République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Équations aux Dérivées Partielles et Applications.

Thème

Étude variationnelle d'un problème d'évolution

Présenté par :

Kouyane Imane

Devant le jury :

Président	**Touil Imene**	M.C.A	Université de Jijel
Encadreur	**Chikouche Wided**	Professeur	Université de Jijel
Examinateur	**Bekkouche Fatiha**	M.C.B	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Remerciements

Tout d'abord, je remercie "Dieu" le tout puissant qui m'a donné santé, courage et volonté pour entamer et terminer ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon encadrant ***Professeur Chikouche Wided*** *pour sa présence, son soutien, ses encouragements et ses conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail.*

Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury : ***Mme Touil Imene****, présidente, et* ***Mme Bekkouche Fatiha****, examinatrice, qui me font l'honneur d'examiner et d'évaluer ce travail.*

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leur encouragement, leur soutien moral qu'ils m'ont manifesté durant toute l'année.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma mère "Razika",

qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse.

A mon père "Messaoud",

qui n'a jamais cessé de me soutenir pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A ma sœur "Sara" et mon frère "Mounir",

qui n'ont pas cessés de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.

A mon neveu "Djawad",

qui a apporté la joie et le bonheur pour toute la famille.

A ma grand-mère, mes tantes et mes oncles,

que Dieu leur donne une longue et joyeuse vie.

A mes cousines, mes cousins et mes amies,

merci pour leurs amours et leurs encouragements.

A vous cher lecteur.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contact avec des matériaux déformables abondent en industrie et en ingénierie. La modélisation de ces problèmes conduit à des problèmes aux limites non linéaires, dans lesquels les inconnus sont le champ de déplacements et le champ de contraintes. L'étude mathématique de ces problèmes est réalisée en utilisant la formulation faible, qui est généralement exprimée en termes d'une inégalité variationnelle ou hémivariationnelle. A cet égard, plusieurs travaux ont été réalisés dans les livres [4], [10], [11] et plus récemment [12].

En parallèle de nombreux problèmes provenant de la mécanique, physique et des sciences d'ingénierie conduisent à des modèles mathématiques exprimés en termes d'inclusions non linéaires dépendantes du temps. Pour cette raison, la littérature mathématique consacrée à ce domaine est vaste et les progrès réalisés au cours des dernières décennies sont impressionnants. Cela concerne les résultats sur l'existence et l'unicité, la régularité ainsi que les résultats sur les approches numériques pour la résolution des problèmes correspondants. Les inégalités variationnelles et hémivariationnelles représentent une classe d'inclusions non linéaires. Elles ont fait l'objet de divers livres et études, voir par exemple [7], [8], [10]−[12].

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'article de **Samir Adly** et **Mircea Sofonea** [1] intitulé **"Time-dependent inclusions and sweeping processes in contact mechanics"**. Le but des auteurs de cet article est double. Le premier est d'introduire une nouvelle classe d'inclusions dépendantes du temps et du processus de rafle (sweeping process) et d'étudier l'existence et l'unicité de leurs solutions faibles. La nouveauté se pose dans la structure particulière de ces problèmes qui sont gouvernés par deux opérateurs non linéaires, éventuellement de mémoire. Le deuxième but est d'illustrer l'utilisation de ces résultats d'existence et d'unicité dans l'étude de modèles mathématiques décrivant l'évolution quasi-statique des matériaux déformables en contact avec un obstacle, c'est l'objet des sections 5 et 6 de l'article qu'on détaillera dans ce mémoire.

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et notions de base qui ont été utilisées dans les chapitres suivants. Nous présentons aussi trois résultats d'existence et d'unicité pour des inclusions dépendantes du temps.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons un domaine borné connexe Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) avec une frontière lipschitzienne Γ divisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3. Dans un intervalle de temps $[0, T]$ ($T > 0$), nous étudions et établissons une formulation variationnelle préliminaire d'un problème mécanique avec des conditions aux limites mêlées, dont les inconnus sont le champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ et le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}_i$ ($i = 1, 2$) qui peut prendre l'une des expressions suivantes

$$\boldsymbol{\sigma}_1(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega,$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}_2(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega.$$

L'énoncé de ce problème est

$$\begin{aligned} \text{Div } \boldsymbol{\sigma}_i(t) + \boldsymbol{f}_0(t) &= \boldsymbol{0} && \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}(t) &= \boldsymbol{0} && \text{sur } \Gamma_1, \\ \boldsymbol{\sigma}_i(t)\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{f}_2(t) && \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned} \tag{1}$$

- La première équation est l'équation d'équilibre qui signifie que le matériau est soumis à des efforts volumiques à l'intérieur.
- La deuxième équation est la condition aux limites de Dirichlet homogène qui exprime que le matériau est encastré sur Γ_1.
- La dernière équation représente la condition aux limites de Neumann qui exprime que le matériau est soumis à des efforts surfaciques sur Γ_2.
- Les conditions sur Γ_3 seront précisées dans le chapitre suivant.

Dans le troisième chapitre, nous étudions trois problèmes de contact viscoélastique, établissons leurs formulations variationnelles et transformons ces formulations à des problèmes d'inclusions dépendantes du temps faisant intervenir des opérateurs non linéaires, afin d'appliquer des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution présentés dans le Chapitre 1.

- Le premier problème correspond au problème (1) avec $i = 1$ et les conditions

$$u_\nu(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu(t)u_\nu(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_3.$$

- Le deuxième problème correspond au problème (1) avec $i = 1$ et les conditions

$$\left.\begin{array}{l} -F\Big(\int\limits_0^t u_\nu^+(s)ds\Big) \leq \sigma_\nu(t) \leq 0, \\ -\sigma_\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u_\nu(t) < 0, \\ F\Big(\int\limits_0^t u_\nu^+(s)ds\Big) & \text{si} \quad u_\nu(t) > 0, \end{cases} \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_3,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_3.$$

- Le troisième problème correspond au problème (1) avec $i = 2$ et les conditions

$$u_\nu(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3,$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \leq F\Big(\int\limits_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = F\Big(\int\limits_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|} \quad \text{si } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_3,$$

de plus,

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{dans } \Omega.$$

Nous avons arrivé à démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces problèmes de régularité

- $\mathcal{C}([0,T];U)$ pour le premier problème.
- $\mathcal{C}([0,T];V)$ pour le deuxième problème.
- $\mathcal{C}^1([0,T];V_1)$ pour le troisième problème.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et notions importantes pour l'étude variationnelle des problèmes traités dans les chapitres suivants. Ainsi, que des théorèmes d'existence et d'unicité pour trois modèles d'inclusions dépendantes du temps démontrés dans [1]. Les définitions, les propositions et les théorèmes présentés dans ce chapitre ont été pris des références [2]−[6], [12], [13].

1.1 Espaces normés et espaces de Hilbert

Définition 1.1.1. ***(Espace normé)***
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. L'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme sur E si elle vérifie :

1. $\|u\| = 0 \Longrightarrow u = 0,$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \|\lambda\, u\| = |\lambda|\, \|u\|,$
3. $\forall u, v \in E, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.2. *Un espace vectoriel normé réel est un couple constitué par un espace vectoriel E réel et par une norme $\|\cdot\|$ sur cet espace.*

Proposition 1.1.3. ***(Deuxième inégalité triangulaire)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Alors

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\| \qquad \forall u,\, v \in E.$$

Définition 1.1.4. ***(Suite convergente)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge

vers une limite $u \in E$ et on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \Rightarrow\ \|u_n - u\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5. ***(Suite de Cauchy)***
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall p, q \in \mathbb{N},\quad p, q \geq n_0 \Rightarrow\ \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.6. ***(Espace complet)***
Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge dans E.

Définition 1.1.7. ***(Espace de Banach)***
Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, qui est complet pour sa norme est appelé un espace de Banach.

Définition 1.1.8. ***(Application continue en un point)***
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés, $f : E \to F$ une application et u un point de E. f est dit continue au point u si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in E : \|v - u\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(v) - f(u)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.1.9. ***(Application continue)***
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. Une application $f : E \to F$ sera dite continue sur E, si elle est continue en tout point de E, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in E : \|u - v\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon.$$

Définition 1.1.10. ***(Espace préhilbertien)***
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $(\cdot,\cdot)$ possédant les propriétés suivantes :

1. $\forall u, v, w \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :\ (\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\,(u, w) + \beta\,(v, w),$
2. $\forall u, v \in E,\ (u, v) = (v, u),$
3. $\forall u \in E,\ (u, u) \geq 0$ *et* $(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0.$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.11. ***(Espace de Hilbert)***
Un espace préhilbertien $(E, (\cdot,\cdot))$ est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme associée à son produit scalaire

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)},\ \forall u \in E.$$

Théorème 1.1.12. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien. Alors pour tout $u, v \in E$ on a :

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

Théorème 1.1.13. *(Theorem 5.5 [3])****(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)***
Soit $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ un espace de Hilbert. Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$< f, v >_{H',H} = (u, v)_H \qquad \forall v \in H,$$

où $< \cdot, \cdot >_{H',H}$ est le produit de dualité entre H' et H. De plus,

$$\|f\|_{H'} = \|u\|_H,$$

où $\|f\|_{H'} = \sup\limits_{\|v\|_H = 1} | < f, v >_{H',H} |$.

Proposition 1.1.14. ***(Espace produit)***
Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 2$, et soient $H_1, \cdots, H_d$ des espaces de Hilbert muni des produits scalaires $(\cdot, \cdot)_{H_i}$ et des normes associées $\|\cdot\|_{H_i}$. L'espace produit $H = H_1 \times \cdots \times H_d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_H = \sum_{i=1}^{d} (u_i, v_i)_{H_i} \qquad \forall \boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_d), \boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_d) \in H,$$

dont la norme associée est

$$\|\boldsymbol{v}\|_H = \Big(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{H_i}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_d) \in H.$$

Exemples 1.1.15. *Soit $d \in \{1, 2, 3\}$. On note par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, ou de manière équivalente, l'espace des matrices symétriques d'ordre d. L'élément nul des espaces $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ sera noté par $\mathbf{0}$. Le produit scalaire et la norme sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$ sont définis respectivement par :*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i, \qquad \|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij} \tau_{ij}, \qquad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}), \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d,$$

où les indices i, j varient entre 1 et d.

1.2 Quelques espaces fonctionnels

1.2.1 Espaces $\mathcal{C}(I;X)$ et $\mathcal{C}^1(I;X)$

On note par I l'intervalle borné $[0,T]$ avec $T>0$ ou l'intervalle non borné $\mathbb{R}_+$. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé.

