

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia- Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

N° d'ordre :.....

N° de Série :.....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : EDP et Applications

Thème

**Étude a posteriori d'un modèle de problème
non linéaire**

Présenté par :

Boumelit Wafa

Devant le jury

Président :	Yasmina Daikh	Maître de Conférences A	Université de Jijel
Encadreur :	Fatiha Bekkouche	Maître de Conférences B	Université de Jijel
Examineur :	Samia Djemai	Maître de Conférences B	Université de Jijel



Remerciements



En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant pour la volonté et la santé qu'il nous a donné tout au long des années de nos études pour terminer ce mémoire.

Nous voudrions présenter nos sincères remerciements à notre encadreur Mme. Fatima Bekkouché, pour ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion, et surtout pour sa disponibilité et sa gentillesse. Nous exprimons notre gratitude et nos remerciements aux membres du jury Yasmina Daikhi et Samia Djemai qui ont accepté de disposer de leurs temps pour juger ce travail.

Wafa Boumelit

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté une analyse a posteriori d'un modèle de problème non linéaire. Nous effectuons l'analyse a priori de la discrétisation par éléments finis de ce problème. Ensuite, nous proposons deux algorithmes de résolutions itératif. Puis, nous calculons les estimations d'erreur a posteriori des algorithmes itératifs proposés et produisent des bornes supérieurs et inférieurs locaux. À la fin présente également des tests numériques.

Mots-Clés Problème non linéaire, estimation d'erreur, estimation d'erreur a posteriori, problème itératif.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notions préliminaires	3
1.1 Notations	3
1.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$	4
1.3 Formules de Green sur un polygone	6
1.4 Le lemme de Lax-Milgram	6
1.5 Discrétisations : (Triangulation)	7
1.6 Triangulation conforme	7
1.7 Fonctions convexes	8
2 Analyse a posteriori pour un problème non linéaire	9
2.1 Présentation du problème	10
2.1.1 La formulation variationnelle	10
2.1.2 Existence et Unicité	11
2.2 Problème discret et estimation d'erreur a priori	12
2.2.1 Discrétisation	12
2.2.2 Existence et estimation d'erreur	13
2.3 Problème itératif	17
2.3.1 Algorithme du point fixe	17
2.3.2 Algorithme de Newton	19
2.4 Analyse d'erreur a posteriori	20
2.4.1 Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Point-fixe	21
2.4.2 Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Newton	25
3 Application numérique	33
3.1 Exemple 1 : L'estimation d'erreur a priori par l'algorithme de point fixe	33
3.2 Exemple 2 : L'estimation d'erreur a posteriori pour l'algorithme de point-fixe	35
Bibliographie	39

Introduction générale

La compréhension des phénomènes du monde réel et de notre technologie est aujourd'hui en grande partie basée sur les équations aux dérivées partielles qui modélisent de nombreux phénomènes (problèmes de la mécanique, de la physique, de la biologie, etc.)

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de trouver des solutions exactes, analytiques de ces équations. Par conséquent, des méthodes numériques, sont utilisées pour des simulations. Ces méthodes numériques nécessitent de transformer le problème continu (linéaire ou non linéaire) en un problème discret linéaire en utilisant des méthodes de discrétisation et des méthodes de linéarisation (dans le cas d'un problème non linéaire). La discrétisation de ces équations par ces méthodes numériques donne lieu en général à des systèmes de grandes dimensions. Comme la résolution des grands systèmes est très coûteuse en terme de temps de calcul, deux questions d'une importance essentielle sont :

- (i) Quelle est la grandeur de l'erreur entre les solutions exacte et approchée ?
- (ii) Quand est ce qu'il faut arrêter l'itération afin d'éviter les itérations inutiles ?

La qualité des solutions numériques approchées est exprimée à l'aide des estimations d'erreur a priori et a posteriori. Les estimations d'erreur a priori peuvent être évaluées avant le début du calcul et donnent des bornes sur la différence entre la solution exacte et la solution approchée. Cette borne dépend typiquement de la taille des mailles (qui tend vers zéro avec le raffinement du maillage) et une constante inconnue qui dépend de la solution exacte. Ces estimations sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique concernée. Malheureusement, en pratique la borne supérieure ne peut quasiment jamais être évaluée et ne peut donc pas donner une réponse aux deux questions énumérées ci-dessus.

Les estimations d'erreur a posteriori permettent le contrôle global de l'erreur. Cette erreur est majorée en fonction de la solution approchée qui nous pouvons calculer. L'analyse a posteriori est l'outil de base pour la construction d'un maillage adaptatif, en effet, cette

analyse est basée sur des outils locaux appelés indicateurs d'erreur. De plus, les estimations d'erreur a posteriori permettent aussi de distinguer les erreurs de linéarisation et de discrétisation, ce qui est une étape assez importante dans notre analyse. Par conséquent, en principe, les estimations d'erreur a posteriori peuvent être utilisées pour donner des réponses aux questions (i) et (ii) ci-dessus.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'analyse a posteriori du problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

où Ω un polygone de \mathbb{R}^d , $d = 2$, $\lambda > 0$, $p > 0$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$.

L'analyse a posteriori a été initiée par Babuska [4] pour des problèmes paraboliques et développée par Verfurth [16, 17]. Nous citons aussi Ainsworth et Oden [2], Zienkiewicz et Zhu [19, 18] Strouboulis et Hague [15] et Repin [14]. L'analyse a posteriori peut fournir des critères d'arrêt qui garantissent le contrôle global de l'erreur. Par conséquence, une étape importante sera de concevoir des estimations d'erreur a posteriori en distinguant les erreurs de linéarisation et de discrétisation. Ce type d'analyse a été initialisé par Chaillou et Suri [5, 6] pour une certaine classe de problèmes non linéaires et a été développé (dans le cadre d'un algorithme itératif) par L. El Alaoui, A. Ern et M. Vohralík [12].

Dans ce mémoire, on a choisit de détailler un travail de C. Bernardi, J. Dakroub, G. Mansour et T. Sayah [7] (ce travail est une partie de thèse de J. Dakroub).

Notre travail donc est composé de trois chapitres :

- Le but du premier chapitre est de donner un cadre fonctionnel commode pour notre étude. Nous en rappelons les définitions des espaces de Sobolev et les principales propriétés qui nous seront utiles par suite.
- Dans le deuxième chapitre, nous discrétisons par la méthode des éléments finis notre problème et nous effectuons une analyse d'erreur a priori du problème discret et une analyse a posteriori du problème itératif.
- Dans le troisième chapitre, afin de valider les résultats théoriques obtenus dans le Chapitre 2 nous effectuons quelques test numériques en utilisant le logiciel Free-Fem++ [1].

Notions préliminaires

Résumé

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier, les définitions et les propriétés de base des espaces de Sobolev usuels. Pour les preuves des propositions et des théorèmes énoncés dans ce chapitre, le lecteur peut consulter par exemple [3, 9, 13, 11].

Sommaire

1.1	Notations	3
1.2	Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$	4
1.3	Formules de Green sur un polygone	6
1.4	Le lemme de Lax-Milgram	6
1.5	Discrétisations : (Triangulation)	7
1.6	Triangulation conforme	7
1.7	Fonctions convexes	8

1.1 Notations

Soit Ω un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n de point générique (x_1, x_2, \dots, x_n) . ∂_i désigne la dérivée partielle par rapport à la variable x_i , $1 \leq i \leq n$ et pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on a $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$.

On note aussi par $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) l'espace de toutes les fonctions indéfiniment continûment différentiables et à support compact dans Ω (resp. l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$). Pour tout entier k , on désigne par $C^k(\overline{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de classe C^k sur \mathbb{R}^n et par $C_0^k(\overline{\Omega})$ le sous-espace de $C^k(\overline{\Omega})$ formé par les fonctions ayant un support borné dans Ω (rappelons que Ω peut être non borné).

On note $L^2(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions de carré intégrable sur Ω - par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans \mathbb{R}^n - muni de son produit scalaire usuel $(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx$, la norme associée sera notée par $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

1.2 Les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$

Définition 1.2.1. On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distributions u définies dans Ω telles que

- i) $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.
- ii) $u \in H^m(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy < +\infty,$$

pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m entier et σ la partie fractionnaire de s , $0 < \sigma < 1$.

$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme définie par

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

dans le cas 1, et par

$$\|u\|_{s,\Omega} = \left(\|u\|_{m,\Omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\sigma}} dx dy \right)^{1/2},$$

dans le cas 2.

Définition 1.2.2. $H_0^s(\Omega)$ note l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

Remarque 1.2.3. $H_0^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{s,\Omega}$, car $H_0^s(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^s(\Omega)$ donc complet.

Théorème 1.2.4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne. Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ quel que soit $s \geq 0$.

Définition 1.2.5. Pour $s < 0$, $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.

Théorème 1.2.6. (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 dx \right\}^{1/2} \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.1)$$

Corollaire 1.2.7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace on a :

$$\|u\|_{1,\Omega} \leq \sqrt{1+C^2} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega),$$

où C est la constante de l'inégalité de Poincaré.

Un corollaire important de l'inégalité de Poincaré est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente plus simple dans $H_0^1(\Omega)$.

Corollaire 1.2.8. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme

$$|u|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

Corollaire 1.2.9. L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.2.10. (Théorème de trace) L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C(\Gamma) \\ u &\longrightarrow u|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

s'étend en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, appelée opérateur de trace et notée γ . En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{0,\Gamma} \leq C \|v\|_{1,\Omega}.$$

Corollaire 1.2.11. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , à frontière Γ lipschitzienne, alors

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Définition 1.2.12. Pour $u \in H^2(\Omega)$, sa dérivée normale sur Γ est définie par

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{i=1}^n n_i \gamma \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où n_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de la fonction n (exprimée dans les coordonnées cartésiennes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$) définie presque partout par

$$n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n : x \longmapsto n(x)$$

et $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$. Remarquons que $\gamma \frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$, puisque, grâce au Théorème 1.2.10, tous les $\gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}$ sont dans $L^2(\Gamma)$ et que $|n| \leq 1$. Ceci prouve aussi que l'application

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial}{\partial n} : H^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma \frac{\partial u}{\partial n}, \end{aligned}$$

est linéaire continue.

