1, **2)**, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{x}) = 0 = \mathcal{X}_u^S(\mathbf{x})$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{x})(\mathbf{w}^S\circ\varphi_n^{-1})(\mathbf{x}) = \mathcal{X}_u^S(\mathbf{x})(\mathbf{w}^S\circ\varphi^{-1})(\mathbf{x}) = 0$$

Si $\mathbf{x} \in \Omega_u^S$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{x}) = 1 = \mathcal{X}_u^S(\mathbf{x})$$

comme dans la prouve du proposition 3 [17], on a que :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{-1}(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(\mathbf{x}) \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

Ça suit :

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1})(\mathbf{x}) = (\mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}), \text{ si } \mathbf{w}^S \text{ est dans } (D(\overline{\Omega}_0^S \backslash \partial\omega))^2$$

Alors on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{x})(\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1})(\mathbf{x}) := \mathcal{X}_u^S(\mathbf{x})(\mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1})(\mathbf{x}).$$

Et enfin :

$$\mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1}) \text{ converge vers } \mathcal{X}_u^S(\mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1}),\ \forall \mathbf{x} \in D\backslash\overline{\omega}.$$

De plus $\mathbf{w}^S$ est continu avec un support compact, $|\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1}| \leq \|\mathbf{w}^S\|_{\infty,\Omega_0^S}$.
En utilisant le théorème de " convergence dominée de Lebesgue" et un argument similaire comme dans le lemme 3.8. On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{X}_{u_n}^S(\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1}) - \mathcal{X}_u^S(\mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1})\|_{D\backslash\overline{w}} = 0.$$

Et nous avons aussi $\mathbf{v}_n \to \mathbf{v}_\varepsilon$ faiblement dans W.
On obtient que :

$$\int_{D\backslash\overline{w}} \mathcal{X}_{u_n}^S \mathbf{v}_n.(\mathbf{w}^S \circ \varphi_n^{-1}) d\mathbf{x} \text{ converge vers } \int_{D\backslash\overline{w}} \mathcal{X}_u^S \mathbf{v}_\varepsilon.(\mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1}) d\mathbf{x}.$$

Donc, on trouver que :

$$\lim_{n\to\infty} < G_n, \mathbf{w}^S > := < G, \mathbf{w}^S > \text{ pour } \mathbf{w}^S \in (D(\overline{\Omega}_0^S \backslash \partial\omega))^2.$$

Mais $a_S(\mathbf{d}_n, \mathbf{w}^S) =< G_n, \mathbf{w}^S >$, $a_S(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}^S) =< G, \mathbf{w}^S >$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} a_S(\mathbf{d}_n, \mathbf{w}^S) = a_S(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}^S), \quad \forall \mathbf{w}^S \in (D(\overline{\Omega}_0^S \backslash \partial\omega))^2.$$

Et $\mathbf{d}_n$ est borné dans W^S.
Alors il existe $\mathbf{d}' \in W^S$ tel que :

$$\mathbf{d}_n \to \mathbf{d}' \text{ faiblement sur une sous-suite dans} W^S.$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} a_S(\mathbf{d}_n, \mathbf{w}^S) := a_S(\mathbf{d}', \mathbf{w}^S), \quad \forall \mathbf{w}^S \in (D(\overline{\Omega}_0^S \backslash \partial\omega))^2.$$

Donc :

$$a_S(\mathbf{d}', \mathbf{w}^S) := a_S(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}^S), \quad \forall \mathbf{w}^S \in (D(\overline{\Omega}_0^S \backslash \partial\omega))^2.$$

Ce qui donné que $\mathbf{d}' = \mathbf{u}_\varepsilon$, et :

$$\mathbf{d}_n \to \mathbf{u}_\varepsilon \text{ faiblement dans une séquence tout en } W^S.$$

La carte $\mathcal{P}^m$ est linéaire, continue, à image de dimension finie, par conséquent elle est compacte.
Alors l'opérateur T_ε^m est continue et compacte.
Ce qui termine la prouve. □

