



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

N° de série :

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

**Systèmes dynamiques fractionnaires
et Applications**

Présenté par :

Fadia Boutaa

Devant le jury :

Président	Chikouche Wided	Prof. Université de Jijel
Encadreur	Mesdoui Fatiha	M.C.B Université de Jijel
Examineur	Boufenouche Razika	M.C.B Université de Jijel

Promotion : 2022/2023

Dédicace

Je dédie cet humble et modeste travail avec grand amour, sincérité et fierté :

*A mes chers parents, **ma mère** et **mon père** pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement.*

*A **mon frère** et **mes sœurs**, en témoignage de la fraternité, avec mes souhaits de bonheur, de santé et de succès.*

A tous les membres de ma famille et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail.

Et à tous mes amis, sans oublier mes chers professeurs.

Remerciements

*J'aimerais en premier lieu remercier mon **Dieu Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

*D'abord, je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à l'encadreuse de ce mémoire madame **Mesdoui Fatiha** Pour sa patience, sa disponibilité, ses précieux conseils.*

*Aussi, je tiens à remercier sincèrement les membres de jury, madame **Chikouche Wided** et madame **Boufenouche Razika** qui ont accepté d'évaluer mon travail.*

J'adresse également un grand merci à tous les enseignants de département de mathématique.

*Enfin, mes vifs remerciements à **ma famille**, **mes amis** et à toute personne qui a contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail.*

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	vii
1 Calcul fractionnaire	1
1.1 Fonctions spéciales	1
1.1.1 La fonction Gamma	1
1.1.2 La fonction Beta	3
1.1.3 Fonction Mittag-Leffler	4
1.2 Calculs fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo	6
1.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville	6
1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	7
1.2.3 Exemples	8
1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo	9
1.2.5 Exemples	13
1.2.6 La comparaison entre la dérivée de Riemann-Liouville et Caputo	14
2 Systèmes dynamiques fractionnaires	16

2.1	Systèmes dynamiques fractionnaires	16
2.1.1	Flots, Orbites, Portrait de phases	16
2.2	Stabilité des systèmes fractionnaires	19
2.2.1	Méthode indirecte (Linéarisation)	19
2.2.2	Méthode directe de Lyapunov	23
2.3	Un schéma numérique pour les systèmes fractionnaires	28
2.3.1	Méthode de prédiction-corrrection fractionnaire	28
3	Applications	32
3.1	Modèle prédateur-proie de type Gauss fractionnaire	32
3.1.1	Stabilité locale de points d'équilibres	33
3.1.2	Bifurcation de Hopf	38
3.1.3	Résultats numériques pour le système (3.1)	40
3.2	Modèle de mutualisme à deux espèces fractionnaires	41
3.2.1	Les points d'équilibre	42
3.2.2	La stabilité globale de l'équilibre de coexistence E_3	43
	CONCLUSION	48

TABLE DES FIGURES

1	Historique du calcul fractionnaire	vii
2.1	Région de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$	20
3.1	Diagrame de Bifurcation de système (3.1) en fonction de α et β	40
3.2	La stabilité de E_1 pour le système (3.1). Les paramètres sont pris comme $r = 0.5$, $\delta = 1.2$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 0.5$	40
3.3	La stabilité de E_2 pour le système (3.1). $\delta = 0.8$ et autres paramètres comme dans la figure 3.2.	41
3.4	La stabilité du système d'ordre fractionnaire (3.1) avec $\alpha = 0.8$ et l'instabilité du système (3.1) avec la dérivée du première ordre, $r = 0.5$	41

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques sont des modèles mathématiques utilisés pour décrire les comportements des phénomènes de la vie réelle, qu'ils soient physiques, biologiques, économiques ou sociaux. Généralement, un système dynamique est représenté par des équations différentielles classiques (d'ordre entier) qui décrivent l'évolution temporelle de ces phénomènes. Cependant, il existe des situations dans lesquelles des comportements non locaux, non entiers ou à un effet mémoire sont observés, qui doivent être caractérisés par un modèle d'ordre fractionnaire, basé en général sur l'intégration de l'ordre non entier.

Le calcul fractionnaire est un ancien sujet mathématique et développé comme un pur domaine théorique des mathématiques depuis plus de 3 siècles.

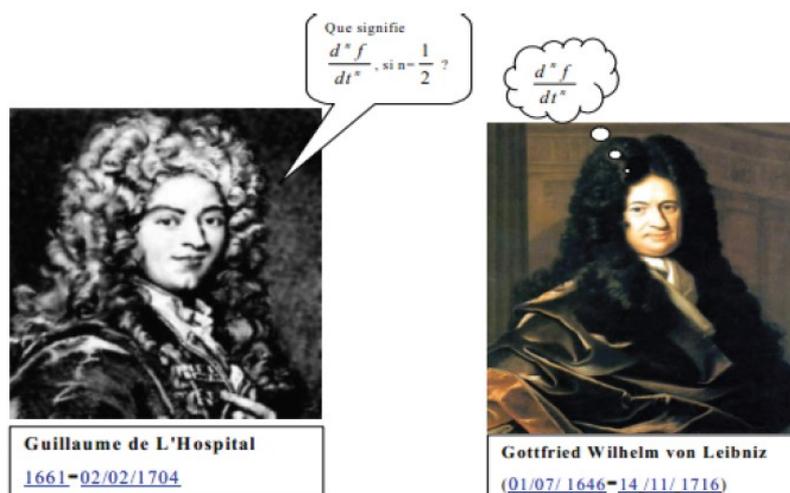


FIGURE 1 – Historique du calcul fractionnaire

Les origines remontent à la fin du 17^{ème} siècle, l'époque où **Newton** et **Leibniz** ont développé les bases du calcul différentiel et intégral. En particulier, **Leibniz** a introduit le symbole $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ pour désigner la nième dérivée d'une fonction f . Lorsqu'il rapporta cela dans une lettre à **l'Hôpital** (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), **l'Hôpital** répondit : Que signifie $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ si $n = \frac{1}{2}$?

Cette lettre de **l'Hôpital**, écrite en 1695, est aujourd'hui communément admise comme la première occurrence de ce que nous appelons aujourd'hui une dérivée fractionnaire [3].

Un siècle plus tard, de nombreux mathématiciens se sont concentrés sur le développement du cadre théorique et numérique traitant des équations fractionnaires. Par conséquent, de nombreux schémas et méthodes ont été développés pour comprendre les propriétés fondamentales de ces modèles.

Aujourd'hui, le calcul fractionnaire est devenu l'un des domaines les plus importants de la recherche mathématique et les systèmes dynamiques fractionnaires sont apparus comme des outils prometteurs capables de traiter les impacts complexes qui existent dans certains domaines, tels que la physique, l'ingénierie de contrôle, la réaction biochimique et le traitement du signal.

L'objectif de cette étude est d'explorer le domaine du calcul fractionnaire et son application aux systèmes dynamiques, ce travail contribuera à une meilleure compréhension des comportements complexes des phénomènes réels et ouvrira de nouvelles perspectives pour la modélisation mathématique.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres pour couvrir de manière approfondie le sujet des systèmes dynamiques fractionnaires et leurs applications. Voici un aperçu de la structure :

Chapitre 1 : Calcul fractionnaire

Ce chapitre présente les bases théoriques du calcul fractionnaire, y compris les définitions des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo, les principales propriétés et opérations, une comparaison entre les deux dérivées et quelques exemples.

Chapitre 2 : Systèmes dynamiques fractionnaires

Ce chapitre explore les notions générales de systèmes dynamiques fractionnaires, y compris l'étude de stabilité locale (linéarisation) et globale (méthode de Lyapunov), la bifurcation de Hopf, et la résolution numérique à l'aide de la méthode de prédiction-correction.

Chapitre 3 : Applications

Ce chapitre met en évidence deux applications potentielles des systèmes dynamiques fractionnaires dans la biologie.

1.1 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont des outils mathématiques essentielles dans l'étude des systèmes dynamiques fractionnaires. Dans cette section, nous rappelons quelques fonctions que nous utilisons plus tard pour définir les dérivées fractionnaires [7].

1.1.1 La fonction Gamma

L'une des principales fonctions utilisées dans le calcul fractionnaire est la fonction Gamma.

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, z \in \mathbb{C} \quad (1.1)$$

qui converge dans la moitié droite du plan complexe $\operatorname{Re}(z) > 0$.

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log(t)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log(t)) + i \sin(y \log(t))] dt. \end{aligned} \quad (1.2)$$

L'expression entre crochets dans (1.2) est bornée pour tout t , la convergence à l'infini est fournie par e^{-t} , et pour la convergence à $t = 0$ nous devons avoir $x = \operatorname{Re}(z) > 0$.

Proposition 1.1.1. *L'une des propriétés de base de la fonction Gamma est qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (1.3)$$

qui se prouve facilement en intégrant par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

Évidemment, $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.3) on obtient pour $z = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \Gamma(n + 1) &= n.\Gamma(n) = n.(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

D'après la définition de la fonction Gamma, nous avons :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (1.4)$$

Posons $t = y^2$, alors $dt = 2ydy$, nous obtenons maintenant :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \quad (1.5)$$

De même, nous pouvons écrire :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (1.6)$$

Si nous multiplions l'égalité (1.5) et (1.6) nous obtenons :

$$[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2 = 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires $dx dy = r dr d\theta$ et $r^2 = (x^2 + y^2)$ pour obtenir :

$$[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)]^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi. \quad (1.8)$$

Ainsi, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1.1.2 La fonction Beta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite Beta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.1.2. La fonction Beta est généralement définie par :

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau, \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0). \quad (1.9)$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.1) et la fonction Beta (1.9), nous utiliserons la transformée de Laplace.

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau. \quad (1.10)$$

Évidemment, $h_{z,w}(t)$ est une convolution des fonctions t^{z-1} et t^{w-1} et $h_{z,w}(1) = B(z, w)$. Comme la transformée de Laplace d'une convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient :

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z} \cdot \frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}}, \quad (1.11)$$

où $H_{z,w}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $h_{z,w}(t)$.

D'autre part, comme $\Gamma(z)\Gamma(w)$ est une constante, il est possible de restaurer la fonction d'origine $h_{z,w}(t)$ par la transformée de Laplace inverse du membre de droite de (1.11). En raison du caractère unique de la transformée de Laplace, on obtient donc :

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1}, \quad (1.12)$$

donc pour $t = 1$ on obtient l'expression suivante pour la fonction Beta :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (1.13)$$

d'où

$$B(z, w) = B(w, z). \quad (1.14)$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler est un concept mathématique très important dans la théorie des systèmes dynamique fractionnaires, cette généralisation de la fonction exponentielle apparait souvent comme une solution des équations différentielles fractionnaires.

Dans cette partie nous explorons les définitions et quelques propriétés de cette fonction.