1.3 Formules de Green sur un polygone

Rappelons d'abord les formules de Green usuelles qui sont valides dans tout domaine lipschitzien borné suivant [9].

Théorème 1.3.1. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière lipschitzienne Γ . Alors pour $u, v \in H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int_{\Omega} v \partial_i u \, dx = - \int_{\Omega} u \partial_i v \, dx + \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v n_i \, d\sigma.$$

Par conséquent, sous les mêmes hypothèses sur Ω , on a la demi-formule de Green

$$\int_{\Omega} u \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right) \, d\sigma \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^2(\Omega). \quad (1.2)$$

Lorsque Ω est un ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^2 , la formule précédente s'énonce de la façon suivante :

$$(u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) = \sum_j \langle \gamma_j u, \gamma_j \partial_{n_j} v \rangle_{\Gamma_j} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ et } v \in H^2(\Omega), \quad (1.3)$$

où $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_j}$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Gamma_j)$.

Lemme 1.3.2. *En dimension $d = 2$, l'injection de Sobolev nous donne l'existence d'une constante S_j telle que, pour tout $1 \leq j < +\infty$, on a l'inégalité suivante*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^j(\Omega)} \leq S_j |v|_{1,\Omega}. \quad (1.4)$$

1.4 Le lemme de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire notée (\cdot, \cdot) , de norme associée notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.4.1. *Une application*

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot): V \times V, &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur V si elle est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables.

Définition 1.4.2. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot): V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est*

1. *Continue sur $V \times V$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

2. Coercive (ou V -elliptique) s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

Lemme 1.4.3 (Lemme de Lax-Milgrame). Soient :

- Une forme bilinéaire $(u, v) \mapsto a(u, v)$ continue sur $V \times V$ et coercive.
- Une forme linéaire L continue sur V .

Alors le problème variationnel suivant :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (1.5)$$

admet une solution unique $u \in V$.

1.5 Discrétisations : (Triangulation)

Définition 1.5.1. Soit Ω un connexe de \mathbb{R}^d . On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $d = 2$) ou polyédral (si $d = 3$). Une triangulation (ou maillage) \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est une partition finie de $\bar{\Omega}$ formée des éléments de formes simples, par exemple des triangles (si $d = 2$) ou des tétraèdres (si $d = 3$). Pour $K \in \mathcal{T}_h$, on note h_K le diamètre de K et ρ_K le diamètre du cercle inscrit ($d = 2$) ou de la sphère inscrite ($d = 3$) dans K .

1.6 Triangulation conforme

Définition 1.6.1. On suppose que le bord $\partial\Omega$ est polygonal (si $d = 2$) ou polyédral (si $d = 3$). On dit qu'une triangulation \mathcal{T}_h sur $\bar{\Omega}$ est admissible ou conforme si l'intersection entre deux éléments est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier ou une face entière.

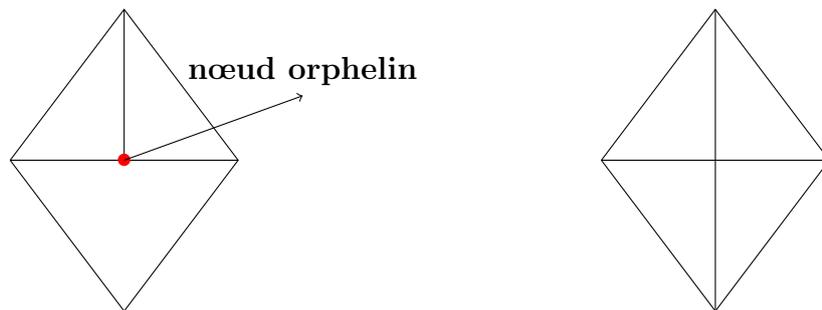


FIGURE 1.1 – à gauche : maillage non conforme en 2d, à droite : maillage conforme en 2d.

Lemme 1.6.2. Soient a, b et p trois réels positifs on a l'inégalité suivante :

$$\left| |a|^p - |b|^p \right| \leq p |a - b| (|a|^{p-1} + |b|^{p-1}).$$

1.7 Fonctions convexes

Définition 1.7.1. Soit X un espace vectoriel. On dit qu'une partie K de X est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad \theta x + (1 - \theta)y \in K.$$

Lorsque K est convexe et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction on dit que J est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \quad \forall \theta \in [0, 1], \quad J(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta J(x) + (1 - \theta)J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si pour tous $x, y \in K$ avec $x \neq y$ et $\theta \in]0, 1[$ on a $J(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta J(x) + (1 - \theta)J(y)$.

Proposition 1.7.2. Soient X un espace de Banach et $K \subset X$ un convexe. Alors K est fermé si, et seulement si, K est faiblement fermé. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note :

$[J \leq \lambda] = \{x \in K; J(x) \leq \lambda\}$. On dit que J est semi-continue inférieurement (en abrégé s.c.i.) lorsque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $[J \leq \lambda]$ sont fermés dans X . Il est facile de vérifier que si J est convexe, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les ensembles $[J \leq \lambda]$ sont convexes, mais la réciproque est fausse.

Définition 1.7.3. Soient X un espace de Banach et w une partie de X . Une fonction $J : w \rightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentielle-ment s.c.i. si pour toute suite $(x_n)_n$ de w convergent faiblement vers $x \in w$ on a $J(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n)$.

Chapitre 2

Analyse a posteriori pour un problème non linéaire

Résumé

On considère un problème non linéaire et on s'intéresse à la dérivation d'estimations d'erreur a posteriori pour la discrétisation de cette équation par la méthode des éléments finis P_1 .

Sommaire

2.1	Présentation du problème	10
2.1.1	La formulation variationnelle	10
2.1.2	Existence et Unicité	11
2.2	Problème discret et estimation d'erreur a priori	12
2.2.1	Discrétisation	12
2.2.2	Existence et estimation d'erreur	13
2.3	Problème itératif	17
2.3.1	Algorithme du point fixe	17
2.3.2	Algorithme de Newton	19
2.4	Analyse d'erreur a posteriori	20
2.4.1	Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Point-fixe	21
2.4.2	Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Newton	25

2.1 Présentation du problème

Soit Ω un domaine polygonal de l'espace \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Dans ce travail nous nous intéressons à la résolution du problème non linéaire :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et λ, p deux nombres réels positifs.

2.1.1 La formulation variationnelle

Proposition 2.1.1. *Le problème non linéaire (2.1) admet la formulation variationnelle suivante : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^{2p} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

Preuve. Si u est solution du problème non linéaire (2.1), on multiplie l'équation par une fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$ et on utilise la formule d'intégration par parties (formule de Green)

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma.$$

Or $v = 0$ sur $\partial\Omega$ puisque $v \in H_0^1(\Omega)$, donc qui n'est rien d'autre que la formule (2.2).

Et soit u est la solution du problème(2.1) nous avons au sens de distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -\Delta u, v \rangle = \langle \lambda |u|^{2p} u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad (2.3)$$

d'où,

$$-\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^{2p} u v dx = \langle f, v \rangle. \quad (2.4)$$

Nous obtenons alors l'équation suivante

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^{2p} u v dx = \langle f, v \rangle. \quad (2.5)$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ nous permet de déduire que u est une solution de (2.2).

Réciproquement, soit u une solution du problème(2.2),si nous prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ comme fonction test, l'équation(2.2) donne

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^{2p} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (2.6)$$

La fonction u est donc bien solution du problème $-\Delta u + \lambda |u|^{2p} u = f$ aux sens de distribution. Le problème (2.1) est alors équivalent à la formulation variationnelle (2.2). \square

2.1.2 Existence et Unicité

Dans cette section, notre but est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1). Pour cela, nous commençons par rappeler le résultat de minimisation de l'énergie suivant (voir [11], Chapitre 3) :

Théorème 2.1.2 (Résultat de minimisation de l'énergie). *Soient X un espace de Banach réflexif, K un convexe fermé de X et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Lorsque K est non borné, supposons qu'on a $J(x) \rightarrow +\infty$ pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum sur K :*

$$\exists u \in K, J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

De plus, si J est strictement convexe alors u est unique.

Remarque 2.1.3. *Si f est une fonction puissance $f : x \rightarrow x^q$ alors f est strictement convexe pour $q \geq 1$.*

Proposition 2.1.4. *Soient $K \subset X$ un convexe et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe G -dérivable en tout point de K . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) $u \in K$ pour tout $v \in K$ on a, $E(u) \leq E(v)$;
- ii) $u \in K$ pour tout $v \in K$ on a $\langle E'(u), v - u \rangle \geq 0$. Si de plus pour tous $v, w \in K, \tau \rightarrow E'(v + \tau(w - v))$ est continue sur $[0, 1]$ alors les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes a
- iii) $u \in K$ pour tout $v \in K$ $\langle E'(v), v - u \rangle \geq 0$.

