

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

## Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

**Spécialité** : Mathématiques.

**Option** : EDP et Applications.

**Thème**

# Sur une classe d'inégalités variationnelles d'évolution avec mémoire

**Présenté par :**

**Hamimed Wiam**

**Devant le jury composé de :**

<b>Président</b>	:	Arroud Chems eddine	Maître de Conférences B	Université de Jijel
<b>Encadreur</b>	:	Kecis Ilyas	Maître de Conférences A	Université de Jijel
<b>Examineur</b>	:	Yakhlef Othman	Maître de Conférences B	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

## ✱ Remerciements ✱

Tout d'abord et avant tout, je remercie *ALLAH* qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur *Kecis Ilyas*, pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragement.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail. *Arroud Chems Eddine*, qui me fait l'honneur de présider ce jury. *Yakhlef Othman*, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement et vous avez toute mon appréciation et mon respect.

*Merci* à tous et à toutes.

✧ *Dédicaces* ✧

*Je* dédie ce modeste travail

A mes très chers parents.

A mes grands-mères, mes sœurs et mes frères.

A toute ma famille et a toute la famille Merimeche.

A tous mes amis et mes collègues de promotion.

*Et* à tous ceux qui me sont chers.

✧ Wiam ✧

# Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié un processus de rafle implicite impliquant un opérateur avec mémoire. L'approche utilisée consiste, dans un premier temps, à réduire ce processus de rafle à une équation différentielle non-linéaire puis démontrer le caractère bien posé du problème en utilisant la machine des équations différentielles et le théorème du point fixe pour les opérateurs avec mémoire. Ce résultat a été démontré sans aucune condition sur le mouvement des ensembles par rapport à la distance de Hausdorff. Finalement, le résultat abstrait a été utilisé pour étudier un problème de contact quasi-statique pour des matériaux visco-élastique où la loi de comportement de ces derniers est donnée via un opérateur avec mémoire.

# Abstract

In this work we have studied a class of implicit state-dependent sweeping processes with history-dependent operators. The well-posedness result is obtained, firstly, by reducing the problem to a non-linear differential equation and then using a fixed point principle for history-dependent operators to obtain the desired result. Finally, the theoretical results are applied to prove the well-posedness of a history-dependent quasi-static contact problem.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	1
1.2 Quelques rappels d'analyse convexe . . . . .	4
1.3 Cônes tangents et normaux à un ensemble convexe fermé . . . . .	6
1.4 Généralités sur les applications multivoques . . . . .	11
1.5 Autres résultats et définitions . . . . .	14
<b>2 Problème d'une inégalité variationnelle d'évolution avec mémoire</b>	<b>18</b>
2.1 Opérateur avec mémoire . . . . .	18
2.2 Liste des hypothèses . . . . .	23
2.3 Résultat d'existence et d'unicité . . . . .	25
<b>3 Application : un problème de contact quasi-statique en visco-élasticité avec mémoire</b>	<b>36</b>
3.1 Cadre physique et quelques notations . . . . .	36

---

3.2	Liste des hypothèses . . . . .	40
3.3	Formulation variationnelle . . . . .	41
3.4	Solvabilité du problème . . . . .	43
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

## Notations générales

p.p	presque partout.
i.e.,	c'est à dire (identiquement équivalent).
resp.	respectivement.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
min,max,inf,sup	minimum,maximum,infimum et supremum respectivement.
$H$	représente un espace de Hilbert.
$X^*$	dual topologique d'un espace normé $X$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	produit scalaire sur $H$ .
$\overline{\mathbb{B}}_X$	la boule unité fermée de $X$ .
$C^\circ$	cône polaire de $C$ .
$N_C(x)$	cône normal à un ensemble convexe $C$ au point $x$ .
$\text{Proj}_C(\cdot)$	l'application de projection sur $C$ .
$\text{Int}(A), \bar{A}$	l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble $A$ respectivement.
$e(A, B)$	l'excès de l'ensemble $A$ à l'ensemble $B$ .
$d(\cdot, C)$ ou $d_C(\cdot)$	la fonction distance.
$F : X \rightrightarrows Y$	désigne une application à valeurs ensemblistes (multi-application) de $X$ dans $Y$ .
$\text{co}(\Omega)$	enveloppe convexe d'un ensemble $\Omega$ .
$d_H(A, B)$	distance de Pompeiu-Hausdorff entre deux parties $A$ et $B$ .
$\nabla$	l'opérateur de gradient.
Div	l'opérateur de divergence.
$\partial\Omega$	la frontière d'un ensemble $\Omega$ .
$I$	l'opérateur d'identité.
$\mathcal{L}(X, Y)$	l'ensemble des opérateurs linéaires continus définis de $X$ vers $Y$ .
$\mathcal{L}(X)$	l'ensemble des opérateurs linéaires continus définis de $X$ dans $X$ .
$C([0, T]; X)$	$\{f : [0, T] \rightarrow X\}$ $f$ est continue .
$f^*$	la conjuguée de Fenchel d'une fonction $f$ .

---

$\psi_C(\cdot), \sigma_C(\cdot)$	la fonction indicatrice (resp. support) d'un ensemble $C$ .
$\partial f(x)$	sous-différentiel d'une fonction convexe $f$ au point $x$ .
$v_\nu, v_\tau$	représentent, respectivement, la composante normale et la composante tangentielle d'un vecteur $v$ .

# Introduction

L'étude systématique d'un processus raffle, ou sweeping process en anglais, remonte aux travaux de Jean Jacques Moreau au début des années 70 dans une célèbre série de papiers [18, 19, 20, 21, 22], en vue de l'étude de l'évolution des systèmes élasto-plastiques. Moreau a présenté son problème sous la forme d'une inclusion différentielle d'évolution gouvernée par le cône normal à un ensemble convexe :

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \quad (1)$$

où  $H$  est un espace de Hilbert,  $C : [0, T] \rightrightarrows H$  est une multi-application à valeurs convexes fermées,  $N_{C(t)}(\cdot)$  représente le cône normal à  $C(t)$  au point  $u(t)$  au sens d'analyse convexe et  $\dot{u}(t)$  est la dérivée de  $u$  au point  $t$ . Si on suppose que le point  $u(t)$  se trouve à l'intérieure de l'ensemble  $C(t)$ , le cône normal  $N_{C(t)}(u(t))$  dans ce cas est réduit à zéro, ce qui signifie que la vitesse est nulle et par suite le point ne bouge pas. Tandis que, tout contact du point  $u(t)$  avec la frontière conduit à un mouvement opposé à la normale à  $C(t)$  au point  $u(t)$ .

Un tel problème a été utilisé pour étudier une large classe de modèles mathématiques notamment en mécanique et en ingénierie, citons par exemple, les modèles de contact unilatéral en élasticité, les problèmes d'optimisation, la dynamiques des corps rigides avec frottement, le contrôle optimal, modélisation de mouvement de foule, les circuits électriques, planification en économie, etc ..., pour plus d'information, le lecteur se réfère à [8, 11, 12, 20, 23].

Depuis les travaux de Moreau et vu les nouvelles techniques du traitement des inclusions différentielles gouvernées par le cône normal, plusieurs nouvelles extensions et variantes du problème 1 ont été introduites et largement étudiées par nombreux chercheurs. Beaucoup de ces nouvelles formes touchent principalement l'ensemble des contraintes  $C(t)_t$  en considérant des ensembles non nécessairement convexes et dépendent à la fois du temps et l'état, i.e., de la forme  $C(t, u(t))$ . On trouve également les processus de rafle avec une perturbation multivoque, les processus de rafle de second ordre et même les processus de rafle implicites où la dérivée  $\dot{u}(t)$  figure à la fois à l'intérieur et l'extérieur du cône normal.

L'objectif de ce mémoire est de détailler l'article de Shengda Zeng et Emilio Vilches [28] intitulé "**Well-Posedness of History/State-Dependent Implicit Sweeping Processes**" dans un espace de Hilbert séparable. Le but principale des auteurs de cet article est d'étudier une nouvelle variante de (1) donnée par le processus de rafle implicite suivant

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t, x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)), \text{ p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2)$$

où  $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$  est une multi-application à valeurs non vides fermées et convexes,  $A : H \rightarrow H$  est un opérateur linéaire, borné, symétrique et coercif,  $B : H \rightarrow H$  est un opérateur Lipschitzien et  $\mathcal{R} : C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$  est un opérateur avec mémoire. Une version récente de tel problème a été étudiée dans [16] où la famille d'ensembles convexes dépend de temps seulement (time dependent). Ce travail se considère aussi comme une extension de ceux réalisés dans [1, 2, 10].

On peut décrire le matériel présenté dans ce travail en trois chapitres, on commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres, notamment les notions de l'analyse convexe, les cônes normaux et des généralités sur les applications multivoques.

Dans le deuxième chapitre, on introduit la classe des opérateurs avec mémoire en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on établit le résultat d'équivalence entre ce processus de rafle (2) et une équation différentielle ce qui nous aide à prouver l'existence

de la solution. Ensuite, on passe à prouver le caractère bien posé du problème. Ce résultat vient après quelques lemmes auxiliaires qui sont également démontrés.

Finalement, dans le dernier chapitre, on utilise ce résultat abstrait pour étudier un problème de contact quasi-statique pour des matériaux visco-élastique où la loi de comportement (constitutive) de ces derniers est donnée via un opérateur avec mémoire.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux et les concepts de base que l'on va utiliser dans les autres chapitres. Selon les problèmes auxquels nous sommes confrontés au cours de ce travail, on est amené à utiliser quelques résultats et outils auxiliaires que l'on accepte (souvent) sans démonstration. Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire,  $X$  désigne un espace vectoriel topologique sur  $\mathbb{R}$  et  $X^*$  représente son dual topologique formé de toutes les formes linéaires  $x^* : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.1.** *On appelle produit scalaire sur  $X$  quelconques, toute forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  possédant les propriétés supplémentaires suivantes*

$$\langle x, y \rangle \geq 0 \text{ (positivité)}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ (symétrie)}.$$

À titre d'exemple, l'espace  $L^2(\Omega)$  de fonctions de carrée intégrable est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

et la norme associée est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire permet de mesurer l'angle formé par deux vecteurs  $x$  et  $y$  via l'équivalence suivante

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Cette dernière expression est bien définie grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz qui donne

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow |\cos(\theta)| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

L'application  $\|\cdot\| : x \in X \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est une norme sur  $X$  appelée la norme hilbertien ou la norme associée ou induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . L'espace  $X$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  s'appelle un espace pré-hilbertien. Si de plus,  $X$  est complet pour la norme induit, dans ce cas,  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est dit un espace de Hilbert que l'on note généralement  $H$ .

**Définition 1.2.** *Étant donné un point  $x_0 \in \mathbb{R}$  et un réel  $r > 0$ , les sous ensembles de  $X$  notés*

$$B[x_0, r] := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

$$S[x_0, r] := \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

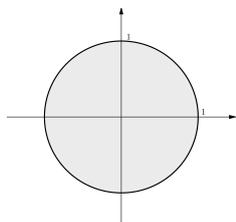
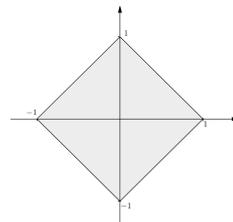
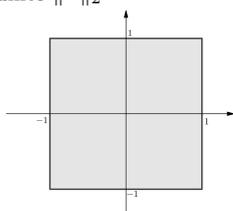
*sont appelés, respectivement*

*boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $r$*

*boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$*

*sphère de centre  $x_0$  et de rayon  $r$*

En particulier, si  $r = 1$  et  $x_0 = 0$  alors  $\overline{\mathbb{B}}$  (resp.  $\mathbb{B}$ ) représente la boule unité fermée (resp. ouverte).

FIGURE 1.1 – boule unité  $\|\cdot\|_2$ FIGURE 1.2 – boule unité  $\|\cdot\|_1$ FIGURE 1.3 – boule unité  $\|\cdot\|_\infty$ 

### Définition 1.3.

- (a) Deux vecteurs  $x, y \in H$  sont dits orthogonaux et on écrit  $x \perp y$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Cette relation est bien sûr symétrique.
- (b) Deux ensembles  $A, B \subset H$  sont orthogonaux et on écrit  $A \perp B$  si  $\langle x, y \rangle = 0$  pour tous  $x \in A$  et  $y \in B$ .
- (c) Soit  $A \subset H$ , l'orthogonale de  $A$  que l'on note  $A^\perp$  est l'ensemble défini par

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de  $H$ , ceci entraîne que si  $\langle x, y \rangle = 0$  pour tout  $y \in H$  alors  $x = 0$ .

## 1.2 Quelques rappels d'analyse convexe

**Définition 1.4.** 1. On appelle *segment joignant* ou *reliaut* deux points  $x, y \in X$  l'ensemble

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}.$$

2. Un sous ensemble  $C \subset X$  est dit *convexe* si pour tous  $x, y \in C$  le segment reliant  $x$  à  $y$  reste dans  $C$ , i.e.,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C \text{ pour tout } \lambda \in [0, 1].$$

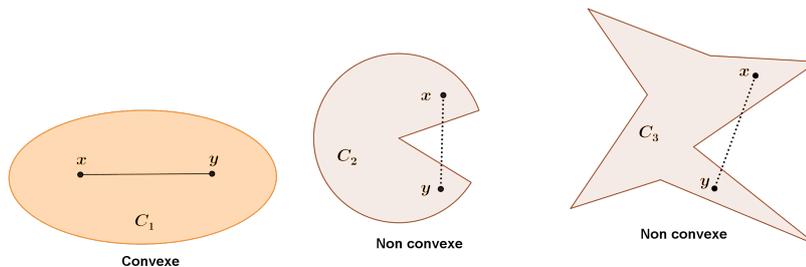


FIGURE 1.4 – Ensembles convexes et non convexes

3. Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est dite *convexe* si, pour tous  $x, y \in \text{dom } f$  et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  l'inégalité suivante, dit "l'inégalité de convexité" est vérifiée

$$\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

où  $\text{dom } f$  est le domaine de  $f$  défini par

$$\text{dom } f = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La fonction  $f$  est dite *strictement convexe* si l'inégalité de convexité est stricte. La définition de la convexité signifie que le segment reliant les deux points  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$  se trouve toujours au dessus de la courbe de  $f$ .