Définition 1.1.3. La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres $\alpha > 0, \beta > 0$ est définie

par le développement en série suivant

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (1.15)$$

1. Pour $\beta = 1$, la fonction (1.15) est réduite à la fonction Mittag-Leffler à un paramètre :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0. \quad (1.16)$$

2. La fonction (1.15) peut être vue comme une généralisation d'autre fonction élémentaire par exemple :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad (1.17)$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \quad (1.18)$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{2k!} = \cosh(z). \quad (1.19)$$

3. La transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler :

$$\mathcal{L}\{z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda z^{\alpha})\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha} \mp \lambda)}, (Re(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}, \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}). \quad (1.20)$$

1.2 Calculs fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo

1.2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1. [3] Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a \leq x \leq b$, $f \in L^1([a, b])$. L'opérateur I_a^α défini par :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.21)$$

est appelé l'opérateur intégral fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

Théorème 1.2.1. [3] Soient $\beta, \alpha \geq 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors :

$$I_a^\beta I_a^\alpha f = I_a^{\beta+\alpha} f, \quad (1.22)$$

vaut presque partout sur $[a, b]$. En plus $f \in C[a, b]$ ou $\beta + \alpha \geq 1$, l'identité vaut partout sur $[a, b]$.

Démonstration.

$$I_a^\beta I_a^\alpha f = I_a^{\beta+\alpha} f,$$

on a

$$\begin{aligned} I_a^\beta I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} (I_a^\alpha f)(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-1} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau dt. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini on peut échanger l'ordre d'intégration, et on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\beta I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x \int_\tau^x (x-t)^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) dt d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau) \int_\tau^x (x-t)^{\beta-1} (t-\tau)^{\alpha-1} dt d\tau. \end{aligned}$$

Par le changement de variable :

$$t = \tau + (x - \tau)s.$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned} I_a^\beta I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 [(x - \tau)(1 - s)]^{\beta-1} [s(x - \tau)]^{\alpha-1} (x - \tau) ds d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau) \int_0^1 (x - \tau)^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 (1 - s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} ds d\tau, \end{aligned}$$

d'après la fonction Beta on a :

$$\int_0^1 (1 - s)^{\beta-1} s^{\alpha-1} ds = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Et ainsi :

$$I_a^\beta I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x f(\tau) (x - \tau)^{\beta+\alpha-1} d\tau = I_a^{\beta+\alpha} f(x).$$

■

Corollaire 1.2.1. [3]

Sous les hypothèses du théorème précédent

$$I_a^\beta I_a^\alpha f = I_a^\alpha I_a^\beta f. \quad (1.23)$$

Il existe plusieurs définitions des dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville et Caputo qui sont les plus utilisées.

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.2.2. [3] *Soit $\alpha = [m]$, la dérivée fractionnaire d'ordre α au point a par rapport à x au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est définie par :*

$${}^{RL}D_x^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} I_a^{m-\alpha} f(x), \quad (1.24)$$

$$= \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{m-\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.25)$$

1.2.3 Exemples

Exemple 1.2.1.

- La fonction $f(x) = x^\beta$.

$${}^RL D_x^\alpha(x^\beta) = \frac{d^m}{dx^m} [I_0^{m-\alpha}(x^\beta)], \quad (1.26)$$

on a l'expression d'intégrale d'ordre α :

$$I_0^\alpha(x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^\beta dt.$$

Par le changement de variable :

$$t = x\tau.$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_0^\alpha(x^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-x\tau)^{\alpha-1} (x\tau)^\beta x d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} x^\beta \tau^\beta x d\tau \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

En remplaçant α par $m - \alpha$ on obtient :

$$I_0^{m-\alpha}(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} x^{m-\alpha+\beta}, \quad (1.27)$$

en substituant (1.27) dans (1.26), on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_0^{RL}D_x^\alpha(x^\beta) &= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} x^{m-\alpha+\beta} \right] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} \frac{d^m}{dx^m} [x^{m-\alpha+\beta}] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} \frac{(\beta+m-\alpha)!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\beta+m-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Exemple 1.2.2.

- en particulier pour la fonction constante $f(x) = c$ en utilisant l'exemple précédent.

$$\begin{aligned}
 {}_0^{RL}D_x^\alpha(c) &= \frac{d^m}{dx^m} [I_0^{m-\alpha}(c)] \\
 &= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{c \Gamma(1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha} \right] \\
 &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\
 &\neq 0.
 \end{aligned}$$

Alors, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.

1.2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et ses applications en mathématiques pures (solution d'équations différentielles pour des ordres entiers, définitions de nouvelles classes des fonctions, sommation des séries,...).

Cependant, la technologie moderne, exigeraient certaines révisions bien établies pour une approche purement mathématique. De nombreux travaux sont parus, notamment en théorie de la viscoélasticité et en mécanique héréditaire des solides, où les dérivées fractionnaires sont utilisées pour une meilleure description des propriétés des matériaux. La modélisation mathématique basée sur l'amélioration des modèles rhéologiques naturellement

mène à des équations différentielles d'ordre fractionnaire et à la nécessité de la formulation des conditions initiales de telles équations. La résolution de problèmes concrets nécessitant de définir des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, qui contiennent $f(a), f'(a), \dots$, cela motive le mathématicien à définir une dérivée fractionnaire qui satisfait cette situation [7].

Définition 1.2.3. [7] Soit $\alpha = [m]$, la dérivée fractionnaire d'ordre α au point a par rapport à x au sens de Caputo de la fonction f est défini par :

$${}^c D_x^\alpha f(x) = I_a^{m-\alpha} \left[\frac{d^m}{dx^m} f(x) \right] \quad (1.28)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt. \quad (1.29)$$

Lemme 1.2.1. [3] Soit $\alpha \geq 0$ et $m = [\alpha]$. Supposons que ${}^c D_x^\alpha f$ et ${}^{RL} D_x^\alpha f$ existent, donc, sont liés par la formule :

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}^{RL} D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}. \quad (1.30)$$

Théorème 1.2.2. [3] Si f est continue et $\alpha \geq 0$, alors :

$${}^c D_x^\alpha I_a^\alpha f = f. \quad (1.31)$$

Démonstration 1.2.1. [3] Soit $\phi = I_a^\alpha f$ et on a $\phi^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, m-1$, donc :

$${}^c D_x^\alpha I_a^\alpha f = {}^c D_x^\alpha \phi = {}^{RL} D_x^\alpha \phi = {}^{RL} D_x^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

Théorème 1.2.3. [3] Supposons que $\alpha \geq 0$, $m = [\alpha]$. Alors :

$$I_a^\alpha [{}^c D_x^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (1.32)$$

Démonstration 1.2.2. [3] On a

$${}^c D_x^\alpha f = I_a^{m-\alpha} \left[\frac{d^m}{dx^m} f \right].$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur I_a^α aux deux côtés de cette équation et en utilisant la

propriété du semi-groupe (1.22) de l'intégration fractionnaire, nous obtenons

$$I_a^\alpha [{}^c D_x^\alpha f] = I_a^\alpha \left[I_a^{m-\alpha} \left(\frac{d^m}{dx^m} f \right) \right] = I_a^m \left[\frac{d^m}{dx^m} f \right].$$

Par la version classique du théorème de Taylor, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + I_a^m \left[\frac{d^m}{dx^m} f \right],$$

implique

$$I_a^m \left[\frac{d^m}{dx^m} f \right] = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Alors

$$I_a^\alpha [{}^c D_x^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (1.33)$$

Proposition 1.2.1. [11] Soient $(f, g)(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que ${}^c D_x^\alpha f(t)$ et ${}^c D_x^\alpha g(t)$ existent presque partout, et soit c_1, c_2 deux constante. Alors ${}^c D_x^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t))$ existe presque partout, et

$${}^c D_x^\alpha (c_1 f(t) + c_2 g(t)) = c_1 {}^c D_x^\alpha f(t) + c_2 {}^c D_x^\alpha g(t).$$

Définition 1.2.4. (transformée de Laplace)

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t), s\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad t > 0. \quad (1.34)$$

Théorème 1.2.4. [3] soit $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction tel que la la transformée de Laplace de f , $\mathcal{L}\{f\}$, existe sur $[s_0, +\infty)$, $s_0 \in \mathbb{R}$. Soient $\alpha > 0$ et $[\alpha] = m$. Alors, pour $s > \max\{0, s_0\}$ on a :

$$\mathcal{L}\{I_0^\alpha f(s)\} = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}\{f(s)\},$$

et

$$\mathcal{L}\{{}^c D_t^\alpha f(s)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(s)\} - \sum_{k=1}^m s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0).$$

Démonstration. Soit $g(x) = x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Alors, par la linéarité de la transformée de Laplace, $\mathcal{L}\{g(s)\} = 1/s^\alpha$ pour $s > 0$. De plus, par définition de l'intégrale de

Riemann–Liouville, $I_0^\alpha f$ est la convolution de f et g , et donc :

$$\mathcal{L}\{I_0^\alpha f(s)\} = \mathcal{L}\{g(s)\} \cdot \mathcal{L}\{f(s)\} = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}\{f(s)\},$$

pour $s > \max\{0, s_0\}$.

De plus, on rappelle que $D_0^\alpha f = I_0^{m-\alpha} \frac{d^m}{ds^m} f$, et donc au vu de ce que l'on vient de montrer et du théorème de différenciation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{I_0^c D_t^\alpha f(s)\} &= \mathcal{L}\left\{I_0^{m-\alpha} \frac{d^m}{ds^m} [f(s)]\right\} \\ &= s^{\alpha-m} \left(s^m \mathcal{L}\{f(s)\} - \sum_{k=1}^m s^{m-k} f^{(k-1)}(0) \right) \\ &= s^\alpha \mathcal{L}\{f(s)\} - \sum_{k=1}^m s^{\alpha-k} f^{(k-1)}(0). \end{aligned}$$

■

Définition 1.2.5. (*produit de convolution*)

Le produit de convolution de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ est défini par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)dx. \quad (1.35)$$

Théorème 1.2.5. (*Fubini*) soit f une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans \mathbb{C} . Alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (1.36)$$

1.2.5 Exemples

Exemple 1.2.3.

- La fonction constante $f(x) = c$.

$$\begin{aligned}
 {}_0^c D_x^\alpha(c) &= I_0^{(m-\alpha)} \left[\frac{d^m}{dx^m} c \right] \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \left[\frac{d^m}{dt^m} c \right] dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x 0 dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} [c]_0^x \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} [c - c] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Alors, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

Exemple 1.2.4.

- La fonction $f(x) = x^\beta$.

$${}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) = I_0^{(m-\alpha)} \left[\frac{d^m}{dx^m} x^\beta \right], \tag{1.37}$$

on a : $\frac{d^m}{dx^m}(t^\beta) = \frac{\beta!}{(\beta-m)!}x^{\beta-m}$.