Lemme 2.1.5. *Le problème non linéaire (2.1) (et alors (2.2)) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve. Pour commencer, nous associons au problème (2.1) la formulation d'énergie :

$$E(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$$

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2p+2} \int_{\Omega} |u(x)|^{2p} dx - \langle f, u(x) \rangle.$$

Nous déduisons de la Remarque 2.1.3 que $E(u)$ strictement convexe de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ comme étant la somme de fonctions convexes et strictement convexe. Et comme

$$\langle f, u(x) \rangle \leq \|f\|_{-1, \Omega} \|u\|_{1, \Omega},$$

De plus, E est coercive sur V on obtient alors la minoration suivante :

$$E(u) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2p+2} |u|^{2p+2} - \|f\|_{-1,\Omega} \|u\|_{1,\Omega}.$$

Par suite, $E(u)$ tend vers l'infini lorsque $\|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{L^{2p+2}(\Omega)}$ tend vers l'infini. Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, nous déduisons d'après le Théorème 2.1.2 que E atteint son minimum sur $H_0^1(\Omega)$ en un unique point u , et nous avons

$$E'(u) = -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u - f = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Lorsque K est un sous-espace vectoriel de X , $v := u + tw$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $w \in K$ dans la caractérisation (ii), on voit que $\langle E'(u), w \rangle = 0$, pour tout $w \in K$, c'est a-dire que $E'(u) \in K^\perp \subset X$. En particulier si $K = X$, on a $E'(u) = 0$; si de plus E est strictement convexe, $E'(v) = 0$. Comme par ailleurs $u = 0$ au sens des traces nous obtenons ainsi une solution faible du problème (2.1). \square

2.2 Problème discret et estimation d'erreur a priori

2.2.1 Discrétisation

On discrétise maintenant le problème (2.1). Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de maillage de Ω au sens, on a pour chaque h :

$$\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$$

Les éléments du maillage sont par convention des fermés et ils sont tels que l'intersection des intérieurs de deux éléments distincts est vide. Pour simplifier, on suppose que les maillages sont triangulaires et conformes (dans le sens où ils ne contiennent pas des "nœuds orphelins", voir Figure 1.1. L'espace des éléments finis \mathcal{P}_1 est noté V_h et est défini par

$$V_h = \{v_h \in H_0^1(\Omega), \forall K \in \tau_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)\},$$

où $\mathcal{P}_1(K)$ représente l'espace des restriction à k de la fonction affine sur \mathbb{R}^2 .

Nous considérons ensuite la discrétisation du problème (2.2) par la méthode des éléments finis

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h, \text{ Tel que :} \\ \forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx + \int_{\Omega} \lambda |u_h|^{2p} u_h v_h = \langle f, v_h \rangle. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2.2 Existence et estimation d'erreur

Dans cette partie, notre objectif est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel discrétisé (2.7) et de calculer l'estimation d'erreur a priori correspondante. Pour cela, nous utilisons le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [11].

Théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart

Soient V et W deux espaces de Banach, $G : V \rightarrow W$ une application de classe C^1 et $S : W \rightarrow V$ une application linéaire continue. On pose

$$F(u) = u - SG(u).$$

On suppose que :

(H₁) DG est une application lipschitzienne.

(H₂) Pour tout $u \in V$, l'opérateur $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compact.

(H₃) Pour tout $u \in V$, $DF(u)$ est un isomorphisme dans V .

Posons aussi, pour tout $u_h \in V_h$

$$F_h(u_h) = u_h - S_h G(u_h),$$

où S_h est une application linéaire continue définie sur W à valeurs dans V_h . De plus, nous introduisons un opérateur linéaire continu Π_h défini sur V à valeur dans V_h tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_V = 0 \tag{2.8}$$

Théorème 2.2.1. *soit G une application de V dans W de classe C^1 , telle que l'opérateur DG soit borné sur tout sous-ensemble borné de V . Nous supposons de plus que (H₁), (H₂), (H₃) et (2.8) soient satisfaites. S'il existe une constante $C > 0$ tel que,*

$$\|S_h\|_{\mathcal{L}(W,V)} \leq C, \tag{2.9}$$

et, si nous avons

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|S_h - S\|_{\mathcal{L}(W,V)} = 0 \tag{2.10}$$

alors, il existe un voisinage \mathcal{O} dans V et il existe $h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \leq h_0$, le problème $F_h(u_h) = 0$ admet une solution unique tel que $u_h - u \in \mathcal{O}$. De plus, nous avons

$$\|u_h - u\|_V \leq K \left(\|u - \Pi_h u\|_V + \|(S_h - S)G(u)\|_V \right), \tag{2.11}$$

où K est une constante indépendante de h .

Application du Théorème de Brezzi-Raviart

- Dans notre cas, nous prenons les espaces : $V = H_0^1(\Omega), W = H^{-1}(\Omega)$.
- On définit l'opérateur S linéaire continu, comme suit

$$S : W \rightarrow V$$

$$f \rightarrow Sf = \omega,$$

où w est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta \omega = f & \text{dans } \Omega, \\ \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En effet, le lemme de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution w .

- On introduit de même l'opérateur G par

$$G : V \rightarrow W$$

$$w \rightarrow G(w) = f - \lambda|w|^{2p}w,$$

Remarque 2.2.2. *Nous remarquons que la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.1) s'écrit de façon équivalente comme suit*

$$F(u) = u - SG(u) = 0.$$

- Par ailleurs, on définit l'opérateur S_h linéaire et continu

$$S_h : w \rightarrow V_h$$

$$f \rightarrow S_h f = \omega_h,$$

où w satisfait

$$\forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} \nabla w_h \nabla v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx. \quad (2.12)$$

Remarque 2.2.3. *Nous remarquons que solution $u_h \in V_h$ de l'équation*

$$F_h(u_h) = 0. \quad (2.13)$$

où

$$F_h(w_h) = w_h - S_h G(w_h), \quad \forall w_h \in V_h.$$

Dans le but d'appliquer le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart, nous montrons en premier lieu que $SDG(u)$ est un opérateur compact. En effet, S est une application continue. De plus,

$$DG(u) : V \rightarrow W$$

$$v \rightarrow DG(u)v,$$

est une application compacte. En effet, c'est la composée des deux applications suivantes

$$V = H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \rightarrow W = H^{-1}(\Omega).$$

Nous pouvons ainsi conclure que $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compacte puisque c'est la composition d'un opérateur compact et d'un opérateur linéaire continu.

Montrons de plus que $DF(u)$ est un isomorphisme dans V . On a

$$DF(u) = I - SDG(u).$$

Comme $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compact, l'Alternative de Fredholm nous affirme que $DF(u)$ est un isomorphisme dans V si l'équation $(I - SDG(u)).w = 0$ admet une solution unique $w = 0$. Comme,

$$DG(u).w = -\lambda(2p + 1)|u|^{2p}w.$$

Alors on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta w + 2\lambda p |u|^{2p-1} u \omega + \lambda |u|^{2p} w & = g \text{ dans } \Omega, \\ w & = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Lemme 2.2.4. *L'équation $(I - SDG(u)).w = 0$ admet une unique solution $w = 0$.*

Preuve. Tout d'abord, il est clair que la solution de l'équation $(I - SDG(u)).w = 0$ est une solution du problème (2.14). Nous posons :

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla v + 2\lambda p |v|^{2p-1} v \omega + \lambda |v|^{2p} \omega.$$

$$L(v) = 0.$$

La forme $a(., .)$ est bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$. D'après le théorème de LAX-Milgram, le problème (2.14) admet unique solution ω dans V . Comme $w = 0$ est bien solution du problème (2.14) nous déduisons alors que c'est c'est la solution unique de ce problème. \square

Lemme 2.2.5. *Soit u la solution du problème (2.7). L'application $SDG(u)$ est lipschitzienne. En effet, il existe un réel $L > 0$ et un voisinage \mathcal{V} dans $H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$\forall \omega \in \mathcal{V} \|S(DG(u) - DG(\omega))\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq L|u - \omega|_{1,\Omega}.$$

Preuve. Pour tout $w, z \in \mathcal{O} \cup H_0^1(\Omega)$ et comme l'opérateur S est linéaire continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, alors

$$\|S(DG(u)z - DG(w)z)\|_{1,\Omega} \leq \|DG(u)z - DG(w)z\|_{-1,\Omega}.$$

Et comme

$$\|DG(u).z - DG(\omega).z\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle DG(u).z - DG(\omega).z, v \rangle|}{|v|_{1,\Omega}}, \quad (2.15)$$

Pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$

$$DG(u).z - DG(\omega).z = 2\lambda p(|w|^{2p} - |u|^{2p})z - \lambda(2p+1)(|w|^{2p} - |u|^{2p})z \quad (2.16)$$

Par le lemme 1.6.2

$$||\omega|^{2p} - |u|^{2p}| \leq 2p|\omega - u| (|\omega|^{2p-1} + |u|^{2p-1}).$$

Et alors

$$\begin{aligned} |\langle DG(u) - DG(\omega) \rangle| &\leq 2\lambda p(2p)(|w|^{2p-1} + |u|^{2p-1})|w - u| \\ &\quad - \lambda(2p+1)(2p)(|w|^{2p-1} - |u|^{2p-1})|w - u| \end{aligned} \quad (2.17)$$

On combinant ces deux inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \|DG(u).z - DG(\omega).z\|_{-1,\Omega} &\leq (2\lambda p^2 - 2\lambda p)(|w|^{2p-1} + |u|^{2p-1})|w - u| \\ &\leq L|w - u| \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2.6. *Supposons que $G \in C^1$ de V dans W avec DG Lipschitz-continues, $SDG(u)$ est compact et $DF(u)$ est un isomorphisme que pour tout $v \in V$.*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \pi_h v\|_V = 0,$$

Pour un opérateur linéaire $\pi_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|S_h - S\|_{L(\omega, V)} = 0.$$

alors, Il existe $h_0 > 0$ et un voisinage θ de l'origine en V , tels que pour tout $h \leq h_0$ problème (2.13) admet une unique solution u_h telle que $u_h - u$ pour θ

De plus, on a pour une constante $M > 0$ indépendant de h

$$\|u - u_h\| \leq M (\|u - \pi_h u\|_V + \|(S_h - S)G(u)\|_V).$$

Nous énonçons maintenant le corollaire suivant qui dérive du Théorème 2.2.6 et qui donne l'estimation d'erreur a priori.