4. Une fonction  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est dite positivement homogène (d'ordre 1) si

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \text{ pour tout } \alpha > 0.$$

5. On appelle épigraphe de  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  le sous-ensemble de  $X \times \mathbb{R}$  noté et défini comme suit

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

6. Soit  $\Omega$  un sous ensemble de  $X$ . L'enveloppe convexe (convex hull) de  $\Omega$ , que l'on note  $\text{co}(\Omega)$ , est le plus petit ensemble convexe contenant  $\Omega$ . Autrement dit

$$\text{co}(\Omega) = \bigcap \{C \mid C \text{ convexe et } \Omega \subset C\}.$$

### Exemple 1.5.

1. Les boules  $\mathbb{B}[x_0, r]$  et  $\mathbb{B}(x_0, r)$  sont des ensembles convexe pour tous  $x_0 \in X, r \in \mathbb{R}_+$ .
2. Tout sous espace vectoriel de  $X$  est convexe.
3. La fonction  $f : x \mapsto x^2$  est convexe, en effet, soient  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in [0, 1]$  alors

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 \\ &\quad - 2\lambda(1 - \lambda)xy - (1 - \lambda)^2 y^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

**Définition 1.6.** Soit  $C$  un ensemble non vide de  $X$ .

(a) La fonction distance associée à  $C$ , notée  $d(\cdot, C)$  ou  $d_C(\cdot)$ , est définie par

$$X \ni x \mapsto d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y) = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Les deux propriétés suivantes ont lieu

$$x \in \overline{C} \Leftrightarrow d(x, C) = 0.$$

La fonction distance est lipschitzienne de rapport 1, i.e.,

$$|d(x, C) - d(y, C)| \leq \|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in X. \quad (1.1)$$

(b) Un élément  $y \in C$  est une projection (ou un projeté) de  $x \in X$  sur  $C$  si

$$d(x, C) = \|x - y\|.$$

Cet élément  $y$  se note  $\text{Proj}(x, C)$  ou  $P_C(x)$ .

Le Théorème suivant donne les conditions d'existence et d'unicité de la projection dans un espace de Hilbert. On rappelle que ce Théorème n'est plus valable dans un espace normé général.

**Théorème 1.7** (Théorème de la projection sur un convexe fermé).

Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $H$ , alors pour tout  $x \in H$ , il existe une et une seule projection de  $x$  sur  $C$ , i.e.,

$$\forall x \in H, \exists! y = \text{Proj}(x, C) \in C : d(x, C) = \|x - y\|.$$

De plus, la projection sur  $C$  se caractérise par l'équivalence suivante

$$y = \text{Proj}(x, C) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \langle z - y, x - y \rangle \leq 0. \quad (1.2)$$

Il est à noter que si l'ensemble  $C$  est convexe alors, l'application de projection  $\text{Proj}(\cdot, C)$  est lipschitzienne de rapport 1, i.e.,

$$\|\text{Proj}(x, C) - \text{Proj}(y, C)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in H \quad (1.3)$$

## 1.3 Cônes tangents et normaux à un ensemble convexe fermé

**Définition 1.8.**

- Un sous ensemble  $K \subset X$  est dit un cône si  $\lambda K \subset K$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . Si de plus  $K$  est convexe alors  $K$  est dit cône convexe, il est clair qu'un cône contient toujours l'origine ( $\lambda = 0 : 0K = \{0\} \subset K$ ).

- Le cône polaire (ou cône polaire négatif, ou cône dual) de  $K \subset X$  est l'ensemble

$$K^\circ := \{y \in X^*, \langle y, x \rangle \leq 0 \text{ pour tout } x \in K\},$$

d'autres notations sont également utilisées pour le cône polaire de  $K$  :  $K^-$ ,  $K^\ominus$ , ..., etc.

Citons par exemple, le cône de Pareto de  $\mathbb{R}^n$  (orthant positif)

$$K := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n\} = \mathbb{R}_+^n$$

alors

$$K^\circ = -C = \{-x = (-x_1, \dots, -x_n) \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}_-^n$$

En analyse convexe, les cônes les plus couramment utilisés sont le cône tangent et le cône normal. Soit  $C$  un ensemble convexe non vide de  $X$ . Le cône tangent à  $C$  au point  $x \in C$  que l'on note  $T(C; x)$  ou  $T_C(x)$ , est le cône fermé (de sommet 0) engendré par  $C - x$ , i.e.,

$$T(C; x) := \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda(C - x)}.$$

Puisque  $C$  est convexe, il est évident que  $T(C; x)$  est un cône convexe fermé. On remarque que  $C \subset x + T(C; x)$ , et si  $x \in \text{Int}(C) \neq \emptyset$  alors  $T(C; x) = X$ . On introduit maintenant la notion du cône normal à  $C$  au point  $x$ , noté  $N(C; x)$  ou  $N_C(x)$ , comme étant le cône polaire du cône tangent, i.e.,

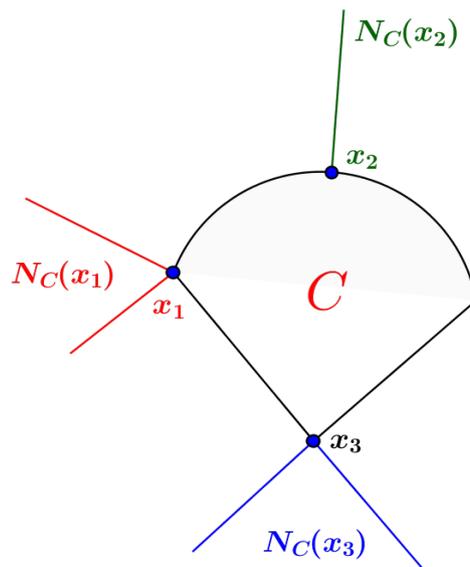
$$N_C(x) := (T_C(x))^\circ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, z \rangle \leq 0, \forall z \in T(C; x)\}.$$

La définition de  $T_C(x)$ , nous permet d'écrire

$$N_C(x) = \{x^* \in X^*, \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \text{ pour tout } y \in C\}$$

Il est facile de vérifier que si  $x \in \text{Int}(C)$  avec  $\text{Int}(C) \neq \emptyset$  alors  $N_C(x) = \{0\}$ . En effet, soit  $x \in \text{Int}(C)$ , alors il existe  $\gamma > 0$  tel que  $\mathbb{B}(x, \gamma) \subset C$ . Soient  $v \in N_C(x)$  et  $t > 0$  suffisamment petit, tel que  $x + tv \in \mathbb{B}(x, \gamma) \subset C$  alors

$$\langle v, x + tv - x \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle v, tv \rangle \leq 0 \Rightarrow t\|v\|^2 \leq 0 \Rightarrow v = 0$$

FIGURE 1.5 – Cône normal à  $C$ 

$$\Rightarrow N_C(v) \subset \{0\} \Rightarrow N_C(v) = \{0\}$$

De plus pour tout  $x \in -C$  et  $y, z \in X$  tels que  $y + z \in C$

$$N_C(-x) = -N_{-C}(x), N_C(y + z) = N_{C-z}(y). \quad (1.4)$$

### Exemple 1.9.

Sur  $\mathbb{R}$  on considère le sous ensemble  $C = [0, 1]$  alors

$$T_{[0,1]}(1) = ]-\infty, 0], \quad N_{[0,1]}(1) = [0, +\infty[.$$

En effet

$$\begin{aligned} C - \{1\} &= \{x - 1, x \in [0, 1]\} = [-1, 0] \\ \Rightarrow \mathbb{R}_+(C - \{1\}) &= \{\lambda x, x \in C - \{1\}, \lambda > 0\} \\ &= \{\lambda x, x \in [-1, 0], \lambda > 0\} = ]-\infty, 0] \\ \Rightarrow T_{[0,1]}(1) &= \overline{\mathbb{R}_+(C - \{1\})} = \overline{]-\infty, 0]} = ]-\infty, 0]. \end{aligned}$$

alors

$$N_{[0,1]}(1) = (T_{[0,1]}(1))^\circ = \{v \in \mathbb{R} : \underbrace{v(y-1)}_{\leq 0} \leq 0, \forall y \in [0, 1]\} = [0, +\infty[.$$

Dans un espace de Hilbert, le cône normal à un ensemble convexe (fermé)  $C$  est fortement lié à l'application de projection, ce que l'on peut voir clairement dans l'équivalence suivante

$$y = \text{Proj}_C(x) \Leftrightarrow x - y \in N_C(y). \quad (1.5)$$

cette équivalence se justifie en utilisant la caractérisation de la projection sur un convexe fermé énoncée dans (1.2). Il résulte de (1.5) que

$$x - \text{Proj}_C(x) \in N_C(\text{Proj}_C(x)) \Rightarrow x \in (I + N_C(\cdot))(\text{Proj}_C(x)) \Leftrightarrow \text{Proj}_C(x) \in (I + N_C(\cdot))^{-1}(x).$$

ce qui montre que l'application  $x \mapsto (I + N_C(\cdot))^{-1}(x)$  est à valeurs univoques et par conséquent

$$(I + N_C(\cdot))^{-1}(x) = \text{Proj}_C(x), \quad \text{pour tout } x \in H \quad (1.6)$$

**Définition 1.10.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe et finie en  $\bar{x} \in X$ . Le sous-différentiel (de Fenchel) de  $f$  au point  $\bar{x}$ , noté  $\partial f(\bar{x})$ , est le sous ensemble de  $X^*$  défini par

$$\partial f(\bar{x}) := \{v \in X^* : \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) \text{ pour tout } x \in X\}. \quad (1.7)$$

Si  $\bar{x} \notin \text{dom } f$  alors  $\partial f(\bar{x}) = \emptyset$ . Par exemple, si  $f(x) = |x|$  alors

$$\partial f(a) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{si } a = 0 \\ \{1\} & \text{si } a > 0 \\ \{-1\} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Le sous-différentiel peut être défini de manière équivalente géométriquement via le cône normal à l'épigraphe comme suit

$$\partial f(\bar{x}) := \{v \in X^* : (v, -1) \in N_{\text{epi } f}(\bar{x}, f(\bar{x}))\}.$$

La conjuguée de Legendre-Fenchel d'une fonction  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est la fonction, notée  $f^*$ , définie sur le dual  $X^*$  par

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} (\langle x^*, x \rangle - f(x)) \text{ pour tout } x^* \in X^*.$$

Par exemple, sur  $\mathbb{R}$ , on définit la fonction  $f$  par  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  alors

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (vx - ax - b) = \sup_{x \in \mathbb{R}} ((v - a)x - b) = \begin{cases} -b & \text{si } v = a \\ \pm\infty & \text{si } v \neq a. \end{cases}$$

En particulier, pour  $f = \psi_C(\cdot)$  où  $\psi_C(\cdot)$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$  définie par  $\psi_C(x) = 0$  si  $x \in C$  et  $\psi_C(x) = +\infty$  sinon alors, la conjuguée de Fenchel de  $f$  dans ce cas s'appelle la fonction support (d'appui) que l'on note  $\sigma_C(\cdot)$ . De façon plus précise

$$\begin{aligned} \sigma_C(\cdot) : X^* &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x^* &\mapsto \sigma_C(x^*) = \psi_C^*(x^*) = \sup_{x \in C} \langle x^*, x \rangle. \end{aligned}$$

Il est clair que le fonction support est convexe positivement homogène. De plus, si l'ensemble  $C$  est convexe fermé alors la fonction  $\sigma_C(\cdot)$  est semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé, voir la dernière section de ce chapitre pour la définition).

Le sous différentiel d'une fonction propre, convexe et s.c.i  $f$  peut se caractériser via la conjuguée de Fenchel à travers l'équivalence suivante (voir [27])

$$\begin{aligned} x^* \in \partial f(x) &\Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle = 0 \Leftrightarrow f^*(x^*) + f(x) - \langle x^*, x \rangle \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \partial f^*(x^*), \end{aligned}$$

c'est à dire  $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ .

**Lemme 1.11.** (voir [17])

Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe et positivement homogène. On suppose que  $C := \partial f(0) \neq \emptyset$ . Alors

$$f^*(x^*) = \psi_C(x^*), \text{ pour tout } x^* \in H.$$

**Pour plus d'informations sur la théorie des fonctions convexes vous pouvez consulter les références [4, 9]**

## 1.4 Généralités sur les applications multivoques

Étant donné deux ensembles  $E$  et  $Y$ . Si à chaque élément  $x$  de  $E$ , on associe un sous ensemble éventuellement non vide de  $Y$  noté  $F(x)$ , on définit une application multivoque  $F$  de  $E$  vers  $Y$  et on note  $F : E \rightrightarrows Y$ .

Dans la littérature, les applications multivoques sont aussi appelées multi-application, multifonction, relations ou correspondances.

