République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Analyse mathématique d'une formulation non-symétrique pour les équations de Brinkman

Présenté par :

Ines Ahres

devant le jury composé de :

Présidente	: Mme Wahiba Khellaf	M.C.B. Université de Jijel.
Encadrante	: Mme Yasmina Daikh	M.C.A. Université de Jijel.
Examinatrice	: Mme Fatiha Mesdoui	M.C.B. Université de Jijel.

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire Mme **Yasmina Daikh**, Maître de conférences A à l'université de Jijel. Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans son aide, son orientation et ses conseils. Je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également à Mme **Wahiba Khellaf**, Maître de conférences B à l'université de Jijel, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Je remercie également Mme **Fatiha Mesdoui**, Maître de conférences B à l'université de Jijel, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de l'enrichir par ses précieuses remarques.

Un grand merci à l'ensemble de ma famille et plus particulièrement à **mes chers parents** que je ne pourrais jamais les remercier suffisament. Je les remercier pour leur amour inconditionnel et infini, leur confiance ainsi que leur soutien. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

Je ne peux pas clore cette liste sans remercier **Djamila**, une amie très proche qui m'a beaucoup soutenu, je la remercie pour les moments agréables partagés.

À tous ces aimables personnes, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Introduction

La mécanique des fluides est la branche qui étudie l'équilibre et le mouvement des fluides (liquide ou gaz), c'est à dire, l'écoulement d'un fluide. Un fluide est tout corps qui prend la forme de son contenant, ce fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression exterieure, comme les liquides (eau, huile, ...). Contrairement au fluide compressible qui change son volume selon son contenant et on peut considérer les gazs comme des fluides compressibles (oxygène, hydrogène, ...). L'étude des milieux poreux est un domaine de recherche très important dans la mécanique des fluides, pour cela les chercheurs ont essayé toujours d'améliorer les équations physiques qui interviennent dans la modélisation de différents phénomènes.

H. C. Brinkman introduisait en 1947 l'équation qui permet de décrire de manière continue le passage d'un écoulement de type Darcy à un écoulement de type Stokes, en combinant l'équation de Darcy avec celle de Stokes. L'équation de Brinkman [10] s'écrit sous la forme :

$$\frac{\nu}{\mathbf{K}}\boldsymbol{u} - \nu_{eff}\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = 0, \tag{1}$$

où $\boldsymbol{u}$ représente la vitesse, p représente la pression, ν est la viscosité dynamique du fluide, $\mathbf{K}$ est la perméabilité du milieu et ν_{eff} est la viscosité effective ou bien le terme de Brinkman. L'équation (1) permet de décrire précisement l'écoulement dans un milieu poreux si la porosité reste superieure à 95% [14]. L'équation de Darcy s'obtient en prenant une viscosité effective nulle dans l'équation (1). Par contre, si la viscosité dynamique est nulle, on obtient l'équation de Stokes. Brinkman a considéré la viscosité dynamique effective comme étant égale à la viscosité du fluide considéré.

Dans ce travail, on s'intéresse au problème d'écoulement de fluides incompressibles régis par l'équation de Brinkman lorsque la viscosité est constante et lorsqu'elle est variable. Nous optons pour **les méthodes spectrales** comme méthode d'approximation pour l'équation de Brinkman avec viscosité constante.

Les méthodes spectrales, en tant que technique de discrétisation d'équations aux dérivées partielles, ont été initialement proposées en 1944 par Blinova, d'abord mis en œuvre en 1954 par Silberman, pratiquement abandonné au milieu des années 1960, ressuscité en 1969-1970 par D. Gottlieb [15] et S. Orszag [20] et par Eliason, Machenhauer et Rasmussen, développé par C. Bernardi et Y. Maday [5][6]. La méthode repose principalement sur l'emploi de bases associées à des polynômes orthogonaux (les polynômes de Chebyshev, les polynômes de Legendre) et son avantage principal réside dans la convergence rapide et dans leur haute précision.

L'objectif de ce mémoire est d'établir l'analyse mathématique des équations de Brinkman avec viscosité constante puis variable. On s'intéresse ensuite à l'estimation d'erreur à priori entre la solution exacte et la solution approchée en utilisant une méthode spectrale pour le problème de Brinkman avec viscosité constante.

Ce travail est structuré en trois chapitres :

Dans **le premier chapitre**, nous présentons les principales propriétés des espaces de Sobolev [1], quelques rappels d'analyse fonctionnelle et les principales propriétés des espaces discrets [5][6][7]. Nous donnons aussi dans ce chapitre les principales estimations d'erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale aux noeuds de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto en normes des espaces de Sobolev usuels sur $]-1,1[^d$ [5][8].

Dans **le deuxième chapitre**, nous considérons le problème de Brinkman dans un domaine borné tri-dimensionnel, muni de conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse. D'abord, nous commençons par présenter le problème de Brinkman avec viscosité constante. Nous proposons pour le problème continu une formulation variationnelle qui comporte trois inconnus : la vitesse, le tourbillon et la pression, puis nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution grâce aux théorèmes de Banach-Nečas-Babuška [4][19] et de Babuška-Brezzi [17]. Ensuite, nous présentons le problème de Brinkman avec viscosité variable, en particulier, nous détaillons la première partie de l'article [3]. La formulation variationnelle comporte également les trois inconnus, la vitesse, le tourbillon et la pression. Puisque la viscosité est variable, il apparaît des termes supplémentaires dans la formulation variationnelle et par conséquent cette formulation devient non-symétrique et cela pose un problème de manque de coercivité. Afin de remédier à ce problème, nous écrivons une formulation variationnelle augmentée équivalente à la formulation variationnelle initiale, afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution en utilisant les théorèmes de Lax-Milgram [2] et de Babuška-Brezzi.

L'objet du **troisième chapitre** est la discrétisation du problème de Brinkman avec viscosité constante quand le domaine est le cube unitaire. Pour discrétiser ce problème, nous utilisons une méthode spectrale, c'est-à-dire, nous remplaçons l'espace continu par un espace de dimension finie et les intégrales exactes par une formule de quadrature [8][11][13]. Nous démontrons que le problème discret est bien posé, c'est à dire, qu'il admet une solution unique grâce aux théorèmes de Banach-Nečas-Babuška et de Babuška-Brezzi. Finalement, nous établissons des majorations d'erreur a priori pour les trois inconnus, entre la solution continue et la solution discrète.

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques nécessaires pour une bonne compréhension de l'étude du problème traité dans ce mémoire.

1.1 Espaces fonctionnels

Nous introduisons ici les propriétés, les lemmes et les corollaires utilisés dans ce mémoire. Les démonstrations figurent dans les ouvrages de références [1], [12], [16], [18] et [21].

— Soit le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$, nous introduisons la dérivée partielle

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

— Nous introduisons $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω et l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, désigne l'espace des distributions sur Ω.

— Pour $p \geq 1$, nous introduisons les espaces de Lebesgue définis par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ v \text{ mesurable dans } \Omega \ ; \int_\Omega |v(x)|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_p = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

— De plus, on introduit l'espace $L^\infty(\Omega)$ défini par :

$$L^\infty(\Omega) = \big\{ v \text{ mesurable dans } \Omega \text{ telle qu'il existe une constante } C \geq 0 : \\ |v(x)| \leq C \text{ p.p dans } \Omega \big\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_\infty = \inf\{C\ ;\ |v(x)| \leq C \text{ p.p dans } \Omega\}. \tag{1.2}$$

— Pour $p = 2$, on introduit l'espace de Hilbert :

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)\ ;\ \int_\Omega v(x)dx = 0 \right\},$$

muni de la norme de $L^2(\Omega)$, c'est à dire :

$$\|v\|_{0.\Omega} = \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3}$$

— Pour un $m \geq 0$ et un $p \geq 1$, on introduit l'espace de Sobolev :

$$W^{m.p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega)\ ;\ \forall |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \in L^p(\Omega) \},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

— En particulier, pour $p = 2$ et $m \geq 1$, l'espace $W^{m.p}(\Omega)$ sera noté $H^m(\Omega)$, tel que :

$$H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)\ ;\ \forall |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{m.\Omega} = \left\{ \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v(x)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

— On note l'espace $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire, $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc un sous espace fermé de l'espace $H^1(\Omega)$.

Lemme 1.1.1. ***(Inégalité de Poincaré-Friedrichs)***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante $C_p > 0$ ne dépend que de la géométrie de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \|v\|_{0,\Omega} \leq C_p \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 (x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à cette inégalité nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 1.1.2. *La semi norme*

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 (x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

est une norme dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle de l'espace $H^1(\Omega)$.

1.2 Opérateur trace

On suppose que l'ouvert Ω étant assez régulier, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que nous le notons $\boldsymbol{n}$.