- On désigne par $\mathcal{C}(I;X)$ l'espace des fonctions continues définis de I à valeurs dans X.
- On désigne par $\mathcal{C}^1(I;X)$ l'espace des fonctions continûment différentiables sur I à valeurs dans X. On note que $v \in \mathcal{C}^1(I;X)$ si et seulement si $v \in \mathcal{C}(I;X)$ et $\dot{v} \in \mathcal{C}(I;X)$, ici et ci-dessous, $\dot{v}$ représente la dérivée de la fonction v.
- Si K est un sous-ensemble de X, on utilise encore la notation $\mathcal{C}(I;K)$ et $\mathcal{C}^1(I;K)$ pour l'ensemble des fonctions continues et continûment différentiables définis de I à valeurs dans K respectivement.

Proposition 1.2.1. *Soit $I=[0,T]$.*

- *L'application*

$$v \mapsto \|v\|_{\mathcal{C}(I;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_X$$

est une norme sur $\mathcal{C}(I;X)$.

- *Si X est un espace de Banach, alors l'espace $(\mathcal{C}([0,T];X), \|\cdot\|_{\mathcal{C}([0,T];X)})$ est de Banach.*

1.2.2 Espaces de Lebesgue

Soient $d \in \{1,2,3\}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.2. ***(Les espaces $L^p(\Omega)$)***

- *On note par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
- *On note pour $p \in \mathbb{R}$ avec $1<p<\infty$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

- *On note pour $p=\infty$ l'espace*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ est mesurable et il existe une constante } C \text{ telle que} \\ |f(\boldsymbol{x})| \le C \text{ p.p. sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On munit les espaces $L^p(\Omega)$ des normes suivantes :

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \Big(\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{C; |f(\boldsymbol{x})| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Théorème 1.2.3. *(Theorem 4.8 [3])***(Fischer-Riesz)**
$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.2.4. *Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(f, g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

de norme associée

$$\|f\|_{0,\Omega}= \Big(\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Corollaire 1.2.5. *L'espace $L^2(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})_{L^2(\Omega)^d} = \sum_{i=1}^d (f_i, g_i)_{0,\Omega},$$

dont la norme associée est

$$\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d} = \Big(\sum_{i=1}^d \|f_i\|_{0,\Omega}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.2.6. *(Theorem 4.9 [3]) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Alors, il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que

(a) $f_{n_k}(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ p.p. sur Ω.

(b) $|f_{n_k}(\boldsymbol{x})| \leq h(\boldsymbol{x})$ $\forall k$, p.p. sur Ω.

Théorème 1.2.7. *(Theorem 3.3 [4])***(Théorème de Bochner)**
Soient $T > 0$ et $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach, et soit $v :]0, T[\to X$ une fonction mesurable. Alors v est intégrable si et seulement si $\|v(t)\|_X$ est intégrable. De plus, on a

$$\Big\| \int_0^T v(t) dt \Big\|_X \leq \int_0^T \|v(t)\|_X dt.$$

1.2.3 Espaces des matrices symétriques à valeurs dans $L^2(\Omega)$

Considérons l'espace Q défini comme suit :

$$Q = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}); \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega),\ 1 \leq i, j \leq d\}.$$

L'espace Q est un espace de Hilbert muni du produit scalaire et de la norme suivants

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} dx, \qquad \|\boldsymbol{\tau}\|_Q = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q.$$

1.2.4 Espaces des tenseurs de quatrième ordre

C'est l'espace défini par

$$\boldsymbol{Q}_\infty = \{\boldsymbol{\varepsilon} = (e_{ijkl}) \,|e_{ijkl} = e_{jikl} = e_{klij} \in L^\infty(\Omega),\, 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant d\}.$$

C'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{Q}_\infty} = \max_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant d} \|e_{ijkl}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Il est facile de voir que

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\tau}\|_Q \leqslant d\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\boldsymbol{Q}_\infty}\|\boldsymbol{\tau}\|_Q \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{Q}_\infty, \boldsymbol{\tau} \in Q. \tag{1.1}$$

1.2.5 Espaces de Sobolev

Soient $d \in \{1, 2, 3\}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Espaces $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega)^d$

Définition 1.2.8. *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \Big\{v \in L^2(\Omega); \forall i \in \{1, \cdots, d\},\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\Big\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire suivant :

$$(u, v)_{1,\Omega} = (u, v)_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^d \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)_{0,\Omega}.$$

La norme correspondante est :

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}} = \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.2.9. *(Proposition 4.3.2 [2])*
L'espace $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$ est un espace de Hilbert.

Corollaire 1.2.10. *L'espace $H^1(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{H^1(\Omega)^d} = \sum_{i=1}^{d} (u_i, v_i)_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^{d} (u_i, v_i)_{0,\Omega} + \sum_{i,j=1}^{d} \big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\big)_{0,\Omega},$$

dont la norme associée est

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d} = \Big(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{1,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j=1}^{d} \|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème de trace et formules de Green

On commence par rappeler la définition d'un ouvert lipschitzien.

Définition 1.2.11. *(Definition 1.2.1.1 [6])*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que sa frontière Γ est lipschitzienne ou que Ω est lipschitzien si pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, il existe un voisinage V de $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}^d$ et des nouveaux axes de coordonnées orthogonaux $\{y_1, \cdots, y_d\}$ tels que

1. *V est un parallélotope dans les nouveaux axes de coordonnées :*

$$V = \{(y_1, \cdots, y_d),\ -a_j < y_j < a_j, 1 \le j \le d\}.$$

2. *Il existe une fonction lipschitzienne φ, définie dans*

$$V' = \{(y_1, ..., y_{d-1}),\ -a_j < y_j < a_j, 1 \le j \le d-1\},$$

et telle que

$$|\varphi(\boldsymbol{y'})| \le \frac{a_d}{2} \quad \textit{pour tout} \quad \boldsymbol{y'} = (y_1, ...y_{d-1}) \in V',$$

$$\Omega \cap V = \{\boldsymbol{y} = (y', y_d) \in V,\ y_d < \varphi(\boldsymbol{y'})\},$$

$$\Gamma \cap V = \{\boldsymbol{y} = (y', y_d) \in V,\ y_d = \varphi(\boldsymbol{y'})\}.$$

En d'autres termes, dans un voisinage de $\boldsymbol{x}$, la frontière Γ, est le graphe de φ.

Théorème 1.2.12. *(Théorème 1.2 [9])* ***(Théorème de trace)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne Γ. Alors il existe une unique application linéaire continue

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$
$$u \to \gamma_0 u,$$

de sorte que, pour tout $v \in D(\bar{\Omega})$, on ait $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$, i.e. $\gamma_0 v(x) = v(x)$ pour tout $x \in \Gamma$.

Corollaire 1.2.13. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne Γ. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)^d$, on a*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma)^d} \leq c\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

Théorème 1.2.14. *(Theorem 1.5.3.1 [6])**(Formule de Green)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne Γ. Alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \gamma_0 u \, \gamma_0 v \, \nu_i \, d\boldsymbol{a} \qquad \forall 1 \leq i \leq d,$$

où ν_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur unité normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω.

Définition 1.2.15. *On définit l'opérateur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon} : H^1(\Omega)^d \to Q$ par*

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad 1 \leq i, j \leq d, \, \boldsymbol{u} = (u_i) \in H^1(\Omega)^d,$$

l'indexe qui suit une virgule désignant la dérivée partielle par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale $\boldsymbol{x}$, c'est-à-dire, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Corollaire 1.2.16. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne Γ. Pour les fonctions $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{S}^d$ et $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ telles que $\boldsymbol{\sigma} \in H^1(\Omega)^{d\times d}$ et $\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d$, la formule de Green suivante est satisfaite :*

$$\int\limits_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Gamma \boldsymbol{\sigma\nu} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{a}, \tag{1.2}$$

ici et ci-dessous, Div *désigne l'opérateur de divergence, c'est-à-dire,* Div $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})_i$.

L'espace de champ de déplacements

Considérons un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à frontière lipschitzienne Γ et laissons Γ_1 être une partie mesurable de Γ telle que mes $(\Gamma_1) > 0$.
Pour l'étude variationnelle des problèmes de contact dans les chapitres suivants, nous aurons besoin de définir l'espace variationnel V suivant :

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d ; \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \;\text{ sur }\; \Gamma_1\},$$

Proposition 1.2.17. *V est un sous espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)^d$.*

Proposition 1.2.18. *Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne Γ. L'application $\boldsymbol{v} \longrightarrow \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\Omega)^d}$ est une norme sur V.*
De plus, cette norme est induite du produit scalaire $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2 \mapsto \int\limits_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}$.

Notations 1.2.19. *On note par*

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{x}, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_V = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})_V^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q.$$

Théorème 1.2.20. ***(Inégalité de Korn)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière lipschitzienne Γ. Il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute fonction $\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)^d$, on a

$$\left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|^2_{L^2(\Omega)^d}\right)^{\frac{1}{2}} \geq C\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d}.$$

Corollaire 1.2.21. *Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne Γ. Alors il existe une constante $c_K>0$ telle que, pour toute fonction $\boldsymbol{v}\in V$, on a*

$$\|\boldsymbol{v}\|_V \geq c_K\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d}. \tag{1.3}$$

Corollaire 1.2.22. *Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne Γ. L'espace $(V,(\cdot,\cdot)_V)$ est un espace de Hilbert.*

Corollaire 1.2.23. *Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne Γ. Alors*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_i)^d} \leq c_0\|\boldsymbol{v}\|_V \quad \text{pour tout } i=2,3,\ \boldsymbol{v}\in V, \tag{1.4}$$

où $c_0 := \frac{c}{c_K}$ est une constante positive.

Démonstration. Conséquence directe du Théorème de trace (Corollaire 1.2.13) et l'inégalité (1.3). ■

1.3 Inclusions dépendantes du temps

1.3.1 Quelques rappels d'analyse convexe

Définition 1.3.1. ***(Domaine effectif, Fonction propre)***
Soit X un ensemble et soit $f : X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

- *Le domaine effectif de f est l'ensemble défini par :*

$$dom(f) = \{x\in X : f(x) < +\infty\}.$$

- *f est dite propre, si $dom(f)\neq\emptyset$ et $f(x) > -\infty$ pour tout $x\in dom(f)$.*

Définition 1.3.2. ***(Ensemble convexe)***
Un sous ensemble C d'un espace vectoriel X est dit convexe si pour tout $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ nous avons

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Définition 1.3.3. ***(Fonction convexe)***
Soit C un ensemble convexe et soit $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on dit que f est une fonction convexe si pour tout $x, y \in dom(f)$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 1.3.4. ***(Cône)***
Un sous-ensemble non vide C de X est appelé un cône si pour tout $x \in C$ et tout $\lambda > 0$, on a $\lambda x \in C$.