Corollaire 2.2.7. *Soit u la solution de (2.2). Il existe un voisinage \mathcal{O} de l'origine dans V et un nombre réel $h_0 > 0$, tel que, pour tout $h \leq h_0$, le problème (2.7) admet une unique solution u_h avec $u_h - u \in \mathcal{O}$. De plus, si $u \in H^2(\Omega)$, on a l'estimation d'erreur a priori suivante*

$$\|u_h - u\|_V \leq M \left\{ \|u - \pi_h u\|_V + \|(S_h - S)G(u)\|_V \right\},$$

Où M est une constante indépendante de h .
en plus, si $u \in H^2(\Omega)$ nous avons

$$\|u_h - u\|_{1,\Omega} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega}.$$

2.3 Problème itératif

Dans cette partie, nous utilisons une méthode itérative afin de résoudre le problème discret (2.7). Dans une première étape, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème itératif. Par suite, nous montrons la convergence de cette méthode. Finalement, nous calculons l'estimation d'erreur a posteriori du problème linéarisé.

2.3.1 Algorithme du point fixe

Soit u_h^0 une approximation initiale arbitraire, la méthode du point fixe consiste à trouver u_h^{i+1} tel que

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda \left(|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h \right) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.18)$$

Remarque 2.3.1. *Le problème linéaire (2.18) admet une unique solution, et de plus*

$$\|u_h^{i+1}\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{-1,\Omega}. \quad (2.19)$$

En effet, on pose

$$\begin{aligned} a(u_h^{i+1}, v_h) &= \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v_h + \lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v_h dx, \\ L(v_h) &= \langle f, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} a(u_h^{i+1}, u_h^{i+1}) &= \int_{\Omega} (\nabla u_h^{i+1})^2 + \lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} (u_h^{i+1})^2 dx \\ &\geq \|u_h^{i+1}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

alors $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, d'où l'existence et l'unicité de solution du problème et l'inégalité (2.19).

Théorème 2.3.2 (Convergence du problème itératif). Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif et soit u_h la solution du problème discret. Alors on a l'estimation suivante

$$|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq C_1^{-1} C_2 |u_h^i - u_h|_{1,\Omega},$$

où :

$$\begin{cases} C_1 = 1 - \lambda S_2 S_4 S_8^{2p} \|f\|_{-1,\Omega}^{2p}, \\ C_2 = 4\lambda p S_2 S_4 S_8 S_8^{2p-1} \|f\|_{-1,\Omega}^{2p}, \end{cases}$$

De plus, le schéma (2.18) converge si $C_1 > 0$ et $C_1^{-1} C_2 < 1$.

Preuve. Tout d'abord, en remplaçant v_h par u_h^{i+1} dans l'équation (2.18), on obtient

$$|u_h|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{-1,\Omega}. \quad (2.20)$$

On passe maintenant à démontrer la convergence du problème itératif. On commence par soustraire (2.18) à (2.7), on obtient

$$(\nabla (u_h^{i+1} - u_h), \nabla v_h) = \lambda (|u_h|^{2p} u_h - |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h), \quad \forall v_h \in X_h. \quad (2.21)$$

En intercalant $\pm |u_h^i|^{2p}$ dans (2.7), on obtient l'égalité suivante

$$\lambda (|u_h|^{2p} u_h - |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h) = \lambda (|u_h|^{2p} - |u_h^i|^{2p} u_h, v_h) + \lambda (|u_h^i|^{2p} (u_h - u_h^{i+1}), v_h). \quad (2.22)$$

D'après le Lemme 1.6.2, on a

$$\int_{\Omega} (|u_h|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) u_h v_h dx \leq 2p \int_{\Omega} (|u_h^i|^{2p} + |u_h|^{2p-1}) |u_h^i - u_h| |u_h| |v_h| dx.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (1.4), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|u_h|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) u_h v_h dx &\leq 2p \| |u_h^i|^{2p-1} + |u_h|^{2p-1} \|_{L^8(\Omega)} \|u_h^i - u_h\|_{L^8(\Omega)} \|u_h\|_{L^4(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2p S_2 S_4 S_8 \| |u_h^i|^{2p-1} + |u_h|^{2p-1} \|_{L^8(\Omega)} |u_h^i - u_h|_{1,\Omega} |u_h|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

On prend v_h égale à $u_h^{i+1} - u_h$ dans la dernière inégalité et on utilise les inégalités (2.19) et (2.20), on obtient l'estimation suivante du premier terme

$$\lambda (|u_h|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) u_h, v_h) \leq 4\lambda p S_2 S_4 S_8 S_8^{2p-1} \|f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u_h^i - u_h|_{1,\Omega} |u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega}. \quad (2.23)$$

Il nous reste donc à estimer le second terme du membre de droite de (2.22). Par l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} (|u_h^i|^{2p} (u_h - u_h^{i+1}), v_h) &\leq \| |u_h^i|^{2p} \|_{L^4(\Omega)} \|u_h^{i+1} - u_h\|_{L^4(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \| |u_h^i|^{2p} \|_{L^{8p}(\Omega)} \|u_h^{i+1} - u_h\|_{L^4(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Car

$$\|u_h^i\|_{L^8(\Omega)}^{2p} = \int_{\Omega} \left((u_h^i)^{2p} \right)^4 dx = \int_{\Omega} (u_h^i)^{8p} dx = \|u_h^i\|_{L^8(\Omega)}^{2p},$$

En prenant $v_h = u_h^{i+1} - u_h$ et en utilisant les inégalités (1.4), (2.19) et (2.20), on obtient

$$\lambda \left(|u_h^i|^{2p} (u_h - u_h^{i+1}), v_h \right) \leq \lambda S_2 S_4 S_{8p}^{2p} \|f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega}. \quad (2.24)$$

La conclusion découle des estimations (2.23) et (2.24). D'où le problème itératif (2.18) converge si $C_1 > 0$ et $(C_1^{-1}C_2) < 1$. En effet, le schéma de point fixe converge seulement pour des petites données. \square

2.3.2 Algorithme de Newton

Soit u_h^0 une approximation initiale arbitraire, la méthode de Newton consiste à trouver u_h^{i+1} , tel que

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla \omega_h) + \lambda (2p + 1) \left((u_h^i)^{2p} u_h^{i+1}, \omega_h \right) = 2\lambda p \left((u_h^i)^{2p+1}, \omega_h \right) + \langle f, \omega_h \rangle, \quad (2.25)$$

pour $\omega \in V_h$.

Lemme 2.3.3 (Existence et Unicité). *Le problème (2.25) admet une unique solution.*

Preuve. Pour $\lambda \geq 0$, on pose

$$\begin{aligned} B_{w_h}(u_h, v_h) &= (\nabla u_h, \nabla v_h) + \lambda(2p + 1)(w_h^{2p} u_h, v_h), \\ L_{w_h}(v_h) &= 2\lambda p(w_h^{2p+1}, v_h)(f, v_h). \end{aligned}$$

D'une part, on a par l'injection de Sobolev et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} B_{w_h}(u_h, v_h) &\leq |(\nabla u_h, \nabla v_h)| + \lambda(2p + 1)|(w_h^{2p} u_h, v_h)| \\ &\leq \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda(2p + 1)\|w_h^{2p}\|_{L^2(\Omega)} \|u_h\|_{L^4(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + \lambda(2p + 1)\|w_h^{2p}\|_{L^2(\Omega)}) S_4^2 |u_h|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de $B_{w_h}(\cdot, \cdot)$. Pour la coercivité, en prenant $u_h = v_h$ dans $B_{w_h}(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$B_{w_h}(v_h, v_h) \geq |v_h|_{1,\Omega}^2,$$

d'où l'existence et l'unicité par le Lemme de Lax-Milgram. \square

Théorème 2.3.4 (Théorème de convergence). *Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif (2.25) et soit u_h la solution du problème discret (2.7). Alors, on a l'estimation d'erreur suivante*

$$(C_3 - C_5)|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq (C_4 + C_5)|u_h^i - u_h|_{1,\Omega}.$$

avec,

$$\begin{cases} C_3 = 1 - C\lambda S_2 S_4 S_{8p}^{2p}, \\ C_4 = 4C\lambda p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1}, \\ C_5 = 2C\lambda p S_2 S_4 S_{8p}^{2p}. \end{cases}$$

De plus, la méthode de Newton converge si $C_3 - C_5 > 0$ et $(C_3 - C_5)^{-1}(C_4 - C_5) < 1$.

2.4 Analyse d'erreur a posteriori

Le but de cette section est de dériver une estimation d'erreur a posteriori/ Notre estimation borne l'erreur calculée en norme $H_0^1(\Omega)$ entre la solution exacte u est la solution u_h^{i+1} . Pour cela, nous rappelons tout d'abord quelques notations utiles.

Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on désigne par $\mathcal{E}(K)$ (resp. $\mathcal{N}(K)$) l'ensemble de ses arêtes (resp. l'ensemble des ses noeuds). Ensuite, on désigne par \mathcal{E}_h (resp. \mathcal{N}_h) l'ensemble de toutes les arêtes (resp. les noeuds) de \mathcal{T}_h , par $\mathcal{E}_{h,\Omega}$ (resp. $\mathcal{N}_{h,\Omega}$) l'ensemble des arêtes (resp. noeuds) situées à l'intérieur de \mathcal{T}_h et $\mathcal{E}_{h,\partial\Omega}$ (resp. $\mathcal{N}_{h,\partial\Omega}$) l'ensemble des arêtes (resp. noeuds) situées à l'extérieur de \mathcal{T}_h .