Théorème 1.2.1. [17]
L'application $\gamma_0 : u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu : ***l'application de trace*** *de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

La définition de l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donnée au moyen du théorème de traces comme suit :

Proposition 1.2.2. [16]
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à frontière $\partial\Omega$ assez régulière, une fonction v appartient à l'espace $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $v \in H^1(\Omega)$ et $v|_{\partial\Omega} = 0$, c'est à dire

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \; ; \; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Proposition 1.2.3. ***(Formule de Stokes)*** [17]
Soit Ω un ouvert assez régulier de $\mathbb{R}^d$. L'application $\gamma_{\boldsymbol{n}}$ qui à $\boldsymbol{u} \in (\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}))^d$ associe $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})_{\partial\Omega}$ se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)^d$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et on a la formule de Stokes suivante :

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla w \; dx + \int_\Omega w \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{u} \; dx = \langle \gamma_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u}, \gamma_0 w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}}, \; \forall \boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^d, \forall w \in H^1(\Omega). \tag{1.6}$$

1.3 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Théorème 1.3.1. ***(de Lax-Milgram)*** [2]
Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive pour la norme de H et $l : H \mapsto \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. Alors il existe un unique $u \in H$

tel que

$$\forall u \in H, \quad a(u,v) = l(v).$$

Théorème 1.3.2. ***(de Banach-Nečas-Babuška)*** [4][19]
Soient H et V deux espaces de Hilbert, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $H \times V$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) Pour toute forme linéaire continue $l(\cdot)$ sur V, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = l(v), \ \forall v \in V. \tag{1.7}$$

2) Les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\exists \alpha > 0 \ : \ \sup_{w \in V} \frac{a(v,w)}{\|v\|_H \|w\|_V} \geq \alpha,$$

$$\sup_{u \in H} a(u,v) > 0, \ \forall v \in V.$$

Nous considérons deux espaces de Hilbert X et M de normes respectives $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$, de produits scalaires respectifs $(\cdot,\cdot)_X$ et $(\cdot,\cdot)_M$ et de duals X' et M' avec le crochet de dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Nous donnons une forme bilinéaire continue : $b : X \times M \mapsto \mathbb{R}$, et nous lui associons l'opérateur B tel que, pour tout $v \in X$ et $q \in M$, nous avons :

$$b(v,q) = \langle Bv, q\rangle_{M',M} = \langle B'q, v\rangle_{X',X}.$$

Nous introduisons les espaces suivants :

$$V = \{v \in X \ ; \ \forall q \in M, \ b(v,q) = 0\},$$

$$V^\circ = \{l \in X' \ ; \ \forall v \in V, \ \langle l, v\rangle_{X',X} = 0\}.$$

Théorème 1.3.3. ***(de Babuška-Brezzi)*** [17]
Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,q)}{\|v\|_X \|q\|_M} \geq \beta.$$

2) L'opérateur B' est un isomorphisme de M dans V° et

$$\forall q \in M, \quad \|B'q\|_{X'} \geq \beta \|q\|_M.$$

Théorème 1.3.4. ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** [9]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soient $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Théorème 1.3.5. [9]
Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, alors $E \times F$ est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_{E\times F}$, définie par :

$$\|\cdot\|_{E\times F} = \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F.$$

1.4 Espaces discrets

Les preuves des théorèmes et les propositions de cette section se trouvent dans les références de base suivantes [5], [6], [7] et [8].

Notation 1.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions de l'ensemble $\mathbb{P}_n$.*

Notation 1.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{P}_n^0(\Omega)$ l'espace des polynômes de $\mathbb{P}_n(\Omega)$ qui s'annulent au bord de Ω.*

1.4.1 Polynômes de Legendre

On note par Λ l'intervalle $]-1, 1[$.

Définition 1.4.3. *On appelle famille des polynômes de Legendre la famille $(L_n)_n$ de polynômes sur Λ, deux à deux orthogonaux dans $L^2(\Lambda)$ et tels que, pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme L_n soit de degré n et vérifie : $L_n(1) = 1$.*

1.4.2 Formule de Gauss-Lobatto

On rappelle la formule de quadrature de Gauss-Lobatto.

Proposition 1.4.4. *Soit N un entier positif fixé. On pose $\eta_0 = -1$ et $\eta_N = 1$. Il existe un unique ensemble de $N-1$ points ξ_j de Λ, $1 \leq j \leq N-1$, et un unique ensemble de $N+1$ réels ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout polynôme φ_N de $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$:*

$$\int_{-1}^{1} \varphi_N(\zeta)d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\eta_j)\rho_j. \tag{1.9}$$

Les η_j, $1 \le j \le N-1$, *sont les zéros du polynôme* L'_N. *Les* ρ_j, $0 \le j \le N$, *sont appelés les poids, ils sont positifs et donnés par :*

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)L^2(\zeta_j)}, \ 0 \le j \le N.$$

1.4.3 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Pour simplifier les notations et les théorèmes de cette partie, on présente les résultats uniquement pour la dimension $d = 3$.

Notation 1.4.5. *On note* Π_N *l'opérateur de projection orthogonale de* $L^2(\Lambda^3)$ *sur* $\mathbb{P}_N(\Lambda^3)$ *pour le produit scalaire associé à la norme* $\|\cdot\|_{0,\Omega}$.

Théorème 1.4.6. $\forall\ m \ge 0$, $\exists\ c > 0$ *ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Omega)$, *on ait :*

$$\|v - \Pi_N v\|_{L^2(\Lambda^3)} \le cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.10}$$

Notation 1.4.7. *On note* $\Pi_N^{1,0}$ *l'opérateur de projection orthogonale de* $H_0^1(\Lambda^3)$ *sur* $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^3)$ *pour le produit scalaire associé à la semi norme* $|\cdot|_{1,\Lambda^3}$.

Théorème 1.4.8. *Pour tout entier* $m \ge 1$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H_0^1(\Lambda^3)$, *on ait :*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{H^1(\Lambda^3)} \le cN^{1-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.11}$$

Notation 1.4.9. *On note* $\mathcal{I}_N$ *l'opérateur d'interpolation aux points de Gauss-Lobatto, c'est à dire, pour toute fonction* v *continue sur* $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ *appartient à* $\mathbb{P}_N(\Lambda^3)$ *et vérifie :*

$$(\mathcal{I}_N v)(\eta_i, \eta_j, \eta_k) = v(\eta_i, \eta_j, \eta_k), \qquad 0 \le i, j, k \le N.$$

Théorème 1.4.10. *Pour tout* $m \ge 2$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Lambda^3)$, *on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^2(\Lambda^3)} \le cN^{-m}\|v\|_{H^m(\Lambda^3)}. \tag{1.12}$$

Proposition 1.4.11. *Tout polynôme* $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^3)$ *vérifie l'inégalité*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda^3)} \le \sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\rho_j \le 3^3\ \|\varphi_N\|^2_{L^2(\Lambda^3)}. \tag{1.13}$$

Chapitre 2

Problème de Brinkman

L'objectif de ce chapitre est l'analyse mathématique de l'équation de Brinkman avec **viscosité constante** puis avec **viscosité variable**, munie de conditions aux limites de Dirichlet sur la vitesse. Le problème que nous considérons est stationnaire, c'est à dire, il ne dépend pas du temps. Ce problème modélise l'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu poreux. Les formulations variationnelles considérées comportent trois inconnus, la vitesse, le tourbillon et la pression. Tout le long du chapitre, C désigne une constante positive qu'elle peut varier d'une ligne à une autre.

2.1 Problème de Brinkman avec viscosité constante

Dans cette section, nous appliquons le théorème de Banach-Nečas-Babuška (Thé.1.3.2) pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution vitesse-tourbillon puis le théorème de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3) pour déduire l'existence et l'unicité de la pression.

2.1.1 Problème continu

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière assez régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Le système considéré est donné par :

$$\begin{cases} \nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\omega} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

où les inconnus sont $\boldsymbol{u}$ qui représente la vitesse, $\boldsymbol{\omega}$ représente le tourbillon, p représente la pression. La donnée $\boldsymbol{f}$ correspond aux forces extérieures appliquées au fluide, ν est la viscosité cinématique du fluide et $\mathbf{K}$ représente le tenseur de perméabilité.

On suppose que $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $L^2(\Omega)^3$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ et $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times 3}$ est une matrice symétrique définie positive et qu'ils existent $\sigma_{min},\ \sigma_{max} > 0$ tels que :

$$\sigma_{min}|\boldsymbol{v}|^2 \leq \boldsymbol{v}^T \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{v} \leq \sigma_{max}|\boldsymbol{v}|^2,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.2}$$

Formulation variationnelle

Une formulation variationnelle associée au problème aux limites (2.1) est donnée par :

$$\begin{cases} \text{Trouver } ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},p) = l(\boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \\ b(\boldsymbol{u},q) = 0,\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ c((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{\theta}) = 0,\ \forall \boldsymbol{\theta} \in L^2(\Omega)^3, \end{cases} \tag{2.3}$$

où les formes $a((\cdot,\cdot);\cdot),\ b(\cdot,\cdot),\ c((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $l(\cdot)$ sont données par

$$a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) = \nu\int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \nu\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

$$b(\boldsymbol{v},p) = -\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

$$c((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{\theta}) = \int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

et

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Proposition 2.1.1. *Les problèmes* (2.1) *et* (2.3) *sont équivalents au sens des distributions.*

Démonstration. On commence par montrer que toute solution du problème aux limites (2.1) est solution du problème (2.3). Soit $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ solution du problème aux limites, nous avons alors

$$\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} + \nabla p = \boldsymbol{f},$$

nous travaillons au sens des distributions, nous avons pour tout $\boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3$:

$$< \nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nu \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nabla p, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3}$$
$$= < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3},$$

en utilisant la dérivation au sens des distributions, nous obtenons

$$< \nabla p, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} = - < p, \operatorname{div} \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3},$$

et

$$< \nu \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} = < \nu \boldsymbol{\omega}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} .$$

Comme $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times 3}$, alors tout les termes sont dans $L^2(\Omega)^3$ ou bien $L^2(\Omega)$, nous pouvons rempalcer les crochets de dualité par les intégrales sur Ω, c'est à dire

$$\nu \int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \nu \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,$$

par densité de $D(\Omega)^3$ dans $H_0^1(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\nu \int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \nu \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

La deuxième et la troisième équation du problème (2.3) sont clairement vérifiées puisque $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{\omega} - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} = 0$ dans Ω. D'où $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}), p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ est solution du problème (2.3).
Réciproquement : soit $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ solution du problème (2.3), nous avons pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3$

$$\nu \int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \nu \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x},$$

en particulier, cette dernière identité est valable pour tout $\boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3$ (car $D(\Omega)^3 \subset H_0^1(\Omega)^3$). Comme $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$ et $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times 3}$, nous pouvons donc remplacer les intégrales sur Ω par les crochets de dualité entre $D'(\Omega)^3$ et $D(\Omega)^3$, c'est à dire

$$< \nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nu\boldsymbol{\omega}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} - < p, \operatorname{div}\boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3}$$
$$=< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3},\ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,$$

en utilisant la dérivation au sens des distributions, nous obtenons

$$< \nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nabla p, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3}$$
$$=< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3},\ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,$$

par conséquent

$$\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D'(\Omega)^3,$$

en utilisant le fait que $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } L^2(\Omega)^3,$$

et par suite

$$\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ p.p dans } \Omega.$$

De plus, nous avons

$$\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,\ \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

en particulier, pour $q = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$, puisque $\operatorname{div}\boldsymbol{u} \in L_0^2(\Omega)$(en effet, il suffit d'utiliser la formule de Stokes (1.6) pour w=1), nous obtenons

$$\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{0.\Omega}^2 = 0,$$

c'est à dire

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Nous avons aussi

$$\int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,\ \forall \boldsymbol{\theta} \in L^2(\Omega)^3,$$

en particulier, pour $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega} \in L^2(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega}\|_{0.\Omega}^2 = 0,$$

c'est à dire

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \text{ dans } \Omega.$$

Finalement, l'appartenance de $\boldsymbol{u}$ à $H_0^1(\Omega)^3$ assure la quatrième équation du problème (2.1). D'où $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ est solution du problème aux limites (2.1). ■