Donc

$$\begin{aligned}
 {}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{d^m}{dt^m}(t^\beta) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} \frac{\beta!}{(\beta-m)!} (t^{\beta-m}) dt \\
 &= \frac{\beta!}{\Gamma(m-\alpha)(\beta-m)!} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{\beta-m} dt \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} t^{\beta-m} dt \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^x x^{m-\alpha-1} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{m-\alpha-1} t^{\beta-m} dt.
 \end{aligned}$$

Par le changement de variable :

$$t = x \cdot \tau,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^1 x^{m-\alpha-1} (1-\tau)^{m-\alpha-1} (x\tau)^{\beta-m} x d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)x^{m-\alpha-1+\beta-m+1}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \int_0^1 (1-\tau)^{m-\alpha-1} (\tau)^{\beta-m} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} B(m-\alpha, \beta-m+1) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)} \cdot \frac{\Gamma(m-\alpha)\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta-m+1)} \\
 &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

1.2.6 La comparaison entre la dérivée de Riemann-Liouville et Caputo

Bien que les dérivées de Caputo et de Riemann-Liouville soient toutes deux des généralisations de la dérivée classique, elles diffèrent dans leur définition et leur interprétation.

Dans cette partie, nous ferons une petite comparaison entre ces deux dérivées.

• **Riemann-Liouville :**

- L'opérateur de dérivation entier composé avec l'intégration fractionnaire.
- La dérivée d'une constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle.
- les conditions initiales dans le cas de la dérivée au sens de Riemann-Liouville sont fractionnaires.

• **Caputo :**

- L'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m - \alpha$ composé avec la dérivée d'ordre m .
- La dérivée d'une constante au sens de Caputo est nulle.
- les conditions initiales dans le cas de la dérivée au sens de Caputo sont entier.

La dérivée fractionnaire de Caputo est souvent préférée car elle est mieux adaptée à la modélisation de phénomènes physiques réels, et elle permet d'obtenir des solutions plus régulières. Cependant, la dérivée fractionnaire de Caputo est plus difficile à calculer en pratique que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DYNAMIQUES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, on va explorer quelques notions générales de systèmes dynamiques fractionnaires, y compris la définition de Flots, Orbites, Portrait de phases, l'étude de stabilité locale (linéarisation) et globale (méthode de Lyapunov), la bifurcation de Hopf, et la résolution numérique à l'aide de la méthode de prédiction-corrrection.

2.1 Systèmes dynamiques fractionnaires

2.1.1 Flots, Orbites, Portrait de phases

Soit le système dynamique fractionnaire

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^\alpha(x(t)) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait la condition de Lipschitz et appelé champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 .

Ce système admet une solution maximale unique, cette solution est appelée trajectoire du champ de vecteurs f .

Définition 2.1.1. (*Flot*)

On appelle flot du système précédent, la famille des applications

$$\phi_t : x_0 \longmapsto X(x_0, t),$$

où $X(x_0, t)$ est la solution du système dynamique passant par x_0 à l'instant t_0 .

Proposition 2.1.1. (propriétés de flot)

1. $\phi_t(x_0)$ est de classe C^{k+1} si f est de classe C^k ,
2. $\phi_0(x_0) = x_0$ tel que $(\phi_0 = I_d)$,
3. $\phi_t(\phi_s(x_0)) = \phi_{t+s}(x_0)$.

Remarque 2.1.1.

1. Si f est linéaire et $\alpha = 1$, $n = 1$, on obtient l'équation du premier ordre suivante :

$$\frac{dx}{dt} = ax(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

le flot dans ce cas est donné par

$$\phi_t(x_0) = x_0 e^{at}.$$

2. Généralement si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\phi_t(x_0) = x_0 e^{At}.$$

3. Dans le cas fractionnaire ($0 < \alpha < 1$) :

$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = a x(t),$$

le flot est donné par :

$$\phi_t(x_0) = x_0 E_\alpha(at^\alpha).$$

En effet :

$${}_0^c D_t^\alpha x(t) = a x(t),$$

en utilisant la transformée de Laplace dans les deux côtés

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_0^c D_t^\alpha x(t)\} &= \mathcal{L}\{a x(t)\}, \\ s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0 &= a X(s). \end{aligned}$$

Alors :

$$X(s) = x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a},$$

donc

$$x(t) = x_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a} \right\},$$

en utilisant (1.20) pour $\beta = 1$ et $\lambda = a$, on trouve :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 t^0 E_{\alpha,1}(at^\alpha), \\ &= x_0 E_\alpha(at^\alpha). \end{aligned}$$

Définition 2.1.2. (*Orbite*)

L'orbite est la courbe tracée par la solution maximale unique du système dynamique passant par x_0 en $t = 0$,

$$O_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_{X_0}\}.$$

Remarque 2.1.2.

1. Deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser.
2. Tout point de Ω appartient à une et une seule orbite.
3. Si $O_{x_0} = \{x_0\}$, un tel point vérifie nécessairement $f(x_0) = 0$, c'est ce que l'on appelle un point d'équilibre.

Définition 2.1.3. (*Portrait de phases du champ de vecteurs*).

Une partition de Ω en orbites s'appelle le portrait de phases du champ de vecteurs.

Définition 2.1.4. $x^* \in \mathbb{R}$ est un point **d'équilibre** (stationnaire, critique, fixe) du système (2.1) s'il vérifie l'équation $f(x^*) = 0$.

Définition 2.1.5. [4]

• L'équilibre x^* est dit **stable** si pour tous $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tel que pour toute condition initiale $x_0 \in B(x^*, \delta)$ la solution de (2.1) est définie au moins sur $[t_0, +\infty]$ et vérifie $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$, i.e.

$\forall t \in [t_0, +\infty], \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \sup \|x(t) - x^*\| < \epsilon.$

• L'équilibre x^* est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et si de plus, $\exists \delta > 0$ tel que pour toute condition initiale $x_0 \in B(x^*, \delta)$ la solution de (2.1) converge vers x^* quand $t \rightarrow +\infty$, i.e. $\exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$.

• L'équilibre x^* est dit **instable** s'il n'est pas stable.

2.2 Stabilité des systèmes fractionnaires

2.2.1 Méthode indirecte (Linéarisation)

Le cas linéaire [5]

Nous considérons d'abord le système fractionnaire linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^\alpha(x(t)) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $0 < \alpha \leq 1$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

En effet, lorsqu'on résout un système d'équations différentielles linéaires d'ordre entier, les valeurs propres du système sont généralement des exponentielles complexes.

Cependant, lorsqu'on considère un système d'équations différentielles fractionnaires, les valeurs propres peuvent être modifiées et remplacées par des fonctions de Mittag-Laffler (voir remarque 2.1.1 (3)).

Théorème 2.2.1. *Le système linéaire (2.2) est :*

- 1- *La solution $x(t) = 0$ du système (2.2) est **asymptotiquement stable** si et seulement si $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, où λ_i sont toutes les valeurs propres de la matrice A . Dans ce cas, les composantes de l'état décroissent vers 0 comme $t^{-\alpha}$.*
- 2- *La solution $x(t) = 0$ du système (2.2) est **stable** si et seulement si les valeurs propres de A vérifient $|\arg(\lambda_i)| \geq \frac{\alpha\pi}{2}$, et toutes les valeurs propres vérifiant $|\arg(\lambda_i)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ ont une multiplicité géométrique égale à 1.*
- 3- *La solution $x(t) = 0$ du système (2.2) est **instable**, si et seulement si : il existe une valeur propre de A vérifiant $|\arg(\lambda_i)| < \frac{\alpha\pi}{2}$.*

Ce résultat peut être représenté par la figure suivante :

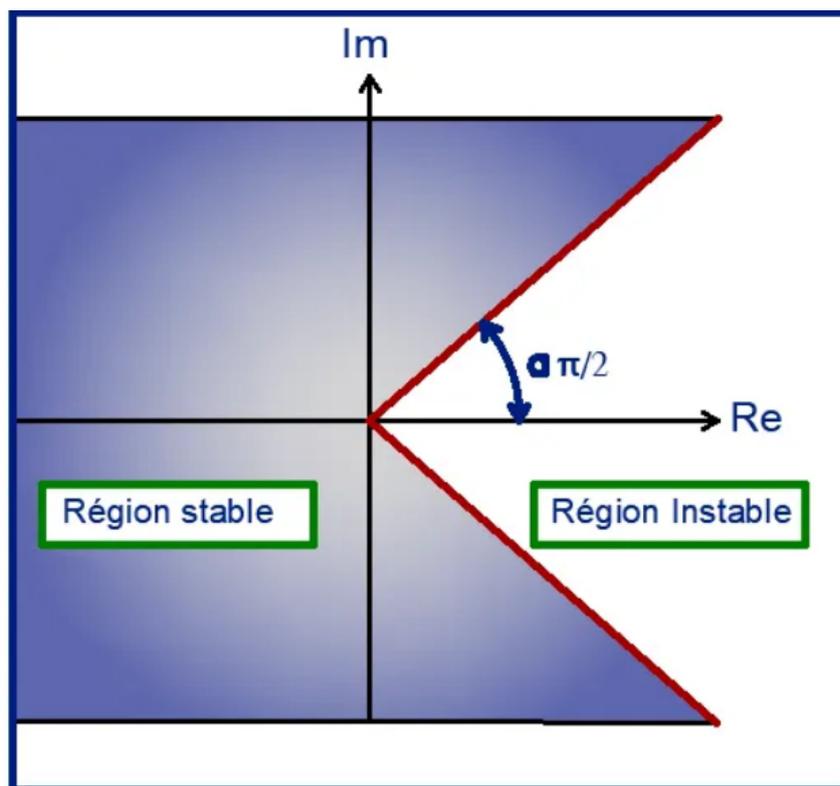


FIGURE 2.1 – Région de stabilité d'un système linéaire d'équations fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$.

Le cas non linéaire (Linéarisation) [4]

Considérons maintenant le système non linéaire fractionnaire (2.1), soit x^* le point d'équilibre de ce système, ${}^c_0D_t^\alpha(x^*) = f(x^*) = 0$. i.e,

posant $x(t) = x^* + y(t)$, alors :

$${}^c_0D_t^\alpha(y(t)) = {}^c_0D_t^\alpha(x(t) - x^*) = {}^c_0D_t^\alpha(x(t)) = f(x^* + y(t)),$$

d'après le développement de Taylor d'ordre 1 au voisinage de x^* , on trouve :

$$f(x^* + y(t)) \simeq f(x^*) + f'(x^*)y(t) + O(y^2) \Rightarrow f(x^* + y(t)) \simeq f'(x^*)y(t),$$

et donc on peut écrire l'approximation :

$$f(x^* + y(t)) \simeq Ay(t),$$

avec

$$A = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*}.$$

On obtient le système linéaire fractionnaire :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha(y(t)) = Ay(t), \\ y(0) = x_0 - x^* \end{cases} \quad (2.3)$$

où $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x^*}$ est la matrice Jacobienne de la fonction f .

Théorème 2.2.2.

- Le système (2.1), dont l'origine est un point d'équilibre hyperbolique est linéairement stable, si chaque valeur propre λ de A telle que $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$.
- Le système (2.1), est linéairement instable si $|\arg(\lambda)| < \frac{\alpha\pi}{2}$ pour une valeur propre λ de A .
- Si $|\arg(\lambda^*)| = \frac{\alpha\pi}{2}$ alors λ^* est un point de Bifurcation.