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_{h,\Omega} \cup \mathcal{E}_{h,\partial\Omega} \text{ et } \mathcal{N}_h = \mathcal{N}_{h,\Omega} \cup \mathcal{N}_{h,\partial\Omega}.$$

Pour un élément K , on définit le patch de K (noté ω_K) par l'ensemble de tous les éléments qui ont une arête commune avec K (voir la Figure 2.1). Pour une arête E , on désigne

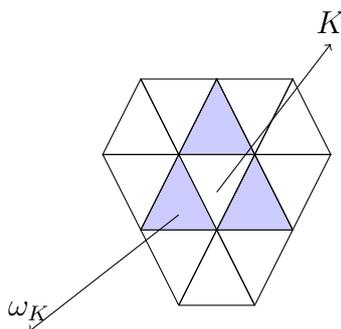


FIGURE 2.1 – Patch d'un élément K .

le vecteur normal orienté vers l'extérieur par n . On note $[v_h]$ le saut d'une fonction v à travers une arête E . Finalement, on note R_h l'opérateur d'interpolation de Clément. On rappelle les deux inégalités suivantes :

Lemme 2.4.1. *Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$*

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K |v|_{1,\Delta K}, \\ \|v - R_h v\|_{L^2(E)} &\leq Ch_E^{\frac{1}{2}} |v|_{1,\Delta E}. \end{aligned}$$

Où Δ_K et Δ_E sont les ensembles suivants :

$$\Delta_K = \bigcup \{K' \in \tau_h : K' \cap K \neq \emptyset\}, \quad \text{et} \quad \Delta_E = \bigcup \{K' \in \tau_h : K' \cap E \neq \emptyset\}.$$

On rappelle maintenant les propriétés suivantes qui ont été démontrées dans [8].

Proposition 2.4.2. *Pour tout $v \in P_r(K)$, on a*

$$C \|v\|_{L^2(K)} \leq \|v\psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)} \leq \|v\|_{L^2(K)}, \quad (2.26)$$

$$|v|_{1,K} \leq Ch_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}. \quad (2.27)$$

Où r un entier positif et ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K (produit des coordonnées barycentriques associées aux sommets du triangle K).

Remarque 2.4.3. *Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif (2.25) et u la solution du problème continu (2.1). Alors, on a*

$$\int_{\Omega} \nabla(u_h^{i+1} - u) \nabla u dx = \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{2p} u v dx - \int_{\Omega} f v dx. \quad (2.28)$$

2.4.1 Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Point-fixe

Dans cette partie, notre objectif est de calculer l'estimation d'erreur a posteriori du problème linéarisé (2.18). Pour cela, on introduit les notations suivantes :

- on définit l'indicateur d'erreur de linéarisation $\eta_{K,i}^{(L)}$ et l'indicateur d'erreur de discrétisation $\eta_{K,i}^{(D)}$ par

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}, \\ \left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2 &= h_K^2 \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \varepsilon_{h,\Omega}} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

- f_h est une approximation de la donnée f qui est constante sur chaque élément K de \mathcal{T}_h .

En prenant la différence entre (2.2) et (2.18), on dérive l'équation résiduelle suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{2p} u v dx - \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx \\ &= \int_K (f - f_h) (v - v_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) (v - v_h) dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

Nous intercalons $\pm \lambda \int_{\Omega} |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v dx$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} |u|^{2p} u v dx - \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx \\ &= \int_K (f - f_h) (v - v_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) (v - v_h) dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) d\tau \right\} + \lambda \int_{\Omega} (|u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p}) u_h^{i+1} v dx. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Hypothèse 2.4.4. Nous considérons une solution u_h^{i+1} du problème (2.18) est tel que l'opérateur $Id + SDG(u_h^{i+1})$ soit isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.4.5. Grâce au Théorème de convergence 2.3.2, avec $C_1 > 0$ et $C_2 C_1^{-1} < 1$, l'Hypothèse 2.4.4 découlent facilement du fait que $Id + SDG(u)$ est un isomorphisme lorsque h est suffisamment petit.

Théorème 2.4.6 (Borne supérieure de l'erreur). Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif (2.18) et soit u_h la solution du problème discret (2.7). On suppose que l'Hypothèse 2.4.4 est vérifiée, alors il existe un voisinage \mathcal{O} de u tel que, pour tout $u_h^{i+1} \in \mathcal{O}$ on a l'estimation d'erreur suivante

$$|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((\eta_{K,i}^{(D)})^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_{K,i}^{(L)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 2.2.5 et l'Hypothèse 2.4.4, on a grâce à [10] l'existence d'un voisinage \mathcal{O} de u tel que, pour tout $u_h^{i+1} \in \mathcal{O}$, on a

$$|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq C \|u_h^{i+1} + SG(u_h^{i+1})\|_{-1,\Omega}. \quad (2.30)$$

En introduisant $F(u)$ dans (2.30) et en utilisant l'équation (2.29), on obtient

$$\begin{aligned} |u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} &\leq C \left(\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \inf_{v_h \in H_{0,h}^1(\Omega)} \frac{\langle f - f_h, v - v_h \rangle + \langle J, v - v_h \rangle}{|v|_{1,\Omega}} \right. \\ & \quad \left. + \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\lambda \int_{\Omega} (|u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p}) u_h^{i+1} v dx}{|v|_{1,\Omega}} \right). \quad (2.31) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \langle J, v - v_h \rangle = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{\Omega} \left(f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \right) (v - v_h) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Grâce au Lemme 1.6.2, on a

$$\left(\lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p} \right) v_h^{i+1} v dx \leq 2p\lambda \int_{\Omega} \left(|u_h^i - u_h^{i+1}| (|u_h^i|^{(2p-1)} + |u_h^{i+1}|^{(2p-1)}) u_h^{i+1} v dx \right)$$

En utilisant (2.19) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient une majoration du deuxième terme du membre droite de (2.31) par η_L .

En prenant $v_h = \mathcal{R}_h v$ comme fonction test dans (2.31), on obtient

$$\begin{aligned} \langle f - f_h, v - \mathcal{R}_h v \rangle + \langle J, v - v_h \rangle & \leq \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \|v - \mathcal{R}_h v\| \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\| \|v - \mathcal{R}_h v\| \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\| \|v - \mathcal{R}_h v\|. \end{aligned}$$

Le résultat découle en utilisant la première inégalité du Lemme 2.4.1. \square

Théorème 2.4.7 (Borne inférieure de l'erreur). *Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} & \leq \|u_h^i - u\|_{1,\omega_K} + \|u_h^{i+1} - u\|_{1,\omega_K}, \\ \eta_{K,i}^{(D)} & \leq C \left(\|u_h^i - u\|_{1,\omega_K} + \|u_h^{i+1} - u\|_{1,\omega_K} + \sum_{K \subset \omega_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right). \end{aligned}$$

Preuve. On a, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} = |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K} & = |u_h^{i+1} - u + u - u_h^i|_{1,K} \\ & \leq |u_h^{i+1} - u|_{1,K} + |u - u_h^i|_{1,K}. \end{aligned}$$

Et alors la première estimation. On passe maintenant à démontrer la deuxième estimation. Pour cela, nous intercalons $\pm \lambda \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx$ et $\pm \lambda \int_{\Omega} |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v dx$ dans (2.28). En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx) \\ & = \int_K \nabla (u_h^{i+1} - u) \nabla v dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) v dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E^{\frac{1}{2}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] v d\mathcal{T} \\ & + \lambda \int_{\Omega} \left(|u|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} \right) v dx + \lambda \int_{\Omega} u_h^{i+1} \left(|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p} \right) v dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En prenant $v = v_K$ dans (2.32), tel que

$$v_K = \begin{cases} (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i| u_h^{i+1}) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

où ψ_K est la fonction bulle sur le triangle K . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \\ & \leq (1 + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^{2p}) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} \|v_K\|_{1,K} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)} \\ & \quad + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^{2p} \|u_h^i + u_h^{i+1}\|_{1,K} \|v_K\|_{1,K}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

En appliquant les inégalités (2.26) et (2.27) à l'équation (2.33) nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} h_K \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}^2 & \leq (1 + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^{2p}) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} \|v_K\|_{L^2(K)} \\ & \quad + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)} \\ & \quad + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^{2p} \|u_h^i + u_h^{i+1}\|_{1,K} \|v_K\|_{L^2(K)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation suivante du premier terme de l'estimateur de discrétisation locale $\eta_{K,i}^{(D)}$.

$$\begin{aligned} h_K \|f + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K)} & \leq C (\|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)}) + C' \eta_{K,i}^{(L)}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

où $C' = \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^{2p}$.

On estime maintenant le deuxième terme de $\eta_{D,K}$. De même en utilisant (2.32), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{E \in \varepsilon_{h,\Omega}} h^{\frac{1}{2}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] v d\tau \\ & = \int_{\Omega} \nabla (u - u_h^{i+1}) \cdot \nabla v dx + \sum_{K \in \tau_h} \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) v dx - \int_{\Omega} (f - f_h) v dx \\ & \quad - \lambda \int_{\Omega} (|u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} - |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) v dx - \lambda \int_{\Omega} (|u|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1}) v dx. \end{aligned}$$

Nous choisissons $v = v_E$ dans cette dernière égalité, tel que

$$v_E = \begin{cases} L_{E,K} \left(\left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \psi_E \right) & K \in \{K, K'\}, \\ 0 & \Omega \setminus (K \cup K'). \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \psi^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(E)}^2 \\ & \leq (1 + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^2) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K \cup K'} \|v_E\|_{1,K \cup K'} + \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(K \cup K')} \\ & \quad + \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(K \cup K')} + C' \eta_{K,i}^{(L)} |v_E|_{1,K \cup K'} \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (2.26) et (2.27), on trouve

$$\begin{aligned} & h_E^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2 \\ & \leq (1 + \lambda C \|f\|_{-1,\Omega}^2) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K \cup K'} \|v_E\|_{L^2(E)} + h_E \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(E)} \\ & \quad + h_E \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(K \cup K')} + C' \eta_{K,i}^{(L)} \|v_E\|_{L^2(E)}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Par les deux inégalités (2.35) et (2.36), on a l'estimation suivante :

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\|u - u_h^{i+1}\|_{1,w_K} + \sum_{K \subset w_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right) + C' \eta_{K,i}^{(L)}.$$

Puisque :

$$\eta_{K,i}^{(D)} = |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K} \leq |u_h^{i+1} - u|_{1,K} + |u_h^i - u|_{1,K},$$

nous obtenons le résultat final

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\|u - u_h^i\|_{1,w_K} + \|u - u_h^{i+1}\|_{1,w_K} + \sum_{K \subset w_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).$$

□

2.4.2 Analyse d'erreur a posteriori pour l'algorithme de Newton

Dans cette partie, notre objectif est de calculer l'estimation d'erreur a posteriori du problème linéarisé (2.25). Pour cela, on introduit les notations suivantes :

- on définit l'indicateur d'erreur de linéarisation $\eta_{K,i}^{(L)}$ et l'indicateur d'erreur de discrétisation $\eta_{K,i}^{(D)}$ par

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}, \\ \left(\eta_{K,i}^{(D)} \right)^2 &= h_K^2 \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} + 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}\|_{L^2(K)}^2 \\ & \quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

- f_h est une approximation de la donnée f qui est constante sur chaque élément K de \mathcal{T}_h .