2.1.2 Existence et unicité de la solution

Le problème (2.3) est un problème de point selle. La solvabilité de ce problème entre dans le cadre d'application du théorème de Banach-Nečas-Babuška (Thé.1.3.2) et de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3). Nous commençons tout d'abord par introduire l'espace de Hilbert $(H_0^1(\Omega)^3, |\cdot|_{1,\Omega})$. La semi norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

Proposition 2.1.2. *Pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3$*

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2 = \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.4}$$

Démonstration. On commence par démontrer cette identité pour une fonction $\boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3$. Nous avons

$$\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 = \left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

$$+ 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

$$\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 = \left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right\|_{0,\Omega}^2$$

$$- 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \tag{2.5}$$

puisque $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in D(\Omega)$ qui est inclu dans $L^2(\Omega)$, on peut remplacer les intégrales sur Ω dans (2.5) par les crochets de dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$. En utilisant la dérivation au sens des distributions, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\\
\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_3}, \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\\
\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

par conséquent

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2 = \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2,\ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,$$

comme $D(\Omega)^3$ est dense dans $H_0^1(\Omega)^3$, on déduit donc

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}^2 = \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2,\ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

ce qui termine la preuve. ■

Maintenant, nous introduisons l'espace noyau V de la forme $b(\cdot,\cdot)$, c'est à dire

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3\ ;\ \forall q \in L_0^2(\Omega),\ b(\boldsymbol{v}, q) = 0\},$$

en choisissant $q = \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}$, nous obtenons que cet espace coïncide avec l'espace des fonctions à divergence nulle dans $H_0^1(\Omega)^3$, c'est à dire

$$V = \{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3\ ;\ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0\},$$

cet espace muni de la semi norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert, car c'est le noyau d'une application linéaire et continue. Nous introduisons l'espace noyau W de la forme $c((\cdot,\cdot);\cdot)$, c'est à dire

$$W = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times L^2(\Omega)^3\ ;\ \forall \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^3,\ c((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\varphi}) = 0\},$$

cet espace coïncide avec l'espace

$$W = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) \in V \times L^2(\Omega)^3\ ;\ \boldsymbol{\theta} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v}\},$$

cet espace muni de la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3}$ est un espace de Hilbert, car c'est le noyau d'une application linéaire et continue. Nous observons que si $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p)$ est solution du problème (2.3), alors $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})$ est solution du problème réduit suivant :

$$\begin{cases} \quad\text{Trouver } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}) \in W \text{ tel que :} \\ \\ a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}),\ \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{cases} \tag{2.6}$$

Pour montrer que le problème (2.6) admet une solution unique, nous avons besoin de quelques propriétés des formes $a((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $l(\cdot)$.

Lemme 2.1.3. *La forme bilinéaire $a((\cdot,\cdot);\cdot)$ et la forme linéaire $l(\cdot)$ sont continues sur W et V respectivement, c'est à dire, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\big|a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})\big| \leq C\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\ \forall((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) \in W \times V, \tag{2.7}$$

et

$$\big|l(\boldsymbol{v})\big| \leq C|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\ \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{2.8}$$

Démonstration.
• Pour tout $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) \in W \times V$

$$\big|a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})\big| = \left|\nu\int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \nu\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité (2.2) et l'inégalité de Poincaré respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})\big| &\leq \nu\sigma_{max}\|\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} + \nu\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \nu\sigma_{max}C_p^2\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} + \nu\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

par conséquent

$$\big|a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})\big| \leq (\nu\sigma_{max}C_p^2 + \nu)\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},$$

d'où la continuité de la forme $a((\cdot,\cdot);\cdot)$.
• Pour tout $\boldsymbol{v} \in V$

$$\big|l(\boldsymbol{v})\big| = \left|\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|l(\boldsymbol{v})\big| &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq C_p\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme $l(\cdot)$. ■

Lemme 2.1.4. *Pour tout* $\boldsymbol{v} \in V \backslash \{0\}$

$$\sup_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\in W} a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) > 0.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v} \in V\backslash\{0\}$, nous choisissons $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$, c'est à dire, $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{v}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}) \in W$, nous obtenons

$$a((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) = \nu \int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x} + \nu \int_\Omega (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x},$$

en utilisant l'inégalité (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) &\geq \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega} + \nu\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}, \\ &> 0, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\sup_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\in W} a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v}) > 0.$$

■

Lemme 2.1.5. *Pour tout* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}) \in W$*, il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que :*

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in V} \frac{a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}} \geq \alpha\big(|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\big).$$

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}) \in W$, nous choisissons $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, nous obtenons

$$a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{u}) = \nu \int_\Omega \mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x} + \nu \int_\Omega (\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x},$$

en utilisant l'inégalité (2.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{u}) &\geq \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega} + \nu\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{0,\Omega}, \\ &= \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega} + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|^2_{0,\Omega} + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

le fait que $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ conduit à

$$|\boldsymbol{u}|^2_{1,\Omega} = \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|^2_{0,\Omega},$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{u}) &\geq \min\left(\nu\sigma_{min},\frac{\nu}{2}\right)\|\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}^2+\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}^2,\\
&\geq \min\left(\nu\sigma_{min},\frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}^2+\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}^2,\\
&= \min\left(\nu\sigma_{min},\frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}+\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega},\\
&= \min\left(\nu\sigma_{min},\frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}+\frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

d'où

$$a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{u}) \geq \alpha\big(|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\big)|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}, \tag{2.9}$$

avec

$$\alpha=\min\left(\min\left(\nu\sigma_{min},\frac{\nu}{2}\right),\frac{\nu}{2}\right).$$

■

Proposition 2.1.6. *Le problème* (2.6) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\in W$. *De plus, cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}\leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{2.10}$$

Démonstration. D'après les Lemme 2.1.3, Lemme 2.1.4 et Lemme 2.1.5, toutes les hypothèses du théorème de Banach-Nečas-Babuška (Thé.1.3.2) sont satisfaites, alors le problème (2.6) admet une solution unique. De plus, nous avons de (2.6)

$$a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{v})=l(\boldsymbol{v}),\ \forall\ \boldsymbol{v}\in V,$$

en choisissant $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ et en utilisant (2.8) et (2.9), nous obtenons

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}\leq\frac{C}{\alpha}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

Maintenant, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la pression p, pour cela nous avons besoin de quelques propriétés de la forme $b(\cdot,\cdot)$.

Lemme 2.1.7. *La forme bilinéaire* $b(\cdot,\cdot)$ *est continue sur* $H_0^1(\Omega)^3\times L_0^2(\Omega)$, *c'est à dire, il* *existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|b(\boldsymbol{v}, p)| \leq C\|p\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\ \forall(\boldsymbol{v}, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega).$$

Démonstration. Pour tout $(\boldsymbol{v}, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$

$$\big|b(\boldsymbol{v}, p)\big| = \left| -\int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'identité (2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|b(\boldsymbol{v}, p)\big| &\leq \|p\|_{0,\Omega}\|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{0.\Omega}\\ &\leq \|p\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme $b(\cdot, \cdot)$. ■

Lemme 2.1.8. *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que :*

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3} \frac{|b(\boldsymbol{v}, q)|}{|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}} \geq \beta\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Démonstration. Soit $q \in L_0^2(\Omega)$, d'après [17, Chap 1, Cor 2.4], il existe un unique $\boldsymbol{v} \in V^\perp$ tel que

$$q = -\operatorname{div} \boldsymbol{v},$$

et

$$|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \leq C\|q\|_{0,\Omega}, \tag{2.11}$$

par conséquent

$$|b(\boldsymbol{v}, q)| = \|q\|_{0,\Omega}^2,$$

en utilisant (2.11), nous obtenons

$$|b(\boldsymbol{v}, q)| \geq \frac{1}{C}\|q\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}, \tag{2.12}$$

d'où

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3} \frac{|b(\boldsymbol{v}, q)|}{|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}} \geq \frac{1}{C}\|q\|_{0,\Omega}.$$

■

Proposition 2.1.9. *Il existe un unique* $p \in L_0^2(\Omega)$ *vérifiant le problème* (2.3) *et satisfaisant*

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{2.13}$$

Démonstration. Nous avons d'après (2.3) et (2.6)

$$b(\boldsymbol{v}, p) = l(\boldsymbol{v}) - a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); \boldsymbol{v}) = 0, \ \forall \boldsymbol{v} \in V,$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{v} \longmapsto l(\boldsymbol{v}) - a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); \boldsymbol{v}),$$

est dans le polaire V°, d'où d'après le Lemme 2.1.7 et le Lemme 2.1.8, nous déduisons du théorème de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3) qu'il existe un unique $p \in L_0^2(\Omega)$ vérifiant le problème (2.3) tel que :

$$b(\boldsymbol{v}, p) = l(\boldsymbol{v}) - a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); \boldsymbol{v}), \ \forall \boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, (2.7) et (2.8), nous obtenons

$$b(\boldsymbol{v}, p) \leq C\Bigg(\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}|_{1,\Omega} \Bigg),$$

en utilisant (2.12) et (2.10) respectivement, nous obtenons

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\beta} \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

Proposition 2.1.10. *Le problème* (2.3) *admet une solution unique* $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$. *De plus, cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration. De la Proposition 2.1.6 et la Proposition 2.1.9, nous déduisons que le problème (2.3) admet une solution unique. De plus, nous avons d'après (2.10) et (2.13)

$$\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

2.2 Problème de Brinkman avec viscosité variable

Nous intéressons toujours à la formulation variationnelle qui comporte les trois inconnus : la vitesse, le tourbillon et la pression. Puisque la viscosité est variable, on va voir que ce problème souffre d'un manque de coercivité, pour cela nous utilisons une formulation variationnelle dite augmentée afin de pouvoir appliquer le théorème classique de Lax-Milgram (Thé.1.3.1) pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution vitesse-tourbillon, nous appliquons ensuite le théorème de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3) pour démontrer l'existence et l'unicité de la pression.