**Définition 1.12.** Soient  $E$  et  $Y$  deux ensembles non vides et  $F : E \rightrightarrows Y$  une application multivoque.

1. On appelle domaine de  $F$ , l'ensemble  $\text{Dom } F := \{x \in E : F(x) \neq \emptyset\}$ .
2. Si  $A$  est un sous ensemble de  $E$  alors  $F(A) := \cup_{x \in A} F(x)$ , en particulier, si  $A = \text{Dom } F$  alors,  $R(F) := F(\text{Dom } F)$  est l'image de  $F$ .
3. On appelle image réciproque d'une partie non vide  $D$  de  $Y$  par  $F$  l'ensemble

$$F^{-1}(D) := \{x \in E, F(x) \cap D \neq \emptyset\},$$

d'autre part, pour tout  $y \in Y$  on a

$$F^{-1}(y) := \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

4. Le graphe de  $F$  est le sous-ensemble de  $E \times Y$  défini par

$$\text{gph}(F) := \{(x, y) \in E \times Y : y \in F(x)\}.$$

5. On note  $F^{-1} : Y \rightrightarrows E$  la multi-application inverse de  $F$  définie par

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x).$$

6. Si  $E$  et  $Y$  sont deux espaces topologiques alors,  $F$  est dite semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé), si  $F^{-1}(U)$  est un fermé dans  $X$  pour tout fermé  $U \subset Y$ .

**Exemple 1.13.** *Considérons la multi-application  $F : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$  définie par :*

$$F(x) := \begin{cases} \emptyset & \text{si } x > 0, \\ \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

*Il est clair que*

$$\text{Dom}F = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \emptyset\} = \mathbb{R}_-.$$

$$\mathcal{R}(F) = \bigcup_{x \in \text{Dom} F} F(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}_-} \{-\sqrt{-x}, \sqrt{-x}\} = \mathbb{R}$$

$$\text{gph}F = \{(x, \sqrt{-x}) : x \leq 0\} \cup \{(x, -\sqrt{-x}) : x \leq 0\}.$$

*De plus, la multi-application inverse est donnée par :*

$$F^{-1} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}_- \text{ telle que } y \in F(x) \Leftrightarrow x \in F^{-1}(y) \text{ avec } F^{-1}(y) = \{-y^2\}.$$

**Définition 1.14.** *Soit  $(E, \Sigma)$  un espace mesurable et soit  $F : E \rightrightarrows Y$  une multi-application à valeurs dans un espace métrique  $Y$ . La multi-application  $F$  est dite mesurable ou  $\Sigma$ -mesurable si  $F^{-1}(\mathcal{O}) \in \Sigma$  pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $Y$ .*

*La mesurabilité de  $F$  peut être caractérisée par celle de la fonction distance via l'équivalence suivante : Si  $Y$  est un Banach séparable alors*

$$F \text{ est mesurable} \Leftrightarrow E \ni x \mapsto d(y, F(x)) \text{ est mesurable pour tout } y \in Y.$$

**Définition 1.15** (Sélection mesurable).

*Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable,  $X$  un espace métrique et  $F : \Omega \rightrightarrows X$  une multi-application. Une fonction  $f : \Omega \rightarrow X$  est une sélection de  $F(\cdot)$  si*

$$f(\omega) \in F(\omega), \forall \omega \in \Omega$$

*on dit que  $f$  est une sélection mesurable si elle est mesurable.*

Pour passer à la version ensembliste de la continuité, on aura besoin d'introduire la notion d'excès et la distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer (dans un certain sens) l'écart entre deux ensembles.

**Définition 1.16.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $X$ .

(a) On appelle excès de  $A$  sur  $B$  l'expression suivante, à valeur dans  $[0, +\infty]$

$$e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Il est évidemment indifférent de remplacer les ensembles considérés par leurs adhérences, i.e.,  $e(A, B) = e(\bar{A}, \bar{B})$ .

Notons que, si on prend  $A$  la partie vide de  $X$  on obtient, quel que soit  $B$  (éventuellement vide lui-même)

$$e(\emptyset, B) = 0. \text{ (ça revient au fait que le supremum sur un ensemble vide est 0)}$$

En outre, pour tout  $a \in X : d(a, \emptyset) = +\infty$  donc

$$A \neq \emptyset \Rightarrow e(A, \emptyset) = +\infty.$$

Notons également que les quantités  $e(A, B)$  et  $e(B, A)$  ne sont pas nécessairement égales. En effet, si  $A = [0, 10]$  et  $B = [12, 18]$  alors,  $e(A, B) = 12$  tandis que  $e(B, A) = 8$ .

Une définition équivalente de l'excès se donne par

$$e(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + r\bar{\mathbb{B}}\} \quad \text{où } B + r\bar{\mathbb{B}} = \bigcup_{x \in B} B[x, r]$$

(b) La distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) entre  $A$  et  $B$ , est la quantité

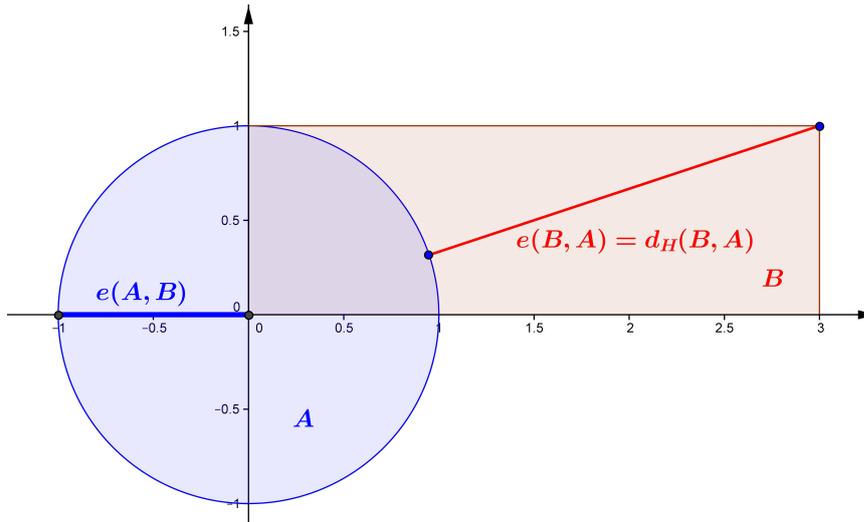
$$d_H(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}. \tag{1.8}$$

De façon équivalente, cette quantité peut être exprimée par

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + r\bar{\mathbb{B}}_X \text{ et } B \subset A + r\bar{\mathbb{B}}_X\}.$$

**Exemple 1.17.** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles de  $\mathbb{R}^2$  définis par

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et } B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\},$$

FIGURE 1.6 – la distance de Hausdorff entre  $A$  et  $B$ 

alors  $e(A, B) = 1$

et

$$e(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A) = d\left((3, 1), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \sqrt{10} - 1,$$

donc  $d_H(A, B) = \max(\sqrt{10} - 1, 1) = \sqrt{10} - 1$  (voir Figure 1.6).

## 1.5 Autres résultats et définitions

### Définition 1.18.

Soient  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  et  $x_0 \in X$ , on dit que  $f$  est

(a) propre si et seulement si

$$f(x) \neq -\infty, \forall x \in X \quad \text{et} \quad \exists y_0 \in X : f(y_0) \neq +\infty.$$

(b) Semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) si pour tout  $r \in ]-\infty, f(x_0)]$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que  $f(V) \subset ]r, +\infty]$ .

La semi-continuité inférieure peut se caractériser par l'une des deux propriétés sui-

vante :  $\text{epi}(f)$  est fermé dans  $X \times \mathbb{R}$  ou les ensembles de niveau  $[f \leq r] := \{x \in X : f(x) \leq r\}$  sont fermés dans  $X$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ .

(c) *Semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé)* si pour tout  $r \in [f(x_0), +\infty[$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que  $f(V) \subset [-\infty, r[$ .

(d)  $f$  est continue au point  $x_0$  si et seulement si  $f$  est, à la fois, s.c.i et s.c.s au point  $x_0 \in X$ .

**Définition 1.19.** Soit  $u(\cdot)$  une application définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  dans un espace normé  $X$ . On dit que  $u(\cdot)$  est absolument continue sur  $[\alpha, \beta] \subset I$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon) > 0$ , tel que pour tous  $s_i, t_i \in [\alpha, \beta], i = 1, \dots, k$ , avec  $s_{i-1} \leq r_i \leq s_i$  et  $\sum_{i=1}^k (s_i - r_i) < \delta$  on ait

$$\sum_{i=1}^k \|u(s_i) - u(r_i)\| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

- toute application Lipschitzienne est absolument continue.
- toute application absolument continue est uniformément continue.

**Théorème 1.20** (Voir [7]).

(a) Soit  $u(\cdot) : I \rightarrow H$  telle que  $u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) ds$  avec  $v(\cdot) \in L^1(I; H), t_0, t \in I$  alors  $u(\cdot)$  est absolument continue sur  $I$  et  $\dot{u}(t) = v(t)$  pour presque tout  $t \in I$ .

(b) Etant donné une application absolument continue  $u(\cdot) : I \rightarrow H$ , alors il existe une application  $v(\cdot) : I \rightarrow H$  telle que

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t v(s) ds \text{ pour tous } t_0, t \in I,$$

de plus,  $u(\cdot)$  est presque partout dérivable et  $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$ .

**Théorème 1.21** (Théorème du point fixe de Banach).

Soit  $K$  un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Banach  $(X, \|\cdot\|_X)$ . Soit  $\mathcal{A} : K \rightarrow K$  un opérateur contractant, i.e., il existe un réel  $\alpha \in [0, 1[$  tel que

$$\|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_X \leq \alpha \|x - y\|_X \text{ pour tous } x, y \in K,$$

alors,  $\mathcal{A}$  admet un seul point fixe sur  $K$ , i.e.,

$$\exists! \bar{x} \in K : \mathcal{A}\bar{x} = \bar{x}.$$

Le théorème suivant présente les conditions suffisantes assurant le caractère bien posé d'une inclusion différentielle non-nécessairement autonome gouvernée par une multi-application multivoque  $F : [0, T] \times H \rightrightarrows H$ . Pour cela, si on considère une fonction  $w(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  alors, on dit que  $F(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition  $(\mathcal{H}_w)$  si

$$\langle F(t, x) - F(t, y), x - y \rangle \leq w(t, \|x - y\|) \|x - y\|. \quad (\mathcal{H}_w)$$

**Théorème 1.22** (voir [6], Théorème 10.5).

Soit  $F : [0, T] \times H \rightarrow H$  une multi-application à valeurs convexes fermés telle que

- (a) Pour tout  $x \in H$ ,  $t \mapsto F(\cdot, x)$  ait une sélection mesurable et  $F(t, \cdot)$  soit s.c.s pour tout  $t \in [0, T]$ ,
- (b) la condition de croissance suivante soit satisfaite

$$\|F(t, x)\| \leq c(t)(1 + \|x\|) \text{ sur } [0, T] \times H \text{ où } c(\cdot) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$$

- (c) Il existe une fonction  $v(\cdot) \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$  telle que la condition  $(\mathcal{H}_w)$  soit vérifiée pour  $w(t, \rho) := v(t)\rho$

alors, l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u(t)), \text{ p.p } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une seule solution absolument continue  $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow H$ .

On termine ce chapitre par le Lemme de Gronwall.

**Lemme 1.23** (Inégalité de Gronwall, [3]).

Soient  $\alpha, \beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonction continues et soit  $\gamma(\cdot) \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ . On suppose que

$$\beta(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \gamma(s)\beta(s)ds, \quad t \in [0, T],$$

alors

$$\beta(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \gamma(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \gamma(\tau) d\tau} ds.$$

# Chapitre 2

## Problème d'une inégalité variationnelle d'évolution avec mémoire

On commence ce chapitre par un petit rappel sur les opérateurs avec mémoire (history dependent operators en anglais) en citant quelques exemples illustratifs. Puis, on passe à la démonstration du résultat principal de ce chapitre qui donne l'existence et l'unicité de la solution pour un problème donné sous la forme d'une inclusion dépendante du temps. Ce résultat vient après une liste des lemmes auxiliaires qui sont également démontrés.

### 2.1 Opérateur avec mémoire

**Définition 2.1.** Soient  $(X, \|\cdot\|)$  et  $(Y, \|\cdot\|)$  deux espaces normés. Un opérateur  $\mathcal{R} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; Y)$  est dit avec mémoire, history-dependent operator en anglais, **HD** en abrégé, s'il existe une constante  $L_{\mathcal{R}} > 0$  telle que pour tous  $u_1, u_2 \in C([0, T]; X)$  et tout  $t \in [0, T]$

$$\|\mathcal{R}u_1(t) - \mathcal{R}u_2(t)\| \leq L_{\mathcal{R}} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds. \quad (2.1)$$

Pour clarifier cette définition, on considère un point  $u_0 \in H$  et un opérateur  $\mathcal{R} :$

$C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$  défini par

$$\mathcal{R}u(t) = \int_0^t u(s) ds + u_0, \quad u \in C([0, T]; H), t \in [0, T], \quad (2.2)$$

alors, pour tous  $u, v \in C([0, T]; H)$  et tout  $t \in [0, T]$

$$\|\mathcal{R}u(t) - \mathcal{R}v(t)\| \leq \int_0^t \|u(s) - v(s)\|,$$

ce qui signifie que  $\mathcal{R}$  vérifie l'inégalité (2.1) avec  $L_{\mathcal{R}} = 1$  et par conséquent  $\mathcal{R}$  est opérateur avec mémoire **HD**.