Remarque 1.3.5. *L'ensemble C est un cône convexe s'il est à la fois un cône et un ensemble convexe.*

Définition 1.3.6. ***(Cône normal)***
Soit $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ un espace préhilbertien. Le cône normal à un sous-ensemble convexe non vide C dans X en un point $x_0 \in C$ est défini par

$$N_C(x_0) = \{p \in X : (p, x - x_0)_X \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Définition 1.3.7. ***(Sous-différentiel)***
Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et soit $x_0 \in dom(f)$. Le sous-différentiel $\partial f(x_0)$ est le sous-ensemble défini par :

$$\partial f(x_0) = \{p \in X,\ (p, x - x_0)_X \leq f(x) - f(x_0), \forall x \in X\}.$$

1.3.2 Opérateurs fortement monotones, lipschitziens, de mémoire

Définition 1.3.8. ***(Opérateur fortement monotone)***
Soit $(X, (\cdot,\cdot)_X)$ un espace préhilbertien de norme $\|\cdot\|_X$ et soit $A : X \to X$ un opérateur. L'opérateur A est dit fortement monotone s'il existe une constante $m_A > 0$ telle que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m_A \|u - v\|_X^2 \qquad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.3.9. ***(Opérateur lipschitzien)***
Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace vectoriel normé et soit $A : X \to X$ un opérateur. L'opérateur A est dit lipschitzien s'il existe une constante $L_A > 0$ telle que

$$\|Au - Av\|_X \leq L_A \|u - v\|_X \qquad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.3.10. ***(Opérateur de mémoire)***

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces normés.

On dit que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{C}(I; X) \to \mathcal{C}(I; Y)$ est un opérateur de mémoire si pour tout compact $\mathcal{J} \subset I$ il existe $L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} > 0$ telle que

$$\|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y \leq L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \qquad \textit{pour tout } u_1,\, u_2 \in \mathcal{C}(I; X),\, t \in \mathcal{J}.$$

1.3.3 Premier problème d'inclusion dépendante du temps

Considérons les espaces de Hilbert X et Y muni des produits scalaires $(\cdot,\cdot)_X$, $(\cdot,\cdot)_Y$ et des normes associées $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ respectivement. K et Λ des sous ensembles de X et Y respectivement. Considérons de plus les hypothèses suivantes :

(K) K un cône convexe fermé qui contient 0_X.

$$(A) \begin{cases} A : X \to X \text{est un opérateur fortement monotone et lipschitzien,} \\ \text{i.e., il existe } m_A > 0 \text{ et } L_A > 0 \text{ tels que} \\ (Au - Av, u - v)_X \geq m_A \|u - v\|_X^2 \qquad \forall u, v \in X. \\ \|Au - Av\|_X \leq L_A \|u - v\|_X \qquad \forall u, v \in X. \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \mathcal{S} : \mathcal{C}(I; X) \to \mathcal{C}(I; X) \text{ est un opérateur de mémoire,} \\ \text{i.e., pour tout compact } \mathcal{J} \subset I, \text{ il existe } L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_X \leq L^{\mathcal{S}}_{\mathcal{J}} \int\limits_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{C}(I; X). \end{cases}$$

$$(j_1) \begin{cases} j : K \to \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe, positivement homogène} \\ (\text{i.e., } j(\alpha x) = \alpha j(x), \forall x \in K,\ \alpha > 0) \text{ et lipschitzienne.} \end{cases}$$

(f) $f \in \mathcal{C}(I; X)$.

Commençons par prolonger la fonction $j : K \to \mathbb{R}$ de l'ensemble K à l'espace X tout entier. Pour cela, nous introduisons la fonction J définie par :

$$J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$J(v) = \begin{cases} j(v) & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K. \end{cases} \tag{1.5}$$

Ensuite, en utilisant les hypothèses (K) et (j_1), il vient que la fonction J est propre, convexe, $0_X \in dom(J)$ et $J(0_X) = 0$. Alors on peut définir l'ensemble C ; le sous-différentiel de J au point 0_X, i.e.,

$$C := \partial J(0_X) = \{\xi \in X : J(v) \geq (\xi, v)_X \quad \forall v \in X\}, \tag{1.6}$$

qui est un ensemble non vide convexe fermé. Pour tout $t \in I$ posons

$$C(t) := f(t) - C. \tag{1.7}$$

L'ensemble $C(t)$ est non vide convexe. Avec ces notations, on considère le problème d'inclusion suivant :

Problème 1 : Trouver $u : I \to X$ tel que :

$$-u(t) \in N_{C(t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)) \qquad \forall t \in I.$$

Théorème 1.3.11. *(Corollary 3.9. [1])*
Supposons que les hypothèses (K)–(f) sont satisfaites. Alors, le Problème 1 admet une unique solution u avec la régularité $u \in \mathcal{C}(I; K)$.

La preuve est basée sur le lemme d'équivalence suivant :

Lemme 1.3.12. *Soient X, Y des espaces de Hilbert et supposons que les hypothèses (K) et (j_1) sont satisfaites. De plus, soit $f : I \to X$, u, $z \in X$, $t \in I$ et soit J, C, $C(t)$ définis par* (1.5), (1.6) *et* (1.7) *respectivement. Alors, l'équivalence suivante est satisfaite :*

$$u \in K, \quad j(v) - j(u) \geq (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in K \Leftrightarrow -u \in N_{C(t)}(z).$$

1.3.4 Deuxième problème d'inclusion dépendante du temps

En plus des hypothèses (K), (A), $(\mathcal{S})$ et (f), on ajoute les hypothèses suivantes :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} \mathcal{R} : \mathcal{C}(I; X) \to \mathcal{C}(I; \Lambda) \text{ est un opérateur de mémoire,} \\ \text{i.e., pour tout compact } \mathcal{J} \subset I, \text{ il existe } L^{\mathcal{R}}_{\mathcal{J}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\|_Y \leq L^{\mathcal{R}}_{\mathcal{J}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{C}(I; X). \end{cases}$$

$$(j_2)\begin{cases} j : \Lambda \times K \to \mathbb{R} \text{ satisfait :} \\ \text{(a)} \quad j(\eta, \cdot) : K \to \mathbb{R} \text{ est une fonction convexe, positivement homogène} \\ \text{ et lipschitzienne, } \text{ pour tout } \eta \in \Lambda. \\ \text{(b)} \quad \text{Il existe } \alpha_j > 0 \text{ tel que pour tout } \eta_1, \eta_2 \in \Lambda, v_1, v_2 \in K \\ j(\eta_1, v_2) - j(\eta_1, v_1) + j(\eta_2, v_1) - j(\eta_2, v_2) \le \alpha_j \|\eta_1 - \eta_2\|_Y \|v_1 - v_2\|_X. \end{cases}$$

Commençons par prolonger la fonction $j : \Lambda \times K \to \mathbb{R}$. Nous introduisons alors la fonction J définie par :

$$J : \Lambda \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$J(\eta, v) = \begin{cases} j(v) & \text{si } v \in K, \\ +\infty & \text{si } v \notin K. \end{cases} \qquad \forall \eta \in \Lambda. \tag{1.8}$$

Ensuite, en utilisant les hypothèses (K) et (j_2), il vient que pour tout $\eta \in \Lambda$, la fonction $J(\eta, \cdot)$ est propre, convexe, $0_X \in dom(J(\eta, \cdot))$ et $J(\eta, 0_X) = 0$. Alors on peut définir l'ensemble $C(\eta)$; le sous-différentiel de $J(\eta, \cdot)$ au point 0_X, i.e.,

$$C(\eta) := \partial J(\eta, 0_X) = \{\xi \in X : J(\eta, v) \ge (\xi, v)_X \quad \forall v \in X\}, \tag{1.9}$$

qui est un ensemble non vide convexe fermé. Pour tout $t \in I$, posons

$$C(\eta, t) = f(t) - C(\eta). \tag{1.10}$$

L'ensemble $C(\eta, t)$ est non vide convexe. Avec ces notations, on considère le problème d'inclusion suivant :

Problème 2 : Trouver $u : I \to X$ tel que :

$$-u(t) \in N_{C(\mathcal{R}u(t),t)}(Au(t) + \mathcal{S}u(t)) \qquad \forall t \in I.$$

Théorème 1.3.13. *(Corollary 3.7. [1])*
Supposons que les hypothèses (K), (A), $(\mathcal{S})$, (f), $(\mathcal{R})$ et (j_2) sont satisfaites. Alors, le Problème 2 admet une unique solution u avec la régularité $u \in \mathcal{C}(I; K)$.

La preuve est basée sur le lemme d'équivalence suivant :

Lemme 1.3.14. *Soient X, Y des espaces de Hilbert et supposons que les hypothèses (K) et $(j_2)(a)$ sont satisfaites. De plus, soit $f : I \to X$, $\eta \in \Lambda$, u, $z \in X$, $t \in I$ et soit J, $C(\eta)$, $C(\eta, t)$ définis par* (1.8), (1.9) *et* (1.10) *respectivement. Alors, l'équivalence suivante est satisfaite :*

$$u \in K, \quad j(\eta, v) - j(\eta, u) \ge (f(t) - z, v - u)_X \quad \forall v \in K \Leftrightarrow -u \in N_{C(\eta,t)}(z).$$

1.3.5 Troisième problème d'inclusion dépendante du temps

Considérons les hypothèses (K), (A), $(\mathcal{S})$, (f), $(\mathcal{R})$, (j_2) et ajoutons les hypothèses suivantes :

(B) $\begin{cases} B : X \to X \text{ est un opérateur lipschitzien, i.e., il existe } L_B > 0 \text{ tel que} \\ \|Bu - Bv\|_X \leq L_B \|u - v\|_X \qquad \forall u, v \in X. \end{cases}$

(u_0) $u_0 \in X$.

Considérons la fonction J et les ensembles $C(\eta)$, $C(\eta, t)$ définis par (1.8), (1.9) et (1.10) respectivement.

Le troisième problème d'inclusion est le suivant :

Problème 3 : Trouver $u : I \to X$ tel que :

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(\mathcal{R}\dot{u}(t),t)}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + \mathcal{S}\dot{u}(t)) \qquad \forall t \in I,$$
$$u(0) = u_0.$$

Théorème 1.3.15. *(Corollary 4.2. [1])*
Supposons que les hypothèses (K), (A), $(\mathcal{S})$, (f), $(\mathcal{R})$, (j_2), (B) *et* (u_0) *sont satisfaites. Alors, le Problème 3 admet une unique solution* u *avec la régularité* $u \in \mathcal{C}^1(I; X)$ *et* $\dot{u} \in \mathcal{C}(I; K)$.

Chapitre 2

Problème de contact

Dans ce chapitre, nous considérons un problème de contact mécanique préliminaire avec des conditions aux limites mêlées. Ensuite, nous établissons sa formulation variationnelle et définissons quelques opérateurs. Nous démontrons que ces opérateurs satisfont à certaines propriétés utiles pour la suite. Dans ce chapitre, I représente l'intervalle borné $[0, T]$ avec $T > 0$ de $\mathbb{R}$.