Remarque 3.10. *Nous remarquons que* $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega_0^S}$, $\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}$, $\|p_\varepsilon\|_{1,D\setminus\overline{\omega}}$, *correspondant à* $\boldsymbol{u}_\varepsilon^m$ *le point fixe de* T_ε^m, *sont bornés indépendamment de* ε. *Ensuite, il existes* $\boldsymbol{u}_*^m \in B_\delta^m$, $\boldsymbol{d}_*^m \in W^S$, $\boldsymbol{v}_*^m \in W$, *et* $p_*^m \in Q$, *et sur une sous-séquence, nous avons :* $\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{d}_*^m$ *faiblement dans* W^S, $\boldsymbol{v}_\varepsilon \to \boldsymbol{v}_*^m$ *faiblement dans* W, $p_\varepsilon \to \boldsymbol{p}_*^m$ *faiblement dans* Q.
De plus $\mathcal{P}^m$ *est compact. Alors* $\boldsymbol{u}_\varepsilon^m \to \boldsymbol{u}_*^m$ *fortement dans* $W^{1,\infty}(\Omega_0^S)$.
Nous remarquons ce $\boldsymbol{u}_*^m \in B_\delta^m$ *ainsi que* $(\boldsymbol{v}_*^m, p_*^m, \boldsymbol{d}_*^m) \in W \times Q \times W^S$ *dépend du choix de* $m \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.11. *D'après la Proposition 3.7, si* Ω_0^S *est de classe* C^4, *nous avons obtenu* $\boldsymbol{u}_\varepsilon^m \in C^2(\overline{\Omega}_0^S)$.
Comme les coefficients de (3.7) *sont des constantes, nous prouvons obtenir plus de régularité de* $\boldsymbol{u}_\varepsilon^m$ *en augmentant la régularité de* Ω_0^S.

Proposition 3.12. *Pour D Lipschitz,* Ω_0^S *de classe* C^4, *nous avons* $\boldsymbol{u}_*^m \in (C^2(\overline{\Omega}_0^S))^2$.
Ce qui suit tient $\boldsymbol{v}_*^m \in (H^2(\Omega_{u_*^m}^F))^2$, $p_*^m \in H^1(\Omega_{u_*^m}^F)$, *et* $(\boldsymbol{v}_*^m, p_*^m)$ *vérifier les équations* (2.11)-(2.14).
Concernant la structure, on a $\boldsymbol{d}_*^m \in (H^2(\Omega_0^S))^2$ *vérifie* (2.9) *et* (2.10).

Preuve. Par construction, $\mathbf{u}_\varepsilon^m \in C^2(\overline{\Omega}_0^S)$, $\mathbf{u}_\varepsilon^m \in B_\delta^m$. Et B_δ^m est inclus dans un espace de dimension finie.
Alors $\mathbf{u}_*^m \in C^2(\overline{\Omega}_0^S)$, et de plus Ω_0^S est de classe C^4, nous allons obtenir $\Omega_{u_*^m}^S$ est de classe C^2.
Nous utilisons les mêmes arguments que dans le prouve de la proposition 5 de [17].
Nous avons ça $\Omega_{u_\varepsilon^m}^S \to \Omega_{u_*^m}^S$ dans la métrique complémentaire de " Hausdorff-Pompéi ".
Et de même $\Omega_{u_\varepsilon^m}^F \to \Omega_{u_*^m}^F$ dans la même topologie.
Utilisation dans (3.4)-(3.5) de certaines fonctions de test $\mathbf{w} \in W$ et $q \in Q$ avec leur soutien dans $\Omega_{u_*^m}^F$. Et passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, p_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\mathbf{w})\, d\mathbf{x} = \int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\, d\mathbf{x}],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[b_F(\mathbf{v}_\varepsilon, q) = 0].$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} a_F(\mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{w}) + \lim_{\varepsilon\to 0} b(\mathbf{w}, p_\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathcal{X}_u^S(\mathbf{v}_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v}_\varepsilon : \nabla\mathbf{w})\, d\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D\setminus\overline{\omega}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\, d\mathbf{x},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_F(\mathbf{v}_\varepsilon, q) = 0.$$

Et on a, $\mathbf{v}_\varepsilon \to \mathbf{v}_*^m$, et $a(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \int\limits_{D\setminus\overline{\varpi}} 2\mu^F \epsilon_X(\mathbf{v}) : \epsilon(\mathbf{w})\ d\mathbf{x}$, et $b(\mathbf{w},p) = -\int\limits_{D\setminus\overline{\varpi}} p\ (\nabla.\mathbf{w})\ d\mathbf{x}$, et $p_\varepsilon \to p_*^m$, on obtent :

$$\int_{\Omega^F_{u_*^m}} 2\mu^F \epsilon(\mathbf{v}_*^m) : \epsilon(\mathbf{w})\ d\mathbf{x} - \int_{\Omega^F_{u_*^m}} (\nabla.\mathbf{w}) p_*^m\ d\mathbf{x} = \int_{\Omega^F_{u_*^m}} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x},$$
$$-\int_{\Omega^F_{u_*^m}} (\nabla.\mathbf{v}_*^m) q\ d\mathbf{x} = 0.$$