Le terme "History-dependent operator" a été introduit pour la première fois dans l'article de Sofonea et Matei [24], et depuis ce travail, ce concept a fait l'objet de plusieurs études notamment [13, 14]. Cette terminologie se justifie à partir de l'exemple donné par l'égalité (2.2) où on voit que la nouvelle valeur  $\mathcal{R}u(t)$  dépend de toutes les valeurs antérieures  $u(s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ , ce qui montre bien l'existence d'une mémoire. Voici quelques autres exemples.

**Exemple 2.2.** 1. Soient  $u_0 \in X$  et  $R : X \rightarrow Y$  un opérateur  $L_R$ -Lipschitzien. Alors, l'opérateur  $S : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; Y)$  défini par

$$Su(t) = R\left(\int_0^t u(s)ds + u_0\right), u \in C([0, T]; X), t \in [0, T],$$

est avec mémoire. En effet, soient  $u_1, u_2 \in C([0, T]; X)$ , alors

$$\begin{aligned} \|Su_1(t) - Su_2(t)\|_Y &= \left\| R\left(\int_0^t u_1(s)ds + u_0\right) - R\left(\int_0^t u_2(s)ds + u_0\right) \right\|_Y, \\ &\leq L_R \left\| \int_0^t u_1(s)ds - \int_0^t u_2(s)ds \right\|_X, \\ &\leq L_R \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_X ds, \end{aligned}$$

ce qui traduit l'inégalité (2.1).

2. Soient  $R \in C([0, T]; \mathcal{L}(X, Y))$  et  $\mathcal{S} : C([0, T]; X) \rightarrow C([0, T]; Y)$ , on définit l'opérateur dit de Volterra par

$$\mathcal{S}u(t) = \int_0^t R(t-s)u(s)ds, u \in C([0, T]; X), t \in [0, T].$$

Soient  $u_1, u_2 \in C([0, T]; X)$  et  $t \in [t, \mathcal{T}]$ , alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}u_1(t) - \mathcal{S}u_2(t)\|_Y &= \left\| \int_0^t R(t-s)u_1(s) ds - \int_0^t R(t-s)u_2(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|R(t-s)(u_1(s) - u_2(s))\| ds, \\ &\leq \int_0^t \|R(t-s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\ &\leq \int_0^t \max_{r \in [0, T]} \|R(r)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \\ &= \|R\|_{C([0, T]; \mathcal{L}(X,Y))} \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

par conséquent,  $\mathcal{S}$  est **HD** avec  $L_{\mathcal{S}} = \|R\|_{C([0, T]; \mathcal{L}(X,Y))}$ .

Le théorème suivant montre une propriété fondamentale pour les opérateurs **HD**.

**Théorème 2.3.** Soient  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $\mathcal{S} : C(I; X) \rightarrow C(I; X)$  un opérateur **HD** alors,  $\mathcal{S}$  admet un seul point fixe sur  $C(I; X)$ , i.e.,

$$\exists! \eta^* \in C(I; X) : \mathcal{S}\eta^* = \eta^*.$$

**Démonstration.** On utilise la norme dite de Bielecki  $\|\cdot\|_{\beta}$  définie sur l'espace de Banach  $C([0, T]; X)$  par

$$\|\eta\|_{\beta} = \max_{t \in [0, T]} \{e^{-\beta t} \|\eta(t)\|\} \text{ pour tout } \eta \in C([0, T]; X),$$

où  $\beta > 0$  est un réel positif. Il est clair que l'application  $\|\cdot\|_{\beta}$  définit une norme sur  $C([0, T]; X)$ , en effet, pour tous  $u, v \in C([0, T]; X)$  et tout réel  $\alpha$

$$\|u\|_{\beta} = 0 \Leftrightarrow \max_{t \in [0, T]} \{e^{-\beta t} \|u(t)\|\} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-\beta t}}_{\neq 0} \|u(t)\| = 0, \forall t \in [0, T]$$

$$\Leftrightarrow \|u(t)\| = 0, \forall t \in [0, T] \Leftrightarrow u = 0.$$

$$\|\alpha u\|_{\beta} = \max_{t \in [0, T]} \{e^{-\beta t} \|\alpha u(t)\|\} = |\alpha| \|u\|_{\beta}$$

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{\beta} &= \max_{t \in [0, T]} \{e^{-\beta t} \|u(t) + v(t)\|\} \leq \max_{t \in [0, T]} \{e^{-\beta t} (\|u(t)\| + \|v(t)\|)\} \\ &= \max_{t \in [0, T]} \left( e^{-\beta t} \|u(t)\| + e^{-\beta t} \|v(t)\| \right) \leq \max_{t \in [0, T]} \left( e^{-\beta t} \|u(t)\| \right) + \max_{t \in [0, T]} \left( e^{-\beta t} \|v(t)\| \right) \\ &= \|u\|_{\beta} + \|v\|_{\beta}. \end{aligned}$$

De plus, la normes  $\|\cdot\|_\beta$  et celle de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{C([0,T];X)}$  sont équivalentes.

En effet, pour tout  $0 \leq t \leq T$  et tout  $u \in C([0,T];X)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta t \leq \beta T &\Rightarrow e^{-\beta T} \leq e^{-\beta t} \leq 1 \\ &\Rightarrow e^{-\beta T} \|u(t)\| \leq e^{-\beta t} \|u(t)\| \leq \|u(t)\| \\ &\Rightarrow e^{-\beta T} \|u\|_{C([0,T];X)} \leq \|u\|_\beta \leq \|u\|_{C([0,T];X)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'espace  $(C([0,T];X), \|\cdot\|_\beta)$  est un espace de Banach. Comme  $\mathcal{S}$  est un opérateur **HD** alors, il existe une constante  $L > 0$  telle que pour tous  $u, v \in C([0,T];X)$  et tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}v(t)\| &\leq L \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds \\ \Rightarrow e^{-\beta t} \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}v(t)\| &\leq Le^{-\beta t} \int_0^t (e^{-\beta s} \|u(s) - v(s)\|) e^{\beta s} ds, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \left( e^{-\beta t} \|\mathcal{S}u(t) - \mathcal{S}v(t)\| \right) &\leq Le^{-\beta t} \int_0^t \left( \max_{s \in [0, T]} (e^{-\beta s} \|u(s) - v(s)\|) \right) e^{\beta s} ds \\ &= Le^{-\beta t} \|u - v\|_\beta \int_0^t e^{\beta s} ds = \frac{L}{\beta} \underbrace{(1 - e^{-\beta t})}_{\leq 1} \|u - v\|_\beta, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathcal{S}u - \mathcal{S}v\|_\beta \leq \frac{L}{\beta} \|u - v\|_\beta, \text{ pour tous } u, v \in C([0, T]; X).$$

On choisit  $\beta > 0$  tel que  $\beta > L$  ce qui rend contractant l'opérateur  $\mathcal{S}$  dans  $(C([0, T]; X), \|\cdot\|_\beta)$ . Finalement, en appliquant le Théorème 1.21, on déduit l'existence et l'unicité du point fixe. ■

**Lemme 2.4.** *Soit  $Q \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur symétrique et inversible dans  $\mathcal{L}(H)$ . Soit  $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$  une multi-application à valeurs non vides, fermées et convexes. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées*

- (a) *Pour tout  $x \in H$ , la multi-application  $t \mapsto C(t, x)$  est mesurable telle qu'il existe une constante  $\mu \geq 0$  telle que*

$$d_{C(t,x)}(0) \leq \mu \cdot (\|x\| + 1). \text{ p.p } t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

(b) Le cône normal à  $C$  est Pseudo-hypomonotone, i.e., pour tout  $r > 0$ , il existe  $\tilde{L}_r \geq 0$  (indépendant de  $t$ ) tel que si

$$a_i \in N_{C(t,u_i)}(b_i) \text{ avec } u_i, b_i \in r\mathbb{B}, i = 1, 2 \text{ et } t \in [0, T],$$

alors

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \geq -\tilde{L}_r \|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\|. \quad (2.4)$$

Alors les propriétés suivantes ont lieu

- (i) Pour tous  $x, y \in H$ , l'application  $t \mapsto \text{Proj}_{QC(t,x)}(y)$  est mesurable.
- (ii) Pour tout  $y \in H$  et pour presque tout  $t \in [0, T]$ , l'application  $x \mapsto \text{Proj}_{QC(t,x)}(y)$  est  $\|Q\| \cdot \tilde{L}_\rho$  Lipschitzienne sur  $r\mathbb{B}$ , avec

$$\rho := \max_r \{ \|y\| + \mu \|Q\| (r + 1) \}.$$

### Démonstration.

(i) Tout d'abord, il est clair que les ensembles  $QC(t, x)$  sont convexes et fermés grâce à l'inversibilité de l'opérateur  $Q$  et sa linéarité. D'autre part, la convexité et la fermeture de  $QC(t, x)$ , montrent que l'application de projection sur  $QC(t, x)$  est univoque et bien définie. La première de mesurabilité découle du Théorème III.41 de [5].

(ii) Soit  $y \in H$  et soient  $x_1, x_2 \in r\mathbb{B}$ . On pose  $z_i = \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)$ ,  $i = 1, 2$ .

Alors

$$\|z_i\| \leq \|\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y) - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(0)\| + \|\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(0)\|.$$

Comme l'ensemble  $QC(t, x)$  est convexe et fermé alors l'inégalité (1.3) donne

$$\|z_i\| \leq \|y\| + \|\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(0)\|.$$

On a

$$\begin{aligned} \|\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(0)\| &= d_{QC(t,x_i)}(0) = \inf_{v \in QC(t,x_i)} \|v\| = \inf_{Q^{-1}v \in C(t,x_i)} \|v\| \\ &= \inf_{Q^{-1}v \in C(t,x_i)} \|QQ^{-1}v\| \leq \inf_{Q^{-1}v \in C(t,x_i)} (\|Q\| \|Q^{-1}v\|) \\ &\leq \|Q\| \inf_{Q^{-1}v \in C(t,x_i)} \|Q^{-1}v\| \end{aligned}$$

$$= \|Q\| \|\text{Proj}_{C(t,x_i)}(0)\|,$$

donc

$$\|z_i\| \leq \|y\| + \|Q\| \|\text{Proj}_{C(t,x_i)}(0)\| = \|y\| + \|Q\| \|d_{C(t,x_i)}(0)\|.$$

Selon la condition (2.3), on obtient

$$\|z_i\| \leq \|y\| + \mu \|Q\| (\|x_i\| + 1) \leq \|y\| + \mu \|Q\| (\|r\| + 1). \quad (2.5)$$

De plus d'après la formule (1.5), on a

$$y - z_i \in N_{QC(t,x_i)}(z_i), \quad i = 1, 2,$$

alors

$$\begin{aligned} y - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y) &\in N_{QC(t,x_i)}(\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)) \\ \Leftrightarrow \langle y - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y), v - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y) \rangle &\leq 0, \quad \forall v \in QC(t, x_i) \\ \Leftrightarrow \langle y - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y), QQ^{-1}(v - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)) \rangle &\leq 0, \quad \forall v \in QC(t, x_i) \\ \Leftrightarrow \langle Q(y - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)), (Q^{-1}v - Q^{-1}\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)) \rangle &\leq 0, \quad \forall Q^{-1}v \in C(t, x_i) \\ \Leftrightarrow (Q(y - \text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y))) &\in N_{C(t,x_i)}(Q^{-1}\text{Proj}_{QC(t,x_i)}(y)). \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inclusion avec l'inégalité (2.4) et (2.5), on obtient

$$\|z_1 - z_2\|^2 \leq \tilde{L}_\rho \|Q\| \|z_1 - z_2\| \|x_1 - x_2\|,$$

ce qui traduit la propriété désirée.

## 2.2 Liste des hypothèses

Avant de présenter le résultat principal de ce travail, on donne l'ensemble des condition que l'on va supposer dans la suite.

- **Hypothèses sur l'opérateur  $A : H \rightarrow H$**

( $\mathcal{H}_A$ )  $A : H \rightarrow H$  est un opérateur linéaire, borné, symétrique et  $\alpha$ -coercif, i.e.,

$$\exists \alpha > 0 : \langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2, \text{ pour tout } x \in H.$$

Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_A)$ , il est connu que  $A$  peut se décomposer sous la forme  $A = PP$  où  $P \in \mathcal{L}(H)$  est un opérateur inversible. Dans tout ce qui suit, on pose  $Q := (P)^{-1}$ .