En prenant la différence entre (2.2) et (2.25), on dérive l'équation résiduelle suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u|^{2p} u v dx - 2\lambda p \int_{\Omega} u^{2p+1} v dx \\
 & - \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v dx - \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx + 2\lambda p \int_{\Omega} (u_h^i)^{2p+1} v dx \\
 & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) (v - v_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \right. \\
 & \left. + 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}) (v - v_h) dx - \frac{1}{2} \sum_{E \in \varepsilon_{h,\Omega}} \int_E \left[\frac{\partial u_E^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) d\tau \right\} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Nous intercalons $\pm \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v dx$ et $\pm 2\lambda p \int_{\Omega} (u_h^{i+1})^{2p+1} v dx$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u|^{2p} u v dx - 2\lambda p \int_{\Omega} u^{2p+1} v dx - \int_{\Omega} \nabla u_h^{i+1} \nabla v dx \\
 & \quad - \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v dx + 2\lambda \int_{\Omega} (u_h^{i+1})^{2p+1} v dx \\
 & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) (v - v_h) dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \right. \\
 & \quad \left. + 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} (v - v_h)) dx + \frac{1}{2} \sum_{K \in Y_K} h_E^{\frac{1}{2}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) d\tau \right\} \\
 & + 2\lambda p \int_{\Omega} \left((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1} \right) v dx + \lambda (2p+1) \int_{\Omega} u_h^{i+1} \left(|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p} \right) v dx \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Avant de commencer à démontrer l'estimation d'erreur a posteriori, on a besoin d'introduire quelques notations.

On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}
 & \tilde{G} : v \rightarrow \omega \\
 & \omega \rightarrow \tilde{G}(w) = f - \lambda (2p+1) |w|^{2p} w + 2\lambda p w^{2p+1}, \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

et on pose

$$\tilde{F}(u) = u - S\tilde{G}(u).$$

Lemme 2.4.8. *Il existe un voisinage $\sqrt{\cdot}$ tel que l'application $SD\tilde{G}(u)$ est lipschitzienne. En effet, il existe un nombre réel $\tilde{L} > 0$ tel que*

$$\forall \omega \in \sqrt{\cdot} \|S(D\tilde{G}(u) - D\tilde{G}(w))\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq \tilde{L} |u - w|_{1,\Omega}.$$

Preuve. Nous avons

$$\|S \left(D\tilde{G}(u) - D\tilde{G}(w) \right) \|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq \|D\tilde{G}(u) - D\tilde{G}(w)\|_{-1,\Omega}. \quad (2.40)$$

Pour tout $z \in H_0^1(\Omega)$

$$\|D\tilde{G}(u)z - D\tilde{G}(w)z\|_{-1,\Omega} = \sup_{z \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle D\tilde{G}(u)z - D\tilde{G}(w)z \rangle|}{|z|_{1,\Omega}}.$$

et

$$D\tilde{G}(u)z - D\tilde{G}(w)z = 2\lambda p(2p+1)(|w|^{2p-1} - |u|^{2p-1})z - 2\lambda p(2p+1)(|w|^{2p} - |u|^{2p})z. \quad (2.41)$$

Par le lemme 1.6.2.

$$\begin{aligned} \left| |w|^{2p-1} - |u|^{2p-1} \right| &\leq (2p-1) |w - u| (|w|^{2p-2} + |u|^{2p-2}), \\ \left| |w|^{2p} - |u|^{2p} \right| &\leq 2p |w - u| (|w|^{2p-1} + |u|^{2p-1}). \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} |\langle D\tilde{G}(u) - D\tilde{G}(w) \rangle| &\leq 2\lambda p(2p+1)(2p-1) |w - u| (|w|^{2p-2} + |u|^{2p-2}) \\ &\quad - 2\lambda p(2p+1) 2p |w - u| (|w|^{2p-1} + |u|^{2p-1}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

On combinant ces deux inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} \|S \left(D\tilde{G}(u) - D\tilde{G}(w) \right) \|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \\ \leq (4\lambda p^2 + 2\lambda p) (|u|^{2p-1} + |w|^{2p-1}) (|u|^{2p} + |w|^{2p}) |u - w|_{1,\Omega} \leq \tilde{L} |u - w|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

□

Hypothèse 2.4.9. la solution u_h^{i+1} du problème (2.25) est telle que l'opérateur $ID + SD\tilde{G}(u_h^{i+1})$ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ (voir remarque 2.4.5).

Maintenant on indique le premier résultat de cette section :

Théorème 2.4.10. (Borne supérieure de l'erreur)

Soit u et u_h^{i+1} sont la solution du problème continue et du problème itératif respectivement, nous avons l'estimation suivante :

$$|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\left(\eta_{K,i}^{(D)} \right) + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\left(\eta_{K,i}^{(L)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.43)$$

où C est une constante qui dépend de λ , p , f et u_0 .

Preuve. En raison de Lemme (2.4.8) et l'hypothèse (2.4.9), pour tout u_h^{i+1} dans le voisinage approprié \mathcal{O} de u

$$|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq C \left\| u_h^{i+1} - S\tilde{G}(u_h^{i+1}) \right\|_{-1,\Omega}. \quad (2.44)$$

En introduisant $\tilde{F}(u)$ dans (2.44) et de l'équation (2.38), nous obtenons

$$\begin{aligned} |u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq c \left(\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \inf_{v_h \in H_{0,h}^1(\Omega)} \frac{\langle f - f_h, v - v_h \rangle + \langle \tilde{J}, v - v_h \rangle}{|v|_{1,\Omega}} \right. \\ \left. + \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\lambda (2p + 1) \int_{\Omega} (|u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p}) u_h^{i+1} v \, dx}{|v|_{1,\Omega}} \right. \\ \left. + \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{2 \lambda p \int_{\Omega} (|u_h^i|^{2p+1} - |u_h^{i+1}|^{2p+1}) v \, dx}{|v|_{1,\Omega}} \right), \quad (2.45) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \langle \tilde{J}, v - v_h \rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left(f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda (2p + 1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} + 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \right) (v - v_h) \, dx \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] (v - v_h) \, d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant les deux derniers termes du côté droit de l'équation (2.45)

Comme précédent

$$\lambda (2p + 1) \int_{\Omega} u_h^{i+1} (|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v \, dx.$$

est estimé comme suite

$$\lambda (2p + 1) \int_{\Omega} u_h^{i+1} (|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v \, dx \leq \lambda (2p + 1) S' c |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}, \quad (2.46)$$

avec $S' = 4p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1}$. De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, Lemme (1.6.2) et l'inégalité (1.4) on a

$$2\lambda p \int_{\Omega} \left((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1} \right) v \, dx \leq 2(2p + 1) c \lambda p S_2 S_4^2 |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \quad (2.47)$$

En prenant $v_h = \mathcal{R}_h v$, comme fonction test dans (2.45) on obtient

$$\begin{aligned} \langle f - f_h, v - \mathcal{R}_h v \rangle + \langle \tilde{J}, v - v_h \rangle \leq \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \|v - \mathcal{R}_h v\| \\ + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda (2p + 1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} + 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}\|_{L^2(\Omega)} \|v - \mathcal{R}_h v\| \\ + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\| \|v - \mathcal{R}_h v\|. \end{aligned}$$

le résultat découle. \square

Théorème 2.4.11. (Borne inférieure de l'erreur)

Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(L)} &\leq \|u_h^i - u\|_{1,w_K} + \|u_h^{i+1} - u\|_{1,w_K}, \\ \eta_{K,i}^{(D)} &\leq C \left(\|u_h^i - u\|_{1,w_K} + \|u_h^{i+1} - u\|_{1,w_K} + \sum_{K \subset w_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).\end{aligned}$$

Preuve. On a, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(L)} = |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K} &= |u_h^{i+1} - u + u - u_h^i|_{1,K} \\ &\leq |u_h^{i+1} - u|_{1,K} + |u - u_h^i|_{1,K}.\end{aligned}$$

Et alors la première estimation. On passe maintenant à démontrer la deuxième estimation. Pour cela, nous intercalons $\pm 2\lambda p \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p+1} v dx$, $\pm \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v dx$ et $\pm \lambda (2p+1) \int_{\Omega} |u_h^i + 1|^{2p} u_h^{i+1} v dx$ dans (2.28). En utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}) v dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla (u_h^{i+1} - u) \nabla v dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) v dx - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h_E^{\frac{1}{2}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] v d\tau \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} (|u|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1}) v dx + \lambda (2p+1) \int_{\Omega} u_h^{i+1} (|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v dx \\ &\quad + 2\lambda p \int_{\Omega} \left((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1} \right) v dx.\end{aligned}\tag{2.48}$$

En prenant $v = v_K$ dans (2.48) tel que

$$v_K = \begin{cases} (f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}) \psi_K & \text{sur } K, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

où ψ_K est la fonction de bulle sur le triangle K . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}&\left\| f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \psi_K^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq (1 + \lambda C) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} |v_K|_{1,K} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \lambda C (4p+1) \|u_h^i - u_h^{i+1}\|_{1,K} |v_K|_{1,K}.\end{aligned}\tag{2.49}$$