2.1 Cadre physique et position du problème

Considérons un matériau déformable occupant dans sa configuration de référence un domaine borné connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$, avec une frontière lipschitzienne Γ, divisée en trois parties disjointes mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que mes $(\Gamma_1) > 0$. Nous étudions le processus d'évolution de l'état mécanique du matériau dans un intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$. Le matériau est encastré sur Γ_1, soumis à des efforts volumiques à l'intérieur du matériau et des efforts surfaciques sur Γ_2. L'équilibre du matériau dans ce cadre physique peut être décrit par divers modèles mathématiques, obtenus en utilisant différentes hypothèses mécaniques.
Le modèle mécanique que nous considérons ici est le suivant :
Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes

$\boldsymbol{\sigma}_i : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, $i = 1,2$, tels que, pour tout $t \in [0,T]$

$$\mathrm{Div}\ \boldsymbol{\sigma}_i(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{sur } \Gamma_2, \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_i(t)$ peut prendre l'une des expressions suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}_1(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega, \tag{2.4}$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}_2(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega. \tag{2.5}$$

Les conditions sur Γ_3 seront précisées dans le chapitre suivant selon le problème traité. L'équation (2.4) représente la loi constitutive dans laquelle $\mathcal{A}$ est l'opérateur d'élasticité, supposé être non linéaire, et $\mathcal{B}$ représente le tenseur de relaxation. Par contre, l'équation (2.5) représente la loi constitutive dans laquelle $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité, $\mathcal{E}$ est l'opérateur d'élasticité et $\mathcal{B}$ représente le tenseur de relaxation. Ensuite, l'équation (2.1) est l'équation d'équilibre dans laquelle $\boldsymbol{f}_0$ représente la densité des forces volumiques, supposée dépendre du temps. La condition (2.2) représente la condition au bord de déplacement qui signifie que le matériau est encastré sur la partie Γ_1 de sa frontière pendant le processus. La condition (2.3) représente la condition de traction qui signifie que des tractions surfaciques de densité $\boldsymbol{f}_2$, supposée dépendre du temps, agissent sur Γ_2.

Ici et ci-dessous, afin de simplifier la notation, souvent nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des différentes fonctions par rapport à la variable spatiale $\boldsymbol{x} \in \Omega \cup \Gamma$.

2.2 Hypothèses fondamentales pour le problème mécanique

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique posé ci-dessus, nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'opérateur $\mathcal{A}$ satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (a)\,\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ (b)\,\text{Il existe}\, L_{\mathcal{A}} > 0\,\text{tel que} \\ \qquad \|\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \qquad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ (c)\,\text{Il existe}\, m_{\mathcal{A}} > 0\,\text{tel que} \\ \qquad (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)).(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \qquad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ (d)\,\text{La fonction}\, \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon})\,\text{est mesurable sur } \Omega,\ \text{pour tout } \ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ (e)\,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

- Le tenseur de relaxation $\mathcal{B}$ et les densités de forces volumiques et de tractions de surface satisfont les hypothèses de régularité suivantes :

$$\mathcal{B} \in \mathcal{C}([0, T]; \boldsymbol{Q}_\infty). \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{f}_0 \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)^d). \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{f}_2 \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d). \tag{2.9}$$

- L'opérateur $\mathcal{E}$ satisfait les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (a)\,\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ (b)\,\text{Il existe } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ tel que} \\ \qquad \|\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \qquad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ (c)\ \text{La fonction } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ est mesurable sur } \Omega,\ \text{pour tout } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ (d)\,\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Des hypothèses supplémentaires seront mentionnées dans le chapitre suivant selon les conditions aux limites posées sur Γ_3.

2.3 Formulation variationnelle du problème mécanique

Dans cette section, nous établissons la formulation variationnelle du problème posé dans la Section 2.1.

Commençons par préciser l'ensemble des fonctions test

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H^1(\Omega)^d \ : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Rappelons que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ (Lemme 1.2.22). Ensuite, supposons que $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}_i)$ représente un couple de fonctions suffisamment régulières qui satisfait (2.1)−(2.3). Fixons $t \in [0,T]$ et posons

$$\boldsymbol{w}_1(t) = \boldsymbol{u}(t) \text{ et } \boldsymbol{w}_2(t) = \dot{\boldsymbol{u}}(t),$$

soit $v \in V$.

En multipliant l'équation (2.1) par $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_i(t))$ $(i = 1$ ou $i = 2)$ et en intégrant sur Ω, il vient que

$$\int_\Omega \text{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_i(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

L'intégrale contenant la divergence est transformée en utilisant la formule de Green (1.2) :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i(t)\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_i(t)))d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma}_i(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{a}.$$

On décompose alors l'intégrale sur Γ, et on utilise les conditions aux limites (2.2) et (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}_i(t)\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_i(t)))d\boldsymbol{x} &= \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{x} \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{a} + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_i(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}_i(t))d\boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'intégrale sur Γ_3 sera traitée dans le chapitre suivant.

A cette étape, et vu les expressions de $\boldsymbol{\sigma}_1(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}_2(t)$, nous considérons les opérateurs A et $\mathcal{S}$ définis comme suit

$$A : V \to V$$

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{S} : C([0,T];V) \to C([0,T];V)$$

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})_V = \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q \quad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in C([0,T];V),\ \boldsymbol{v} \in V. \tag{2.13}$$

On définit aussi la fonction

$$\boldsymbol{f} : [0,T] \to V$$

$$(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t)\cdot\boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a} \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V,\ t \in [0,T]. \tag{2.14}$$

Lemme 2.3.1. *Sous l'hypothèse* (2.6)*, l'opérateur* A *défini par* (2.12) *est :*

1. *bien défini,*
2. *fortement monotone,*
3. *lipschitzien.*

Démonstration.

1. Soit $\boldsymbol{u} \in V$ fixé, on a la forme linéaire $\boldsymbol{v} \to \int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}$ est continue sur V. En effet, soit $\boldsymbol{v} \in V$. On a $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ d'après l'hypothèse (e) de (2.6), on obtient alors

$$\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \Big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})\Big) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{S}^d$, ensuite, l'hypothèse (b) de (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}| &\leq \int_\Omega \|\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})\| \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\| d\boldsymbol{x} \\ &\leq L_\mathcal{A} \int_\Omega \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\| \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\| d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, il vient que

$$\begin{aligned} |\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}| &\leq L_\mathcal{A} \Big(\int_\Omega \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= L_\mathcal{A} \|\boldsymbol{u}\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V. \end{aligned}$$

Ceci prouve que la forme linéaire $\boldsymbol{v} \to \int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}$ est continue sur V, ce qui implique d'après le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet l'existence d'un unique élément $A\boldsymbol{u} \in V$ qui satisfait

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x} \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{v} \in V.$$

2. Soient $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, nous avons

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_V &= (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_V - (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_V \\ &= \int_\Omega \Big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})))\Big) \cdot \Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\Big) d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (c) de (2.6), nous trouvons

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_V &\geq m_{\mathcal{A}} \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x} \\ &= m_{\mathcal{A}} \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x} \\ &= m_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_V^2,\end{aligned}$$

ce qui montre que l'opérateur A est fortement monotone.

3. Soient maintenant $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$, nous avons

$$(A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V = \int_{\Omega} \Big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})))\Big) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})) d\boldsymbol{x}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{S}^d$, nous trouvons

$$(A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V \leq \int_{\Omega} \|\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})))\| \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))\| d\boldsymbol{x}.$$

En utilisant l'hypothèse (b) de (2.6) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V &\leq L_{\mathcal{A}} \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\| \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))\| d\boldsymbol{x} \\ &\leq L_{\mathcal{A}} \Big(\int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Omega} \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}))\|^2 d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_V \|\boldsymbol{w}\|_V.\end{aligned}$$

Prenons maintenant $\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}$, il vient que

$$\|A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}\|_V \leq L_{\mathcal{A}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_V,$$

ce qui montre que l'opérateur A est lipschitzien.

■

Lemme 2.3.2. *Sous l'hypothèse* (2.7), *l'opérateur* $\mathcal{S}$ *défini par* (2.13) *est :*

1. *bien défini,*
2. *de mémoire.*

Démonstration.

1. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0,T];V)$. Fixons $t \in [0,T]$, soit $\boldsymbol{v} \in V$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans Q, on obtient

$$\Big|\Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q\Big| \leq \Big\|\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds\Big\|_Q \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q.$$

En utilisant le Théorème de Bochner, ensuite, l'inégalité (1.1), on trouve

$$\Big|\Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q\Big| \leq d\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_Q \int_0^t \|\mathcal{B}(t-s)\|_{\boldsymbol{Q}_\infty}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))\|_Q ds.$$

Ensuite, en utilisant l'hypothèse (2.7), il vient que

$$\Big|\Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q\Big| \leq \Big[d \max_{s\in[0,T]}\|\mathcal{B}(s)\|_{\boldsymbol{Q}_\infty} \int_0^t \|\boldsymbol{u}(s)\|_V ds\Big]\|\boldsymbol{v}\|_V,$$

ce qui montre que la forme linéaire $\boldsymbol{v} \to \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q$ est continue sur V. On applique le Théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il résulte qu'il existe un unique élément $\boldsymbol{\mathcal{S}u}(t) \in V$ qui satisfait (2.13).

Reste à montrer que $\boldsymbol{\mathcal{S}u}$ est continue sur $[0,T]$. Pour cela, soient $t, t_0 \in [0,T]$ et supposons que $t > t_0$, nous avons

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{S}u}(t) - \boldsymbol{\mathcal{S}u}(t_0), \boldsymbol{v})_V &= \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds - \int_0^{t_0} \mathcal{B}(t_0-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q \\ &= \Big(\int_0^{t_0} \Big(\mathcal{B}(t-s) - \mathcal{B}(t_0-s)\Big)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q \\ &+ \Big(\int_{t_0}^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\Big)_Q.\end{aligned}$$

En utilisant les mêmes argument précédents, on obtient

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{S}u}(t) - \boldsymbol{\mathcal{S}u}(t_0), \boldsymbol{v})_V \leq{}& d\|\boldsymbol{v}\|_V \int_0^{t_0} \Big\|\mathcal{B}(t-s) - \mathcal{B}(t_0-s)\Big\|_{\boldsymbol{Q}_\infty}\|\boldsymbol{u}(s)\|_V ds \\ &+ d\|\boldsymbol{v}\|_V\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)} \int_{t_0}^t \|\boldsymbol{u}(s)\|_V ds.\end{aligned}$$

Ensuite, comme $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0,T];V)$, on obtient

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{S}u}(t) - \boldsymbol{\mathcal{S}u}(t_0), \boldsymbol{v})_V \leq{}& d\|\boldsymbol{v}\|_V \int_0^{T} \Big\|\mathcal{B}(t-s) - \mathcal{B}(t_0-s)\Big\|_{\boldsymbol{Q}_\infty}\|\boldsymbol{u}(s)\|_V ds \\ &+ d\|\boldsymbol{v}\|_V\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)} \max_{s\in[0,T]}\|\boldsymbol{u}(s)\|_V|t-t_0|.\end{aligned}$$

Finalement, prenons $\boldsymbol{v} = \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t_0)$ on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t_0)\|_V \le d\int_0^T \Big\|\mathcal{B}(t-s) - \mathcal{B}(t_0-s)\Big\|_{\boldsymbol{Q}_\infty} \|\boldsymbol{u}(s)\|_V ds \\ + d\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)}\|\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{C}([0,T];V)}|t-t_0|.\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque t tend vers t_0, on obtient

$$\lim_{t\to t_0}\|\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t_0)\|_V = 0.$$

On traite le cas où $t < t_0$ de la même manière, ce qui montre que $\mathcal{S}\boldsymbol{u}$ est continue sur $[0,T]$.