• **Hypothèses sur l'opérateur  $B : H \rightarrow H$**

$(\mathcal{H}_B)$   $B : H \rightarrow H$  est un opérateur Lipschitzien, i.e., il existe  $L_B \geq 0$  tel que

$$\|Bx - By\| \leq L_B \|x - y\|, \text{ pour tous } x, y \in H.$$

• **Hypothèses sur l'opérateur  $\mathcal{R} : C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$**

$(\mathcal{H}_\mathcal{R})$   $\mathcal{R} : C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$  est un opérateur avec mémoire, au sens de la définition (2.1), i.e., il existe  $L_\mathcal{R} \geq 0$  tel que pour tous  $x, y \in C([0, T]; H)$  et tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\|(\mathcal{R}x)(t) - (\mathcal{R}y)(t)\| \leq L_\mathcal{R} \int_0^t \|x(s) - y(s)\| ds.$$

• **Hypothèses sur les ensembles  $C : [0, T] \times H \rightrightarrows H$**

$(\mathcal{H}_C)$

- (a) Pour tout  $t \in [0, T]$ . et tout  $x \in H$ , l'ensemble  $C(t, x)$  est non vide, fermé et convexe. Pour tout  $x \in H$ , la multi-application  $t \mapsto C(t, x)$  est mesurable, de plus, il existe une constante  $\mu \geq 0$  telle que pour tout  $x \in H$

$$d_{C(t,x)}(0) \leq \mu(\|x\| + 1), \text{ p.p } t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

- (b) Le cône normal à  $C$  est Pseudo-hypomonotone, i.e., pour tout  $r > 0$ , il existe un réel  $\tilde{L}_r \geq 0$  (indépendant de  $t$ ) tel que si

$$a_i \in N_{C(t, u_i)}(b_i) \text{ avec } u_i, b_i \in r\mathbb{B}, i = 1, 2 \text{ et } t \in [0, T],$$

alors

$$\langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle \geq -\tilde{L}_r \|a_1 - a_2\| \|u_1 - u_2\|.$$

## 2.3 Résultat d'existence et d'unicité

L'objectif principal de cette section est de démontrer le caractère bien posé du problème suivant

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t,x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) & \text{p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pour démontrer le résultat d'existence, l'idée principale de la preuve consiste à réduire le processus de raffe (2.7) à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -P^{-1}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) \\ & + P^{-1}\text{Proj}_{QC(t,x(t))}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec  $A = PP$ ,  $Q := P^{-1}$  et  $QC(t, x) := \{Qy : y \in C(t, x)\}$ .

Cette belle astuce nous permet d'appliquer le Théorème 1.22. Avant d'aller plus loin, on rappelle le Lemme suivant

**Lemme 2.5.** *Sous l'hypothèse  $(\mathcal{H}_A)$ , l'équivalence suivante a lieu*

$$\xi \in N_{C(t,x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) \Leftrightarrow P\xi \in N_{QC(t,x(t))}(P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)). \quad (2.9)$$

**Démonstration.** Soit  $\xi \in H$  alors

$$\begin{aligned} & \xi \in N_{C(t,x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) \\ & \Leftrightarrow \langle \xi, y - (A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) \rangle \leq 0, \forall y \in C(t, x(t)) \\ & \Leftrightarrow \langle QQ^{-1}\xi, y - (A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) \rangle \leq 0, \forall y \in C(t, x(t)) \\ & \Leftrightarrow \langle P\xi, Qy - (QPP\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) \rangle \leq 0, \forall y \in C(t, x(t)) \\ & \Leftrightarrow \langle P\xi, v - (P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) \rangle \leq 0, \forall v \in QC(t, x(t)) \\ & \Leftrightarrow P\xi \in N_{QC(t,x(t))}(P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)). \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.6.** *On suppose que  $C(t, x)$  est convexe et fermé pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x \in H$ . On suppose également que l'hypothèse  $(\mathcal{H}_A)$  est vérifiée alors*

$$x(\cdot) \text{ est une solution de (2.7)} \Leftrightarrow x(\cdot) \text{ est une solution du problème de Cauchy (2.8).} \quad (2.10)$$

**Démonstration.** Soit  $x(\cdot)$  une solution de (2.7). En tenant compte de (2.9), on obtient pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$-P\dot{x}(t) \in N_{QC(t, x(t))}(P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)),$$

alors

$$QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t) \in (I + N_{QC(t, x(t))}(\cdot))(P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)),$$

ce qu'est équivalent à l'inclusion

$$P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t) \in (I + N_{QC(t, x(t))}(\cdot))^{-1} \left( QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t) \right).$$

Il est clair que l'ensemble  $QC(t, x(t))$  est convexe. En effet, soient  $x, y \in QC(t, x(t))$  et  $\lambda \in [0, 1]$  alors, il existe  $x', y' \in C(t, x(t))$  tels que  $x = Qx'$  et  $y = Qy'$ . Grâce à la linéarité de l'opérateur  $Q$  et la convexité de  $C(t, x(t))$ , on aura

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda Qx' + (1-\lambda)Qy' = Q(\lambda x') + Q((1-\lambda)y') = \underbrace{Q(\lambda x' + (1-\lambda)y')}_{\in C(t, x(t))} \in QC(t, x(t)),$$

ce qui nous permet d'utiliser (1.6) et cela donne

$$P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t) = \text{Proj}_{QC(t, x(t))}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)),$$

d'où, pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\dot{x}(t) = -P^{-1}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) + P^{-1}\text{Proj}_{QC(t, x(t))}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)).$$

Ce qui montre que  $x$  est une solution de (2.8). Réciproquement, soit  $x(\cdot)$  est une solution de (2.8). Alors pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t) = \text{Proj}_{QC(t, x(t))}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t))$$

$$\stackrel{(1.5)}{\Leftrightarrow} -P\dot{x}(t) \in N_{QC(t, x(t))}(P\dot{x}(t) + QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t))$$

$$\stackrel{(2.9)}{\Leftrightarrow} -\dot{x}(t) \in N_{C(t, x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)).$$

Ce qui traduit l'équivalence désirée. ■

Après avoir démontré l'équivalence entre les deux problèmes (2.7) et (2.8), on va établir à présent le résultat fondamental de cette section en montrant le théorème d'existence et d'unicité de la solution pour (2.7). **Il est à noter que, contrairement aux résultats classiques sur les processus de rafle, aucune condition a été supposée sur le mouvement des ensembles  $C(t, x)$  par rapport à la distance de Hausdorff définie dans (1.8).**

**Théorème 2.7.** *Supposons que les hypothèses  $(\mathcal{H}_A)$ ,  $(\mathcal{H}_B)$ ,  $(\mathcal{H}_R)$  et  $(\mathcal{H}_C)$  soient satisfaites. Alors pour tout  $x_0 \in H$ , le processus de rafle (2.7) admet une seule solution absolument continue  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow H$ . De plus, l'application*

$$\Phi(\cdot) : x_0 \in H \mapsto x_{x_0}(\cdot),$$

*est localement Lipschitzienne, où  $x_{x_0}(\cdot)$  est la seule solution du problème (2.7) associée à la valeurs initiale  $x_0$ .*

**Démonstration.** La preuve sera divisée en plusieurs étapes.

### Étape 1 :

**Montrons que pour chaque  $w \in C([0, T]; H)$ , il existe une solution unique  $x : [0, T] \rightarrow H$  tel que  $x(0) = x_0$  et**

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t, x(t))}(A\dot{x}(t) + Bw(t) + (\mathcal{R}w)(t)) \quad \mathbf{p.p} \ t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

On fixe un réel positif  $R > 0$  tel que  $\|w\|_{C([0, T]; H)} \leq R$ . Soit  $F : [0, T] \times H \rightarrow H$  la multi-application (en fait,  $F$  est une application à valeurs univoques) définie par

$$F(t, x) := -P^{-1}(z(t)) + P^{-1}\text{Proj}_{QC(t, x)}(z(t)), \quad z(t) := QBw(t) + Q(\mathcal{R}w)(t).$$

On va démontrer que  $F(\cdot, \cdot)$  vérifie les hypothèse du Théorème 1.22.

- (a) D'après l'unicité de la projection sur l'ensemble convexe  $QC(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in H$ , on déduit que  $F(\cdot, \cdot)$  est à valeurs univoques donc, pour tout  $x \in H$ ,  $t \mapsto F(t, x)$

admet une sélection  $f$  définie par  $[0, T] \ni t \mapsto f(t) = F(t, x)$ .

De plus, cette sélection est mesurable grâce aux hypothèses  $(\mathcal{H}_A)$ ,  $(\mathcal{H}_B)$ ,  $(\mathcal{H}_R)$ ,  $(\mathcal{H}_C)$ , et le Lemme (2.4).

- (b) La condition de croissance, i.e., est-ce-qu'il existe deux fonctions intégrables  $c(\cdot), d(\cdot) \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$ ?

$$\|F(t, x)\| \leq c(t)\|x\| + d(t).$$

Soient  $x \in H$  et  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|F(t, x)\| &\leq \|P^{-1}\| \|z(t) - \text{Proj}_{QC(t, x(t))}(z(t))\| = \|P^{-1}\| \|d_{QC(t, x(t))}(z(t))\| \\ &\leq \|P^{-1}\| \left\| d_{QC(t, x(t))}(z(t)) - d_{QC(t, x(t))}(0) \right\| + \|P^{-1}\| \|d_{QC(t, x(t))}(0)\| \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} \|P^{-1}\| \|z(t)\| + \|P^{-1}\| \inf_{y \in QC(t, x(t))} \|y\| \\ &= \|P^{-1}\| \|z(t)\| + \|P^{-1}\| \inf_{v \in C(t, x(t))} \|Qv\| \\ &\leq \|P^{-1}\| \|z(t)\| + \|P^{-1}\| \|Q\| \|d_C(t, x(t))(0)\| \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} \|P^{-1}\| \|z(t)\| + \mu \|P^{-1}\| \|Q\| (\|x\| + 1), \end{aligned}$$

alors, en posant

$$c(t) := \mu \|P^{-1}\| \|Q\|, \quad d(t) := \|P^{-1}\| \|z(t)\| + \mu \|P^{-1}\| \|Q\|,$$

on en déduit l'inégalité désirée.

- (c) La condition  $(\mathcal{H}_w)$ , i.e., est-ce-qu'il existe une fonction  $v(\cdot) \in L^1([0, T], \mathbb{R})$  telle que  $(\mathcal{H}_w)$  soit vérifié avec  $w(t, \rho) = v(t)\rho$ ?

Soit  $r > 0$  et soient  $x, y \in r\mathbb{B}$ . Il résulte du Lemme 2.4 que pour presque tout  $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \|F(t, x) - F(t, y)\| &\leq \|P^{-1}\| \|\text{Proj}_{QC(t, x)}(z(t)) - \text{Proj}_{QC(t, y)}(z(t))\| \\ &\leq \|P^{-1}\| \|Q\| \tilde{L}_\rho \|x - y\|, \end{aligned}$$

où  $\rho := \max_r \{R + \mu \|Q\| (r + 1)\}$  et  $\tilde{L}_\rho$  est la constante donnée dans  $(\mathcal{H}_C)$ . On déduit

que  $x \mapsto F(t, x)$  est localement Lipschitzienne et par conséquent s.c.s. De plus

$$\begin{aligned} \langle F(t, x) - F(t, y), x - y \rangle &\leq |\langle F(t, x) - F(t, y), x - y \rangle| \\ &\leq \|F(t, x) - F(t, y)\| \|x - y\| \\ &\leq (\|P^{-1}\| \|Q\| \tilde{L}_\rho \|x - y\|) \|x - y\| \\ &= w(t, \|x - y\|) \|x - y\|, \end{aligned}$$

avec  $w(t, \beta) = \|P^{-1}\| \|Q\| \tilde{L}_\rho \beta$ , ce qui traduit la condition  $(\mathcal{H}_w)$ .

Les conditions du Théorème 1.22 sont donc toutes vérifiées et par conséquent, l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = F(t, x) := -P^{-1}(z(t)) + P^{-1}\text{Proj}_{QC(t,x)}(z(t)), \quad z(t) := QBw(t) + Q(\mathcal{R}w)(t),$$

admet une seule solution absolument continue  $x_w(\cdot) : [0, T] \rightarrow H$ . Grâce à l'équivalence établie dans la Proposition 2.6, on déduit que pour toute application  $w \in C([0, T]; H)$ , il existe une seule solution  $x_w(\cdot)$  absolument continue du processus de rafle implicite (2.11).

Cela nous permet de définir l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : C([0, T]; H) &\rightarrow AC([0, T]; H) \subset C([0, T]; H) \\ w &\mapsto \mathcal{S}(w) = x_w. \end{aligned}$$

On définit également l'ensemble de points fixes de  $\mathcal{S}$ , noté  $\text{Fix } \mathcal{S}$ , comme suit

$$\text{Fix } \mathcal{S} = \{w \in C([0, T]; H) : \mathcal{S}w = w\}.$$

### Étape 2 :

**Montrons que l'ensemble  $\text{Fix } \mathcal{S}$  est borné dans  $C([0, T]; H)$ , i.e.,**

$$\exists M_0 > 0 : \|w\|_{C([0, T]; H)} \leq M_0, \forall w \in \text{Fix } \mathcal{S}. \quad (2.12)$$

Soit  $w \in C([0, T]; H)$  alors, il existe une application  $x := x_w = \mathcal{S}w \in AC([0, T]; H)$  telle que  $x$  est la seule solution de (2.11). Si de plus  $w \in \text{Fix } \mathcal{S}$  alors  $x := \mathcal{S}(w) = w$ , ce qui donne l'inclusion

$$-\dot{x}(t) \in N_{C(t, x(t))}(A\dot{x}(t) + Bx(t) + (\mathcal{R}x)(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], x(0) = x_0.$$

En tenant compte de (2.10), on trouve que pour presque tout  $t \in [0.T]$

$$-\dot{x}(t) = P^{-1}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)) - P^{-1}\text{Proj}_{QC(t,x(t))}(QBx(t) + Q(\mathcal{R}x)(t)).$$