Exemple 2.2.1. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^{\frac{1}{2}} x = 1 + x^2 y - 4x, \\ {}^c D_t^{\frac{1}{2}} y = 3x - x^2 y. \end{cases}$$

Point fixe :

$$\begin{cases} 1 + x^2 y - 4x = 0, \\ 3x - x^2 y = 0, \end{cases}$$

il existe un unique point fixe $E=(1,3)$,

en linéarisant le système en E on obtient le système linéaire suivant :

$${}^c D_t^{\frac{1}{2}} u = J_{(x,y)} u,$$

tel que $u = (x, y)$

$$J_u = \begin{pmatrix} 2xy - 4 & x^2 \\ 3 - 2xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Alors pour $u=(1,3)$

$$J_{(1,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\det(J_{(1,3)}) = 1$ et $\text{tr}(J_{(1,3)}) = 1$,

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \lambda^2 - \text{tr}(J_{(1,3)})\lambda + \det(J_{(1,3)}) \\ &= \lambda^2 - \lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

$\Delta = -3 < 0$, il existe deux solutions complexes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2}, \\ \sin(\theta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{arg}(\lambda_1) = \frac{\pi}{3}, \\ \theta_2 = \text{arg}(\lambda_2) = \frac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

On a $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, donc

$$\begin{cases} \text{arg}(\lambda_1) = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4} \\ \text{arg}(\lambda_2) = \frac{5\pi}{3} > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

on en déduit que E est stable.

La bifurcation de Hopf est un phénomène d'apparition d'un cycle limite (solution périodique) à partir d'un état stable.

Le lemme suivant nous donne des conditions sur l'existence de bifurcation de Hopf dans le cas fractionnaire :

Lemme 2.2.1. [6] Soit $\lambda(\mu)$ la valeur propre de l'équation caractéristique, s'il existe μ^* tel que

1. $|\text{arg}(\lambda(\mu^*))| = \frac{\alpha\pi}{2}$,

$$2. \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu^*} \neq 0,$$

alors μ^* est un paramètre de bifurcation de Hopf.

2.2.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov est un concept utilisé dans la théorie des systèmes dynamiques pour étudier le comportement asymptotique des systèmes, elle est basée sur les travaux du mathématicien Aleksandr Lyapunov.

Cette méthode consiste à trouver une fonction appelée candidate de Lyapunov permettant d'évaluer la stabilité des points d'équilibres d'un système non linéaire.

Notons que la méthode directe de Lyapunov nous donne une condition suffisante de stabilité, c'est-à-dire que le système peut être stable même devant l'impossibilité de trouver une fonction de Lyapunov car il n'y a pas de règle générale pour trouver une telle fonction. Cependant, dans les problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

Commençons cette section par définir la stabilité au sens de Mittag-Leffler, cette notion généralise naturellement la stabilité au sens Lyapunov [4], [10].

Définition 2.2.1. (*Stabilité Mittag-Leffler*)

Soit $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. La solution de l'équation différentielle fractionnaire non-linéaire (2.1) est dite Mittag-Leffler stable si :

$$\|x(t)\| \leq \{m(x(t_0))E_\alpha(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b, \quad (2.4)$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda > 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$ et m est localement Lipschitz sur $x \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.2. (*Stabilité Mittag-Leffler généralisée*)

Soit $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. La solution du même système (2.1) est dite stable au sens de Mittag-Leffler généralisée si :

$$\|x(t)\| \leq \{m(x(t_0))(t-t_0)^{-\gamma}E_{\alpha,1-\gamma}(-\lambda(t-t_0)^\alpha)\}^b, \quad (2.5)$$

où t_0 est le temps initial, $\alpha \in (0, 1)$, $-\alpha < \gamma < 1 - \alpha$, $\lambda > 0$, $b > 0$, $m(0) = 0$, $m(x) \geq 0$ et m est localement Lipschitz sur $x \in \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^n$.

Remarque 2.2.1.

- La stabilité Mittag-Leffler et la stabilité Mittag-Leffler généralisée impliquent la stabilité asymptotique.

Théorème 2.2.3. Soit $x^* = 0$ un point d'équilibre pour le système (2.1) et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. Soit $V(t, x(t)) : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et localement Lipschitz par rapport à x tel que :

$$\gamma_1 \|x\|^a \leq V(t, x(t)) \leq \gamma_2 \|x\|^{ab},$$

$${}^c_0 D_t^\alpha V(t, x(t)) \leq -\gamma_3 \|x\|^{ab},$$

avec $t > 0$, $x \in D$, $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a$ et b sont des constantes positives. Alors $x^* = 0$ est Mittag-Leffler stable si les hypothèses sont globalement sur \mathbb{R}^n , alors $x^* = 0$ est globalement Mittag-Leffler stable.

Définition 2.2.3. Une fonction continue $\gamma : [0, t) \rightarrow [0, +\infty)$ est dite de classe-K si elle est strictement croissante et que $\gamma(0) = 0$.

Théorème 2.2.4. Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système d'ordre fractionnaire (2.1). Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov V et des fonctions de classe-K $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$ satisfaisant

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \gamma_2(\|x\|), \quad (2.6)$$

et

$${}^c_0 D_t^\alpha V(t, x) \leq -\gamma_3(\|x\|), \quad (2.7)$$

où $\alpha \in (0, 1)$. Alors le système (2.1) est asymptotiquement stable.

Corollaire 2.2.1. [2] S'il existe une fonction de Lyapunov définie positive $V(t, x)$ tel que

$${}^c_0 D_t^\alpha V(t, x) < 0,$$

alors la solution triviale de système (2.1) est asymptotiquement stable.

La dérivée d'une fonction produit :

Contrairement à la dérivée entière, la dérivée de Caputo ne vérifie pas directement la règle de Leibniz (produit de deux fonctions). En effet, d'après l'exemple 1.2.4 :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha x^2(t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} x(t)^{2-\alpha} \\ &= \frac{2!}{\Gamma(3-\alpha)} x(t)^{2-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Alors que

$$\begin{aligned} 2x(t) {}^c D_t^\alpha x(t) &= 2x(t) \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} x(t)^{1-\alpha} \\ &= \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} x(t)^{2-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

C'est clair que (2.8) \neq (2.9)

Cette section présente un lemme, qui permet d'éviter ce problème et de trouver des fonctions candidates de Lyapunov pour démontrer la stabilité de nombreux systèmes d'ordre fractionnaire, en utilisant l'extension de la méthode directe de Lyapunov [1].

Lemme 2.2.2. *Soit $x \in \mathbb{R}$ être une fonction continue et dérivable. Puis, à tout instant $t \geq t_0$*

$$\frac{1}{2} {}^c D_{t_0}^\alpha x^2(t) \leq x(t) {}^c D_{t_0}^\alpha x(t), \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.10)$$

Démonstration. Prouver que l'expression (2.10) est vraie, équivaut à prouver que :

$$x(t) {}^c D_{t_0}^\alpha x(t) - \frac{1}{2} {}^c D_{t_0}^\alpha x^2(t) \geq 0, \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.11)$$

En utilisant (1.29), on peut écrire que :

$${}^c D_{t_0}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.12)$$

et de la même manière :

$$\frac{1}{2} {}^c D_{t_0}^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) \dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2.13)$$

ainsi, l'expression (2.11) peut s'écrire :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)] \dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \geq 0. \quad (2.14)$$

on définit la variable auxiliaire $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$ ce qui implique que

$$y'(\tau) = \frac{dy(\tau)}{d\tau} = -\frac{dx(\tau)}{d\tau}.$$

De cette façon, l'expression (2.14) peut être écrite comme :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau)y'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \leq 0. \quad (2.15)$$

Intégrons par parties l'expression (2.15), définissant

$$\begin{aligned} du &= y(\tau)y'(\tau)d\tau, & u &= \frac{1}{2}y^2(\tau) \\ v &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}, & dv &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha-1}. \end{aligned}$$

De cette façon, l'expression (2.15) peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right]_{t_0}^t - \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \leq 0, \\ & - \left[\frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right]_{\tau=t} + \left[\frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \right] + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Vérifions le premier terme de l'expression (2.16), qui a une indétermination en $\tau = t$, analysons donc la limite correspondante.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x(t) - x(\tau)]^2}{(t-\tau)^\alpha}, \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Etant donné que cette fonction est dérivable, la règle de L'Hôpital peut être appliquée (car elle donne $\frac{0}{0}$). Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha} &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[-2x(t)\dot{x}(\tau) + 2x(\tau)\dot{x}(\tau)]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}}, \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[2x(t)\dot{x}(\tau) - 2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression (2.16) se réduit à :

$$\frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0. \quad (2.18)$$

L'expression (2.18) est clairement vraie, ce qui conclut la preuve. ■

Exemple 2.2.2. *Considérons le système non linéaire d'ordre fractionnaire suivant, avec $0 < \alpha < 1$, $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$*

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \\ {}^c D_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t). \end{cases} \quad (2.19)$$

Considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante, qui est définie positive.

$$V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t). \quad (2.20)$$

Maintenant, La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction de Lyapunov peut être décrite comme suit :

$${}^c D_t^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) = \frac{1}{2} {}^c D_t^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{4} {}^c D_t^\alpha x_2^4(t).$$

Et en appliquant le lemme 2.2.2

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(x_1(t), x_2(t)) &\leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) {}^c D_t^\alpha x_2^2(t), \\ &\leq x_1(t) {}^c D_t^\alpha x_1(t) + x_2^3(t) {}^c D_t^\alpha x_2(t), \\ &= x_1(t) (-x_1(t) + x_2^3(t)) + x_2^3(-x_1(t) - x_2(t)), \\ &= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Comme on peut le voir à partir de l'équation (2.21), la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapunov est définie négative, on peut donc conclure d'après le corollaire 2.2.1 que le point d'équilibre $x^ = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.*

2.3 Un schéma numérique pour les systèmes fractionnaires

Les méthodes numériques sont souvent nécessaires pour obtenir des solutions de systèmes fractionnaires en raison de la non-localité et de la nature singulière de ces opérateurs. Dans cette section, nous explorons la méthode de correction de prédiction souvent utilisée pour expliquer le comportement de ces systèmes [6].