2.2.1 Problème continu

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière assez régulière $\Gamma := \partial\Omega$. Le système considéré est donné par :

$$\begin{cases} \nu \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu \,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\nabla\nu + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\omega} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.14}$$

où les inconnus sont $\boldsymbol{u}$ qui représente la vitesse, $\boldsymbol{\omega}$ représente le tourbillon, p représente la pression. La donnée $\boldsymbol{f}$ correspond aux forces extérieures appliquées au fluide, ν est la viscosité cinématique du fluide, $\mathbf{K}$ représente le tenseur de perméabilité et $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ est le tenseur de déformation, c'est à dire : $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)$.

On suppose que $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $L^2(\Omega)^3$, $\nu \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et qu'ils existent $\nu_0,\ \nu_1 > 0$ tels que :

$$\nu_0 \leq \nu(\boldsymbol{x}) \leq \nu_1,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.15}$$

$\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times 3}$ est une matrice symétrique définie positive. En particulier, ils existent $\sigma_{min},\ \sigma_{max} > 0$ tels que :

$$\sigma_{min}|\boldsymbol{v}|^2 \leq \boldsymbol{v}^T\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{v} \leq \sigma_{max}|\boldsymbol{v}|^2,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.16}$$

Formulation variationnelle

Une formulation variationnelle associée au problème aux limites (2.14) est donnée par :

$$(FV)\begin{cases} \quad\text{Trouver } ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\ \displaystyle+\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} \\ \displaystyle-\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3, \\ \displaystyle\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,\ \forall q\in L_0^2(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,\ \forall\boldsymbol{\theta}\in L^2(\Omega)^3. \end{cases}$$

Proposition 2.2.1. *Les problèmes* (2.14) *et (FV) sont équivalents au sens des distributions.*

Démonstration. On commence par montrer que toute solution du problème aux limites (2.14) est solution du problème (FV). Soit $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ solution du problème aux limites, nous avons alors

$$\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u} + \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} - 2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\nabla\nu + \nabla p = \boldsymbol{f},$$

nous travaillons au sens des distributions, nous avons pour tout $\boldsymbol{v}\in D(\Omega)^3$:

$$\begin{aligned} <\nu\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} + <\nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} -2<\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\nabla\nu,\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} \\ + <\nabla p,\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} = <\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3}, \end{aligned}$$

en utilisant la dérivation au sens des distributions, nous obtenons

$$<\nabla p,\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} = -<p,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}>_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3},$$

et si nous supposons que $\nu \in D(\Omega)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
< \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} &=< \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}, \nu\boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3},\\
&=< \boldsymbol{\omega}, \mathbf{rot}\,(\nu\boldsymbol{v}) >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3},\\
&=< \boldsymbol{\omega}, \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \nabla\nu \times \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3},\\
&=< \boldsymbol{\omega}, \nu\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3} + < \boldsymbol{\omega}, \nabla\nu \times \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3,D(\Omega)^3}.
\end{aligned}$$

Comme $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times3}$ et $\nu \in W^{1,\infty}(\Omega)$, alors tout les termes sont dans $L^2(\Omega)^3$ ou bien $L^2(\Omega)$, nous pouvons rempalcer les crochets de dualité par les intégrales sur Ω, c'est à dire

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu(\boldsymbol{x})\times v(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{v}\in D(\Omega)^3,
\end{aligned}$$

par densité de $D(\Omega)^3$ dans $H_0^1(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&+ \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\ \forall\boldsymbol{v}\in H_0^1(\Omega)^3.
\end{aligned}$$

La deuxième et la troisième équation du problème (FV) sont clairement vérifiées puisque $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0$ dans Ω et $\boldsymbol{\omega} - \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} = 0$ dans Ω. D'où $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ est solution du problème (FV).

Réciproquement : soit $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ solution du problème (FV), nous avons pour tout $\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^3$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\
&\qquad + \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu(\boldsymbol{x})\times v(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{x} - \int_\Omega p(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

en particulier, cette dernière identité est valable pour tout $\boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3$ (car $D(\Omega)^3 \subset H_0^1(\Omega)^3$). Comme $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$, $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$, $\mathbf{K} \in L^\infty(\Omega)^{3\times3}$ et $\nu \in W^{1,\infty}(\Omega)$, nous pouvons remplacer les intégrales sur Ω par les crochets de dualité entre $D'(\Omega)^3$ et $D(\Omega)^3$, c'est à dire

$$
\begin{aligned}
&< \nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} -2 < \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \nabla \nu, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nu \boldsymbol{\omega}, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} \\
&+ < \boldsymbol{\omega}, \nabla \nu \times \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} - < p, \operatorname{div} \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3}, \ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,
\end{aligned}
$$

en utilisant la dérivation au sens des distributions

$$
\begin{aligned}
&< \nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} + < \nu \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} -2 < \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \nabla \nu, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} \\
&\qquad + < \nabla p, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3} = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} >_{D'(\Omega)^3, D(\Omega)^3}, \ \forall \boldsymbol{v} \in D(\Omega)^3,
\end{aligned}
$$

par conséquent

$$\nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u} + \nu\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega} - 2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \nabla \nu + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } D'(\Omega)^3,$$

le fait que $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$, entraîne

$$\nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u} + \nu\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega} - 2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \nabla \nu + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ dans } L^2(\Omega)^3,$$

et par suite

$$\nu \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{u} + \nu\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega} - 2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \nabla \nu + \nabla p = \boldsymbol{f} \text{ p.p dans } \Omega.$$

De plus, nous avons

$$\int_\Omega q(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0, \ \forall q \in L^2_0(\Omega),$$

en particulier, pour $q = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$, puisque $\operatorname{div} \boldsymbol{u} \in L^2_0(\Omega)$(en effet, il suffit d'utiliser la formule de Stokes (1.6) pour w=1), nous obtenons

$$\|\operatorname{div} \boldsymbol{u}\|^2_{0.\Omega} = 0,$$

c'est à dire

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ p.p dans } \Omega.$$

Nous avons aussi

$$\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x}) \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0, \ \forall \boldsymbol{\theta} \in L^2(\Omega)^3,$$

en particulier, pour $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega} \in L^2(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}))^2 = 0,$$

en utilisant (2.15), nous obtenons

$$0 \leq \nu_0 \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega}\|_{0.\Omega}^2 \leq 0,$$

par conséquent

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\omega} = 0 \text{ p.p dans } \Omega.$$

Finalement, l'appartenance de $\boldsymbol{u}$ à $H_0^1(\Omega)^3$ assure la quatrième équation du problème (2.14). D'où $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$ est solution du problème aux limites (2.14). ■

Formulation variationnelle augmentée

La non-symétrie de la formulation variationnelle (FV) dû au fait que la viscosité est variable, entraîne que ce dernier problème souffre d'un manque de coercivité, pour cela nous procédons à l'augmentation de la formulation variationnelle (FV) avec les termes résiduels issus de la troisième et la quatrième équation de (2.14), en effet

$$\kappa_1 \nu_0 \int_\Omega (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})) \cdot \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0,$$
$$\kappa_2 \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0,$$

où κ_1, κ_2 sont deux constantes positives qui seront préciser ulterieurement. La formulation variationnelle augmentée est donnée par

$$\begin{cases} \quad \text{Trouver } ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega)) \text{ tel que :} \\ \\ A((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta})) + B((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}); p) = L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}),\ \forall (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\theta}) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, \\ \\ B((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); q) = 0,\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.17}$$

où les formes $A((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$, $B((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $L(\cdot,\cdot)$ sont données par

$$\begin{aligned}
A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) = & \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\
& + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\
& + \kappa_1\nu_0\int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \kappa_2\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\
& - \kappa_1\nu_0\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \\
& + \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},
\end{aligned}$$

$$B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p) = -\int_\Omega p(\boldsymbol{x})\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

et

$$L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}.$$

Proposition 2.2.2. *La formulation variationnelle (FV) est équivalente à la formulation variationnelle augmentée* (2.17).

Démonstration. La première implication est triviale.
Réciproquement : soit $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$, nous avons que la deuxième équation de (FV) est vérifiée par définition de (2.17). Comme (2.17) est valable pour tout $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3$, en particulier pour $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = (0,\boldsymbol{\theta})$ nous obtenons

$$\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

d'où la troisième équation de (FV). Ceci donne aussi la première équation de (FV), ce qui termine la preuve. ■

2.2.2 Existence et unicité de la solution

Le problème (2.17) est un problème de point selle. La solvabilité de ce problème entre dans le cadre d'application du théorème de Lax-Milgram (Thé.1.3.1) et de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3).

Remarque. *L'espace $H_0^1(\Omega)^3$ est muni de la norme usuelle de l'espace $H^1(\Omega)^3$, où cette* *norme s'écrit grâce à* (2.4) *sous la forme suivante :*

$$|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega} = \left(\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega} \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall \boldsymbol{v} \in H^1_0(\Omega)^3.$$

Maintenant, nous introduisons l'espace noyau V de la forme $B((\cdot,\cdot);\cdot)$, c'est à dire

$$V = \{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \ ; \ \forall q \in L^2_0(\Omega), \ B(\boldsymbol{v}, q) = 0\},$$

cet espace coïncide avec l'espace des fonctions à divergence nulle dans $H^1_0(\Omega)^3$, c'est à dire

$$V = \{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3 \ ; \ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0\},$$

cet espace muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3}$ est un espace de Hilbert, car c'est le noyau d'une application linéaire et continue. Nous observons que si $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p)$ est solution du problème (2.17), alors $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})$ est solution du problème réduit suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}) \in V \text{ tel que :} \\ \\ A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) = L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}), \ \forall (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in V. \end{cases} \tag{2.18}$$

Pour montrer que le problème (2.18) admet une solution unique, nous avons besoin de quelques propriétés des formes $A((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ et $L(\cdot,\cdot)$.