Par intégration, on obtient que pour tout  $t \in [0.T]$

$$x(t) = x_0 - P^{-1} \int_0^t (QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) ds + P^{-1} \int_0^t \text{Proj}_{QC(s,x(s))}(QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) ds,$$

cela entraîne que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \|P^{-1}\| \left\| - \int_0^t (QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \text{Proj}_{QC(s,x(s))}(QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) ds \right\| \\ &\leq \|x_0\| + \|P^{-1}\| \int_0^t \left\| QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s) \right. \\ &\quad \left. - \text{Proj}_{QC(s,x(s))}(QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) \right\| ds \\ &= \|x_0\| + \|P^{-1}\| \int_0^t d_{QC(s,x(s))}(QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s)) ds, \end{aligned}$$

la propriété 1-Lipschitienne de la fonction distance (1.1) assure que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \|P^{-1}\| \int_0^t \|(QBx(s) + Q(\mathcal{R}x)(s))\| ds + \|P^{-1}\| \int_0^t d_{QC(s,x(s))}(0) ds \\ &\leq \|x_0\| + \|P^{-1}\| \|Q\| \int_0^t \|Bx(s) + (\mathcal{R}x)(s)\| ds + \|P^{-1}\| \|Q\| \int_0^t d_{C(s,x(s))}(0) ds. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \|Bx(s) + (\mathcal{R}x)(s)\| ds &\leq \int_0^t \left( \|Bx(s) - B(0)\| + \|(\mathcal{R}x)(s) - (\mathcal{R}0)(s)\| \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left( \|B(0)\| + \|\mathcal{R}0\|_{C([0.T];H)} \right) ds \\ &\stackrel{(\mathcal{H}_B), (\mathcal{H}_\mathcal{R})}{\leq} (L_B + TL_\mathcal{R}) \int_0^t \|x(s)\| ds + T(\|B(0)\| + \|\mathcal{R}0\|_{C([0.T];H)}). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\int_0^t d_{C(s,x(s))}(0)ds \leq \mu \int_0^t \|x(s)\|ds + T\mu,$$

par conséquent

$$\|x(t)\| \leq K_0 + \|P^{-1}\| \|Q\| (L_B + TL_{\mathcal{R}} + \mu) \int_0^t \|x(s)\|ds,$$

où

$$K_0 := \|x_0\| + T\|P^{-1}\| \|Q\| (\|B(0)\| + \|\mathcal{R}0\|_{C([0,T];H)} + \mu).$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on déduit que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|x(t)\| \leq K_0 \exp \left( \|P^{-1}\| \|Q\| \int_0^t (L_B + L_{\mathcal{R}}T + \mu)ds \right),$$

ce qui implique l'inégalité (2.12) avec

$$M_0 := K_0 \exp (T\|P^{-1}\| \|Q\| (L_B + L_{\mathcal{R}}T + \mu)).$$

Avant de passer à l'étape 3, on introduit l'application  $P_{M_0} : C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$ , définie par

$$P_{M_0}(x) := \begin{cases} x & \text{si } \|x\|_{C([0,T];H)} \leq M_0, \\ \frac{M_0 x}{\|x\|_{C([0,T];H)}} & \text{si } \|x\|_{C([0,T];H)} > M_0. \end{cases}$$

L'application  $P_{M_0}(\cdot)$  vérifie les deux propriétés suivantes

1.  $P_{M_0}(\cdot)$  est uniformément bornée. En effet, soit  $u \in C([0, T]; H)$ , on distingue deux cas

- Si  $\|u\|_{C([0,T];H)} \leq M_0$ , alors

$$\|P_{M_0}(u)\|_{C([0,T];H)} = \|u\|_{C([0,T];H)} \leq M_0.$$

- Si  $\|u\|_{C([0,T];H)} > M_0$ , alors

$$\|P_{M_0}(u)\|_{C([0,T];H)} = \left\| \frac{M_0 u}{\|u\|_{C([0,T];H)}} \right\|_{C([0,T];H)} = M_0.$$

2.  $P_{M_0}(\cdot)$  est Lipschitzien.

Considérons l'application  $\mathcal{S}_{M_0} : C([0, T]; H) \rightarrow C([0, T]; H)$  définie par

$$\mathcal{S}_{M_0}(w) := \mathcal{S}(P_{M_0}(w)) \quad \text{pour tout } w \in C([0, T]; H).$$

Cette dernière application vérifie l'inclusion suivante  $\text{Fix } \mathcal{S} \subset \text{Fix } \mathcal{S}_{M_0}$ . En effet, soit  $w \in \text{Fix } \mathcal{S}$  alors selon (2.12)

$$\mathcal{S}w = w \text{ et } \|w\|_{C([0, T]; H)} \leq M_0 \Rightarrow \mathcal{S}_{M_0}(w) = \mathcal{S}(P_{M_0}(w)) = \mathcal{S}(w) = w \Rightarrow w \in \text{Fix } \mathcal{S}_{M_0}.$$

### Étape 3 :

**Montrons que  $\mathcal{S}_{M_0}$  est un opérateur avec mémoire.**

Soit  $w_i \in C([0, T]; H)$  et on note  $x_i = \mathcal{S}_{M_0}(w_i)$  pour  $i = 1, 2$ . D'après ce qui précède, pour tout  $w \in C([0, T]; H)$

$$\|P_{M_0}(w)\|_{C([0, T]; H)} \leq M_0.$$

Alors, on peut trouver un réel  $r > 0$  tel que pour tout  $w \in C([0, T]; H)$

$$\max\{\|\mathcal{S}_{M_0}(w)\|_{C([0, T]; H)}, \|A\dot{x}_i + B(P_{M_0}(w)) + \mathcal{R}(P_{M_0}(w))\|_\infty\} \leq r, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Soient  $x_i \in C([0, T]; H)$ ,  $i = 1, 2$  et soient  $v_i := P_{M_0}(w_i) \in C([0, T]; H)$ ,  $i = 1, 2$  alors selon l'Étape 1, il existe deux applications absolument continues

$$x_i(\cdot) = \mathcal{S}(v_i) = \mathcal{S}_{M_0}(w_i), \quad i = 1, 2, \quad (2.14)$$

telles que

$$-\dot{x}_i(t) \in N_{C(t, x_i(t))}(A\dot{x}_i(t) + Bv_i(t) + (\mathcal{R}v_i)(t)) \quad \text{p.p } t \in [0, T], \quad i = 1, 2.$$

En combinant ces dernières inclusions avec (2.13) et la pseudo-hypomonotonie du cône normal donnée par l'hypothèse  $(\mathcal{H}_C)$  on obtient que pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

$$\begin{aligned} & \langle -\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t), A\dot{x}_1(t) + Bv_1(t) + (\mathcal{R}v_1)(t) \rangle - \langle -\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t), A\dot{x}_2(t) + Bv_2(t) + (\mathcal{R}v_2)(t) \rangle \\ & \geq -\tilde{L}_r \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \|x_1(t) - x_2(t)\|, \end{aligned}$$

cela donne

$$\begin{aligned} \langle A(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)), \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \rangle &= \langle A\dot{x}_1(t) - A\dot{x}_2(t), \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) \rangle \\ &\leq \tilde{L}_r \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \|x_1(t) - x_2(t)\| + \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \|Bv_1(t) - Bv_2(t)\| \\ &\quad + \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \|(\mathcal{R}v_1)(t) - (\mathcal{R}v_2)(t)\|. \end{aligned}$$

En utilisant la  $\alpha$ -coercivité de  $A$ , la  $L_B$ -Lipschitzité de  $B$  et le fait que  $\mathcal{R}$  est un opérateur avec mémoire, on déduit que

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \leq \frac{\tilde{L}_r}{\alpha} \|x_1(t) - x_2(t)\| + \frac{L_B}{\alpha} \|v_1(t) - v_2(t)\| + \frac{L_{\mathcal{R}}}{\alpha} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\| ds, \quad (2.15)$$

comme l'opérateur  $P_{M_0}(\cdot)$  est  $L_{P_{M_0}}$ -Lipschitzien alors

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| := \|P_{M_0}(w_1)(t) - P_{M_0}(w_2)(t)\| \leq L_{P_{M_0}} \|w_1(t) - w_2(t)\|,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| &\leq \frac{\tilde{L}_r}{\alpha} \|x_1(t) - x_2(t)\| + \frac{L_B L_{P_{M_0}}}{\alpha} \|w_1(t) - w_2(t)\| \\ &\quad + \frac{L_{\mathcal{R}} L_{P_{M_0}}}{\alpha} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

en intégrant cette dernière inégalité entre 0 et  $t \in [0, T]$  tout en utilisant l'inégalité suivante

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| = \left\| \int_0^t (\dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s)) ds \right\| \leq \int_0^t \|\dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s)\| ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_2(t)\| &\leq \frac{\tilde{L}_r}{\alpha} \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds + \frac{L_B L_{P_{M_0}}}{\alpha} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\| ds \\ &\quad + \frac{L_{\mathcal{R}} T L_{P_{M_0}}}{\alpha} \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\| ds. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Gronwall du Lemme 1.23, on obtient que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\tilde{L}_r T}{\alpha}\right) (L_B L_{P_{M_0}} + L_{\mathcal{R}} L_{P_{M_0}} T) \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\| ds.$$

En vertu de (2.14), on obtient que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\|\mathcal{S}_{M_0}(w_1)(t) - \mathcal{S}_{M_0}(w_2)(t)\| \leq \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{\tilde{L}_r T}{\alpha}\right) (L_B L_{P_{M_0}} + L_{\mathcal{R}} L_{P_{M_0}} T) \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\| ds,$$

ce qui montre bien que  $\mathcal{S}_{M_0}$  est un opérateur avec mémoire. Grâce au Lemme (??), l'opérateur  $\mathcal{S}_{M_0}$  a un seul fixe que l'on note  $\hat{x} \in C([0, T]; H)$ , i.e.,  $\mathcal{S}_{M_0}\hat{x} = \hat{x}$ . Comme l'opérateur  $\mathcal{S}_{M_0}$  prend ses valeurs dans l'espace  $AC([0, T]; H)$  (car les solution sont absolument continues), on déduit que  $\hat{x} \in AC([0, T]; H)$ .

#### Étape 4 :

D'après l'**Étape 1**, pour toute application  $w \in C([0, T]; H)$ , il existe une seule solution  $\mathcal{S}(w)$  du problème (2.11). En particulier, pour  $w := P_{M_0}(\hat{x})$ , alors la solution est  $\mathcal{S}(P_{M_0}(\hat{x})) = \mathcal{S}_{M_0}(\hat{x}) = \hat{x}$ , alors

$$-\hat{x}(t) \in N_{C(t, \hat{x}(t))} \left( A\hat{x}(t) + BP_{M_0}(\hat{x})(t) + (\mathcal{R}P_{M_0}(\hat{x}))(t) \right) \quad \text{p.p } t \in [0, T].$$

En suivant une approche similaire à celle utilisée dans l'**Étape 2**, on arrive à démontrer que

$$\|\hat{x}\|_{C([0, T]; H)} \leq M_0.$$

Selon la définition de  $P_{M_0}$ , on déduit que  $P_{M_0}(\hat{x}) = \hat{x}$  et par conséquent

$$\hat{x} = \mathcal{S}_{M_0}(\hat{x}) = \mathcal{S}(P_{M_0}(\hat{x})) = \mathcal{S}(\hat{x}),$$

ce qui montre que  $\hat{x}$  est un point fixe pour les deux opérateurs  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_{M_0}$ . Mais,

$$\text{Fix } \mathcal{S}_{M_0} = \{\hat{x}\} \quad \text{et} \quad \text{Fix } \mathcal{S} \subset \text{Fix } \mathcal{S}_{M_0},$$

cela nous dit que  $\hat{x}$  est le seul point fixe de  $\mathcal{S}$  et par conséquent  $\hat{x} = \mathcal{S}(\hat{x})$  est la seule solution de processus de raffle (2.7).

#### Étape 5 :

**Montrons que  $\Phi(\cdot) : x_0 \in H \mapsto x_{x_0} \in AC([0, T]; H)$  est localement Lipschitzienne.**

Soient  $x_0^i \in H, i = 1, 2$  et soient  $x_i = \Phi(x_0^i) \in AC([0, T]; H), i = 1, 2$  les solutions du problème (2.7) associées aux valeurs initiales  $x_0^i, i = 1, 2$  respectivement. Alors

$$i = 1, 2 : \begin{cases} -\dot{x}_i(t) \in N_{C(t, x_i(t))} (A\dot{x}_i(t) + Bx_i(t) + (\mathcal{R}x_i)(t)) & \text{p.p } t \in [0, T], \\ x_i(0) = x_0^i \in H. \end{cases}$$

Selon la méthode développée dans les étapes 1 et 2 et d'après l'inégalité (2.15), on assure l'existence de deux constantes  $r > 0$  et  $\tilde{L}_r$ , qui dépendent tous les deux de  $x_0^1$  et  $x_0^2$ , telles que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\max\{\|x_i\|_{C([0,T];H)}, \|A\dot{x}_i + B(x_i) + (\mathcal{R}x_i)\|_\infty\} \leq r, i = 1, 2,$$

et

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \leq \frac{\tilde{L}_r + L_B}{\alpha} \|x_1(t) - x_2(t)\| + \frac{L_{\mathcal{R}}}{\alpha} \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds, \quad (2.16)$$

alors

$$\int_0^t \|\dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s)\| ds \leq \frac{\tilde{L}_r + L_B}{\alpha} \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds + \frac{L_{\mathcal{R}}}{\alpha} \int_0^t \int_0^s \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\| d\tau ds,$$

d'autre part

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_0^1 - x_0^2\| + \int_0^t \|\dot{x}_1(s) - \dot{x}_2(s)\| ds,$$

d'où

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_0^1 - x_0^2\| + \frac{\tilde{L}_r + L_B + TL_{\mathcal{R}}}{\alpha} \int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\| ds.$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \|x_0^1 - x_0^2\| + \int_0^t \widehat{K}_r \|x_0^1 - x_0^2\| e^{\int_0^s \widehat{K}_r d\tau} ds, \quad \widehat{K}_r := \frac{\tilde{L}_r + L_B + TL_{\mathcal{R}}}{\alpha},$$

donc

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq \widehat{K}_{0,r} \|x_0^1 - x_0^2\|, \quad \widehat{K}_{0,r} := 1 + T\widehat{K}e^{T\widehat{K}_r},$$

de plus, de (2.16), il s'ensuit que

$$\|\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\| \leq \widehat{K}_{1,r} \|x_1(t) - x_2(t)\|, \quad \widehat{K}_{1,r} := \frac{\tilde{L}_r + L_B}{\alpha} \widehat{K}_{0,r} + \frac{L_{\mathcal{R}}}{\alpha} T\widehat{K}_{0,r}.$$

Finalement, en combinant les deux dernières inégalités, on déduit

$$\|\Phi(x_0^1) - \Phi(x_0^2)\|_{AC([0,T];H)} = \|x_1 - x_2\|_{AC([0,T];H)} \leq (\widehat{K}_{0,r} + \widehat{K}_{1,r}) \|x_0^1 - x_0^2\|,$$

ce qui traduit la propriété désirée et termine la preuve du Théorème. ■

**Remarque 2.8.** Une analyse détaillée de la preuve précédente montre que le Théorème 2.7 reste valable si on suppose que  $\mu \in L^1(0, T)$  et  $\tilde{L}_r = L$  dans  $(\mathcal{H}_C)$ . On note ces nouvelles hypothèses par  $(\mathcal{H}'_C)$ .