2.3.1 Méthode de prédiction-corrrection fractionnaire

On considère l'équation (2.1) sur $[0, T]$, où $T > 0$, $n = 1$, $0 < \alpha \leq 1$. Appliquant l'intégrale de Riemann-Liouville, l'équation (2.1) peut être reformulée en termes d'intégrale de Voltera comme suit :

$$I_0^\alpha [{}_0^c D_t^\alpha x(t)] = I_0^\alpha f(t, x(t)),$$

d'après le théorème 1.2.3 on obtient :

$$x(t) - x_0 = I_0^\alpha f(t, x(t)),$$

alors

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (2.22)$$

Soit $t_k = kh$, $k = 1, \dots, N$ une grille uniforme à N points où $h = \frac{T}{N}$ et N est un entier positif, alors l'intégrale (2.22) au point $t = t_{k+1}$ peut s'écrire :

$$x(t_{k+1}) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (2.23)$$

La partie non linéaire de l'équation (2.23), dans chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}]$, peut être approximée par le polynôme du premier degré comme :

$$f(s, x(s)) = \frac{f(t_{j+1}, x(t_{j+1})) - f(t_j, x(t_j))}{t_{j+1} - t_j} s + \frac{f(t_j, x(t_j))t_{j+1} - f(t_{j+1}, x(t_{j+1}))t_j}{t_{j+1} - t_j},$$

en simplifiant cette équation on obtient :

$$f(s, x(s)) = \frac{t_{j+1} - s}{t_{j+1} - t_j} f(t_j, x(t_j)) + \frac{s - t_j}{t_{j+1} - t_j} f(t_{j+1}, x(t_{j+1})). \quad (2.24)$$

En remplaçant (2.24) dans (2.23) :

$$x(t_{k+1}) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k \left[\frac{f(t_j, x(t_j))}{t_{j+1} - t_j} I_{j,k+1}^1 + \frac{f(t_{j+1}, x(t_{j+1}))}{t_{j+1} - t_j} I_{j,k+1}^2 \right] \quad (2.25)$$

tel que

$$I_{j,k+1}^1 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} (t_{j+1} - s) ds,$$

et

$$I_{j,k+1}^2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} (s - t_j) ds,$$

d'après l'intégration par parties on obtient :

$$I_{j,k+1}^1 = \frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha (t_{j+1} - t_j)}{\alpha} + \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)},$$

et

$$I_{j,k+1}^2 = -\frac{(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha (t_{j+1} - t_j)}{\alpha} - \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}.$$

En remplaçant $I_{j,k+1}^1$ et $I_{j,k+1}^2$ dans (2.25) et on a $t_{j+1} - t_j = h$.

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^k \frac{f(t_j, x(t_j))}{t_{j+1} - t_j} I_{j,k+1}^1 + \sum_{j=0}^k \frac{f(t_{j+1}, x(t_{j+1}))}{t_{j+1} - t_j} I_{j,k+1}^2 \right], \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^k I_{j,k+1}^1 \frac{f(t_j, x(t_j))}{h} + \sum_{j=1}^{k+1} I_{j-1,k+1}^2 \frac{f(t_j, x(t_j))}{h} \right], \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[I_{0,k+1}^1 f(t_0, x(t_0)) + \sum_{j=1}^k (I_{j,k+1}^1 + I_{j-1,k+1}^2) \frac{f(t_j, x(t_j))}{h} + I_{k,k+1}^2 \frac{f(t_{k+1}, x(t_{k+1}))}{h} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

On calcule maintenant $I_{0,k+1}^1$, $(I_{j,k+1}^1 + I_{j-1,k+1}^2)$ et $I_{k,k+1}^2$ en utilisant $t_k = kh$.

- Pour $j = 0$:

$$\begin{aligned} I_{0,k+1}^1 &= \frac{(t_{k+1} - t_0)^\alpha (t_1 - t_0)}{\alpha} + \frac{(t_{k+1} - t_1)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{(t_{k+1} - t_0)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}, \\ &= \frac{(k+1)^\alpha h^{\alpha+1}}{\alpha} + \frac{k^{\alpha+1} h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{(k+1)^{\alpha+1} h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}, \\ &= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} [k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

- Pour $j = k+1$:

$$\begin{aligned} I_{j-1,k+1}^2 &= -\frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha (t_j - t_{j-1})}{\alpha} - \frac{(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(t_{k+1} - t_{j-1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}, \\ I_{k,k+1}^2 &= -\frac{(t_{k+1} - t_{k+1})^\alpha (t_{k+1} - t_k)}{\alpha} - \frac{(t_{k+1} - t_{k+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(t_{k+1} - t_k)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}, \\ &= \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Pour $1 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} I_{j,k+1}^1 + I_{j-1,k+1}^2 &= \left[\frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha (t_{j+1} - t_j)}{\alpha} + \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} - \frac{(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \right] \\ &\quad + \left[-\frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha (t_j - t_{j-1})}{\alpha} - \frac{(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(t_{k+1} - t_{j-1})^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \right], \end{aligned}$$

on obtient :

$$I_{j,k+1}^1 + I_{j-1,k+1}^2 = \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} [(k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} + (k-j+2)^{\alpha+1}]. \quad (2.29)$$

En remplaçant (2.27), (2.28), et (2.29) dans (2.26), on trouve :

$$x_{k+1} = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[a_{0,k+1} f(t_0, x(t_0)) + \sum_{j=1}^k a_{j,k+1} f(t_j, x(t_j)) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, x(t_{k+1})) \right], \quad (2.30)$$

tel que :

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j = 0, \\ (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1} + (k-j+2)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k, \\ 1, & j = k+1. \end{cases} \quad (2.31)$$

L'équation (2.30) est non linéaire puisque le terme x_{k+1} apparaît de part et d'autre, ce qui rend difficile l'implémentation de ce schéma sur un ordinateur. Pour éviter cette situation, on remplace x_{k+1} dans la partie droite par une quantité préductrice, notée x_{k+1}^p et dérivée simplement à partir de (2.23) en rapprochant $f(s, x(s))$ par $f(t_k, x_k)$ dans chaque intervalle. À partir de la discussion ci-dessus, le schéma correcteur est obtenu

$$x_{k+1}^p = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, x_j), \quad (2.32)$$

où

$$\begin{aligned} b_{j,k+1} &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - s)^{\alpha-1} ds, \\ &= \frac{(t_{k+1} - t_j)^\alpha}{\alpha} - \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha}{\alpha}, \\ &= \frac{(h)^\alpha}{\alpha} [(k - j + 1)^\alpha - (k - j)^\alpha], 0 \leq j \leq k. \end{aligned}$$

La dynamique de population étudie les changements quantitatifs et qualitatifs des populations d'êtres vivants au fil du temps. Dans ce chapitre nous explorons l'application des systèmes dynamiques fractionnaires à l'étude de la dynamique des populations, en mettant l'accent sur les interactions prédateurs-proies et mutualistes.

3.1 Modèle prédateur-proie de type Gauss fractionnaire

Un modèle de population est un modèle mathématique utilisé pour décrire la dynamique d'une population. Les équations décrivant les modèles de population peuvent prendre différentes formes telles que les équations différentielles. Il existe plusieurs types de modèles de population tels que les modèles prédateur-proie jouent un rôle essentiel dans la compréhension des interactions dynamiques entre les espèces au sein d'un écosystème. Dans cette section, nous nous intéressons spécifiquement au modèle prédateur-proie fractionnaire de type Gaussien présenté dans l'article [11], ce modèle offre une représentation réaliste des fluctuations et des interactions complexes observées dans de nombreux systèmes écologiques. Le modèle prédateur-proie fractionnaire est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = f_1(u, v) = ru(1 - u) - \sqrt{uv}, \\ {}^c D_t^\alpha v = f_2(u, v) = \beta v(\sqrt{u} - \delta), \\ u(0) = u_0 \geq 0, v(0) = v_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Nous présentons dans cette partie une étude détaillée du modèle (3.1), nous explorons les propriétés et les comportements dynamiques de ce modèle en utilisant des analyses mathématiques (stabilité locale, Bifurcation de Hopf) et des simulations numériques.

3.1.1 Stabilité locale de points d'équilibres

1. Commençons d'abord par calculer les points d'équilibres, qui sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0, \\ f_2(u, v) = 0, \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} ru(1 - u) - \sqrt{uv} = 0 & (1), \\ \beta v(\sqrt{u} - \delta) = 0 & (2), \end{cases}$$

de (2) on obtient $v = 0$ ou $u = \delta^2$ on distingue deux cas :

Cas 1 : en remplaçant $v = 0$ dans (1) on obtient :

$$ru(1 - u) = 0,$$

et donc

$$u = 0,$$

au bien

$$u = 1,$$

alors on obtient dans ce cas deux points d'équilibres $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (1, 0)$.

Cas 2 : L'équation (1) peut-être simplifié comme suite :

$$r \frac{\sqrt{u}}{v} (1 - u) = 1, \tag{3.2}$$

en remplaçant $u = \delta^2$ dans (3.2) on obtient :

$$v = r\delta(1 - \delta^2).$$

Alors on obtient dans ce cas le point d'équilibre $E_2 = (\delta^2, r\delta(1 - \delta^2))$.

Par conséquent il existe trois points d'équilibres $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (1, 0)$,

$$E_2 = (\delta^2, r\delta(1 - \delta^2)).$$

Mais E_0 cause une singularité (le point $(0,0)$ est un point singulier).

On va étudier seulement la stabilité des points E_1, E_2

2. Linéarisation du modèle (3.1) près de E_1 on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha w &= Aw \\ &= \begin{pmatrix} r - 2ur - \frac{v}{2\sqrt{u}} & -\sqrt{u} \\ \frac{\beta v}{2\sqrt{u}} & \beta(\sqrt{u} - \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

• Pour $E_1 = (1, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha w}{dt^\alpha} &= A(E_1)w \\ &= \begin{pmatrix} -r & -1 \\ 0 & \beta(1 - \delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

L'équation caractéristique de $A(E_1)$ est :

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \lambda^2 - \text{tr}(A(E_1))\lambda + \det(A(E_1)), \\ &= \lambda^2 + (\beta\delta - \beta + r)\lambda + \beta(\delta - 1)r = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

si $\delta > 1$:

$$\begin{cases} \det(A(E_1)) > 0, \\ \text{tr}(A(E_1)) < 0, \end{cases}$$

donc les deux racines de l'équation caractéristique de (3.5) ont des partie réelles négatives, donc E_1 est stable dans le cas entier ($\alpha = 1$) .

Dans le cas fractionnaire on note ces deux racines par $\lambda_1(E_1)$ et $\lambda_2(E_1)$, évidemment comme ces deux racines sont négative alors :

$$\begin{aligned} \arg(\lambda_1(E_1)) &> \frac{\alpha\pi}{2}, \\ \arg(\lambda_2(E_1)) &> \frac{\alpha\pi}{2}, \end{aligned}$$

on conclut d'après le théorème 2.2.2 que le point d'équilibre E_1 est aussi stable.

si $\delta < 1$:

$$\det(A(E_1)) < 0,$$

l'une de ces deux racines de l'équation caractéristique de (3.5) est un nombre réel positive, qui pourrait être notée par $\lambda_1(E_1)$. Donc :

$$\arg(\lambda_1(E_1)) = 0 < \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Par conséquent, le théorème 2.2.2 affirme que E_1 est instable dans les deux cas fractionnaire et entier.