Pour tout $\mathbf{w} \in (H^1_0(\Omega^F_{u_*^m}))^2$, et pour tout $q \in L^2_0(\Omega^F_{u_*^m})$.
De plus on a $\mathbf{v}_\varepsilon = 0$ sur ∂D, alors (2.13) est vérifié. D'après (3.21), on a $\mathbf{v}_*^m = 0$ dans $\Omega^S_{u_*^m}$ et on obtient (2.14) et $\mathbf{v}_*^m \in (H^1_0(\Omega^F_{u_*^m}))^2$.
Il découle de [24], Proposition 2.3, p. 25, qui $\mathbf{v}_*^m \in H^2(\Omega^F_{u_*^m})$, et $p_*^m \in H^1(\Omega^F_{u_*^m})$.
Par identité de Green, on obtient (2.11) et (2.12) à partir de la formulation faible du fluide équations dans $\Omega^S_{u_*^m}$.
Comme dans la preuve de la Proposition 5 de [17], soit $\mathbf{v}^S \in (H^1(\Omega^S_0))^2$ avec support compact K dans Ω^S_0. Alors $\widetilde{\mathbf{w}}^S = \mathbf{w}^S \circ \varphi^{-1}$ appartient à $(H^1(\Omega^S_{u_*^m}))^2$ avec support compact dans $\Omega^S_{u_*^m}$, où $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{u}_*^m(X)$ tel que :

$$a_S(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{w}^S) := \int_{\Omega^S_0} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{w}^S \in (H^1_0(K))^2,\ \ \forall K \subset \Omega^S_0.$$

En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ sur une sous-suite, on obtien :

$$a_S(\mathbf{d}_*^m, \mathbf{w}^S) := \int_{\Omega^S_0} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{w}^S \in (H^1_0(K))^2,\ \ \forall K \subset \Omega^S_0.$$

D'après les résultats standard pour la régularité intérieure de l'elliptique du second ordre équation, il s'ensuite que $\mathbf{d}_*^m$ est de classe H^2, de plus $\mathbf{f}^S \in (L^2(\Omega^S_0))^2$.
Utiliser le formule de Green, nous pouvons conclure que $\mathbf{d}_*^m$ vérifie (2.9) au sens de $L^2(\Omega^S_0)$.
Par construction $\mathbf{u}_\epsilon \in W^S$. Donc vaut pour $\mathbf{d}_*^m$ aussi. $\square$

A propos de la continuité de la contrainte sur l'interface fluide structure

Discutons maintenant du la condition (2.15).
Soit $\mathbf{v}_\varepsilon, p_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon$ les solutions de (3.4)-(3.6), et $\mathbf{u}_\varepsilon^m$ un point fixe de T_ε^m.
Par construction, nous avons $\mathbf{u}_\varepsilon^m \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}^S_0)$, alors $\overline{\Omega}^S_{u_\varepsilon^m}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On emploie les notations : $\mathbf{v}_\varepsilon^+$ pour la restriction de $\mathbf{v}_\varepsilon$ à $\Omega^F_{u_\varepsilon^m}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^-$ pour la restriction de $\mathbf{v}_\varepsilon$ à $\Omega^S_{u_\varepsilon^m}$, et de même pour p_ε^+ et p_ε^-.
Nous supposons que $\mathbf{v}_\varepsilon^+ \in (H^2(\Omega^F_{u_\varepsilon^m}))^2$ et $\mathbf{v}_\varepsilon^- \in (H^2(\Omega^S_{u_\varepsilon^m}))^2$, $p_\varepsilon^+ \in H^1(\Omega^F_{u_\varepsilon^m})$ et $p_\varepsilon^- \in H^1(\Omega^S_{u_\varepsilon^m})$, et $\mathbf{u}_\varepsilon \in (H^2(\Omega^S_0))^2$.
Dans [23], pour le Problème résolvant de Stokes, la régularité ci-dessus est obtenue si $\Gamma_{u_\varepsilon^m}$ est de classe $\mathcal{C}^3$, et D est de classe $\mathcal{C}^2$.
Dans [5], p. 326, pour le problème d'interface de Stokes, le même régularité est obtenue pour $\Omega^S_{u_\varepsilon^m}$, $\Omega^F_{u_\varepsilon^m}$ de classe $\mathcal{C}^{2,1}$.
D'après (3.4), en mettant $\mathbf{w}$ à support compact dans $\Omega^F_{u_\varepsilon^m}$, on a :

$$-\nabla.(\sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon^+, p_\varepsilon^+)) = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } \Omega^F_{u_\varepsilon^m} \quad ...(*).$$