# Chapitre 3

## Application : un problème de contact quasi-statique en visco-élasticité avec mémoire

Afin d'appliquer et illustrer le résultat abstrait établi dans le Théorème 2.7, nous allons étudier dans ce chapitre un problème de contact quasi-statique pour des matériaux visco-élastique où la loi de comportement (constitutive) de ces derniers est donnée via un opérateur avec mémoire.

On considère un corps visco-élastique qui occupe un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$  pour les applications) dont la frontière  $\Gamma := \partial\Omega$  est Lipschitzienne et partitionnée en quatre parties disjointes et mesurables  $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_{C_1}$  et  $\Gamma_{C_2}$  telles que  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$ .

### 3.1 Cadre physique et quelques notations

Pour bien présenter le problème de contact impliquant de matériaux visco-élastiques, on présente dans cette partie les notations usuelles liées à ce type de problèmes ainsi que l'espace de fonctions que l'on utilisera tout au long de cette section.

On note par  $(\mathbb{S}^d, \|\cdot\|_{\mathbb{S}^d})$  l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur  $\mathbb{R}^d$ . Sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{S}^d$ , on définit les produits scalaires et les normes suivantes :

$$\begin{aligned}\xi \cdot \eta &= \xi_i \eta_i, \quad \|\xi\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{(\xi \cdot \xi)} \quad \text{pour } \xi = (\xi_i), \eta = (\eta_i) \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma : \tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\sigma\|_{\mathbb{S}^d} = \sqrt{(\sigma : \sigma)} \quad \text{pour } \sigma = (\sigma_{ij}), \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad 1 \leq i, j \leq d.\end{aligned}$$

Pour un champ de vecteurs  $\xi$ , on note par  $\xi_\nu$  et  $\xi_\tau$  ses composantes normale et tangentielle respectivement tandis que  $\nu$  représente le vecteur unitaire normal sortant de  $\Gamma$ . Dans ce cas, on a

$$\xi_\nu = \xi \cdot \nu \quad \text{et} \quad \xi_\tau = \xi - \xi_\nu \nu.$$

On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \Omega \times ]0, T[, \quad \Sigma = \Gamma \times ]0, T[, \quad \Sigma_D = \Gamma_D \times ]0, T[, \\ \Sigma_N &= \Gamma_N \times ]0, T[, \quad \Sigma_{C_1} = \Gamma_{C_1} \times ]0, T[, \quad \Sigma_{C_2} = \Gamma_{C_2} \times ]0, T[.\end{aligned}$$

On note par  $u = u(x, t) = (u_i(x, t)) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^d$  le champ de déplacement,  $\sigma = \sigma(x, t) = (\sigma_{ij}(x, t)) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{S}^d$  le champ des contraintes et

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{où } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

est le tenseur (opérateur) de déformations linéarisées. On note également par  $\text{Div}$  l'opérateur de divergence

$$\text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}) = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right), \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

De plus,  $\sigma_\nu$  et  $\sigma_\tau$  représentent les composantes normale et tangentielle du champ de contraintes  $\sigma$  sur la frontière  $\Gamma$ , i.e.,

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu \quad \text{et} \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \cdot \nu.$$

où  $\sigma \nu = \sigma_{ij} \nu_j$  est le vecteur des contraintes de Cauchy.

A la lumière de ce qu'est avancé ci-dessus, le problème de contact visco-élastique se formule comme suit

**Problème 3.1.**

Trouver un champ des déplacements  $u : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un champ des contraintes  $\sigma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{S}^d$  tel que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\varepsilon(u(s))ds \quad \text{dans } \mathcal{Q}, \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Q}, \quad (3.2)$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma_D, \quad (3.3)$$

$$\sigma(t)\nu = f_N(t) \quad \text{sur } \Sigma_N, \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu(t) = p_\nu(u_\nu(t) - g) \\ \sigma_\tau(t) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma_{C_1}, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\tau(t) = F, \\ \|\sigma_\tau(t)\|_{\mathbb{S}^d} \leq \mu|\sigma_\nu(t)|, \\ -\sigma_\tau(t) = \mu|\sigma_\nu(t)| \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}} \quad \text{si } \dot{u}_\tau(t) \neq 0, \end{cases} \quad \text{sur } \Sigma_{C_2} \quad (3.6)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.7)$$

Afin de bien comprendre le dernier problème, on donne l'interprétation de chacune des notations mentionnées ci-dessus :

- l'équation (3.1) est une loi constitutive (de comportement) générale pour les matériaux visco-élastiques à longue mémoire dans laquelle  $\mathcal{A}$  est l'opérateur de viscosité,  $\mathcal{B}$  représente l'opérateur d'élasticité et  $\mathcal{R}$  est le tenseur de relaxation,
- L'égalité (3.2) est l'équation d'équilibre qui donne l'aspect quasi-statique du problème.
- l'équation(3.3) dit que le corps est bloqué sur  $\Gamma_D$  (conditions aux limites de déplacement),
- $f_0$  représente la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable,
- $f_N$  représente la densité de traction sur la surface  $\Gamma_N$ ,
- (3.5) représente les conditions de compliance normale qui décrit le contact où  $p$  est

une fonction positive.

- $F$  est une fonction positive,  $\mu \geq 0$  est le coefficient de frottement et  $\mu F$  représente la borne de frottement,
- l'équation (3.7) est la condition initiale dans laquelle  $u_0$  signifie le champ de déplacement initial.

Pour obtenir la formulation faible du Problème 3.1, on introduit les espaces de fonctions suivants :

$$\mathbb{H} = \{v \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega; \mathbb{S}^d).$$

Notons que l'espace  $\mathcal{V}$  muni du produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \sigma(x) : \tau(x) dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(x) \tau_{ij}(x) dx, \quad \text{pour tous } \sigma, \tau \in \mathcal{V},$$

est un espace de Hilbert dont la norme est  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}}$ . De plus, en vertu de l'inégalité de Korn et comme  $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$  alors  $\mathbb{H}$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \varepsilon(u(x)) : \varepsilon(v(x)) dx, \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{H},$$

et  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}}$  est la norme associée. D'autre part, soit  $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)$ ,  $\Gamma_C = \Gamma_{C_1} \cup \Gamma_{C_2}$  l'opérateur trace. Il résulte de l'inégalité de Korn que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_C; \mathbb{R}^d)} \leq \|\gamma\| \cdot \|v\|_{\mathbb{H}}, \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}.$$

Finalement, on introduit l'espace de fonctions

$$\mathcal{Q}_{\infty} = \{\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{jikl} = \mathcal{E}_{klij} \in L^{\infty}(\Omega), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq d\}.$$

L'espace  $\mathcal{Q}_{\infty}$  muni de la norme

$$\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{Q}_{\infty}} = \max_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \|\mathcal{E}_{ijkl}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

est un espace de Banach.

## 3.2 Liste des hypothèses

Afin d'établir le résultat d'existence du Problème 3.1, on considère la liste des hypothèses suivante

$H(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{Q}_\infty$  tel que

$$\exists L_{\mathcal{A}} > 0 : \mathcal{A}\varepsilon \cdot \varepsilon \geq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon\|_{\mathbb{S}^d}^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d.$$

$$H(\mathcal{B}) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ tel que} \\ (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\|_{\mathbb{S}^d} \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|_{\mathbb{S}^d}, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ et p.p } x \in \Omega, \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \text{ appartient à } \mathcal{V}. \end{array} \right.$$

$$H(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in C([0, T]; \mathcal{Q}_\infty).$$

$$H(p_\nu) \left\{ \begin{array}{l} p_\nu : \Gamma_{C_1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ tel que} \\ (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ et p.p } x \in \Gamma_{C_1}, \\ (b) \text{ l'application } x \mapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_{C_1}, \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (c) \quad p_\nu(x, r) = 0, \forall r \leq 0 \text{ et p.p } x \in \Gamma_{C_1}. \end{array} \right.$$

$$H(f) \left\{ \begin{array}{l} f_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)), \quad f_N \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d)), \\ F \in L^2(\Gamma_{C_2}), \quad F(x) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Gamma_{C_2}, \\ \mu \in L^\infty(\Gamma_{C_2}), \quad \mu(x) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Gamma_{C_2}, \\ g \in L^2(\Gamma_{C_1}), \quad g(x) \geq 0 \quad \text{p.p } x \in \Gamma_{C_1}. \end{array} \right.$$

### 3.3 Formulation variationnelle

Avant d'aller plus loin, on rappelle la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div} w \cdot v dx = - \int_{\Omega} w \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma} (w \cdot \nu) v d\Gamma. \quad (3.8)$$

On suppose que  $(u, \sigma)$  soient deux fonctions lisses (différentiables) vérifiant (3.1)–(3.7).

Soit  $v \in \mathbb{H}$  et soit  $t \in [0, T]$ , on multiplie l'équation (3.2) par  $v - \dot{u}(t)$  et on intègre sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} (\operatorname{Div} \sigma(t) + f_0(t))(v - \dot{u}(t)) dt = \int_{\Omega} \operatorname{Div} \sigma(t)(v - \dot{u}(t)) dt + \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t)) dt = 0,$$

on applique la formule de Green (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{Div} \sigma(t) + f_0(t))(v - \dot{u}(t)) dt &= - \int_{\Omega} \sigma(t) \nabla(v - \dot{u}(t)) dt + \int_{\Gamma} (\sigma(t) \nu)(v - \dot{u}(t)) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t)) dt = 0, \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Omega} \sigma(t) \nabla(v - \dot{u}(t)) dt = \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t)) dt + \int_{\Gamma} (\sigma(t) \nu)(v - \dot{u}(t)) d\Gamma,$$

mais

$$\begin{aligned} \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(v - \dot{u})_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(v - \dot{u})_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(v - \dot{u})_i}{\partial x_j} + \frac{\partial(v - \dot{u})_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla(v - \dot{u}(t))_i + \nabla(v - \dot{u}(t))_j)_{ij} = \nabla(v - \dot{u}(t)), \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Omega} \sigma(t)(\varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t))) dt = \int_{\Omega} f_0(t)(v - \dot{u}(t)) dt + \int_{\Gamma} (\sigma(t) \nu)(v - \dot{u}(t)) d\Gamma$$

alors

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{V}} = \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} + \int_{\Gamma} (\sigma(t) \nu)(v - \dot{u}(t)) d\Gamma.$$

On utilise l'équation suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma &= \int_{\Gamma_D} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_N} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{C_1}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{V}} &= \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)} + \int_{\Gamma_D} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_N} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_1}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{C_2}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comme  $v \in \mathbb{H}$  alors par (3.3), on obtient

$$\int_{\Gamma_D} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma = 0,$$

grâce à (3.4), on a

$$\int_{\Gamma_N} \underbrace{(\sigma(t)\nu)}_{=f_N(t)}(v - \dot{u}(t))d\Gamma = \langle f_N(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Gamma_N; \mathbb{R})},$$

d'autre part, d'après (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{C_1}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma &= \int_{\Gamma_{C_1}} (\sigma_\nu(t)(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma + \underbrace{\sigma_\tau(t)}_{=0}(v_\tau - \dot{u}_\tau(t))d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{C_1}} -p_\nu(u_\nu(t) - g(x))(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma, \end{aligned}$$

et par (3.6), on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{C_2}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma &= \int_{\Gamma_{C_2}} \underbrace{\sigma_\nu(t)}_{-F}(v_\nu - \dot{u}_\nu(t)) + \sigma_\tau(t)(v_\tau - \dot{u}_\tau(t))d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} -\sigma_\tau(t)(\dot{u}_\tau(t) - v_\tau)d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu|\sigma_\nu(t)| \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}(\dot{u}_\tau(t) - v_\tau)d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \frac{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}^2}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \frac{\dot{u}_\tau(t)}{\|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}}v_\tau d\Gamma \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Gamma_{C_2}} (\sigma(t)\nu)(v - \dot{u}(t))d\Gamma \geq \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma.$$

Avec ces intégrales, l'inégalité (3.9) devient

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_{\mathcal{V}} &\geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \int_{\Gamma_{C_1}} -p_\nu(u_\nu(t) - g(x))(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{C_2}} F(\dot{u}_\nu(t) - v_\nu)d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma, \end{aligned}$$

où  $f \in L^2(0, T; \mathbb{H})$  est définie par

$$\langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle f_0(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{R}^d)} + \langle f_N(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{L^2(\Gamma_N, \mathcal{R}^d)}, \forall v \in \mathbb{H}.$$