En appliquant les inégalités (2.26) et (2.27) à l'équation (2.49) nous obtenons l'estimation

suisant

$$\begin{aligned}
 & \left\| f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \right\|_{L^2(K)}^2 \\
 & \leq (1 + \lambda c) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} |v_K|_{1,K} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)} \\
 & \quad + \lambda C (4p+1) \|u_h^i - u_h^{i+1}\|_{1,K} |v_K|_{1,K}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Par conséquent, nous obtenons l'estimation suivante de premier terme de l'estimateur de discrétisation local $\eta_{K,i}^{(D)}$.

$$\begin{aligned}
 & h_K \left\| f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \right\|_{L^2(K)} \\
 & \leq C \left(\|u - u_h^{i+1}\|_{1,K} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right) + \lambda C (4p+1) \eta_{K,i}^{(L)}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

On estime maintenant la deuxième terme $\eta_{K,i}^{(D)}$. De même, en utilisant (2.48), on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,\Omega}} h^{\frac{1}{2}} \int_E \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] v d\mathcal{T} &= \int_{\Omega} \nabla (u - u_h^{i+1}) \nabla v dx + \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \int_K f_h + \Delta u_h^{i+1} \\
 & \quad + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} v dx - \int_{\Omega} (f - f_h) v dx \\
 & - \lambda \int_{\Omega} \left(|u_h|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} \right) v dx + \lambda (2p+1) \int_{\Omega} u_h^{i+1} \left(|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p} \right) v dx \\
 & \quad + 2\lambda p \int_{\Omega} \left((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1} \right) v dx.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Nous choisissons $v = v_E$ dans cette dernière égalité, tel que

$$v_E = \begin{cases} L_{E,K} \left(\left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \psi_E \right) & k \in \{K, K'\}, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'). \end{cases}$$

avec la même notation que dans la preuve du Théorème 2.4.11, en utilisant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité (1.4), (2.26) et (2.27), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & h_E^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2 \\
 & \leq (1 + \lambda C) \|u - u_h^{i+1}\|_{1,K \cup K'} \|v_E\|_{L^2(E)} + h_E \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(E)} \\
 & \quad + h_E \left\| \left(f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda (2p+1) |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \right) \right\|_{L^2(K \cup K')} \|v_E\|_{L^2(K \cup K')} \\
 & \quad + \lambda C (4p+1) \eta_{K,i}^{(L)} |v_E|_{1,K \cup K'}.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Par les deux inégalités (2.51) et (2.53) on a l'estimation suivante

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\|u - u_h^{i+1}\|_{1,w_K} + \sum_{K \subset w_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) + 2\lambda C (4p+1) \eta_{K,i}^{(L)}.$$

Puisque :

$$\eta_{K,i}^{(L)} = |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K} \leq |u_h^{i+1} - u|_{1,K} + |u_h^i - u|_{1,K},$$

nous obtenons le résultat final

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\|u - u_h^i\|_{1,w_K} + \|u - u_h^{i+1}\|_{1,w_K} + \sum_{K \subset w_K} h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).$$

□

Application numérique

Résumé

Afin de valider les résultats théoriques du Chapitre 2, nous proposons quelques tests numériques.

Sommaire

3.1	Exemple 1 : L'estimation d'erreur a priori par l'algorithme de point fixe	33
3.2	Exemple 2 : L'estimation d'erreur a posteriori pour l'algorithme de point-fixe	35

Considérons le problème non linéaire (2.1). Dans chaque test proposé, on commence par choisir dans (2.1) le domaine Ω . Et ensuite comme la recherche de la solution exacte pour ce type de problème n'est pas triviale, la vérification des résultats abstraits se fera en choisissant une solution exacte arbitraire, notée u , de façon à obtenir la fonction f (second membre).

3.1 Exemple 1 : L'estimation d'erreur a priori par l'algorithme de point fixe

Le domaine Ω sera le carré $]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$, comme le montre la Figure 3.1.

Nous prenons comme solution exacte

$$u(x, y) = x(x - 1)y(y - 1)((x^2 + y^2))e^{xy}.$$

La fonction u satisfait clairement la condition aux limites $u = 0$ sur la frontière du domaine, i.e., sur chaque côté du carré. En calculant directement le second membre f , on

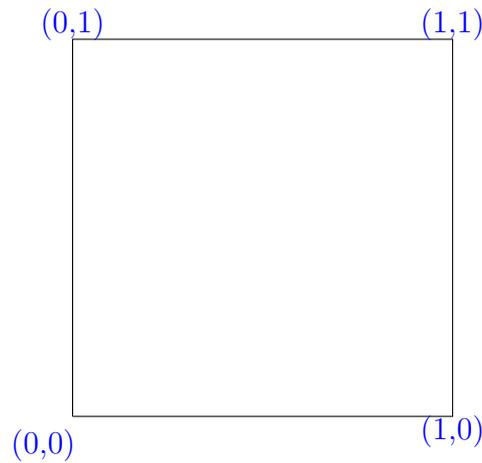


FIGURE 3.1 – Le domaine Ω en $2d$.

obtient

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u \\
 &= -(2 + y(2x - 1))(x^2 + y^2) + 2x(2x - 1)(y^2 - y)e^{xy} \\
 &\quad + (2 + x(2y - 1))(x^2 + y^2) + 2y(2y - 1)(x^2 - x)e^{xy} \\
 &\quad + \lambda |x(x - 1)y(y - 1)(x^2 + y^2)e^{xy}|^{2p} (x(x - 1)y(y - 1)(x^2 + y^2)e^{xy}).
 \end{aligned}$$

Ici, nous utilisons l'élément fini de Galerkin sur un maillage régulier \mathcal{T}_h obtenu en divisant chaque segment par $n, 1 \leq n \leq N$, sous intervalles et divisant chaque carré obtenu en deux triangles (voir Figure 3.2).

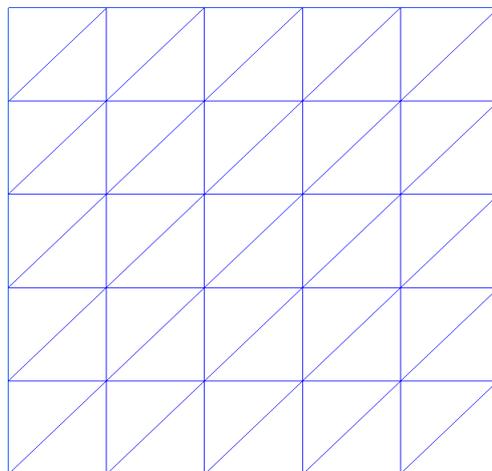


FIGURE 3.2 – Maillage régulier du carré $\Omega = (0, 1)^2$ pour $n = 5$.

Pour le calcul de l'estimation d'erreur, nous définissons l'erreur suivante :

$$err_L = \frac{|u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,\Omega}}{|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}}.$$

et en utilisant le critère d'arrêt classique $err_L \leq 10^{-7}$. La Figure 3.3 montre la solution approchée u_h^{i+1} par le schéma itératif (2.18), avec $\lambda = 1, p = 1$ et $h = 0.1$.

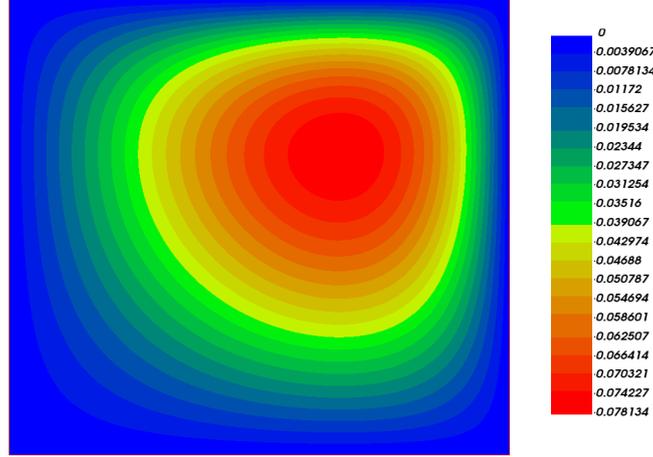


FIGURE 3.3 – La solution approchée par le schéma itératif (2.18), avec $\lambda = 1, p = 1$ et $h = 0.1$.

Nous vérifions maintenant la convergence de la solution approchée u_h^{i+1} donnée par le schéma itératif (2.18) vers la solution exacte. Les résultats numériques obtenus sont cohérents, comme le montre la Figure 3.4. D'après ces résultats, l'ordre de convergence est à peu près égale à 1, ce qui vérifie l'estimation d'erreur théoriques du Théorème 2.3.2.

3.2 Exemple 2 : L'estimation d'erreur a posteriori pour l'algorithme de point-fixe

Dans cette exemple, nous considérons comme solution exacte

$$u(x, y) = e^{-100(x^2+y^2)}.$$

donc

$$f(x, y) = 200[2 - 200(x^2 + y^2)]e^{-100(x^2+y^2)} + \lambda e^{-100(1+p)(x^2+y^2)}.$$

Le domaine Ω sera le carré $] - 1, 1[$. Notons que u est presque nulle sur la frontière de Ω .