- Pour $E_2 = (\delta^2, r\delta(1 - \delta^2))$

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha w &= A(E_2)w \\ &= \begin{pmatrix} \frac{r}{2}(1 - 3\delta^2) & -\delta \\ \frac{\beta r}{2}(1 - \delta^2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'équation caractéristique de $A(E_2)$ est :

$$\begin{aligned} p_\lambda &= \lambda^2 - \text{tr}(A(E_2))\lambda + \det(A(E_2)), \\ &= \lambda^2 + \frac{r}{2}(3\delta^2 - 1)\lambda + \frac{\beta r \delta}{2}(1 - \delta^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

δ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
$\det(A(E_2))$	+	+	0	-

δ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
$\text{tr}(A(E_2))$	+	+	0	-

si $\frac{1}{\sqrt{3}} < \delta < 1$:

$$\begin{cases} \det(A(E_2)) > 0, \\ \text{tr}(A(E_2)) < 0, \end{cases}$$

donc les deux racines de l'équation caractéristique de (3.7) ont des partie réelles négatives, alors dans le cas du dérivée première E_2 est stable .

Si on note, ces deux racines sont négatives notées respectivement par $\lambda_1(E_2)$ et

$\lambda_2(E_2)$ évidemment

$$\begin{aligned} \arg(\lambda_1(E_2)) &> \frac{\alpha\pi}{2}, \\ \arg(\lambda_2(E_2)) &> \frac{\alpha\pi}{2}, \end{aligned}$$

on conclut d'après le théorème 2.2.2 le point d'équilibre E_2 est stable.

Si $\delta > 1$:

$$\det(A(E_2)) < 0.$$

L'une de ces deux racines de l'équation caractéristique de (3.7) a une partie réelle positive, donc E_2 est instable.

Si $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{cases} \det(A(E_2)) > 0, \\ \operatorname{tr}(A(E_2)) > 0. \end{cases}$$

Les racines caractéristique de (3.7) ont des partie réelle positive, alors le point E_2 est instable dans le cas de dérivée première.

Cependant, en vertu du lemme 2.2.1, on peut trouver une région paramétrique telle que le points E_2 reste stable dans le cas fractionnaire, cette région dans l'extension de stabilité entier. Pour cela, supposons que les racines de l'équation caractéristiques de (3.7) $\lambda = P + iQ$, $P, Q \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(E_2) &= P + iQ, \\ \lambda_{1,2}(E_2) &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \operatorname{tg}(\theta),$$

puis d'après le théorème 2.2.2 : E_2 est stable si $\lambda_{1,2}(E_2)$ vérifier la condition suivant :

$$\theta = \arg(\lambda_{1,2}(E_2)) > \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$\frac{Q^2}{P^2} = \operatorname{tg}^2(\theta) = \operatorname{tg}^2(\arg(\lambda_{1,2}(E_2))) > \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (3.8)$$

D'autre part on a :

$$\Delta = \text{tr}^2(A(E_2)) - 4\det(A(E_2)),$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(E_2) &= \frac{\text{tr}(A(E_2)) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}, \\ &= \frac{\text{tr}(A(E_2)) \pm i\sqrt{-\text{tr}^2(A(E_2)) + 4\det(A(E_2))}}{2}, \\ &= \frac{\text{tr}(A(E_2))}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\text{tr}^2(A(E_2)) + 4\det(A(E_2))}}{2}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \text{tg}(\theta) &= \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{-\text{tr}^2(A(E_2)) + 4\det(A(E_2))}}{\text{tr}(A(E_2))}, \\ &= \sqrt{\frac{4\det(A(E_2))}{\text{tr}^2(A(E_2))} - 1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donc

$$\frac{Q^2}{P^2} = \text{tg}^2(\theta) = \text{tg}^2(\arg(\lambda(E_2))) = \frac{4\det(A(E_2))}{\text{tr}^2(A(E_2))} - 1, \quad (3.10)$$

on a

$$\det(A(E_2)) = \frac{\beta r \delta}{2}(1 - \delta^2),$$

et

$$\text{tr}^2(A(E_2)) = \frac{r^2}{4}(1 - 3\delta^2)^2,$$

alors on obtient :

$$\text{tg}^2(\arg(\lambda(E_2))) = \frac{8\beta\delta(1 - \delta^2)}{r(1 - 3\delta^2)^2} - 1,$$

évidemment, E_2 est stable pour le système (3.1) lorsque :

$$\begin{aligned} \text{tg}^2(\arg(\lambda(E_2))) &> \text{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ \frac{8\beta\delta(1 - \delta^2)}{r(1 - 3\delta^2)^2} - 1 &> \text{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ \frac{8\beta\delta(1 - \delta^2)}{r(1 - 3\delta^2)^2} &> \text{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 1, \end{aligned}$$

alors

$$\beta > \frac{r(1 - 3\delta^2)^2 [\text{tg}^2(\frac{\alpha\pi}{2}) + 1]}{8\delta(1 - \delta^2)},$$

posons

$$\beta^* := \frac{r(1 - 3\delta^2)^2 \left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 1 \right]}{8\delta(1 - \delta^2)}. \quad (3.11)$$

nous pouvons conclure le résultat suivant : Pour le système (3.1).

Théorème 3.1.1. :

(a) Si $\delta > 1$ le point d'équilibre E_1 est stable, mais E_2 est instable.

(b) Si $\delta \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ le point d'équilibre E_1 est instable, mais E_2 est stable .

(c) Si $\delta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ quand $\beta > \beta^*$, qui est défini dans (3.11), E_1 est instable, mais E_2 est stable.

Donc β^* peut être un Bifurcation de Hopf.

Remarque 3.1.1. Dans la région des paramètres $\delta \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$, la stabilité de E_1 et de E_2 ne sont pas affectées par l'ordre fractionnaire de (3.1) et indépendantes des paramètres β et r . Dans ce cas, le résultat de la stabilité est la même que le système du premier ordre correspondant de(3.1). Lorsque $\delta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, E_2 est instable pour le système du premier ordre correspondant de (3.1) et paramètres arbitraires β et r . Cependant, lorsque l'ordre fractionnaire $\alpha \in (0, 1)$, E_2 pour (3.1) est stable dans le cas de $\delta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $\beta > \beta^*$. Ce résultat ne peut pas être vérifié pour le modèle correspondant du premier ordre de (3.1). Ainsi, l'ordre fractionnaire peut étendre la région de la stabilité.

3.1.2 Bifurcation de Hopf

L'étude de bifurcation de Hopf pour le système d'ordre fractionnaire est différente par rapport au système du dérivé premiere. De la discussion ci-dessus, nous prenons le paramètre β comme paramètre de bifurcation de Hopf pour le système (3.1) avec $\delta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Selon la condition du Lemme 2.2.1 β^* peut être le point de bifurcation de Hopf du système d'ordre fractionnaire (3.1), il suffit donc de vérifier que les racines de (3.7) satisfont ou non $\frac{d\lambda(\beta)}{d\beta}|_{\beta^*} \neq 0$. Pour cela, on peut prendre la dérivée des racines de (3.7) par rapport au paramètre β . Par des calculs complexes, on obtient :

$$\lambda_{1,2}(\beta) = \frac{\operatorname{tr}(A(E_2))}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\det(A(E_2)) - \operatorname{tr}^2(A(E_2))}}{2},$$

$$\frac{d\lambda_{1,2}(\beta)}{d\beta} = \pm i \frac{4 \frac{d}{d\beta} \det(A(E_2))}{4\sqrt{4\det(A(E_2)) - \operatorname{tr}^2(A(E_2))}},$$

$$\frac{d\lambda_{1,2}(\beta)}{d\beta} = \pm i \frac{\frac{d}{d\beta} \det(A(E_2))}{\sqrt{4\det(A(E_2)) - \text{tr}^2(A(E_2))}},$$

nous dérivons $\det(A(E_2))$ par rapport à β on obtient :

$$\frac{d\lambda_{1,2}(\beta)}{d\beta} = \pm i \frac{\frac{r}{2}\delta(1 - \delta^2)}{\sqrt{4\det(A(E_2)) - \text{tr}^2(A(E_2))}},$$

$$\left. \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} = \pm i \frac{\frac{r}{2}\delta(1 - \delta^2)}{\text{tr}(A(E_2)) \text{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},$$

car $\sqrt{4\det(A(E_2)) - \text{tr}^2(A(E_2))}|_{\beta=\beta^*} = \text{tr}(A(E_2)) \text{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ d'après l'équation (3.9).

$$\left. \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} = \pm i \frac{\frac{r}{2}\delta(1 - \delta^2)}{\frac{r}{2}(1 - 3\delta^2) \text{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},$$

donc

$$\left. \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} = \pm i \frac{\delta(1 - \delta^2)}{(1 - 3\delta^2) \text{tg}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},$$

comme $\delta \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ alors $\delta(1 - \delta^2) \neq 0$ et $(1 - 3\delta^2) \neq 0$,

donc

$$\left. \frac{d\lambda(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} \neq 0,$$

Ainsi, β^* défini dans (3.11) est un point de bifurcation de Hopf de (3.1).

3.1.3 Résultats numériques pour le système (3.1)

• On choisit $r = 0.5$ et $\delta = 0.4$. La figure 3.1 montre une courbe de relation entre l'ordre fractionnaire α et le paramètre β sous lequel E_2 est stable (rouge) ou instable (verte). Cela implique que la stabilité dépend de l'ordre fractionnaire α et des paramètres du système (3.1).

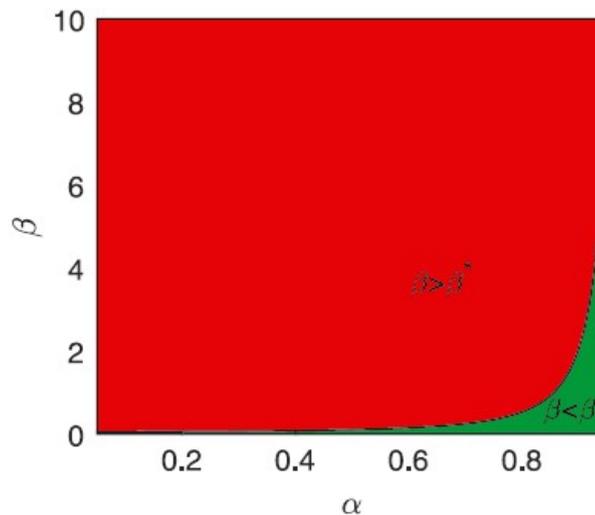


FIGURE 3.1 – Diagramme de Bifurcation de système (3.1) en fonction de α et β .

• Le système (3.1) est résolu en utilisant le schéma prédiction-corrrection et en mettant les paramètres $r = 0.5$ et $\alpha = 0.8$ (d'après la figure précédente).

Alors en remarque 3 cas :

Cas 1 : Pour $\delta > 1$, alors nous prenons $\delta = 1.2$, d'après le théorème 3.1.1cas (a), $E_1 = (1, 0)$ est stable comme le montre la figure suivante :

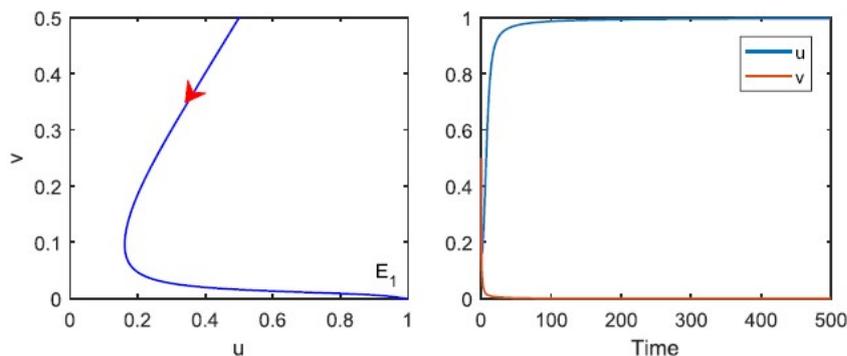


FIGURE 3.2 – La stabilité de E_1 pour le système (3.1). Les paramètres sont pris comme $r = 0.5$, $\delta = 1.2$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 0.5$.