2. Soient $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{C}([0,T];V)$, $\boldsymbol{w} \in V$ et $t \in [0,T]$, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w})_V &= (\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t), \boldsymbol{w})_V - (\mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w})_V \\ &= \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\Big)_Q - \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(s))ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\Big)_Q \\ &= \Big(\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(s))\Big)ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\Big)_Q.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans Q, ensuite, en utilisant le théorème de Bochner, nous trouvons

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w})_V \le \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\|_Q \int_0^t \Big\|\mathcal{B}(t-s)\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(s))\Big)\Big\|_Q ds.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité (1.1), ensuite, l'hypothèse (2.7) nous obtenons

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t), \boldsymbol{w})_V &\le d\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\|_Q \int_0^t \|\mathcal{B}(t-s)\|_{\boldsymbol{Q}_\infty}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(s))\|_Q ds \\ &\le d\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})\|_Q\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)} \int_0^t \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1(s)) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2(s))\|_Q ds \\ &= d\|\boldsymbol{w}\|_V\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)} \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V ds\end{aligned}$$

Finalement, nous prenons $\boldsymbol{w} = \mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t)$, nous déduisons l'existence d'une constante positive $L_\mathcal{S} := d\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{C}([0,T];\boldsymbol{Q}_\infty)}$, telle que :

$$\|\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t)\|_V \le L_\mathcal{S}\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V ds,$$

ce qui termine la preuve.

■

Lemme 2.3.3. *Sous les hypothèses* (2.8) *et* (2.9), *la fonction* $\boldsymbol{f}$ *définie par* (2.14) *est :*

1. *bien défini,*
2. *continue.*

Démonstration.

1. Pour $t \in [0, T]$ fixé, la forme linéaire $\boldsymbol{v} \to \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$ est continue sur V. En effet, soit $\boldsymbol{v} \in V$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Omega)^d$ et $L^2(\Gamma_2)^d$ respectivement, on trouve que

$$\begin{aligned}
|\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}| &\leq |\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}| + |\int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}| \\
&\leq \|\boldsymbol{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \\
&\leq \|\boldsymbol{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_2)^d}.
\end{aligned}$$

   En utilisant l'inégalité (1.3) et l'inégalité de trace (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
|\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}| &\leq \frac{1}{c_K} \|\boldsymbol{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_V + c_0 \|\boldsymbol{f}_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \|\boldsymbol{v}\|_V \\
&= c_1 \|\boldsymbol{v}\|_V,
\end{aligned}$$

   où $c_1 := \frac{1}{c_K} \|\boldsymbol{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d} + c_0 \|\boldsymbol{f}_2(t)\|_{L^2(\Gamma_2)^d}$, ce qui montre la continuité de la forme linéaire $\boldsymbol{v} \to \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}$ sur V. Il résulte grâce au Théorème de représentation de Riesz-Fréchet l'existence d'un élément unique $\boldsymbol{f}(t) \in V$, qui satisfait (2.14).

2. Soient $t, t_0 \in [0, T]$, on a

$$(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0), \boldsymbol{v})_V = \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{f}_0(t) - \boldsymbol{f}_0(t_0)) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Gamma_2} (\boldsymbol{f}_2(t) - \boldsymbol{f}_2(t_0)) \cdot \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{a}.$$

   En utilisant les mêmes étapes dans la preuve ci-dessus, il vient que

$$(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0), \boldsymbol{v})_V \leq \frac{1}{c_K} \|\boldsymbol{f}_0(t) - \boldsymbol{f}_0(t_0)\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}\|_V + c_0 \|\boldsymbol{f}_2(t) - \boldsymbol{f}_2(t_0)\|_{L^2(\Gamma_2)^d} \|\boldsymbol{v}\|_V$$

   Prenons maintenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)$, on trouve

$$\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)\|_V \leq \frac{1}{c_K} \|\boldsymbol{f}_0(t) - \boldsymbol{f}_0(t_0)\|_{L^2(\Omega)^d} + c_0 \|\boldsymbol{f}_2(t) - \boldsymbol{f}_2(t_0)\|_{L^2(\Gamma_2)^d}.$$

En passant à la limite lorsque t tend vers t_0, et en utilisant le fait que $\boldsymbol{f}_0 \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)^d)$ et $\boldsymbol{f}_2 \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Gamma_2)^d)$, il vient que

$$\lim_{t \to t_0} \|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(t_0)\|_V = 0.$$

Ceci termine la preuve.

$\blacksquare$

Chapitre 3

Trois problèmes de contact viscoélastique

A partir du problème posé et de sa formulation variationnelle décrite dans le chapitre précédent, nous spécifions trois modèles de contact mécanique viscoélastique et établissons leurs formulations variationnelles dans ce chapitre. Ensuite, nous transformons ces formulations à des problèmes d'inclusions dépendantes du temps, afin d'appliquer les théorèmes d'existence et d'unicité énoncés au premier chapitre.
Ici, nous désignons par v_ν et $\boldsymbol{v}_\tau$ les composantes normales et tangentielles de déplacement sur Γ qui sont données par

$$v_\nu = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad \boldsymbol{v}_\tau = \boldsymbol{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{3.1}$$

Nous notons aussi par σ_ν et $\boldsymbol{\sigma}_\tau$ les contraintes normales et tangentielles sur Γ, définies par

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \tag{3.2}$$

En utilisant les relations (3.1) et (3.2), ensuite les relations d'orthogonalité $\boldsymbol{v}_\tau \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ ([12]), nous obtenons la relation suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{v} = (\sigma_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_\tau) \cdot (v_\nu \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{v}_\tau) = \sigma_\nu v_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau. \tag{3.3}$$

3.1 Premier problème mécanique

3.1.1 Position du problème mécanique

Le modèle de contact viscoélastique que nous considérons dans cette section est le problème de contact sans frottement de Signiorini, qui modélise le contact avec une fondation parfaitement rigide. L'énoncé de ce problème est le suivant :

Problème 1 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ tels que, pour tout $t \in [0,T]$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.4}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{sur } \Gamma_2, \tag{3.7}$$

$$u_\nu(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu(t)u_\nu(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3, \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \boldsymbol{0} \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.9}$$

Les équations (3.4), (3.5) et les conditions aux limites (3.6), (3.7) ont été décrites dans la Section 2.1. La condition (3.8) représente la condition de Signiorini qui montre qu'en cas de contact c'est le matériau qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le matériau et la fondation. Enfin, la condition (3.9) représente la condition de contact sans frottement. Elle montre que la force de frottement σ_τ disparaît pendant le processus. Il s'agit d'une idéalisation du processus, car même des surfaces complètement lubrifiées génèrent une résistance au cisaillement au mouvement tangentiel. Cependant, cette modélisation est une approche suffisamment bonne de la réalité dans certaines situations, particulièrement lorsque les surfaces de contact sont lubrifiées.

3.1.2 Hypothèses fondamentales pour le problème mécanique

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique (3.4)−(3.9), nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'opérateur d'élasticité $\mathcal{A}$ satisfait les hypothèses données par (2.6).

- Le tenseur de relaxation $\mathcal{B}$ et les densités de forces volumiques et de tractions de surface satisfont les hypothèses de régularité (2.7)−(2.9).

3.1.3 Formulation variationnelle du problème mécanique

Dans cette section, nous établissons la formulation variationnelle associée au Problème 1. On part de l'équation (2.11) décrite dans le chapitre précédent après substitution de l'équation (3.4) dans l'intégrale du membre gauche, on trouve

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}\\&=\int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in V,\ t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.10}$$

Ensuite, en utilisant la relation (3.3), on obtient

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu-u_\nu(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t))d\boldsymbol{a}.$$

On suppose que v vérifie la même hypothèse $v_\nu \le 0$ sur Γ_3 que $\boldsymbol{u}(t)$, i.e., que $\boldsymbol{v}\in U$, où U est l'ensemble des déplacements admissibles défini par

$$U=\{\boldsymbol{v}\in V: v_\nu\le 0\ \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}.\tag{3.11}$$

En utilisant la condition (3.9), ensuite, les conditions de Signiorini (3.8), on trouve

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))\,d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)v_\nu\,d\boldsymbol{a}\ge 0,\tag{3.12}$$

puisque $\sigma_\nu(t)u_\nu(t)=0$, $\sigma_\nu(t)\le 0$ et $v_\nu\le 0$ du fait que $\boldsymbol{v}\in U$.
En combinant (3.10) et (3.12), on obtient la formulation variationnelle suivante :
Problème PV1 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u}:[0,T]\to U$ tel que :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}\\&\qquad\ge\int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in U,t\in[0,T].\end{aligned}\tag{3.13}$$

3.1.4 Problème équivalent en terme du cône

Dans cette section, on va transformer le Problème PV1 en un problème en terme du cône.

En utilisant les notations (2.12)−(2.14), on peut écrire l'inégalité (3.13) sous la forme suivante :

$$0 \geq \Big(\boldsymbol{f}(t) - A\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)\Big)_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U,\, t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Lemme 3.1.1. *L'ensemble U défini par* (3.11) *est un cône convexe fermé qui contient* $\mathbf{0}_V$.