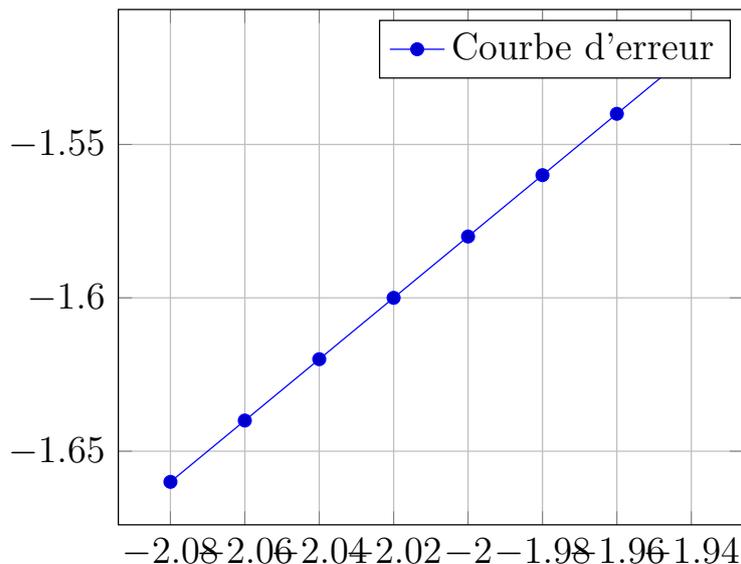


FIGURE 3.4 – Courbe d'erreur en échelle logarithmique

On définit l'indicateur d'erreur global de discrétisation par

$$\eta_i^{(D)} = \left(\sum_{K \in \tau_h} \left(\eta_{K,i}^{(D)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

où

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}, \\ \left(\eta_{K,i}^{(D)} \right)^2 &= h_K^2 \|f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \varepsilon_{h,\Omega}} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

Soit γ un paramètre positif. L'objectif de notre algorithme adaptatif est de construire le maillage τ_h de façon que

$$err_L \leq \gamma \eta_i^{(D)}.$$

Alors nous introduisons l'algorithme adaptatif suivant

- i) Considérer un maillage initial \mathcal{T}_i .
 - (1) Résoudre le problème sur \mathcal{T}_i .
 - (2) Pour tout $K \in \mathcal{T}_i$, calculer l'estimateur d'erreur de discrétisation $\eta_i^{(D)}$ et l'estimateur de linéarisation $\eta_i^{(L)}$.
- ii) Si l'erreur globale est suffisamment petite, alors, **arrêter**. Sinon, choisir les éléments à raffiner et reprendre à l'étape (2).

La Figure 3.6 montre l'évolution du maillage au cours des itérations. Nous remarquons que le maillage se concentre de plus en plus au centre du carré là où la solution n'est pas nulle.

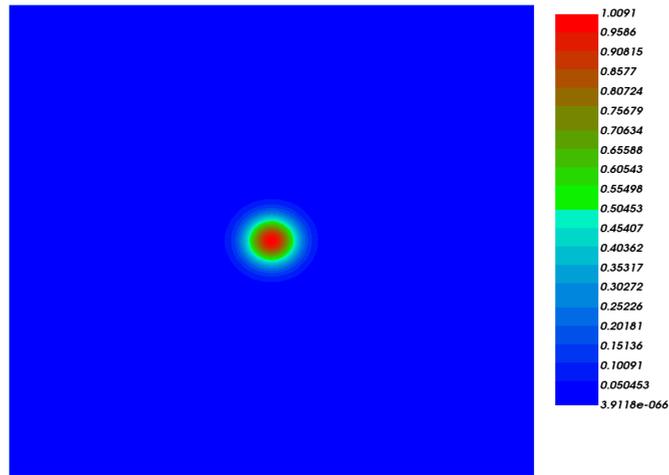


FIGURE 3.5 – La solution approchée par le schéma itératif (2.18), avec $\lambda = 2$, $p = 1$ et $h = 0.0125$.

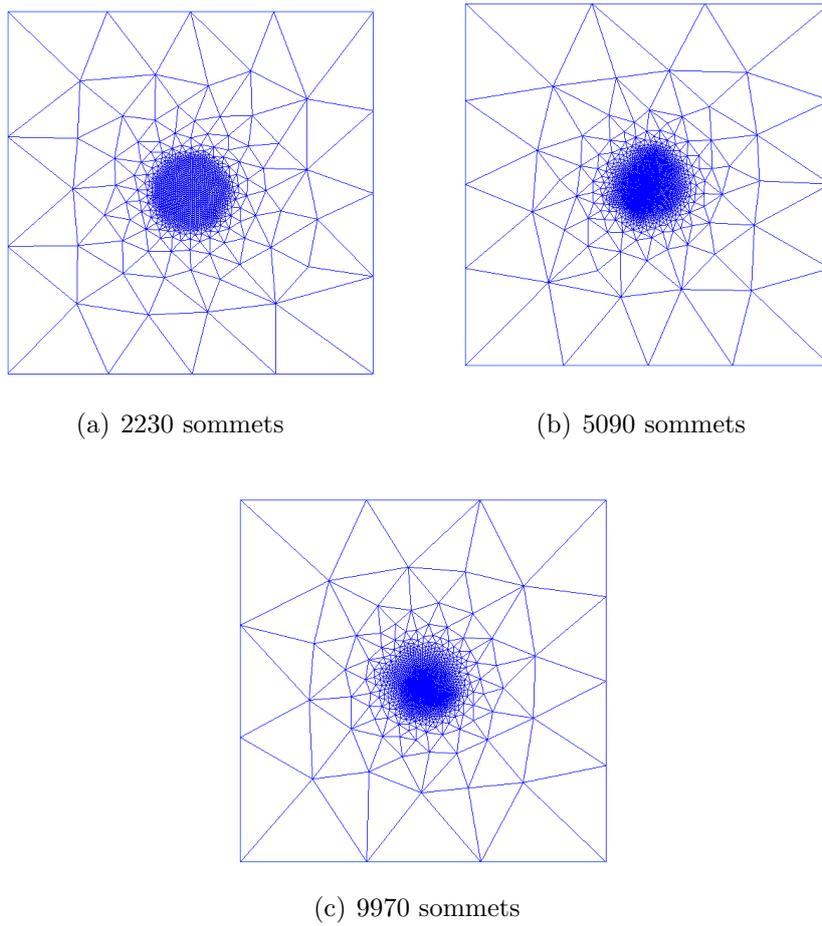


FIGURE 3.6 – Maillage après le raffinement adaptatif à avec $\lambda = 2$ et $p = 1$.

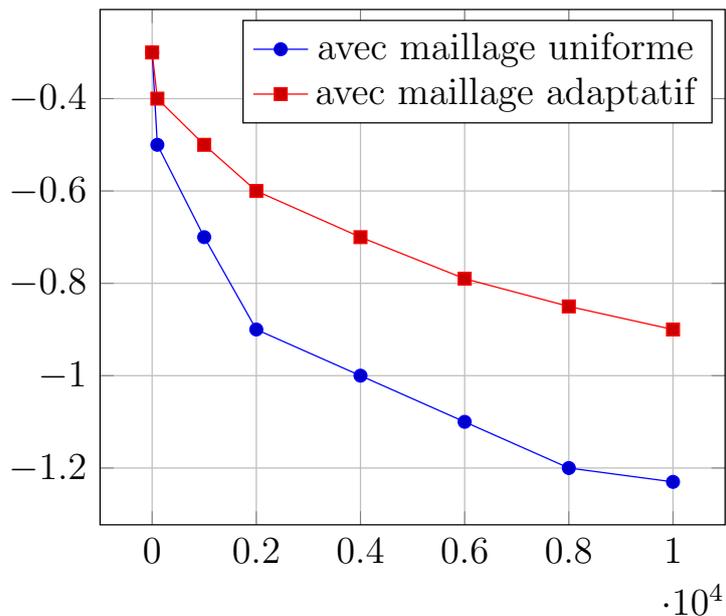


FIGURE 3.7 – Courbes d'erreur en fonction du nombres de sommets

La Figure 3.7 montre les deux courbes relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) correspond à un maillage uniforme avec n allant de 10 à 100 par pas de 10, alors que la seconde (bleue) correspond à un maillage adaptatif avec $\lambda = 50$, $p = 10$ et $\gamma = 10^{-3}$. Nous remarquons que l'erreur avec un maillage adaptatif est beaucoup plus petite que celle avec un maillage uniforme, d'où l'efficacité de notre méthode.

Bibliographie

- [1] <http://www.freefem.org>.
- [2] M. Ainsworth and J. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 1–88, 1997.
- [3] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*, volume 785 of *Mathématiques appliquées*. Les éditions de l’Ecole polytechnique, Paris, 2005.
- [4] I. Babuvvska and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.* 4, pages 736–754, 1978.
- [5] A.-L. Chaillou and M. . Suri. Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models. *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering 196*, pages 210–224, 2006.
- [6] A.-L. Chaillou and M. . Suri. A posteriori estimation of the linearization error for strongly monotone nonlinear operators. *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering 196*, pages 72–87, 2007.
- [7] G. M. T. S. Christine Bernardi, Jad Dakroub. A posteriori analysis of iterative algorithms for a nonlinear problem. *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering 200*, page 21, 2013.
- [8] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Rev. Française Automat. nformat. Recherche Opérationnelle sér.*, pages 9(R–2) : 77–84, 1975.
- [9] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, Boston–London–Melbourne, 1985.
- [10] J.Poussin and J.Rappaz. Consistency , stability ,a priori and a posteriori errors for petrov-galerkin methods applied to nonlinear problems. *Numer Math 69*, pages 213–231, 1994.
- [11] O. Kavians. *Introduction à la théorie des points critiques*, volume VIII, 327 of *Mathématiques et Applications*. Springer Berlin, Heidelberg, 1993.

- [12] A. E. L. El Alaoui and M. Vohralík. Guaranteed and robust a posteriori error estimate and balancing discretization and linearization errors for monotone non linear problems. *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering 200*, pages 2782–2795, 2011.
- [13] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, volume 375 of *Sciences sup.* Masson, 2004.
- [14] S. Repin. A posteriori estimates for partial differential equations. *on Computational and Applied Mathematics, Walter de Gruyter GmbH and Co, Berlin*, 2008.
- [15] T. Strouboulis and K. A. Rheinboldt. Recent experiences with error estimation and adaptivity i : Review of error estimators for scalar elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pages 399–436, 1992.
- [16] R. Verfurth. A posteriori error estimates for non linear problems. *Dunod*, 1994.
- [17] R. Verfurth. A posteriori error estimation techniques for finite element methods. *SIAM J. Numer. Anal.* 4, 2013.
- [18] J. ZHU and O. ZIENKIEWIGZ. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, pages 377–357, 1987.
- [19] J. ZHU and O. ZIENKIEWIGZ. Adaptive techniques in the finite element method. *Comm. Appl. Numer. Methods* 4, pages 197–204, 1988.