Cas 2 : Pour $\frac{1}{\sqrt{3}} < \delta < 1$, alors nous prenons $\delta = 0.8$, d'après le théorème 3.1.1cas (b), le

point d'équilibre $E_2 = (0.64, 0.144)$ est stable, ce qui est représenté sur la figure suivante :

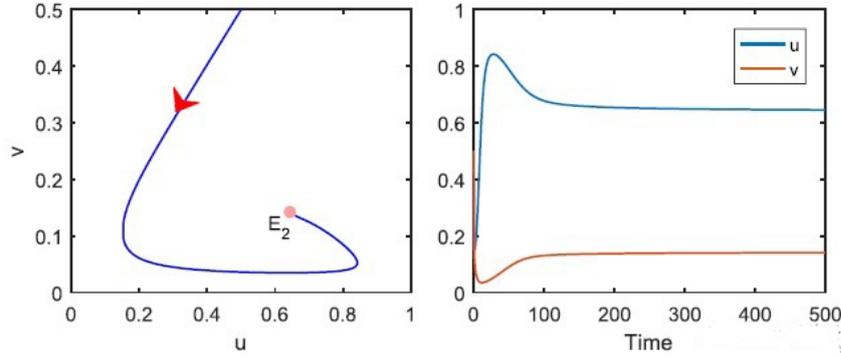


FIGURE 3.3 – La stabilité de E_2 pour le système (3.1). $\delta = 0.8$ et autres paramètres comme dans la figure 3.2.

Cas 3 : $0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors nous prenons $\delta = 0.4$ puis $\beta^* = 0.5267$.

- Pour $\beta > \beta^*$: nous choisissons le paramètre β comme paramètre de contrôle, en posant $\beta = 0.8$, alors $\beta > \beta^*$ et donc E_2 est stable pour le système d'ordre fractionnaire (3.1) (voir figure 3.4 gauche), alors que pour les mêmes paramètres on observe un cycle limite dans le cas entier ($\alpha = 1$, figure 3.4 droite).

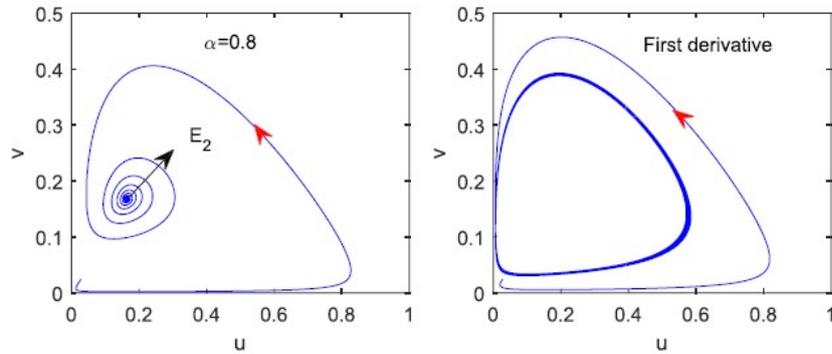


FIGURE 3.4 – La stabilité du système d'ordre fractionnaire (3.1) avec $\alpha = 0.8$ et l'instabilité du système (3.1) avec la dérivée du première ordre, $r = 0.5$.

- Pour $\beta < \beta^*$: E_2 est instable.

3.2 Modèle de mutualisme à deux espèces fractionnaires

Le mutualisme est un type de relation d'avantage entre deux espèces biologiques dans laquelle les deux individus bénéficient de leur interaction. Cette relation joue un rôle im-

portant dans la façon dont l'abondance et la répartition des espèces se façonnent dans l'écosystème. Les modèles de mutualisme à deux espèces sont des représentations mathématiques utilisées pour étudier et comprendre les interactions mutualistes entre deux espèces différentes telles que les taux de croissance, les taux de mortalité, les taux d'interaction et les ressources disponibles. Ces modèles sont généralement basés sur des équations différentielles classiques qui décrivent la dynamique des populations des deux espèces au fil du temps. Dans cette section, nous introduisons une version fractionnaire du système de mutualisme à deux espèces classique (d'ordre entier) étudiée dans l'article [9], comme suit :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = r_1 u \left[1 - \frac{u}{k_1} + \frac{b_{12}v}{k_1} \right] - e_1 u, \\ {}^c D_t^\alpha v = r_2 v \left[1 - \frac{v}{k_2} + \frac{b_{21}u}{k_2} \right] - e_2 v. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous analyserons ensuite les propriétés et les comportements de ce modèle de mutualisme à deux espèces fractionnaires, en mettant l'accent sur la stabilité globale de l'équilibre de coexistence.

3.2.1 Les points d'équilibre

Commençons d'abord par calculer les points d'équilibre, qui sont les solutions du système suivant,

$$\begin{cases} r_1 u \left[1 - \frac{u}{k_1} + \frac{b_{12}v}{k_1} \right] - e_1 u = 0, \\ r_2 v \left[1 - \frac{v}{k_2} + \frac{b_{21}u}{k_2} \right] - e_2 v = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 u \left[\left(1 - \frac{u}{k_1} + \frac{b_{12}u}{k_1} \right) - \frac{e_1}{r_1} \right] = 0, \\ r_2 v \left[\left(1 - \frac{v}{k_2} + \frac{b_{21}u}{k_2} \right) - \frac{e_2}{r_2} \right] = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

1. $(r_1 u = 0)$ et $(r_2 v = 0) \Leftrightarrow u = 0$ et $v = 0$, donc le premier point d'équilibre est $E_0 = (0, 0)$.
2. $\left(\left(1 - \frac{u}{k_1} + \frac{b_{12}v}{k_1} \right) - \frac{e_1}{r_1} \right) = 0$ et $(r_2 v = 0) \Leftrightarrow u = k_1 \left(1 - \frac{e_1}{r_1} \right)$ et $v = 0$ on pose $A_1 = \left(1 - \frac{e_1}{r_1} \right)$, donc le deuxième point d'équilibre est $E_1 = (k_1 A_1, 0)$ tel que $0 \leq e_1 < r_1$.
3. $(r_1 u = 0)$ et $\left(\left(1 - \frac{v}{k_2} + \frac{b_{21}u}{k_2} \right) - \frac{e_2}{r_2} \right) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et $v = k_2 \left(1 - \frac{e_2}{r_2} \right)$ on pose $A_2 = \left(1 - \frac{e_2}{r_2} \right)$, donc le troisième point d'équilibre est $E_2 = (0, k_2 A_2)$ tel que $0 \leq e_2 < r_2$.

4. $\left(1 - \frac{u}{k_1} + \frac{b_{12}v}{k_1}\right) - \frac{e_1}{r_1} = 0$ et $\left(1 - \frac{v}{k_2} + \frac{b_{21}u}{k_2}\right) - \frac{e_2}{r_2} = 0$
avec $A_1 = \left(1 - \frac{e_1}{r_1}\right)$, $A_2 = \left(1 - \frac{e_2}{r_2}\right)$. Alors :

$$\begin{cases} u = A_1 k_1 + b_{12} v & (1) \\ v = A_2 k_2 + b_{21} u & (2) \end{cases} \quad (3.15)$$

En remplaçant (2) par (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u &= A_1 k_1 + b_{12}(A_2 k_2 + b_{21} u), \\ u^* &= \frac{A_1 k_1 + b_{12} A_2 k_2}{1 - b_{12} b_{21}}. \end{aligned}$$

Maintenant, en remplaçant (1) par (2) on obtient :

$$\begin{aligned} v &= A_2 k_2 + b_{21}(A_1 k_1 + b_{12} v), \\ v^* &= \frac{A_2 k_2 + b_{21} A_1 k_1}{1 - b_{12} b_{21}}. \end{aligned}$$

Donc le quatrième point d'équilibre est $E_3 = \left(\frac{A_1 k_1 + b_{12} A_2 k_2}{1 - b_{12} b_{21}}, \frac{A_2 k_2 + b_{21} A_1 k_1}{1 - b_{12} b_{21}}\right)$.

3.2.2 La stabilité globale de l'équilibre de coexistence E_3

Le Lemme suivant est indispensable pour démontrer le résultat principal de cette section

Lemme 3.2.1. [8] Soit $x(t) \in \mathbb{R}^+$ une fonction continue et dérivable. Alors, pour toute instant $t \geq t_0$

$${}^c D_t^\alpha \left[x(t) - x^* - x^* \ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq \left(1 - \frac{x^*}{x(t)}\right) {}^c D_t^\alpha x(t), \quad x^* \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in (0, 1). \quad (3.16)$$

Démonstration. En appliquons la linéarité de la dérivée fractionnaire de Caputo et l'exemple 1.2.3 On peut voir que (3.16) est :

$${}^c D_t^\alpha x(t) - {}^c D_t^\alpha x^* - x^* {}^c D_t^\alpha \left[\ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq \left(\frac{x(t) - x^*}{x(t)} \right) {}^c D_t^\alpha x(t),$$

$$x(t) {}^c D_t^\alpha x(t) - x^* x(t) {}^c D_t^\alpha \left[\ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq (x(t) - x^*) {}^c D_t^\alpha x(t),$$

$$x(t) {}^c D_t^\alpha x(t) - x^* x(t) {}^c D_t^\alpha \left[\ln \frac{x(t)}{x^*} \right] - (x(t) - x^*) {}^c D_t^\alpha x(t) \leq 0.$$

Comme $x^* \in \mathbb{R}_*^+$, il est clair que pour montrer (3.16) est équivalent à montrer :

$${}^c D_t^\alpha x(t) - x(t) {}^c D_t^\alpha \left[\ln \frac{x(t)}{x^*} \right] \leq 0. \quad (3.17)$$

D'après la définition de dérivée de Caputo on a :

$${}^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} x'(s) ds,$$

et

$${}^c D_t^\alpha \left[\ln \frac{x(t)}{x^*} \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \frac{x'(s)}{x(s)} ds.$$

Le terme gauche de (3.17) est égale à :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \left(\frac{x(s) - x(t)}{x(s)} \right) \frac{x'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (3.18)$$

Définissons maintenant la variable auxiliaire $w = \frac{x(s)-x(t)}{x(t)}$.