Lemme 2.2.3. *La forme bilinéaire $A((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ et la forme linéaire $L(\cdot,\cdot)$ sont continues sur $V \times V$ et V respectivement, c'est à dire, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} \big|A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\big| \leq C \|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} \|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3}, \\ \forall ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) \in V \times V, \end{aligned} \tag{2.19}$$

et

$$|L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})| \leq C \|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3}, \ \forall (\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in V. \tag{2.20}$$

Démonstration.

• Pour tout $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\in V\times V$

$$\begin{aligned}\big|A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\big| = \Bigg| &\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+ \kappa_1\nu_0\int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \kappa_1\nu_0\int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &- 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\Bigg|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité (2.15), celle de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.16) respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\big| \le\ & \nu_1\sigma_{max}\|\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} + \nu_1\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega} + \nu_1\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}\\ &+ \nu_1\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega} + \kappa_1\nu_0\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}\\ &+ \kappa_1\nu_0\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega} + 2\|\nabla\nu\|_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}\\ &+ 2\|\nabla\nu\|_{1,\infty}\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega} \le\ & \frac{1}{2}\Bigg(\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}+\|\nabla\boldsymbol{u}^T\|_{0,\Omega}\Bigg),\\ =&\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega},\\ \le&|||\boldsymbol{u}|||_{1,\Omega},\end{aligned}$$

par conséquent

$$\big|A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\big| \le C\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3},$$

où

$$C = \nu\sigma_{max} + 3\nu_1 + 2\kappa_1\nu_0 + 4\|\nabla\nu\|_{\infty,\Omega}.$$

• Pour tout $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\in V$

$$\big|L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\big| = \left|\int_\Omega \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\big|L(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\big| &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega},\\ &\leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3},\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme $L(\cdot,\cdot)$. ■

Lemme 2.2.4. *Si on suppose que*

$$\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0^2} < \frac{1}{4},\ \kappa_1 \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \text{ et } \kappa_2 > \frac{\nu_0}{4}, \tag{2.21}$$

alors la forme $A((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$ est coercive, c'est à dire, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$A((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) \geq \alpha\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|^2_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}, \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in V. \tag{2.22}$$

Démonstration. Pour tout $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in V$, nous avons

$$\begin{aligned}A((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) = &\int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nu(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x}\\ &+ \kappa_1\nu_0\int_\Omega (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x} + \kappa_2\int_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))^2 d\boldsymbol{x}\\ &- \kappa_1\nu_0\int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\\ &+ \int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left| - \kappa_1\nu_0\int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| &\leq \kappa_1\nu_0\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \frac{\kappa_1\nu_0}{2}\left(\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}+\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Young $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left| - 2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| &\leq 2\|\nabla\nu\|_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \varepsilon\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| &\leq 2|\nabla\nu\|_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \varepsilon\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}+\frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},\end{aligned}\tag{2.25}$$

nous choisissons $\varepsilon=\dfrac{4}{\sigma_{min}\nu_0}$ dans (2.24) et (2.25), nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|-2\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\nabla\nu(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| &\leq \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|^2_{0,\Omega}+\frac{\sigma_{min}\nu_0}{4}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},\\ &\leq \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\left(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}\right)+\frac{\sigma_{min}\nu_0}{4}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},\end{aligned}$$

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})\cdot(\nabla\nu\times\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| \leq \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}+\frac{\sigma_{min}\nu_0}{4}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},$$

nous combinons ces dernières inégalités avec (2.23) et en utilisant (2.15) et (2.16), nous obtenons

$$\begin{aligned}A((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) &\geq \nu_0\sigma_{min}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\nu_0\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}+\kappa_1\nu_0\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\kappa_2\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}\\ &-\frac{\kappa_1\nu_0}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}-\frac{\kappa_1\nu_0}{2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}-\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\left(\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}\right)\\ &-\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega}-\frac{\sigma_{min}\nu_0}{4}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega},\\ &=\frac{3\nu_0\sigma_{min}}{4}\|\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\left(\frac{\kappa_1\nu_0}{2}-\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right)\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}\\ &+\left(\kappa_2-\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right)\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|^2_{0,\Omega}+\left(\nu_0-\frac{\kappa_1\nu_0}{2}-\frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right)\|\boldsymbol{\theta}\|^2_{0,\Omega},\end{aligned}$$

par conséquent

$$A((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))\geq\alpha\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|^2_{H^1_0(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3},$$

où

$$\alpha = \min\left\{ \min\left\{ \frac{3\nu_0\sigma_{min}}{4}, \left(\frac{\kappa_1\nu_0}{2} - \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right), \left(\kappa_2 - \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right)\right\}, \right.$$
$$\left. \nu_0 - \frac{\kappa_1\nu_0}{2} - \frac{4\|\nabla\nu\|^2_{\infty,\Omega}}{\sigma_{min}\nu_0}\right\},$$

la condition (2.21) assure la positivité de la constante α, d'où la coercivité de la forme $A((\cdot,\cdot);(\cdot,\cdot))$. ■

Proposition 2.2.5. *Si la condition* (2.21) *est vérifiée, alors le problème* (2.24) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}) \in V$. *De plus, cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H^1_0(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{2.26}$$

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.3 et le Lemme 2.2.4, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (Thé.1.3.1) sont satisfaites, nous déduisons donc que le problème (2.24) admet une solution unique. De plus, nous choisissons $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})$ dans (2.18) et en utilisant (2.20) et (2.22), nous obtenons

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H^1_0(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} \leq \frac{C}{\alpha}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

Nous nous intéressons maintenant à l'existence et l'unicité de la pression p, pour cela nous avons besoin de quelques propriétés de la forme $B((\cdot,\cdot);\cdot)$.

Lemme 2.2.6. *La forme bilinéaire* $B((\cdot,\cdot);\cdot)$ *est continue sur* $(H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L^2_0(\Omega))$, *c'est à dire, il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\left|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p)\right| \leq C\|p\|_{0,\Omega}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H^1_0(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3},\ \forall((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p) \in (H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L^2_0(\Omega)).$$

Démonstration. Pour tout $((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p) \in (H^1_0(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L^2_0(\Omega))$

$$\left|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p)\right| = \left| - \int_\Omega p(\boldsymbol{x}) \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}\right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p)\right| &\leq \|p\|_{0,\Omega}\|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\\ &\leq \|p\|_{0,\Omega}|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega},\\ &\leq \|p\|_{0,\Omega}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H^1_0(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3},\end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme $B((\cdot,\cdot);\cdot)$. ■

Lemme 2.2.7. *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que :*

$$\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\in H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} \frac{|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});q)|}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}} \geq \beta\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q\in L_0^2(\Omega). \tag{2.27}$$

Démonstration. De [17, Chap 1, Cor 2.4], nous avons

$$\frac{\left|\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}} \geq C\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q\in L_0^2(\Omega),$$

nous pouvons écrire donc

$$\frac{\left|\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|}{|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega}+\|0\|_{0,\Omega}} \geq \beta\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q\in L_0^2(\Omega),$$

par conséquent

$$\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\in H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} \frac{\left|\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|}{|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}} \geq \frac{\left|\int_\Omega q(\boldsymbol{x})\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right|}{|||\boldsymbol{v}|||_{1,\Omega}+\|0\|_{0,\Omega}} \geq \beta\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q\in L_0^2(\Omega),$$

d'où

$$\sup_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\in H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} \frac{|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});q)|}{\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}} \geq \beta\|q\|_{0,\Omega},\ \forall q\in L_0^2(\Omega).$$

■

Proposition 2.2.8. *Il existe un unique $p\in L_0^2(\Omega)$ vérifiant le problème augmenté* (2.17) *et satisfaisant*

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{2.28}$$

Démonstration. Nous avons d'après (2.17) et (2.18)

$$B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p) = L((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) - A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))) = 0,\ \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\in V, \tag{2.29}$$

c'est à dire

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \longmapsto L((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) - A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))),$$

est dans le polaire V°, d'où d'après le Lemme 2.2.6 et le Lemme 2.2.7, le théorème de Babuška-

Brezzi (Thé.1.3.3) assure l'existence et l'unicité de p tel que

$$B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});p) = L((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})) - A((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}))),\ \forall(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \in H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, \tag{2.30}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (2.19) et (2.20), nous obtenons

$$|B((\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta});q)| \leq C\Bigg(\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}+\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta})\|_{H_0^1(\Omega)3\times L^2(\Omega)^3}\Bigg),$$

en utilisant (2.27) et (2.26) respectivement, nous obtenons

$$\|p\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\beta}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.$$

■

Proposition 2.2.9. *Le problème* (2.17) *admet une solution unique* $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega});p) \in (H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3, L_0^2(\Omega))$. *De plus, cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}+\|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.2.5 et la Proposition 2.2.8, nous déduisons que le problème (2.17) admet une solution unique. De (2.26) et (2.28) nous obtenons

$$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega})\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}+\|p\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.$$

■

Chapitre 3

Discrétisation spectrale du problème de Brinkman avec viscosité constante

3.1 Problème discret

Nous nous intéressons à l'étude de la discrétisation spectrale de la solution du problème variationnel (2.3), pour cela nous commençons par introduire les espaces discrets $\mathbb{X}_N$ et $\mathbb{Y}_N$ associés aux espaces $H_0^1(\Omega)^3$ et $L^2(\Omega)^3$ respectivement :

$$\mathbb{X}_N = H_0^1(\Omega)^3 \cap P_{N,N-1,N-1}(\Omega) \times P_{N-1,N,N-1}(\Omega) \times P_{N-1,N-1,N}(\Omega),$$

$$\mathbb{Y}_N = P_{N-1,N,N}(\Omega) \times P_{N,N-1,N}(\Omega) \times P_{N,N,N-1}(\Omega),$$

nous approchons l'espace $L_0^2(\Omega)$ par l'espace $L_0^2(\Omega) \cap \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$ noté $\mathbb{M}_N$.