Et en mettant $\mathbf{w}$ avec un support compact dans $\Omega^S_{u^m_\varepsilon}$, on a :

$$-\nabla.(\sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\mathbf{v}^-_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{v}^-_\varepsilon = \mathbf{f}^F, \quad \text{dans } \Omega^S_{u^m_\varepsilon} \quad ...(**).$$

Soit $\mathbf{w} \in W$ tel que $\mathbf{w} = 0$ sur $\partial\omega$.
Nous multiplions (*) et (**) par la fonction test $\mathbf{w}$. Puis on intègre respectivement Ω^F_u, Ω^S_u. Puis en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^F_u} \sigma^F(\mathbf{v}^+_\varepsilon, p^+_\varepsilon) : \nabla\mathbf{w}\ d\mathbf{x} = \int_{\Omega^F_u} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_u} \sigma^F(\mathbf{v}^+_\varepsilon, p^+_\varepsilon)\mathbf{n}^F.\mathbf{w}\ ds \tag{3.25}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^S_u} \sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon) : \nabla\mathbf{w}\ d\mathbf{x} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^S_u}(\mathbf{v}^-_\varepsilon.\mathbf{w} + \nabla\mathbf{v}^-_\varepsilon : \nabla\mathbf{w})\ d\mathbf{x} = \int_{\Omega^S_u} \mathbf{f}^F.\mathbf{w}\ d\mathbf{x} +\\ \int_{\Gamma_u} \sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon)\mathbf{n}^S.\mathbf{w}\ ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_u} \frac{\partial\mathbf{v}^-_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}^S}.\mathbf{w}\ ds.\end{aligned} \tag{3.26}$$

En additionnant (3.25) par (3.26) et en soustrayant (3.4), on obtient :

$$\sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon)\mathbf{n}^S + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{v}^-_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}^S} = -\sigma^F(\mathbf{v}^+_\varepsilon, p^+_\varepsilon)\mathbf{n}^F, \quad \text{sur } \Gamma_u \tag{3.27}$$

Notant $\mathbf{w}^S : \Omega^S_0 \to \mathbb{R}^2$ par $\mathbf{w}^S = \mathbf{w}|_{\Omega^S_u} \circ \varphi$, l'équation (3.26) est équivalent à celui écrit dans le domaine non déformé Ω^S_0 :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega^S_0} J(\sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon)\circ\varphi)\mathbf{F}^{-T} : \nabla_\mathbf{x}\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X}\\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega^S_0} J((\mathbf{v}^-_\varepsilon\circ\varphi).\mathbf{w}^S + (\nabla\mathbf{v}^-_\varepsilon\circ\varphi)\mathbf{F}^{-T} : \nabla_\mathbf{x}\mathbf{w}^S)\ d\mathbf{X} - \int_{\Omega^S_0} J(\mathbf{f}^F\circ\varphi).\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X}\\ &= \int_{\Gamma_0} \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\sigma^F(\mathbf{v}^-_\varepsilon, p^-_\varepsilon)\circ\varphi).\mathbf{w}^S\ dS + \frac{1}{\epsilon}\int_{\Gamma_0} \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\frac{\partial\mathbf{v}^-_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}^S}\circ\varphi).\mathbf{w}^S\ dS\end{aligned} \tag{3.28}$$

Des détails sur ce type de transformation peuvent être trouves dans [10], Section 1.7.
Si $\mathbf{w}^S \in (H^1(\Omega^S_0))^2$ a support compact K dans Ω^S_0, alors la main droite une partie de (3.27) s'annule. Mais la partie gauche de (3.6) est la somme des derniers trois termes dans (3.26), par conséquent :

$$a_S(\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{w}^S) = \int_{\Omega^S_0} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X}, \quad \forall\mathbf{w}^S \in (H^1_0(K))^2, \ \ \forall K \subset \Omega^S_0.$$

Sous l'hypothèse $\mathbf{u}_\varepsilon \in (H^2(\Omega^S_0))^2$, on a :

$$-\nabla_\mathbf{x}.\sigma^S(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbf{f}^S, \quad \text{dans } L^2(\Omega^S_0).$$

Et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega^S_0} \sigma^S(\mathbf{u}_\varepsilon) : \nabla_\mathbf{x}\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X} = \int_{\Omega^S_0} \mathbf{f}^S.\mathbf{w}^S\ d\mathbf{X} + \int_{\Gamma_0} \sigma^S(\mathbf{u}_\varepsilon)\mathbf{n}^S.\mathbf{w}^S\ dS. \tag{3.29}$$