Ce qui implique que $\frac{dw}{ds} = \frac{x'(s)}{x(t)}$. Ainsi, l'équation (3.18) peut s'écrire comme suite :

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t x(t) \left(1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) \frac{w'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, & dv &= \frac{\alpha(t-s)^{-\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}, \\ du &= x(t) \left(1 - \frac{1}{w(s)+1} \right) w'(s), & u &= x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1)). \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} (3.19) &\Leftrightarrow \left[\frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1))}{\Gamma(1-\alpha)(t-s)^\alpha} \right]_{t_0}^t - \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1))}{(t-s)^{\alpha+1}} ds, \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1))}{\Gamma(1-\alpha)(t-s)^\alpha} \right]_{s=t} - \left[\frac{x(t) (w(t_0) - \ln(w(t_0)+1))}{\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \right], \\ &- \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s)+1))}{(t-s)^{\alpha+1}} ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

On remarque que le premier terme de l'expression (3.20) a une indétermination en $s = t$.

Maintenant, nous analysons la limite correspondante :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s) + 1))}{\Gamma(1 - \alpha)(t - s)^\alpha} \right] &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s) + 1))}{(t - s)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{\left[x(s) - x(t) - x(t) \ln \frac{x(s)}{x(t)} \right]}{(t - s)^\alpha}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilisons la règle de L'Hopital pour notre limite, (car elle donne $\frac{0}{0}$). En différenciant à la fois le numérateur et le dénominateur, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{\left[x(s) - x(t) - x(t) \ln \frac{x(s)}{x(t)} \right]}{(t - s)^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \frac{\left[1 - \frac{x(t)}{x(s)} \right] x'(s)}{\alpha (t - s)^{\alpha-1}}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{s \rightarrow t} \left[\frac{(t - s)^{1-\alpha}}{\alpha} \left(1 - \frac{x(t)}{x(s)} \right) x'(s) \right] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.20) se réduit à :

$$- \left[\frac{x(t) (w(t_0) - \ln(w(t_0) + 1))}{\Gamma(1 - \alpha)(t - t_0)^\alpha} \right] - \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(t) (w(s) - \ln(w(s) + 1))}{(t - s)^{\alpha+1}} ds \leq 0. \quad (3.22)$$

équivalent a

$$- \left[\frac{\left(x(t_0) - x(t) - x(t) \ln \frac{x(t_0)}{x(t)} \right)}{\Gamma(1 - \alpha)(t - t_0)^\alpha} \right] - \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\left(x(s) - x(t) - x(t) \ln \frac{x(s)}{x(t)} \right)}{(t - s)^{\alpha+1}} ds \leq 0. \quad (3.23)$$

Voir que l'inégalité (3.23) est vraie, ce qui conclut la preuve. ■

Théorème 3.2.1. *Si $b_{12} < 1$, $b_{21} < 1$ et*

$$b_{12}b_{21} < 1, 0 \leq e_1 \leq r_1 \text{ et } 0 \leq e_2 < r_2,$$

ou

$$b_{12}b_{21} < 1, 0 \leq e_1 < r_1 \text{ et } 0 \leq e_2 \leq r_2.$$

Alors, l'équilibre $E_3 = (u^*, v^*)$ du système (3.12) est globalement stable.

Démonstration.

Étape 1 : On définit la fonction $V : \{(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 : u > 0, v > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$V(u, v) = c_1 \int_{u^*}^u \frac{\theta - u^*}{\theta} d\theta + c_2 \int_{v^*}^v \frac{\theta - v^*}{\theta} d\theta, \quad (3.24)$$

de sorte que (3.24) peut s'écrire sous la forme :

$$V(u, v) = c_1 \left(u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*} \right) + c_2 \left(v - v^* - v^* \ln \frac{v}{v^*} \right), \quad (3.25)$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. La fonction V est continue sur le domaine \mathbb{R}_+^2 et $V > 0$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 - \{(u^*, v^*)\}$, alors que $V(u, v) = 0$ si $u = u^*$ et $v = v^*$. Par conséquent, nous pouvons voir que $V(u, v)$ est une fonction de Lyapunov.

Étape 2 : En appliquant la propriété de linéarité de la dérivée de Caputo et en utilisant le Théorème 3.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\alpha V(u, v) &= c_1 {}^c D_t^\alpha \left(u - u^* - u^* \ln \frac{u}{u^*} \right) + c_2 {}^c D_t^\alpha \left(v - v^* - v^* \ln \frac{v}{v^*} \right), \\ &\leq c_1 \left(1 - \frac{u^*}{u} \right) {}^c D_t^\alpha u + c_2 \left(1 - \frac{v^*}{v} \right) {}^c D_t^\alpha v. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En peut simplifier le système (3.12) comme suit :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \frac{r_1 u}{k_1} \left[(k_1 - u + b_{12} v) - \frac{e_1 k_1}{r_1} \right], \\ {}^c D_t^\alpha v = \frac{r_2 v}{k_2} \left[(k_2 - v + b_{21} u) - \frac{e_2 k_2}{r_2} \right], \end{cases} \quad (3.27)$$

on a $A_1 = (1 - \frac{e_1}{r_1})$ et $A_2 = (1 - \frac{e_2}{r_2})$ alors :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \frac{r_1 u}{k_1} [k_1 A_1 - u + b_{12} v], \\ {}^c D_t^\alpha v = \frac{r_2 v}{k_2} [k_2 A_1 - v + b_{21} u], \end{cases} \quad (3.28)$$

d'après (3.15) on a $A_1 k_1 = u^* - b_{12} v^*$, $A_2 k_2 = v^* - b_{21} u^*$ alors :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha u = \frac{r_1 u}{k_1} (u^* - u - b_{12}(v^* - v)), \\ {}^c D_t^\alpha v = \frac{r_2 v}{k_2} (v^* - v - b_{21}(u^* - u)). \end{cases} \quad (3.29)$$

En remplaçant (3.29) dans (3.26) on obtient :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_t^\alpha V(u, v) &\leq \frac{c_1 r_1 u}{k_1} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) ((u^* - u) - b_{12}(v^* - v)) \\
 &\quad + \frac{c_2 r_2 v}{k_2} \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) ((v^* - v) - b_{21}(u^* - u)), \\
 &\leq \frac{c_1 r_1}{k_1} (u - u^*) ((u^* - u) - b_{12}(v^* - v)) \\
 &\quad + \frac{c_2 r_2}{k_2} (v - v^*) ((v^* - v) - b_{21}(u^* - u)), \\
 &\leq \frac{c_1 r_1}{k_1} (-(u - u^*)^2 + b_{12}(u - u^*)(v - v^*)) \\
 &\quad + \frac{c_2 r_2}{k_2} (-(v - v^*)^2 + b_{21}(u - u^*)(v - v^*)).
 \end{aligned}$$

On pose : $c_2 = \frac{k_2 r_1 b_{12}}{k_1 r_2 b_{21}} c_1$,

$${}^c D_t^\alpha V(u, v) \leq \frac{c_1 r_1}{k_1} \left(-(u - u^*)^2 + 2b_{12}(u - u^*)(v - v^*) - \frac{b_{12}}{b_{21}}(v - v^*)^2 \right).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$${}^c D_t^\alpha V(u, v) \leq \frac{c_1 r_1}{k_1} \left(-(u - u^*)^2 + b_{12}(u - u^*)^2 + b_{12}(v - v^*)^2 - \frac{b_{12}}{b_{21}}(v - v^*)^2 \right),$$

donc

$${}^c D_t^\alpha V(u, v) \leq -W(u, v),$$

tel que $W(u, v) = \frac{c_1 r_1}{k_1} \left((1 - b_{12})(u - u^*)^2 + \frac{b_{12}}{b_{21}}(1 - b_{21})(v - v^*)^2 \right)$, W est continue sur le domaine \mathbb{R}_+^2 et $W(u, v) > 0$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2 - \{(u^*, v^*)\}$, alors que $W(u, v) = 0$ si $u = u^*$ et $v = v^*$. Ainsi, W est une fonction définie positive.

Ainsi, ${}^c D_t^\alpha V(u, v) \leq -W(u, v)$.

D'après le Théorème 2.2.4, le point d'équilibre (u^*, v^*) du système (3.12) est globalement uniformément asymptotiquement stable . ■

CONCLUSION

Au cours de ce mémoire, nous avons exploré le domaine des systèmes dynamiques fractionnaires et examiné leurs applications dans la modélisation de dynamique de population. Tout d'abord, nous avons examiné les bases théoriques de calcul fractionnaire, en nous concentrant sur la notion de dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville et Caputo. Ensuite, nous avons présenté les notions de base de système dynamique fractionnaire, notamment la stabilité locale et globale, la bifurcation de Hopf et la méthode de prédiction-corrrection pour la résolution numérique de ces équations.

Enfin, nous avons exploré l'application des systèmes dynamiques fractionnaires à l'étude de la dynamique des populations, en mettant l'accent sur les interactions prédateurs-proies et mutualistes. Notre objectif était de mieux comprendre les dynamiques complexes qui émergent dans ces systèmes et d'identifier les mécanismes clés qui influencent leur stabilité et leur évolution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos**, *Lyapunov functions for fractional order systems*. Commun. Nonlinear Sci Numer Simulat 19 2951–2957, (2014).
- [2] **D. Chen, R. Zhang, X. Liu, X. Ma**, *Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19, 4105–4121, (2014).
- [3] **K. Diethelm**, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, GNS Gesellschaft, Am GauBberg 2, 38114 Braunschweig, Germany, (2004).
- [4] **C. Li et F. Zhang**. A survey on the stability of fractional differential equations. *The European Physical Journal Special Topics*, 193, 27-47, (2011).
- [5] **D. Matignon**. *Stability results for fractional differential equations with applications to control processing*. Comput. Eng. Syst. Appl, 2, 963–968, (1996).
- [6] **N. Belmahi**, *Local and global solutions for time fractional reaction diffusion system*, PhD thesis, the university of jordan, (2021).
- [7] **I. Podlubny**, *Fractional Differential Equations*. Technical University of Kosice, Slovak Republic, AcademicPress, (1999).
- [8] **C. Vargas-De-León**, *Volterra-type Lyapunov functions for fractional-order epidemic systems*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 24(1-3), 75-85 (2015).
- [9] **C. Vargas-De-León**, *Lyapunov functions for two-species cooperative systems*. *Unidad Académica de Matemáticas*, Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero, Mexico, (2012).

- [10] **L. Yan, C. Yang Quan.** et **I. PODLUBNY**, *Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems : Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability.* Computers Mathematics with Applications, vol. 59, no 5, p. 1810-1821, (2010).
- [11] **H. Yin, X. Wen**, *Hopf bifurcation of a diffusive Gause-type predator-prey model induced by time fractional-order derivatives.* Math Meth Appl Sci, 1–12, (2018).

Résumé :

Les systèmes dynamiques fractionnaires sont des modèles mathématiques impliquant une dérivée fractionnaire permettant de modéliser et comprendre des phénomènes naturels complexes. L'objectif principal de ce travail est de contribuer à approfondir notre compréhension des systèmes dynamiques fractionnaires et à explorer leurs applications potentielles.

Abstract :

Fractional dynamical systems are mathematical models involving a fractional derivative used to model and understand complex natural phenomena. The main objective of this work is to contribute to deepen our understanding of fractional dynamical systems and to explore their potential applications.