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\mathbf{0}_V \in U$.
Soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in U$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda \boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v} \in V$ puisque V est un espace vectoriel. De plus, on a

$$(\lambda u + (1-\lambda)v)_\nu = \lambda u_\nu + (1-\lambda)v_\nu \leq 0,$$

car $u_\nu \leq 0$ et $v_\nu \leq 0$, ce qui montre que U est un ensemble convexe.
Ensuite, soit $\boldsymbol{v} \in U$, i.e., $\boldsymbol{v} \in V$ et $v_\nu \leq 0$ sur Γ_3. Soit $\lambda > 0$, alors $\lambda\boldsymbol{v} \in V$ et

$$(\lambda v)_\nu = \lambda v_\nu \leq 0,$$

d'où U est un cône.
Finalement, soit $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de U, qui converge vers $\boldsymbol{v}$ dans V. L'inégalité de trace (1.4) implique que la suite $(\boldsymbol{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{v}$ dans $L^2(\Gamma_3)^d$. En utilisant maintenant le Théorème 1.2.6, il existe alors une sous-suite $(\boldsymbol{v}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers $\boldsymbol{v}$ lorsque $k \to \infty$. Comme $(\boldsymbol{v}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset U$, on a

$$(v_{n_k})_\nu \leq 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Passant à la limite quand $k \to \infty$, on obtient

$$v_\nu \leq 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma_3,$$

ce qui montre que $\boldsymbol{v} \in U$, et donc U est fermé. ■

Proposition 3.1.2. *Le Problème PV1 est équivalent au problème suivant :*
Problème E1 : *Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : [0,T] \to U$ tel que :*

$$-\boldsymbol{u}(t) \in N_{C(t)}(A\boldsymbol{u}(t) + \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t)) \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{3.15}$$

Démonstration. D'après ce qui précède, l'inégalité (3.13) est équivalente à l'inégalité (3.14). Il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.3.12 avec $X = V$, $K = U$ et j est la fonction nulle. Dans ce cas $J = I_U$, où I_U est la fonction indicatrice ($I_U(\boldsymbol{v}) = 0$ si $\boldsymbol{v} \in U$ et $+\infty$ sinon), $C = \partial I_U(\mathbf{0}_V)$ et $C(t) = \boldsymbol{f}(t) - \partial I_U(\mathbf{0}_V)$ pour tout $t \in [0, T]$. L'hypothèse (K) est satisfaite grâce au Lemme 3.1.1. ■

3.1.5 Existence et unicité de la solution faible

Théorème 3.1.3. *Supposons que les hypothèses* (2.6)−(2.9) *sont satisfaites. Alors, le Problème E1 (et donc le Problème PV1 aussi) admet une unique solution* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0, T]; U)$.

Démonstration. La preuve découle directement de l'application du Théorème 1.3.11 avec $X = V$, $K = U$ et j est la fonction nulle.
L'hypothèse (K) est satisfaite grâce au Lemme 3.1.1.
Le Lemme 2.3.1 garantie que l'hypothèse (A) est satisfaite.
L'hypothèse (f) est satisfaite grâce au Lemme 2.3.3.
Le Lemme 2.3.2 assure que l'hypothèse $(\mathcal{S})$ est satisfaite. La fonction nulle est une fonction convexe, positivement homogène et lipschitzienne. ■

3.2 Deuxième problème mécanique

3.2.1 Position du problème mécanique

Le modèle mécanique que nous considérons dans cette section est un modèle mécanique sans frottement basé sur une loi constitutive spécifique et des conditions aux limites d'interface, qui seront décrites ci-dessous. L'énoncé de ce problème est le suivant :

Problème 2 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$ tels que, pour tout $t \in [0, T]$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.16}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \mathbf{0} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{sur } \Gamma_2, \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{aligned} & -F\Big(\int_0^t u_\nu^+(s)ds\Big) \leq \sigma_\nu(t) \leq 0, \\ & -\sigma_\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u_\nu(t) < 0, \\ F\Big(\int_0^t u_\nu^+(s)ds\Big) & \text{si} \quad u_\nu(t) > 0, \end{cases} \end{aligned}\right\} \text{sur } \Gamma_3, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.21}$$

Nous désignons par la fonction v^+ la partie positive de v, c'est-à-dire, $v^+ = \max\{0, v\}$, et par la fonction v^- la partie négative de v, c'est-à-dire, $v^- = \min\{0, v\}$. Alors, on peut écrire

$$v = v^+ + v^-. \tag{3.22}$$

Les équations (3.16), (3.17) et les conditions aux limites (3.18), (3.19) sont déjà décrites dans la Section 2.1. La condition (3.20) modélise le contact avec un corps rigide-déformable avec des effets de mémoire. Enfin, la condition (3.21), qui est la même condition (3.9) dans le Problème 1, représente la condition de contact sans frottement.

3.2.2 Hypothèses fondamentales pour le problème mécanique

Pour l'étude variationnelle du problème (3.16)−(3.21), nous considérons les hypothèses suivantes :.

- L'opérateur d'élasticité $\mathcal{A}$ satisfait les hypothèses données par (2.6).
- Le tenseur de relaxation $\mathcal{B}$ et les densités de forces volumiques et de tractions de surface satisfont les hypothèses de régularité (2.7)−(2.9).
- La fonction de mémoire F satisfait aux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} F : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ (a)\ \text{Il existe}\ L_F > 0\ \text{tel que} \\ \qquad |F(\boldsymbol{x}, r_1) - F(\boldsymbol{x}, r_2)| \leq L_F |r_1 - r_2| \qquad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ (b)\ \text{La fonction}\ \boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}, r)\ \text{est mesurable sur}\ \Gamma_3,\ \text{pour tout}\ r \in \mathbb{R}. \\ (c)\ F(\boldsymbol{x}, 0) = 0\ \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{3.23}$$

3.2.3 Formulation variationnelle du problème mécanique

Dans cette section, nous établissons la formulation variationnelle associée au Problème 2. On part de l'équation (2.11) décrite dans le chapitre précédent après substitution de l'équation (3.16) dans l'intégrale du membre gauche, on trouve

$$\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x}$$
$$=\int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{x}+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}\qquad\forall\boldsymbol{v}\in V,\ t\in[0,T].\tag{3.24}$$

Ensuite, en utilisant la relation (3.3), on obtient

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu-u_\nu(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t))d\boldsymbol{a}.$$

En utilisant la condition (3.21), on obtient

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu-u_\nu(t))d\boldsymbol{a}.\tag{3.25}$$

Pour $t\in[0,T]$ fixé, posons

$$I_1:=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu^+-u_\nu^+(t))d\boldsymbol{a},$$

$$I_2:=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu^--u_\nu^-(t))d\boldsymbol{a}.$$

Concernant l'intégrale I_1, on distingue deux cas :

- si $u_\nu(t)\le 0$, alors $u_\nu^+(t)=0$ d'où $v_\nu^+-u_\nu^+(t)\ge 0$.

  En tenant compte de la condition (3.20), il découle que

$$\sigma_\nu(t)(v_\nu^+-u_\nu^+(t))\ge -F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds)(v_\nu^+-u_\nu^+(t)).$$

- si $u_\nu(t)>0$, alors de (3.20) on a

$$\sigma_\nu(t)(v_\nu^+-u_\nu^+(t))= -F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds)(v_\nu^+-u_\nu^+(t)).$$

Des deux cas précédents, on en déduit que

$$I_1\ge-\int_{\Gamma_3}F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds)(v_\nu^+-u_\nu^+(t))d\boldsymbol{a}.\tag{3.26}$$

Revenons à l'intégrale I_2. On distingue aussi deux cas :

- si $u_\nu(t) \geq 0$, alors $u_\nu^-(t) = 0$, comme $v_\nu^- \leq 0$ et d'après (3.20) $\sigma_\nu(t) \leq 0$, il vient que

$$\sigma_\nu(t)(v_\nu^- - u_\nu^-(t)) \geq 0.$$

- si $u_\nu(t) < 0$, on a de (3.20)

$$\sigma_\nu(t)(v_\nu^- - u_\nu^-(t)) = 0.$$

Des deux cas précédents, il vient que

$$I_2 \geq 0. \tag{3.27}$$

En combinant (3.26) et (3.27), on obtient

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a} \geq -\int_{\Gamma_3} F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds)(v_\nu^+ - u_\nu^+(t))d\boldsymbol{a}. \tag{3.28}$$

Substituons (3.28) dans (3.24), on trouve la formulation variationnelle suivante :
Problème PV2 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : [0,T] \to U$ tel que :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) \cdot \Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x} &+ \int_\Omega \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s))ds \cdot \Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\Big)d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_{\Gamma_3} F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds)(v_\nu^+ - u_\nu^+(t))d\boldsymbol{a} \geq \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))d\boldsymbol{a} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in U, t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

3.2.4 Problème équivalent en terme du cône

Dans le but de transformer le Problème PV2 en un problème en terme du cône, considérons les opérateurs définis par (2.12), (2.13) et la fonction définie par (2.14), en plus des opérateurs $\mathcal{R}$ et j définis comme suit

$$\mathcal{R} : \mathcal{C}([0,T];V) \to \mathcal{C}([0,T];L^2(\Gamma_3)_+)$$

$$\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t) = F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds) \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0,T];V), \tag{3.30}$$

$$j : L^2(\Gamma_3)_+ \times V \to \mathbb{R}$$

$$j(\eta, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} \eta v_\nu^+ da \qquad \text{pour tout } \eta \in L^2(\Gamma_3)_+, \boldsymbol{v} \in V, \tag{3.31}$$

où

$$L^2(\Gamma_3)_+ = \{\eta \in L^2(\Gamma_3); \eta \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}. \tag{3.32}$$

Lemme 3.2.1. *Sous l'hypothèse* (3.23)*, l'opérateur* $\mathcal{R}$ *défini par* (3.30) *est de mémoire.*

Démonstration.
Commençons par démontrer l'inégalité suivante :

$$|u_\nu(\boldsymbol{a}) - v_\nu(\boldsymbol{a})| \leq \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})\| \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V,\ \text{p.p. } a \in \Gamma_3. \tag{3.33}$$

Soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $a \in \Gamma_3$ p.p. On a

$$\begin{aligned}
|u_\nu(\boldsymbol{a}) - v_\nu(\boldsymbol{a})| &= |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{a})| \\
&= |\sum_{i=1}^{d} (u_i(\boldsymbol{a}) - v_i(\boldsymbol{a}))\nu_i(\boldsymbol{a})| \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{d} (u_i(\boldsymbol{a}) - v_i(\boldsymbol{a}))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{d} (\nu_i(\boldsymbol{a}))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{d} (u_i(\boldsymbol{a}) - v_i(\boldsymbol{a}))^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})\|.
\end{aligned}$$

Soient maintenant $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}([0,T];V)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{R}\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} &= \Big\|F(\int_0^t u_\nu^+(s)ds) - F(\int_0^t v_\nu^+(s)ds)\Big\|^2_{L^2(\Gamma_3)} \\
&= \int_{\Gamma_3} \Big(F\big(\boldsymbol{a}, \int_0^t u_\nu^+(\boldsymbol{a},s)ds\big) - F\big(\boldsymbol{a}, \int_0^t v_\nu^+(\boldsymbol{a},s)ds\big)\Big)^2 d\boldsymbol{a}
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse (a) de (3.23), on trouve

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{R}\boldsymbol{v}(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)} &\leq L_F^2 \int_{\Gamma_3} \Big(\int_0^t u_\nu^+(\boldsymbol{a},s)ds - \int_0^t v_\nu^+(\boldsymbol{a},s)ds\Big)^2 d\boldsymbol{a} \\
&= L_F^2 \int_{\Gamma_3} \Big(\int_0^t \big(u_\nu^+(\boldsymbol{a},s) - v_\nu^+(\boldsymbol{a},s)\big)ds\Big)^2 d\boldsymbol{a} \\
&= L_F^2 \Big\|\int_0^t \big(u_\nu^+(s) - v_\nu^+(s)\big)ds\Big\|^2_{L^2(\Gamma_3)}.
\end{aligned}$$

Grâce au Théorème de Bochner, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t)-\mathcal{R}\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq L_F\int_0^t \left\|u_\nu^+(s)-v_\nu^+(s)\right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds\\
&= L_F\int_0^t \Big(\int_{\Gamma_3} \left(u_\nu^+(\boldsymbol{a},s)-v_\nu^+(\boldsymbol{a},s)\right)^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} ds\\
&\leq L_F\int_0^t \Big(\int_{\Gamma_3} \left(u_\nu(\boldsymbol{a},s)-v_\nu(\boldsymbol{a},s)\right)^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} ds,
\end{aligned}$$

et par l'inégalité (3.33), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t)-\mathcal{R}\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq L_F\int_0^t \Big(\int_{\Gamma_3} \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a},s)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{a},s)\|^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} ds\\
&= L_F\int_0^t \|\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{v}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}\, ds.
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, nous utilisons l'inégalité de trace (1.4), nous trouvons

$$\|\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t)-\mathcal{R}\boldsymbol{v}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0 L_F\int_0^t \left\|\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{v}(s)\right\|_V ds.$$

■

Lemme 3.2.2. *La fonction $j(\eta,\cdot)$ définie par* (3.31) *est :*

1. *convexe,*
2. *positivement homogène,*
3. *lipschitzienne de constante $c_0\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)}$.*

Démonstration.