En utilisant l'égalité (3.1), on déduit la formulation variationnelle du Problème 3.1 qui se présente par le problème suivant

**Problème 3.2.** *Trouver un champ des déplacements  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}$  tel que*

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \right\rangle_{\mathcal{V}} \\ &+ \int_{\Gamma_{C_2}} F(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma + \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma - \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F \|\dot{u}_\tau(t)\|_{\mathbb{R}^d}d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_{C_1}} p_\nu(u_\nu(t) - g(x))(v_\nu - \dot{u}_\nu(t))d\Gamma \geq \langle f(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{H}}, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in K$ , et pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$u(0) = u_0 \text{ sur } \Omega.$$

### 3.4 Solvabilité du problème

**Théorème 3.3.** *Supposons que les hypothèses  $H(\mathcal{A})$ ,  $H(\mathcal{B})$ ,  $H(p_\nu)$  et  $H(f)$  soient satisfaites. Alors, pour tout déplacement initial  $u_0 \in \mathbb{H}$ , il existe une seule solution  $u = u(u_0) \in AC([0, T]; \mathbb{H})$  de Problème 3.2. De plus, l'application  $u_0 \mapsto u(u_0)$  définie de  $\mathbb{H}$  dans  $AC([0, T]; \mathbb{H})$  est localement Lipschitzienne.*

**Démonstration.** L'idée de la preuve consiste à réécrire l'inégalité variationnelle du Problème 3.2 sous une forme d'un processus de rafle avec mémoire de type 2.7 ensuite, on fait appel au Théorème 2.7 pour récupérer l'existence et l'unicité de la solution. À cette fin, on introduit les opérateurs suivants  $A, B : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  et  $\mathcal{R} : C([0, T]; \mathbb{H}) \rightarrow C([0, T]; \mathbb{H})$  tels que pour tous  $u, v \in \mathbb{H}$  et tout  $w \in C([0, T]; \mathbb{H})$

$$\langle Au, v \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \mathcal{A}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (3.10)$$

$$\langle Bu, v \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \mathcal{B}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{V}}, \quad (3.11)$$

$$\langle (\mathcal{R}w)(t), v \rangle_{\mathbb{H}} = \left\langle \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\varepsilon(w(s))ds, \varepsilon(v) \right\rangle_{\mathcal{V}}. \quad (3.12)$$

On définit également les fonctions  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $P : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  par

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \int_{\Gamma_{C_2}} \mu F(v_\nu + \|v_\tau\|_{\mathbb{R}^d}) d\Gamma, \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}, \\ \langle P(u), v \rangle &= \int_{\Gamma_{C_1}} p_\nu(x, u_\nu(x) - g(x))v_\nu(x) d\Gamma, \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Avec ces dernières définitions, il est facile de voir que le problème 3.2 peut être écrit de manière équivalente au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un champ des déplacements } u : [0, T] \rightarrow \mathbb{H} \text{ tel que} \\ \langle A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t) - f(t) + Pu(t), v - \dot{u}(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \varphi(v) - \varphi(\dot{u}(t)) \geq 0, \\ \text{pour tout } v \in \mathbb{H} \text{ et pour presque tout } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Ce dernier problème, à son tour, est équivalent à l'inclusion différentielle gouvernée par le sous-différentiel de la fonction **convexe**  $\varphi(\cdot)$  suivante (voir (1.7))

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) - P(u(t)) \in \partial\varphi(\dot{u}(t)), \quad \text{p.p } t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

D'autre part, la fonction convexe  $\varphi$  est propre, convexe et positivement homogène avec  $\varphi(0) = 0$ . Il découle du Lemme (1.11) que

$$\varphi^*(v) = \psi_{C_0}(v) \text{ avec } C_0 = \partial\varphi(0), \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{H}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
& f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) - Pu(t) \in \partial\varphi(\dot{u}(t)) \\
& \Leftrightarrow \dot{u}(t) \in \partial\varphi^* \left( f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) - Pu(t) \right) \\
& \Leftrightarrow \dot{u}(t) \in \partial\psi_{C_0} \left( f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) - Pu(t) \right) \\
& \Leftrightarrow \dot{u}(t) \in N_{C_0} \left( f(t) - A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t) - Pu(t) \right) \\
& \Leftrightarrow \dot{u}(t) \in N_{C_0 + Pu(t) - f(t)} (-A\dot{u}(t) - Bu(t) - (\mathcal{R}u)(t)) \\
& \stackrel{(1.4)}{\Leftrightarrow} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))} (A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)),
\end{aligned}$$

où

$$C(t, u(t)) := f(t) - C_0 - Pu(t) = f(t) - \partial\varphi(0) - Pu(t).$$

Finalement, le Problème 3.2 est équivalent au processus du rafle avec mémoire suivant trouver une fonction  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{H}$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{u}(t) \in N_{C(t,u(t))}(A\dot{u}(t) + Bu(t) + (\mathcal{R}u)(t)), \quad \text{p.p } t \in [0, T]. \\ u(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Pour terminer la preuve et afin d'appliquer le Théorème (2.7), il suffit que les opérateurs  $A, B, \mathcal{R}$  et les ensembles  $C(t, u(t))$  vérifient ses hypothèses. Les conditions  $(\mathcal{H}_A)$  et  $(\mathcal{H}_B)$  sont des conséquences directes de (3.10),(3.11),  $H(\mathcal{A})$  et  $H(\mathcal{B})$  avec  $\alpha = L_A$  et  $L_B = L_B$ . Aussi, l'opérateur  $\mathcal{R}$  défini par (3.12) est un opérateur avec mémoire grâce à l'hypothèse  $H(\mathcal{R})$ .

Finalement, il reste de vérifier que  $C(t, u)$  vérifie l'hypothèse  $(\mathcal{H}'_C)$  (voir Remarque 2.8). Il est clair que  $t \mapsto C(t, u) = f(t) - \partial\varphi(0) - Pu$  est mesurable, de plus

$$\begin{aligned}
d_{C(t,u)}(0) &= \inf_{v \in C(t,u)} \|v\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in f(t) - C_0 - Pu} \|v\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in C_0} \|f(t) - Pu - v\|_{\mathbb{H}} \\
&\leq \|Pu\|_{\mathbb{H}} + \|f(t)\|_H + d_{C_0}(0_{\mathbb{H}}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

D'autre part, d'après la définition de  $P$  et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\|Pu\|_{\mathbb{H}} &\leq \sup_{w \in H, \|w\|=1} \int_{\Gamma_{C_1}} p_\nu(x, u_\nu(x) - g(x)) w_\nu(x) d\Gamma \\
&\leq \|\gamma\| \left( \int_{\Gamma_{C_1}} |p_\nu(x, u_\nu(x) - g(x))|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\gamma\| L_\nu \left( \int_{\Gamma_{C_1}} |u_\nu(x) - g(x)|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\gamma\| L_\nu \sqrt{2} (\|\gamma\| \|u\|_{\mathbb{H}} + \|g\|_{L^2(\Gamma_{C_1})}).
\end{aligned}$$

En combinant la dernière inégalité avec (3.13), on obtient

$$d_{C(t,u)}(0) \leq \mu(t)(1 + \|u\|_{\mathbb{H}}), \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{H} \text{ et p.p } t \in [0, T],$$

avec  $\mu \in L^1(0, T)$  est la fonction définie par

$$\mu(t) := \|\gamma\| L_\nu \sqrt{2} \max\{\|\gamma\|, \|g\|_{L^2(\Gamma_{C_1})}\} + \|f(t)\|_{\mathbb{H}} + d_{C_0}(0),$$

ce qui traduit la condition  $(\mathcal{H}'_C)(a)$ . Passant à (b), pour cela, on considère un réel  $r \in \mathbb{R}$  et soient  $w_i \in N_{C(t,u_i)}(v_i)$  avec  $u_i, v_i \in r\mathbb{B}, i = 1, 2$ . Il résulte de (1.4) que

$$w_i \in N_{C(t,u_i)}(v_i) \Leftrightarrow w_i \in N_{f(t)-C_0}(v_i + Pu_i).$$

En tenant compte de la monotonie du cône normal à l'ensemble **convexe**  $f(t) - C_0$  on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle w_1 - w_2, v_1 + Pu_1 - v_2 - Pu_2 \rangle_{\mathbb{H}} \geq 0 \\
&\Rightarrow \langle w_1 - w_2, v_1 - v_2 \rangle_{\mathbb{H}} \geq -\langle w_1 - w_2, Pu_1 - Pu_2 \rangle_{\mathbb{H}} \\
&\geq -\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{H}} \|Pu_1 - Pu_2\|_{\mathbb{H}} \\
&\geq -\|\gamma\|^2 L_\nu \|w_1 - w_2\|_{\mathbb{H}} \|u_1 - u_2\|_{\mathbb{H}},
\end{aligned}$$

ce qui traduit la propriété désirée avec  $\tilde{L}_r = \|\gamma\|^2 L_\nu$  pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ . Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 2.7 sont vérifiées, alors, on est en position d'appliquer le

Théorème 2.7 pour démontrer que le Problème 3.2 admet une solution unique absolument continue avec une dépendance localement Lipschitzienne par rapport à la condition initiale  $u_0$ . ■

# Bibliographie

- [1] **S. Adly, T. Haddad**, An implicit sweeping process approach to quasistatic evolution variational inequalities, *SIAM J. Math. Anal.* 50(1) , 761–778, 2018.
- [2] **S. Adly, T. Haddad, B. K. Le**, State-dependent implicit sweeping process in the framework of quasistatic evolution quasi-variational inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* 182(1), 473–493, 2019.
- [3] **J. Aubin, A. Cellina**, Differential inclusions. In : *Grundlehren Math. Wiss.*, vol. 264. Springer, Berlin, 1984.
- [4] **D. Azé**, *Éléments d’analyse convexe et variationnelle*, Éditions Ellipses, Paris, 1997.
- [5] **C. Castaing, M. Valadier**, Convex analysis and measurable multifunctions. In : *Lecture Notes in Math.*, vol. 580. Springer, Berlin, 1977.
- [6] **K. Deimling**, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., vol.1, Walter de Gruyter Co., Berlin, 1992.
- [7] **J. Diestel, J. J. Uhl**, *Vector measure*, Mathematical surveys and Monograph, No 5, AMS. 1977.
- [8] **C. Henry**, An existence theorem for a class of differential equations with multivalued righthand side, *J. Math. Anal. Appl.*, 179-186, 1973.
- [9] **J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal**, *Fundamentals of convex analysis*, Springer. 2004.
- [10] **A. Jourani, E. Vilches**, A differential equation approach to implicit sweeping processes. *Journal of Differential Equations*, 266(8), 5168-5184, 2019.

- 
- [11] **R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeand, B. M. Maschke**, Dissipative Systems Analysis and Control, Springer London, CCE Series 2000.
- [12] **B. Maury, J. Venel**, Un modèle de mouvement de foule, *ESAIM Proc.*, 18, 143-152, 2007.
- [13] **S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea**, A class of variational-hemivariational inequalities in reflexive Banach spaces, *Journal of Elasticity* 127, 151-178, 2017.
- [14] **S. Migorski, A. Ochal, M. Sofonea**, History-dependent variational-hemivariational inequalities in contact mechanics, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 22, 604-618, 2015.
- [15] **S. Migórski, A. Ochal, M. Sofonea**, Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities. In : *Adv. Mech. Math.*, vol. 26. Springer, New York, 2013.
- [16] **S. Migórski, M. Sofonea, S. Zeng**, Well-posedness of history-dependent sweeping processes. *SIAM J. Math. Anal.* 51(2), 1082–1107, 2019.
- [17] **B. S. Mordukhovich, N. M. Nam**, An easy path to convex analysis and applications. *Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics*, 6(2), 1-218, 2013.
- [18] **J. J. Moreau**, Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *J. Differ. Equ.* 26, 347–374, 1977.
- [19] **J. J. Moreau**, Intersection of moving convex sets in a normed space. *Math. Scand.* 36, 159–173, 1975.
- [20] **J. J. Moreau**, On unilateral constraints, friction and plasticity. In : Capriz, G., Stampacchia, G. (eds.) *New Variational Techniques in Mathematical Physics*, pp. 173–322, C.I.M.E. II Ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma 1974.
- [21] **J. J. Moreau**, Raffle par un convxe variable I, *Sém. Anal. Convexe*, Montpellier, Exposé 15, 1971.
- [22] **J. J. Moreau**, Sur l'évolution d'un système élastoplastique, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 273, A118–A121, 1971.

- 
- [23] **J. J. Moreau**, Standard Inelastic Shocks and the Dynamics of Unilateral Constraints, *Unilateral Problems in Structural Analysis*, Springer, Vienna, 173–221, 1985.
- [24] **M. Sofonea, A. Matei**, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics* 22, 471-491, 2011.
- [25] **M. Sofonea, A. Matei**, Variational inequalities with applications. In : *Adv. Mech. Math.*, vol. 18. Springer, New York, 2009.
- [26] **M. Sofonea, S. Migórski**, *Variational-Hemivariational Inequalities with Applications*. Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, 2018.
- [27] **J. Van Tiel**, *Convex analysis. An introductory text*, John wiley and sons, 1994.
- [28] **S. Zeng, E. Vilches**, Well-Posedness of History/State-Dependent Implicit Sweeping Processes, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 186, 960-984, 2020.