On définit sur les fonctions continues $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sur $\overline{\Omega}$ le produit scalaire discret :

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{u}(\xi_i, \xi_j, \xi_k)\boldsymbol{v}(\xi_i, \xi_j, \xi_k)\rho_i\rho_j\rho_k.$$

Dans ce qui suit, on suppose que le domaine Ω est le cube unitaire $]-1,1[^3$ et la constante $C > 0$ est indépendante de N qui peut varier d'une ligne à une autre.

3.1.1 Présentation du problème

Soit N un entier ≥ 2, la fonction $\boldsymbol{f}$ est supposée continue sur $\overline{\Omega}$, nous proposons le problème discret suivant, construit de la formulation variationnelle (2.3) en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique

$$\begin{cases} \quad \text{Trouver } ((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);p_N) \in (\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N, \mathbb{M}_N) \text{ tel que :} \\ a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N,p_N) = l_N(\boldsymbol{v}_N),\ \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N, \\ b_N(\boldsymbol{u}_N,q_N) = 0,\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N, \\ c_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{\theta}_N) = 0,\ \forall \boldsymbol{\theta}_N \in \mathbb{Y}_N, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les formes $a_N((\cdot,\cdot);\cdot)$, $b_N(\cdot,\cdot)$, $c_N((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $l_N(\cdot)$ sont données par

$$a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N) = \nu(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{v}_N)_N + \nu(\boldsymbol{\omega}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N)_N,$$

$$b_N(\boldsymbol{v}_N,p_N) = -(p_N,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_N)_N,$$

$$c_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{\theta}_N) = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\theta}_N)_N - (\boldsymbol{\omega}_N,\boldsymbol{\theta}_N)_N,$$

et

$$l_N(\boldsymbol{v}_N) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_N)_N.$$

Remarque. *Grâce au choix des espaces discrets et la formule d'exactitude* (1.9)*, nous avons*

$$b_N(\boldsymbol{v}_N,q_N) = b(\boldsymbol{v}_N,q_N),\ \forall(\boldsymbol{v}_N,q_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N. \tag{3.2}$$

3.1.2 Existence et unicité de la solution

Pour analyser le problème (3.1), nous commençons tout d'abord par introduire l'espace noyau V_N de la forme $b_N(\cdot,\cdot)$ défini par

$$V_N = \{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N\ ;\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N,\ b_N(\boldsymbol{v}_N,q_N) = 0\},$$

grâce à la formule de Stokes (1.6), nous avons $\operatorname{div}\boldsymbol{v}_N \in L^2_0(\Omega)$, alors en choisissant $q_N = \operatorname{div}\boldsymbol{v}_N$, nous obtenons que cet espace coïncide avec l'espace des fonctions à divergence nulle dans $\mathbb{X}_N$, c'est à dire

$$V_N = \{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N\ ;\ \forall q_N \in \mathbb{M}_N,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_N = 0\},$$

et l'espace noyau W_N de la forme $c_N((\cdot,\cdot);\cdot)$ défini par

$$W_N = \{(\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\theta}_N) \in V_N \times \mathbb{Y}_N\ ;\ \forall \boldsymbol{\varphi}_N \in \mathbb{Y}_N,\ c_N((\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\theta}_N);\boldsymbol{\varphi}_N) = 0\},$$

en choisissant $\boldsymbol{\varphi_N} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N - \boldsymbol{\theta}_N$ (car $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{Y}_N$), nous obtenons que cet espace coïncide avec l'espace :

$$W_N = \{(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{\theta}_N) \in V_N \times \mathbb{Y}_N \ ; \ \boldsymbol{\theta}_N = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N\},$$

nous observons que si $((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); p_N)$ est solution du problème (3.1), alors $(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)$ est solution du problème réduit suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N) \in W_N \text{ tel que :} \\ \\ a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) = l_N(\boldsymbol{v}_N), \ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N. \end{cases} \tag{3.3}$$

Pour démontrer que le problème (3.3) admet une solution unique nous avons besoin de quelques propriétés des formes $a_N((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $l_N(\cdot)$.

Lemme 3.1.1. *La forme bilinéaire $a_N((\cdot,\cdot);\cdot)$ et la forme linéaire $l_N(\cdot)$ sont continues sur W_N et V_N respectivement, c'est à dire, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\big|a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)\big| \le C\|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}, \ \forall((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \in W_N \times V_N,$$

et

$$\big|l_N(\boldsymbol{v}_N)\big| \le C\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}, \ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N. \tag{3.4}$$

Démonstration.

• Pour tout $((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \in W_N \times V_N$

$$\big|a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)\big| = \big|\nu(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N)_N + \nu(\boldsymbol{\omega}_N, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N)_N\big|,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz respectivement, nous obtenons

$$\big|a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)\big| \le \nu(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}_N, \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}_N)_N^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N)_N^{\frac{1}{2}} + \nu(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\omega}_N)_N^{\frac{1}{2}} (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N)_N^{\frac{1}{2}},$$

en utilisant la relation d'équivalence (1.13), l'inégalité de Poincaré et l'identité (2.4) respectivement, nous obtenons

$$\big|a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)\big| \le 27\nu\sigma_{max} C_p^2 |\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} + 27\nu \|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},$$

par conséquent

$$\left|a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N)\right| \leq \max\left(27\nu\sigma_{max}C_p^2, 27\nu\right)\|(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},$$

d'où la continuité de la forme $a_N((\cdot,\cdot);\cdot)$.

• Pour tout $\boldsymbol{v_N} \in V_N$

$$\left|l_N(\boldsymbol{v_N})\right| = \left|(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_N)_N\right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation d'équivalence (1.13) et l'inégalité de Poincaré respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|l_N(\boldsymbol{v_N})\right| &\leq \sqrt{27}C_p(\boldsymbol{f},\boldsymbol{f})_N^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{v}_N\|_{0,\Omega},\\ &= \sqrt{27}C_p(\mathcal{I}_N\boldsymbol{f},\mathcal{I}_N\boldsymbol{f})_N^{\frac{1}{2}}|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left|l_N(\boldsymbol{v_N})\right| \leq 27C_p\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},$$

d'où la continuité de la forme $l_N(\cdot)$. ■

Lemme 3.1.2. *Pour tout* $\boldsymbol{v}_N \in V_N\backslash\{0\}$

$$\sup_{(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N)\in W_N} a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N) > 0.$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{v}_N \in V_N\backslash\{0\}$, en choisissant $\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{v}_N$, c'est à dire, $(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N) = (\boldsymbol{v}_N, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N) \in W_N$, nous obtenons

$$\begin{aligned}a_N((\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N) &= \nu(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{v}_N)_N + \nu(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N)_N,\\ &\geq \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{v}_N\|_N^2 + \nu\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N\|_N^2,\\ &> 0,\end{aligned}$$

par conséquent

$$\sup_{(\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N)\in W_N} a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N) > 0.$$

■

Lemme 3.1.3. *Pour tout* $(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N) \in W_N$, *il existe une constante* $\alpha^* > 0$ *telle que :*

$$\sup_{\boldsymbol{v}_N \in V_N} \frac{a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} \geq \alpha^* \big(|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}\big).$$

Démonstration. Soit $(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N) \in W_N$, en choisissant $\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{u}_N$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{u}_N) &= \nu(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{u}_N)_N + \nu(\boldsymbol{\omega}_N, \boldsymbol{\omega}_N)_N, \\ &\geq \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{u}_N\|_N^2 + \nu\|\boldsymbol{\omega}_N\|_N^2, \\ &= \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{u}_N\|_N^2 + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_N^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_N\|_N^2, \end{aligned}$$

en utilisant la relation d'équivalence (1.13), nous obtenons

$$a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \geq \nu\sigma_{min}\|\boldsymbol{u}_N\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_N\|_{0,\Omega}^2,$$

le fait que $\operatorname{div} \boldsymbol{u}_N = 0$ conduit à

$$|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}^2 = \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_N\|_{0,\Omega}^2,$$

par conséquent

$$\begin{aligned} a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) &\geq \min\left(\nu\sigma_{min}, \frac{\nu}{2}\right)\|\boldsymbol{u}_N\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}^2, \\ &\geq \min\left(\nu\sigma_{min}, \frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}^2 + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}^2, \\ &= \min\left(\nu\sigma_{min}, \frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}_N\|_{0,\Omega}, \\ &= \min\left(\nu\sigma_{min}, \frac{\nu}{2}\right)|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \frac{\nu}{2}\|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

d'où

$$a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \geq \alpha^* \big(|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}\big)|\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}, \tag{3.5}$$

avec

$$\alpha^* = \min\left(\min\left(\nu\sigma_{min}, \frac{\nu}{2}\right), \frac{\nu}{2}\right).$$

■

Proposition 3.1.4. *Le problème* (3.3) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{w}_N) \in W_N$. *De plus,* *cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} \leq C \|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{3.6}$$

Démonstration. D'après les Lemme 3.1.1, Lemme 3.1.2 et Lemme 3.1.3, toutes les hypothèses du théorème de Banach-Nečas-Babuška (Thé.1.3.2) sont satisfaites, alors le problème (3.1) admet donc une solution unique. De plus, nous avons de (3.4) et (3.5), en choisissant $\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{u}_N$

$$\|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} \leq \frac{C}{\alpha^*} \|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

Maintenant, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de la pression p_N, pour cela nous avons besoin de quelques propriétés de la forme $b_N(\cdot, \cdot)$.