1. Soient $\eta \in L^2(\Gamma_3)_+, \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ et $\lambda \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
j(\eta, \lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) &= \int_{\Gamma_3} \eta(\lambda u + (1-\lambda)v)_\nu^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\Gamma_3} \eta\big((\lambda\boldsymbol{u} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\nu}\big)^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\Gamma_3} \eta\big(\lambda\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nu} + (1-\lambda)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\big)^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\Gamma_3} \eta\big(\lambda u_\nu + (1-\lambda)v_\nu\big)^+ d\boldsymbol{a} \\
&\leq \int_{\Gamma_3} \eta\big(\lambda u_\nu^+ + (1-\lambda)v_\nu^+\big) d\boldsymbol{a} \\
&= \lambda j(\eta, \boldsymbol{u}) + (1-\lambda) j(\eta, \boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

ce qui donne la convexité de $j(\eta, \cdot)$.

2. Soient $\eta \in L^2(\Gamma_3)_+$, $\boldsymbol{v} \in V$ et $\alpha > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
j(\eta, \alpha\boldsymbol{v}) &= \int_{\Gamma_3} \eta(\alpha v)_\nu^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\Gamma_3} \eta(\alpha\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu})^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \alpha \int_{\Gamma_3} \eta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu})^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \alpha \int_{\Gamma_3} \eta v_\nu^+ d\boldsymbol{a} \\
&= \alpha j(\eta, \boldsymbol{v}),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $j(\eta, \cdot)$ est positivement homogène.

3. Soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ et $\eta \in L^2(\Gamma_3)_+$, nous avons

$$\begin{aligned}
|j(\eta, \boldsymbol{u}) - j(\eta, \boldsymbol{v})| &= \Big| \int_{\Gamma_3} \eta(\boldsymbol{a}) u_\nu^+(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} - \int_{\Gamma_3} \eta(\boldsymbol{a}) v_\nu^+(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} \Big| \\
&= \Big| \int_{\Gamma_3} \eta(\boldsymbol{a})(u_\nu^+(\boldsymbol{a}) - v_\nu^+(\boldsymbol{a})) d\boldsymbol{a} \Big| \\
&\leq \int_{\Gamma_3} |\eta(\boldsymbol{a})||u_\nu^+(\boldsymbol{a}) - v_\nu^+(\boldsymbol{a})| d\boldsymbol{a} \\
&\leq \int_{\Gamma_3} |\eta(\boldsymbol{a})||u_\nu(\boldsymbol{a}) - v_\nu(\boldsymbol{a})| d\boldsymbol{a}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.33), on obtient

$$|j(\eta,\boldsymbol{u}) - j(\eta,\boldsymbol{v})| \leq \int_{\Gamma_3} |\eta(\boldsymbol{a})|\,\|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})\| d\boldsymbol{a}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Gamma_3)$, nous trouvons

$$\begin{aligned}|j(\eta,\boldsymbol{u}) - j(\eta,\boldsymbol{v})| &\leq \|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)}\Big(\int_{\Gamma_3} \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{a})\|^2 da\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}.\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de trace (1.4), on obtient

$$|j(\eta,\boldsymbol{u}) - j(\eta,\boldsymbol{v})| \leq c_0\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_V.$$

Ceci montre que l'opérateur $j(\eta,\cdot)$ est lipschitzien.

■

Lemme 3.2.3. *Il existe $\alpha_j \geq 0$ tel que la fonction j définie par* (3.31) *satisfait*

$$j(\eta_1,\boldsymbol{v}_2) - j(\eta_1,\boldsymbol{v}_1) + j(\eta_2,\boldsymbol{v}_1) - j(\eta_2,\boldsymbol{v}_2) \leq \alpha_j\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_V$$

pour tout $\eta_1,\eta_2 \in L^2(\Gamma_3)_+$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V$.

Démonstration. Soient $\eta_1,\eta_2 \in L^2(\Gamma_3)_+$ et $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V$, on a par définition de j ((3.31))

$$j(\eta_1,\boldsymbol{v}_2) - j(\eta_1,\boldsymbol{v}_1) + j(\eta_2,\boldsymbol{v}_1) - j(\eta_2,\boldsymbol{v}_2) = j(\eta_1 - \eta_2,\boldsymbol{v}_2) - j(\eta_1 - \eta_2,\boldsymbol{v}_1).$$

En utilisant 3. du Lemme 3.2.2, on obtient

$$j(\eta_1,\boldsymbol{v}_2) - j(\eta_1,\boldsymbol{v}_1) + j(\eta_2,\boldsymbol{v}_1) - j(\eta_2,\boldsymbol{v}_2) \leq c_0\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_V.$$

■

Grâce à (2.12)−(2.14), (3.30) et (3.31), l'inégalité (3.29) peut être écrite sous la forme :

$$j(\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}) - j(\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)) \geq \Big(\boldsymbol{f}(t) - A\boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{\mathcal{S}}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t)\Big)_V \qquad \forall \boldsymbol{v} \in V,\ t \in [0,T]. \tag{3.34}$$

Proposition 3.2.4. *Le Problème PV2 est équivalent au problème suivant :*

Problème E2 : *Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V$ tel que :*

$$-\boldsymbol{u}(t) \in N_{C(\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t),t)}(A\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{\mathcal{S}}\boldsymbol{u}(t)) \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

Démonstration. D'après ce qui précède, l'inégalité (3.29) est équivalente à l'inégalité (3.34). Il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.3.14 avec $X = K = V$, $Y = L^2(\Gamma_3)$, $\Lambda = L^2(\Gamma_3)_+$, $J = j$, $C(\eta) = \partial j(\eta, \mathbf{0}_V)$ et $C(\eta, t) = \boldsymbol{f}(t) - C(\eta)$ pour tout $\eta \in L^2(\Gamma_3)_+$, $t \in [0, T]$. Il est facile de voir que l'hypothèse (K) est satisfaite. De plus, l'hypothèse (j_2)(a) est vérifiée grâce au Lemme 3.2.2. ∎

3.2.5 Existence et unicité de la solution faible

Théorème 3.2.5. *Supposons que les hypothèses* (2.6)−(2.9) *et* (3.23) *sont satisfaites. Alors, le Problème E2 admet une solution unique* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0, T]; V)$.

Démonstration. La preuve est une conséquence directe du Théorème 1.3.13 avec $X = K = V$, $Y = L^2(\Gamma_3)$ et $\Lambda = L^2(\Gamma_3)_+$. Il est facile de voir que l'hypothèse (K) est satisfaite. De plus, les hypothèses (A), $(\mathcal{S})$ et (f) sont satisfaites grâce aux Lemmes 2.3.1−2.3.3. Les hypothèses (j_2), $(\mathcal{R})$, sont vérifiées grâce aux Lemmes 3.2.1−3.2.3. ∎

3.3 Troisième problème mécanique

3.3.1 Position du problème mécanique

Le modèle mécanique que nous considérons dans cette section est un modèle mécanique avec frottement. L'énoncé de ce problème est le suivant :

Problème 3 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$ tels que, pour tout $t \in [0, T]$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(s))ds \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.36}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \mathbf{0} \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{sur } \Gamma_1, \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\nu = \boldsymbol{f}_2(t) \qquad \text{sur } \Gamma_2, \tag{3.39}$$

$$u_\nu(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3, \tag{3.40}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \leq F\big(\int\limits_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\big), \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = F\big(\int\limits_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\big)\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|} \quad \text{si } \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) \neq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \text{sur } \Gamma_3, \tag{3.41}$$

de plus,

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{dans } \Omega. \tag{3.42}$$

Ce problème correspond au problème décrit dans la Section 2.1 avec $i = 2$, en plus des conditions :

- (3.40) représentant la condition de contact bilatérale ; elle montre qu'il n'y pas de séparation entre le matériau et la fondation pendant le processus.
- (3.41) qui représente une version de glissement total de la loi de frottement sec de Coulomb. Ici F représente la limite de frottement et la quantité

$$T(\boldsymbol{x}, t) = \int\limits_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds,$$

  représente le taux de glissement total au point $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$, au moment $t \in]0, T[$. Considérer une limite de frottement F qui dépend du taux de glissement total décrit la réorganisation des surfaces de contact pendant le processus de glissement.
- La condition (3.42) représente la condition initiale dans laquelle $\boldsymbol{u}_0$ représente un champ de déplacement initial donné.