En ajoutant (3.6) à (3.26) et en soustrayant (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma^S(\mathbf{u}_\varepsilon)\mathbf{n}^S := \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon^-, p_\varepsilon^-)\mathbf{n}^S \circ \varphi) \\ +\frac{1}{\varepsilon}\|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon^-}{\partial \mathbf{n}^S} \circ \varphi), \quad \text{sur } \Gamma_0.\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.27), l'égalité ci-dessus montre que $\mathbf{v}_\varepsilon$, p_ε, $\mathbf{u}_\varepsilon$ satisfont :

$$\sigma^S(\mathbf{u}_\varepsilon)\mathbf{n}^S := -\|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}^S\|_{\mathbb{R}^2}(\sigma^F(\mathbf{v}_\varepsilon^+, p_\varepsilon^+)\mathbf{n}^F) \circ \varphi, \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Pour tout ε. Cette relation est similaire à (2.15).

Remarque 3.13. *Contrairement aux constantes C_1 et C_2 des propositions* (3.5) *et* (3.6)*, la constante $C_3 = C_3(m)$ de la proposition* (3.7) *dépend de m et $\lim_{m\to+\infty} C_3(m) = +\infty$. Le théorème* (3.9) *assure l'existence d'un point fixe quand $m \to +\infty$ uniquement dans le cas trivial $\boldsymbol{f}^F = 0$ et $\boldsymbol{f}^S = 0$.*

Bibliographie

[1] **R. Adams**, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York-London, 1975.

[2] **G. Allaire**, Approximation numérique et optimisation. Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, 2019.

[3] **N. Arada**, *Méthode des Éléments Finis.* Département de Mathématiques, Université de jijel.

[4] **H. H. Bauschke, P. L.Combettes**, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces.*

[5] **F. Boyer, P. Fabrie**, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models.* Applied Mathematical Sciences, 183. Springer, New York, 2013.

[6] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle. Thorie et applications*, Dunod, 2005.

[7] **H. Brezis**, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert*, 1973.

[8] **H.Brézis**. Fonctional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, Heidelberg, Londan, 2010.

[9] **D. Chenais**, *On the existence of a solution in a domain identification problem.* J. Math. Anal. Appl. 52 (1975), no. 2, 189–219.

[10] **P.G. Ciarlet**, *Mathematical Elasticity.* Volume 1 : Three Dimensional Elasticity, Elsevier, 2004.

[11] **C. Conca, M. Duran, J. Planchard**, A quadratic eigenvalue problem involving Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 100 (3) :1295-313, 1992.

[12] **B. Desjardins, M. Esteban, C. Grandmont, P. Le Tallec**, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model.* Rev. Mat. Complut. 14 (2001), no. 2, 523–538.

[13] **M. Fabre**. Méthodes de domaines fictifs pour les éléments finis, application à la mécanique des structures. PhD thesis, Lyon, INSA, 2015.

[14] **F. Ilinca, J.F. Hétu**. *A fnite element immersed boundary method for fluid flow around rigid objects.* International Journal for Numerical Methods in Fluids. 65(7) : 856-875.

[15] **G. Galdi**, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations.* Vol. I. Linearized steady problems. Springer Tracts in Natural Philosophy, 38. Springer-Verlag, New York, 1994.

[16] **V. Girault, P.A. Raviart**, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms.* Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[17] **A. Halanay, C.M. Murea, D. Tiba**, *Existence and approximation for a steady fluid-structure interaction problem using fictitious domain approach with penalization*, Mathematics and its Applications, 5 (2013), No 1-2, 120–147.

[18] **A. Halanay, C.M. Murea, D. Tiba**, *Existence of a steady flow of Stokes fluid past a linear elastic structure using fictitious domain*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 18 (2016) : No 2, 397–413.

[19] **A. Henrot, M. Pierre**, *Variations et optimisation de formes. Une analyse géométrique*, Springer, 2005.

[20] **C.Murea**. Schémas numériques stables pour fluides, structures et leurs interactions. Collection Mécaniques Des Fluides. ISTE, 2017.

[21] **P. Neittaanmaki, J. Sprekels, D. Tiba**, *Optimization of elliptic systems. Theory and applications.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2006.

[22] **C. Peskin**. *The immersed boundary method.* ACTA Numer. 11 :479-517, 2002.

[23] **Y. Shibata, S. Shimizu**, *On a resolvent estimate of the interface problem for the Stokes system in a bounded domain*, J. Differential Equations 191 (2003) 408–444.

[24] **R. Temam**, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. Reprint of the 1984 edition. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001.

[25] **J.P. Zolésio**, *Introduction to shape optimization problems and free boundary problems*, in Shape optimization and free boundaries (Montreal, PQ, 1990), 397–457, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 380, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1992.