Lemme 3.1.5. *La forme bilinéaire $b_N(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$, c'est à dire, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N)| \leq C \|p_N\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}, \ \forall (\boldsymbol{v}_N, p_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N.$$

Démonstration. Pour tout $(\boldsymbol{v}_N, p_N) \in \mathbb{X}_N \times \mathbb{M}_N$

$$\left| b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) \right| = \left| (p_N, \operatorname{div} \boldsymbol{v}_N)_N \right|,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation d'équivalence (1.13) et l'identité (2.4) respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) \right| &\leq 27 \|p_N\|_{0,\Omega} \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}_N\|_{0.\Omega}, \\ &\leq 27 \|p_N\|_{0,\Omega} |\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

d'où la continuité de la forme $b_N(\cdot, \cdot)$. ■

Hypothèse 3.1.6. *Il existe une constante $\beta^* > 0$ indépendante de N telle que :*

$$\sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{|b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)|}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} \geq N^{-\gamma} \beta^* \|q_N\|_{0,\Omega}, \ \forall q_N \in \mathbb{M}_N. \tag{3.7}$$

avec $\gamma > 0$.

Proposition 3.1.7. *Sous l'Hypothèse 3.1.6, il existe un unique* $p_N \in \mathbb{M}_N$ *vérifiant le problème* (3.3) *et satisfaisant*

$$N^{-\gamma}\|p_N\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{3.8}$$

Démonstration. Nous avons d'après (3.1) et (3.3)

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = l_N(\boldsymbol{v}_N) - a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) = 0, \ \forall \boldsymbol{v}_N \in V_N,$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{v}_N \longmapsto l_N(\boldsymbol{v}_N) - a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N),$$

est dans l'espace V_N° et d'après le Lemme 3.1.5 et si l'Hypothèse 3.1.6 est vérifiée, nous déduisons du théorème de Babuška-Brezzi (Thé.1.3.3) qu'il existe un unique $p_N \in \mathbb{M}_N$ vérifiant le problème (3.1) tel que :

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = l_N(\boldsymbol{v}_N) - a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N), \ \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N.$$

en utilisant l'inégalité triangulaire et celle de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$| \ b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) \ | \leq C\bigg(\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} + \|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3}|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}\bigg),$$

en utilisant la conditon inf-sup (3.7) de l'Hypothèse 3.1.6 et l'inégalité (3.6), nous obtenons

$$N^{-\gamma}\|p_N\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\beta^*}\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

Proposition 3.1.8. *Le problème* (3.1) *admet une solution unique* $((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); p_N) \in (\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N, \mathbb{M}_N)$. *De plus, cette solution satisfait*

$$\|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} + N^{-\gamma}\|p_N\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

Démonstration. De la Proposition 3.1.4 et la Proposition 3.1.7, nous déduisons que le problème (3.1) admet une solution unique. De plus, nous avons d'après (3.6) et (3.8)

$$\|(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3\times L^2(\Omega)^3} + N^{-\gamma}\|p_N\|_{0,\Omega} \leq C\|\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

ce qui termine la preuve. ■

3.2 Estimation d'erreur

Le but dans cette section est d'estimer l'erreur commise en approchant la solution du problème variationnel (2.3) par la solution du problème discret (3.1).

Proposition 3.2.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+\sup_{\boldsymbol{z}_N\in\mathbb{X}_N}\frac{(l_N-l)(\boldsymbol{z}_N)}{|\boldsymbol{z}_N|_{1,\Omega}}\Big\}, \tag{3.9}$$

et sous l'Hypothèse 3.1.6, nous avons

$$N^{-\gamma}\|p-p_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{\inf_{q_N\in\mathbb{M}_N}\|p-q_N\|_{0,\Omega}+\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} + \sup_{\boldsymbol{v}_N\in\mathbb{X}_N}\frac{(l_N-l)(\boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}}\Big\}. \tag{3.10}$$

Démonstration. Soient $\boldsymbol{v}_N \in V_{N-1}$ et $\boldsymbol{\zeta}_N \in \mathbb{Y}_N$, grâce à l'inégalité triangulaire, nous avons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+|\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\zeta}_N\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{\zeta}_N-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega},$$

en prenant $\boldsymbol{\zeta}_N = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N$, nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+|\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\mathbf{rot}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N)\|_{0,\Omega} +\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega},$$

en utilisant (2.4), nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq 2|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+|\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}, \tag{3.11}$$

nous devons maintenant estimer le terme $|\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}$. D'après (3.3) nous avons

$$a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) = l_N(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N),$$

nous ajoutons et nous retranchons $a_N((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)$ et $l(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)$, nous obtenons

$$a_N((\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}_N-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) = l_N(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)-l(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) - a_N((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)+l(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N),$$

grâce à la formulation variationnelle (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} a_N((\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}_N-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) &= l_N(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)-l(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)\\ &\quad - a_N((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)+a((\boldsymbol{u},\boldsymbol{\omega}),\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N), \end{aligned}$$

nous ajoutons et nous retranchons $a((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_N((\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}_N-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) &= (l_N-l)(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)\\ &\quad + (a-a_N)((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)\\ &\quad + a((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N),\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N), \end{aligned}$$

puisque $\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}$, grâce à la formule d'exactitude (1.9), nous obtenons

$$a((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)=a_N((\boldsymbol{v}_N,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N),$$

et par suite

$$\begin{aligned} a_N((\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}_N-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N);\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N) &= (l_N-l)(\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N)\\ &\quad + a((\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N,\boldsymbol{\omega}-\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N),\boldsymbol{u}_N-\boldsymbol{v}_N), \end{aligned}$$

en combinant cette dernière identité avec (3.5) et le fait que les formes $a((\cdot,\cdot);\cdot)$ et $(l_N-l)(\cdot)$ sont continues, nous obtenons

$$|\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}\le C\left\{\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+\sup_{\boldsymbol{z}_N\in\mathbb{X}_N}\frac{(l_N-l)(\boldsymbol{z}_N)}{|\boldsymbol{z}_N|_{1,\Omega}}\right\},$$

finalement, en combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité (3.11), nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega}\le C\left\{\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}+\sup_{\boldsymbol{z}_N\in\mathbb{X}_N}\frac{(l_N-l)(\boldsymbol{z}_N)}{|\boldsymbol{z}_N|_{1,\Omega}}\right\}.$$

D'autre part, pour établir l'estimation (3.10), nous appliquons l'inégalité triangulaire

$$\|p-p_N\|_{0,\Omega}\le\|p-q_N\|_{0,\Omega}+\|q_N-p_N\|_{0,\Omega},\ \forall q_N\in\mathbb{M}_N, \tag{3.12}$$

nous devons estimer le terme $\|q_N-p_N\|_{0,\Omega}$. D'après (3.1) nous avons

$$b_N(\boldsymbol{v}_N,p_N)=l_N(\boldsymbol{v}_N)-a_N((\boldsymbol{u}_N,\boldsymbol{\omega}_N);\boldsymbol{v}_N),$$

nous ajoutons et nous retranchons $b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)$ et $l(\boldsymbol{v}_N)$, on trouve

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = l_N(\boldsymbol{v}_N) - l(\boldsymbol{v}_N) - b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) - a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) + l(\boldsymbol{v}_N),$$

en utilisant la première équation du problème (2.3) et l'identité (3.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = {} & (l_N - l)(\boldsymbol{v}_N) - a_N((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \\ & + a((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}); \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p - q_N), \end{aligned}$$

nous ajoutons et nous retranchons $a((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = {} & (l_N - l)(\boldsymbol{v}_N) + (a - a_N)((\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) \\ & + a((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p - q_N), \end{aligned} \tag{3.13}$$

on prend $\boldsymbol{v}_N \in V_{N-1}$, grâce à la formule d'exactitude (1.9), nous obtenons

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N - q_N) = (l_N - l)(\boldsymbol{v}_N) + a((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N) + b_N(\boldsymbol{v}_N, p - q_N),$$

si l'Hypothèse 3.1.6 est vérifiée, on utilise la condition inf-sup (3.7), on trouve

$$\begin{aligned} N^{-\gamma}\|p_N - q_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \Big(& \frac{(l_N - l)(\boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} + \frac{a((\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N); \boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} \\ & + \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, p - q_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} \Big) \Big\}, \end{aligned}$$

la continuité des formes $(l_N - l)(\cdot)$, $a((\cdot, \cdot))$ et $b_N(\cdot, \cdot)$, entraîne

$$\begin{aligned} N^{-\gamma}\|p_N - q_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ & \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(l_N - l)(\boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} + \|(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N)\|_{H_0^1(\Omega)^3 \times L^2(\Omega)^3} \\ & + \|p - q_N\|_{0,\Omega} \Big\}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

finalement, en combinant cette dernière inégalité (3.14) avec les inégalités (3.12) et (3.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ & \inf_{q_N \in \mathbb{M}_N} \|p - q_N\|_{0,\Omega} + \inf_{\boldsymbol{v}_N \in V_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} \\ & + \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(l_N - l)(\boldsymbol{v}_N)}{|\boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}} \Big\}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée. ∎

Proposition 3.2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ N^\gamma \inf_{\boldsymbol{v}_{N-1}\in\mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_{N-1}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega}\Big\}, \tag{3.15}$$

et

$$N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ \inf_{q_N\in\mathbb{M}_N} \|p - q_N\|_{0,\Omega} + N^\gamma \inf_{\boldsymbol{v}_{N-1}\in\mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_{N-1}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega}\Big\}. \tag{3.16}$$