Plus tard, pour établir la formulation variationnelle du problème précédent, nous aurons besoin de définir l'espace variationnel suivant :

$$V_1 = \{\boldsymbol{v} \in V : \quad v_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3\}.$$

Lemme 3.3.1. *L'espace $(V_1, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. On commence par définir l'application linéaire suivante :

$$\varphi : V \to L^2(\Gamma_3)$$
$$\boldsymbol{v} \to v_\nu.$$

Soit $\boldsymbol{v} \in V$, on a

$$\begin{aligned}
\|v_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} &= \Big(\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu})^2(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\int_{\Gamma_3} \Big(\sum_{i=1}^{d} v_i(\boldsymbol{a})\nu_i(\boldsymbol{a})\Big)^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\int_{\Gamma_3} \sum_{i=1}^{d}(v_i(\boldsymbol{a}))^2 \sum_{i=1}^{d}(\nu_i(\boldsymbol{a}))^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{d} \int_{\Gamma_3} (v_i(\boldsymbol{a}))^2 d\boldsymbol{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|^2_{L^2(\Gamma_3)}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de trace (1.4), on obtient

$$\|v_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0\|\boldsymbol{v}\|_V,$$

ce qui montre que l'application linéaire φ est continue sur V. D'où $\ker(\varphi) = V_1$ est un sous espace vectoriel fermé de V qui est un espace de Hilbert, on en déduit que V_1 muni de la norme $\|\cdot\|_V$ est un espace de Hilbert. ■

3.3.2 Hypothèses fondamentales pour le problème mécanique

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique (3.36)−(3.42), nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}$ satisfait les hypothèses données par (2.6).
- L'opérateur d'élasticité $\mathcal{E}$ satisfait les hypothèses (2.10).
- Le tenseur de relaxation $\mathcal{B}$ et les densités de forces volumiques et de tractions de surface satisfont les hypothèses de régularité (2.7)−(2.9).
- L'opérateur de limite de frottement F satisfait les hypothèses (3.23).
- La condition initiale satisfait :

$$\boldsymbol{u}_0 \in V_1. \tag{3.43}$$

3.3.3 Formulation variationnelle du problème mécanique

Dans cette section, nous établissons la formulation variationnelle associée au Problème 3. On part de l'équation (2.11) décrite dans le chapitre précédent après substitution de l'équation (3.36) dans l'intégrale du membre gauche

$$\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x}+\int_\Omega \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(s))ds\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x}=\int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{x}$$
$$+\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a}\qquad \forall \boldsymbol{v}\in V_1,\ t\in[0,T]. \quad (3.44)$$

Ensuite, en utilisant la relation (3.3), on obtient

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu(t)(v_\nu-\dot{u}_\nu(t))d\boldsymbol{a}+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))d\boldsymbol{a}.$$

Grâce à la condition (3.40), qui implique que $\dot{u}_\nu(t)=0$ sur Γ_3, on a

$$\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a}=\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))d\boldsymbol{a},$$

puisque $v_\nu=0$ sur Γ_3, car $\boldsymbol{v}\in V_1$.

Pour $t\in[0,T]$ fixé, on distingue deux cas :

- si $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\neq\boldsymbol{0}$, alors de (3.41) on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))&=-F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|}\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))\\&=-F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|}\\&\quad+F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|.\end{aligned}$$

Par l'inégalité $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau\leq\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|\|\boldsymbol{v}_\tau\|$, on trouve

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))\geq-F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\|\boldsymbol{v}_\tau\|+F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|,$$

d'où

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t))\geq-F\Big(\int_0^t\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)(\|\boldsymbol{v}_\tau\|-\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|). \quad (3.45)$$

- si $\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) = \mathbf{0}$, d'après (3.41) $F\Big(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big) \geq \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\|$, il vient que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)) &= \boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot\boldsymbol{v}_\tau\\ &\geq -\|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\|\|\boldsymbol{v}_\tau\|\\ &\geq -F\Big(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)\|\boldsymbol{v}_\tau\|,\end{aligned}$$

d'où

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\cdot(\boldsymbol{v}_\tau - \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)) \geq -F\Big(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)(\|\boldsymbol{v}_\tau\| - \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|). \tag{3.46}$$

En combinant (3.45) et (3.46), on obtient

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a} \geq -\int_{\Gamma_3} F\Big(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)(\|\boldsymbol{v}_\tau\| - \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|)d\boldsymbol{a}. \tag{3.47}$$

Substituons (3.47) dans (3.44), on obtient la formulation variationnelle suivante :

Problème PV3 : Trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V_1$ tel que :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x} + \int_0 \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x}\\ &+\int_\Omega\int_0^t \mathcal{B}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(s))ds\cdot\Big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_3} F\Big(\int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(s)\|ds\Big)(\|\boldsymbol{v}_\tau\| - \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|)d\boldsymbol{a}\\ &\geq \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t)\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t)\cdot(\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))d\boldsymbol{a} \qquad \forall \boldsymbol{v}\in V_1, t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.48}$$

3.3.4 Problème équivalent en terme du cône

Avant de transformer le Problème PV3 en un problème en terme du cône, nous avons besoin de considérer les mêmes opérateurs définis par (2.12), (2.13) et la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par (2.14), mais avec V_1 au lieu de V, l'ensemble $L^2(\Gamma_3)_+$ défini par (3.32), en plus des opérateurs B, $\mathcal{R}$ et j qu'on définit comme suit

$$B : V_1 \to V_1$$

$$(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{x} \quad \text{pour tout } \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}\in V_1, \tag{3.49}$$

$$\mathcal{R} : \mathcal{C}([0,T];V_1) \to \mathcal{C}([0,T];L^2(\Gamma_3)_+)$$
$$\mathcal{R}\boldsymbol{u}(t) = F(\int_0^t \|\boldsymbol{u}_\tau(s)\|ds) \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}([0,T];V_1), \tag{3.50}$$

$$j : L^2(\Gamma_3)_+ \times V_1 \to \mathbb{R}$$
$$j(\eta, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} \eta \|\boldsymbol{v}_\tau\| d\boldsymbol{a} \qquad \text{pour tout } \eta \in L^2(\Gamma_3)_+, \boldsymbol{v} \in V_1. \tag{3.51}$$

Remarque 3.3.2. *Les lemmes 2.3.1, 2.3.2 et 2.3.3 restent valables lorsqu'on remplace V par V_1 dans la définition des opérateurs A, $\mathcal{S}$ et de la fonction $\boldsymbol{f}$, vu que V_1 est muni de la norme de V, de plus c'est un espace de Hilbert pour cette norme (Lemme 3.3.1).*

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans les preuves des Lemmes 2.3.1, 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, on démontre facilement les lemmes suivants :

Lemme 3.3.3. *Sous l'hypothèse* (2.10), *l'opérateur B défini par* (3.49) *est :*

1. *bien défini.*
2. *lipschitzien.*

Lemme 3.3.4. *Sous l'hypothèse* (3.23), *l'opérateur $\mathcal{R}$ défini par* (3.50) *est de mémoire.*

Lemme 3.3.5. *La fonction $j(\eta, \cdot)$ définie par* (3.51) *est*

1. *convexe,*
2. *positivement homogène,*
3. *lipschitzienne de constante $c_0\|\eta\|_{L^2(\Gamma_3)}$.*

Lemme 3.3.6. *Il existe $\alpha_j \geq 0$ tel que la fonction j définie par* (3.51) *satisfait*

$$j(\eta_1, \boldsymbol{v}_2) - j(\eta_1, \boldsymbol{v}_1) + j(\eta_2, \boldsymbol{v}_1) - j(\eta_2, \boldsymbol{v}_2) \leq \alpha_j \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|_V$$
$$\textit{pour tout } \eta_1,\ \eta_2 \in L^2(\Gamma_3)_+, \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_1.$$

Grâce aux notations (2.12)−(2.14) et (3.49)−(3.51), l'inégalité (3.48) peut s'écrire sous la forme :

$$j(\mathcal{R}\dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v}) - j(\mathcal{R}\dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{u}(t)) \geq \Big(\boldsymbol{f}(t) - A\dot{\boldsymbol{u}}(t) - B\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\dot{\boldsymbol{u}}(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t)\Big)_V$$
$$\forall \boldsymbol{v} \in V_1, \quad t \in [0,T] \tag{3.52}$$

Proposition 3.3.7. *Le Problème PV3 est équivalent au problème suivant :*
Problème E3 : *Trouver un champ de déplacements* $\boldsymbol{u} : [0,T] \to V_1$ *tel que :*

$$-\dot{\boldsymbol{u}}(t) \in N_{C(\mathcal{R}\dot{\boldsymbol{u}}(t),t)}(A\dot{\boldsymbol{u}}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + \mathcal{S}(\dot{\boldsymbol{u}}t)) \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0. \tag{3.54}$$

Démonstration. D'après ce qui précède, l'inégalité (3.48) est équivalente à l'inégalité (3.52). Il suffit alors d'appliquer le Lemme 1.3.14 avec $X = K = V_1$, $Y = L^2(\Gamma_3)$, $\Lambda = L^2(\Gamma_3)_+$, $J = j$, $C(\eta) = \partial j(\eta, \mathbf{0}_V)$ et $C(\eta,t) = \boldsymbol{f}(t) - C(\eta)$ pour tout $\eta \in L^2(\Gamma_3)_+$, $t \in [0,T]$. Il est facile de voir que (K) est satisfaite. De plus, l'hypothèse (j_2)(a) est vérifiée grâce au Lemme 3.3.5. ■

3.3.5 Existence et unicité de la solution faible

Théorème 3.3.8. *Supposons que* (2.6)−(2.10), (3.23) *et l'hypothèse* (3.43) *sont satisfaites. Alors, le Problème E3 admet une solution unique* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^1([0,T];V_1)$.

Démonstration. La preuve est une conséquence directe du Théorème 1.3.15 avec $X = K = V_1$, $Y = L^2(\Gamma_3)$ et $\Lambda = L^2(\Gamma_3)_+$. Il est facile de voir que l'hypothèse (K) est satisfaite. De plus, les hypothèses (A), $(\mathcal{S})$ et (f) sont satisfaites grâce aux Lemmes 2.3.1−2.3.3 et la Remarque 3.3.2. Les hypothèses (B), $(\mathcal{R})$ et (j_2) sont vérifiées grâce aux Lemmes 3.3.3−3.3.6. L'hypothèse (3.43) garantie que la condition (u_0) est satisfaite. ■

Bibliographie

[1] **S. Adly, M. Sofonea,** *Time-Dependent Inclusions and Sweeping Processes in Contact Mechanics.* Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik 70 : 39 (2019).

[2] **G. Allaire**, *Analyse Numérique et Optimisation*, École Polytechnique (2007).

[3] **H. Brezis**, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris (1983).

[4] **A. Capatina**, *Variational Inequalities and Frictional Contact Problems.* Advances in echanics and Mathematics, vol. 31. Springer, New York (2014).

[5] **Z. Denkowski, S. Migorski, N.S. Papageorgiou**, *An Introduction to Nonlinear Analysis : Theory.* Kluwer Academic, Boston (2003).

[6] **P. Grisvard,** *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Monographs and Studies in Mathematics, Vol. 24. Pitman, Boston-London-Melbourne, (1985).

[7] **W. Han, S. Migorski, M. Sofonea,** *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities,* Advances in Mechanics and Mathematics 33. Springer, New York (2015).

[8] **s. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea,** *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems,* Advances in Mechanics and Matematics, vol. 26. Sringer, New York (2013).

[9] **J. Necas,** *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques.* Masson (1967).

[10] **P. D. Panagiotopoulos,** *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering.* Springer, Berlin (1993).

[11] **M. Sofonea, A. Matei,** *Mathematical Models in Contact Mechanics.* London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 398. Combridge University Press, Combridge (2012).

[12] **M. Sofonea, S. Migorski,** *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications.* Pure and applied Mathematics. Chapman and Hall, Boca Raton (2018).

[13] **Y. Sonntag**, *Topologie et Analyse Fonctionnelle*, Ellipses (1998).