Démonstration. De [8, Chap 4, Rem 2.7], il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} \leq C\Big(1 + \frac{N^\gamma}{\beta^*}\Big) \inf_{\boldsymbol{v}_N\in\mathbb{P}^0_{N-1}(\Omega)^3} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},$$

puisque $\mathbb{X}_{N-1} \subset \mathbb{P}^0_{N-1}(\Omega)^3$, nous obtenons

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} \leq C\Big(1 + \frac{N^\gamma}{\beta^*}\Big) \inf_{\boldsymbol{v}_N\in\mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega},$$

comme $N \geq 2$ et donc $N^\gamma > 1$, ce qui implique

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N\in V_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega} \leq CN^\gamma\Big(1 + \frac{1}{\beta^*}\Big) \inf_{\boldsymbol{v}_N\in\mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_N|_{1,\Omega}, \tag{3.17}$$

il nous reste donc à majorer le terme $(l_N - l)(\boldsymbol{z}_N)$. Nous avons pour tout $\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3$

$$(\boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{z}_N) = (\boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{z}_N)_N,$$

d'où

$$\big|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N)_N\big| = \big|(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}, \boldsymbol{z}_N) + (\boldsymbol{f}_{N-1} - \boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N)\big|,$$

comme $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N)_N = (\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N)_N$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation d'équivalence (1.13) et l'inégalité de Poincaré respectivement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\big|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N) - (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{z}_N)_N\big| &\leq \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{z}_N\|_{0,\Omega} + 27\|\boldsymbol{f}_{N-1} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{z}_N\|_{0,\Omega},\\
&\leq 28\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{z}_N\|_{0,\Omega} + 27\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{z}_N\|_{0,\Omega},\\
&\leq 28C_p\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{z}|_{1,\Omega} + 27C_p\|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}|\boldsymbol{z}|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

on divise les deux membres par $|\boldsymbol{z}_N|_{1,\Omega}$, nous obtenons

$$\sup_{\boldsymbol{z}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{(l_N - l)(\boldsymbol{z}_N)}{|\boldsymbol{z}_N|_{1,\Omega}} \leq C \Big\{ \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \Big\}, \tag{3.18}$$

de (3.17) et (3.18) nous déduisons

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C \Big\{ N^{\gamma} \inf_{\boldsymbol{v}_{N-1} \in \mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_{N-1}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}$$
$$+ \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega} \Big\}.$$

Maintenant, pour estimer l'inégalité (3.16), en utilisant (3.17), nous majorons le terme $(l_N - l)(\boldsymbol{z}_N)$ et en combinant avec (3.10), nous obtenons

$$N^{-\gamma} \|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq C \Big\{ \inf_{q_N \in \mathbb{M}_N} \|p - q_N\|_{0,\Omega} + N^{\gamma} \inf_{\boldsymbol{v}_{N-1} \in \mathbb{X}_{N-1}} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_{N-1}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}$$
$$+ \inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega} \Big\},$$

d'où l'inégalité désirée. ■

Corollaire 3.2.3. *Si on suppose que la solution* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega})$ *du problème continu est dans* $H^m(\Omega)^3 \times H^{m-1}(\Omega)^3$ $(m \geq 1 + \gamma)$ *et la donnée* $\boldsymbol{f} \in H^{m'}(\Omega)^3$ $(m' \geq 2)$*, alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} + N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \leq C \Big\{ N^{1+\gamma-m} \|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + N^{-m} \|p\|_{m-1,\Omega}$$
$$+ N^{-m'} \|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega} \Big\}.$$

Démonstration. Nous choisissons $\boldsymbol{v}_{N-1} = \Pi^{1,0}_{N-1} \boldsymbol{u}$ et comme $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega)^3$ alors $\Pi_{N-1} \boldsymbol{f} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3$, c'est à dire

$$\inf_{\boldsymbol{f}_{N-1} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)^3} \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_{N-1}\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{f} - \Pi_{N-1} \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}, \tag{3.19}$$

en combinant avec l'inégalité (3.15), nous obtenons

$$|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C \Big\{ N^{\gamma} |\boldsymbol{u} - \Pi^{1,0}_{N-1} \boldsymbol{u}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \Pi_{N-1} \boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} \Big\},$$

en utilisant (1.11), (1.12) et (1.10) respectivement, nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ N^{\gamma}(N-1)^{1-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + (N-1)^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\}.$$

D'autre part, nous avons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ \left(\frac{N-1}{N}\right)^{1-m} N^{1+\gamma-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-m'} N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\},$$

comme $N \geq 2$, nous obtenons

$$|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_N|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ N^{1+\gamma-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\}. \tag{3.20}$$

Maintenant, nous choisissons $\boldsymbol{v}_{N-1} = \Pi^{1,0}_{N-1}\boldsymbol{u}$ dans (3.16) et en utilisant (3.19), nous obtenons

$$N^{-\gamma}\|p-p_N\|_{0,\Omega} \leq C\Big\{ \inf_{q_N\in\mathbb{M}_N}\|p-q_N\|_{0,\Omega} + N^{\gamma}|\boldsymbol{u}-\Pi^{1,0}_{N-1}\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{f}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} +\|\boldsymbol{f}-\Pi_{N-1}\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\Big\}.$$

D'autre part, nous avons

$$\inf_{q_N\in\mathbb{M}_N}\|p-q_N\|_{0,\Omega} \leq \|p-\Pi_{N-1}p\|_{0,\Omega}, \tag{3.21}$$

en effet, comme $p \in L^2_0(\Omega)$ et donc $p \in L^2(\Omega)$, par définition de la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur $\mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$, on déduit

$$\langle p-\Pi_{N-1}p, \varphi_{N-1}\rangle = 0,\ \forall \varphi_{N-1}\in\mathbb{P}_{N-1}(\Omega),$$

c'est à dire

$$\int_{\Omega}(p-\Pi_{N-1}p)(\boldsymbol{x})\varphi_{N-1}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

en particulier, pour φ_{N-1} égale à une constante c differente de zéro, on obtient

$$c\int_{\Omega}(p-\Pi_{N-1}p)(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

ce qui implique

$$\int_\Omega p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \Pi_{N-1}p(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0,$$

donc $\Pi_{N-1}p \in \mathbb{M}_N$. Nous utilisons l'inégalité (3.21), nous obtenons

$$N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \le C\Big\{\|p - \Pi_{N-1}p\|_{0,\Omega} + N^\gamma|\boldsymbol{u} - \Pi^{1,0}_{N-1}\boldsymbol{u}|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{f} - \Pi_{N-1}\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\Big\},$$

en utilisant les inégalités (1.10), (1.11) et (1.12), nous obtenons

$$N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \le C\Big\{N^\gamma(N-1)^{1-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + (N-1)^{-m}\|p\|_{m-1,\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega} + (N-1)^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\}.$$

D'autre part, nous avons

$$N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \le C\Big\{\Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{1-m}N^{1+\gamma-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + \Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{-m}N^{-m}\|p\|_{m-1,\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega} + \Big(\frac{N-1}{N}\Big)^{-m'}N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\},$$

comme $N \ge 2$, nous obtenons

$$N^{-\gamma}\|p - p_N\|_{0,\Omega} \le C\Big\{N^{1+\gamma-m}\|\boldsymbol{u}\|_{m,\Omega} + N^{-m}\|p\|_{m-1,\Omega} + N^{-m'}\|\boldsymbol{f}\|_{m',\Omega}\Big\}, \tag{3.22}$$

en sommant les inégalités (3.20) et (3.22), nous obtenons l'inégalité désirée. ■

Appendice

Quelques opérateurs differentiels

— Soit $f(x_1, x_2, x_3)$ un champ scalaire, l'opérateur gradient à valeurs vectorielles, agissant sur des fonctions à valeurs scalaires :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux champs vectoriels :

— L'opérateur gradient à valeurs matricielles, agissant sur des fonctions vectorielles pour la dimension 3 :

$$\nabla \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \nabla v_1 \\ \\ \nabla v_2 \\ \\ \nabla v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

— L'opérateur divergence à valeurs scalaires, agissant sur des fonctions vectorielles :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

— L'opérateur rotationnel pour la dimension 3 est défini par :

$$\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

— Le produit scalaire est défini par :

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i.$$

— Le produit vectoriel pour la dimension 3 est défini par :

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ \\ v_1 u_3 - u_1 v_3 \\ \\ u_1 v_2 - v_1 u2 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] **R. A. Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, San Francisco, London, 1975.

[2] **G. Allaire**, *Analyse Numérique et Optimisation*, l'Ecole Polytechnique, Paris, 2005.

[3] **V. Anaya, B. Gómez-Vargasb, D. Moraa, R. Ruiz-Baiere**, *Incorporating variable viscosity in vorticity-based formulations for Brinkman equations*, Comptes Rendus Mathematique, 357(6) : 552–560, 2019.

[4] **I. Babuška, A. K. Aziz**, *In The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pp.1-359, Academic Press, New York, 1972.

[5] **C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday**, *Approximation Variationnelle : Méthodes d'Eléments Finis et Méthodes Spectrales*, Université Pierre et Marie Curie-Paris, Cours de DEA, Octobre 1990.

[6] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis V*, P. G. Ciarlet & J. L. Lions eds. North-Holland, 1997. 209-485.

[7] **C. Bernardi, Y. Maday**, *Spectral Element and Mortar Element Methods*, Université Pierre et Marie Curie, Cours de DEA, Novembre 1998.

[8] **C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti**, *Discrétisations Variationnelles de Problème aux Limites Elliptiques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004.

[9] **H. Brezis**, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, Heidelberg, London, 2010.

[10] **H. C. Brinkman**, *A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles.* Appl. Sc. Res, A1 : 27–34, 1947.

[11] **M. Crouzeix, A. Mignot**, *Analyse Numérique des Equations Différentielles*, Collection "Mathématiques Appliquées pour la maîtrise", Masson, Paris, 1984.

[12] **R. Daultray, J. L. Lions**, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Licences et les Techniques*, Masson, Paris, 1987.

[13] **P. J. Davis, P. Robinowitz**, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando, 1985.

[14] **L. Durlofsky, J. F. Brady**, *Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media.* Physics of Fluids, 30(11) : 3329–3341, 1987.

[15] **D. Gottlieb, S. A. Orszag**, *Numerical Analysis of Spectral Methods, Theory and Applications*, SIAM Publications, Philadelphia, 1977.

[16] **P. Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain.* Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[17] **V. Girault, P. Raviart**, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer. Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[18] **J. L. Lions, E. Magenes**, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume I, Dunod, Paris, 1968.

[19] **J. Nečas**, *Sur une Méthode pour Résoudre les Équations aux Dérivées Partielles de Type Elliptique*. Ann. Scuala. Norm. Sup. Pisa. 16, 305 − 326, 1962.

[20] **S. A. Orszag**, *Comparison of Pseudospectral and Spectral Approximations*, Stud. Appl. Math. 51(1972), 253 − 259.

[21] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*. Hermann. Paris, 1966.