République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Benyahai - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations aux dérivées partielles et applications

Thème

Résolution d'un Problème Quadratique Convexe par la Méthode Directe de Support

Pésenté par :

M[elle] **Boumendjel Ghada**

Devant le jury :

Présidente	: Lounis Sabrina	M.C.A. Université de Jijel
Encadreur	: Djemai Samia	M.C.B Université de Jijel
Examinateur	: Arroud Chamseddine	M.C.B Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

Soutenu le **25/06/2023**

Remerciements

*Tout d'abord et avant tout, je remercie **ALLAH** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a données durant ces longues années d'étude et le courage pour terminer ce mémoire.*

Pendant toute la durée de mes études et de mon projet, j'ai eu l'occasion de rencontrer des gens vraiment extraordinaires. Permettez-moi ici de les féliciter humblement et de les remercier pour tout ce qu'ils m'ont apporté et pour leur soutien, et leur motivation. Merci particulièrement :

*À mon encadreur **Mme Djemai Samia** pour tous les sacrifices qu'elle a fait pour moi, j'admire beaucoup sa rigueur, son challenge et son sérieux dans son travail, et pour ses précieux conseils tout au long de ce travail.*

*À **Mme Lounis Sabrina** pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.*

*À l'examinateur **Mr Arroud Chamseddine** pour avoir accepté être membre de jury.*

À tous mes enseignants du département de Mathématiques à l'université de Jijel.

*À ma chère professeur **Iman Boutana**, pour tout ce qu'elle a fait pour moi.*

Enfin, je n'oubliera pas de remercier profondément ma famille et mes amis.

♣***GHADA***♣

Dédicace

Avec ma gratitude et tout mon amour, Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance à :

*Mes très chers parents **"Zainab"** et **"Rachid Boumendjel"** qui m'ont toujours encouragée durant mes études, je n'oublierai jamais leurs sacrifices pour moi, je leurs dis Merci Maman et Papa.*

*Mes sœurs qui sont la lumière de mes yeux et le battement de mon cœur **Hala** et **Silya**.*

*Mon frère, mon amour et mon soutien **Abderahmane**, pour m'avoir encouragé dans toutes les situations depuis le début de ma carrière universitaire jusqu'à aujourd'hui.*

Mon fiancé pour ses encouragements dans toutes les situations.

À tous ceux que j'aime.

♣GHADA♣

Table des matières

Introduction Générale

L'optimisation, ou plus particulièrement la programmation mathématique, vise à résoudre des problèmes où l'on cherche à déterminer, parmi un grand nombre de solutions candidates, celle qui donne le meilleur résultat de la fonction objectif. Plus précisément, on cherche une solution satisfaisant un ensemble de contraintes, en minimisant ou maximisant une fonction donnée. L'application de la programmation mathématique est en expansion croissante et s'applique dans plusieurs domaines pratiques.

La programmation quadratique est une branche d'optimisation non linéaire où la fonction objectif à minimiser est une fonction quadratique et les contraintes, définissant le domaine des solutions réalisables, sont linéaires et/ou quadratiques. Son importance réside dans ses propriétés théoriques, ses applications dans différents domaines scientifiques et plusieurs disciplines telles que l'économie, la finance et les sciences de l'ingénieur. En effet, plusieurs problèmes réels et académiques peuvent être modéliser sous forme d'un programme quadratique. En raison de ses nombreuses applications, la programmation quadratique est souvent considérée comme une discipline à part entière.

Beaucoup de méthodes ont été développées pour la résolution d'un problème quadratique. Certaines de ces méthodes sont exactes et d'autres approximatives. Parmi ces méthodes on trouve la méthode la plus classique qui est celle du simplexe de wolfe [41], la méthode d'activation de contraintes [18], la méthode des points intérieurs [33], la méthode du gradient avec projection [25], ainsi que les méthodes de support de R.Gabasov et F.M.Kirolova [21, 20, 22, 36]. La majorité de ces méthodes ont été développées dans le cas de problème de programmation linéaire et dont le concept est basé sur celui de la méthode de simplexe de Dantzig 1963 [12]. Puis, elles sont étendues pour la résolution des problèmes quadratiques sous forme générale.

L'objectif de ce mémoire est d'aborder la méthode de R. Gabassov et F.M. Kirillova [27, 36] appelée méthode directe de support pour la résolution d'un problème quadratique convexe à variables bornées. Cette méthode est une généralisation de la méthode de simplexe [41]. L'itération de l'algorithme est basée sur le principe suivant : en partant d'une solution réalisable de support initiale $\{x, J_p\}$, on construit l'itération $\{x, J_p\} \longrightarrow \{\bar{x}, \bar{J}_p\}$ en deux étapes ; la première est le changement de solution réalisable x en une autre solution réalisable $\bar{x}$, et dans la deuxième qui dépend de la première, on construit le support $\bar{J}_p$ à partir de J_p. Il est à noter qu'une solution réalisable de support peut être un point

extrême, un point frontière ou un point intérieur, alors qu'une solution réalisable de base est toujours un point extrême.
L'avantage de cette méthode par rapport à celle du simplexe est le fait qu'elle utilise les variables de bornes telles qu'elles se présentent sans les modifier, ainsi que la notion de suboptimalité qui accélère la convergence de l'algorithme de résolution ce qui produit un gain en temps et en espace mémoire.

Ce travail commence par une introduction et s'articule autour de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on va passer en revue quelques rappels d'algèbre matriciel et certains résultats classiques importants concernant les fonctions quadratiques et la convexité.

Le deuxième chapitre intitulé "La programmation quadratique convexe", expose des définitions et des théorèmes sur la programmation quadratique convexe.

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter l'algorithme directe de support sur un problème de minimisation d'une fonction quadratique convexe sous des contraintes d'égalité dans un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Le quatrième chapitre est consacré à l'implémentation de la méthode à étudier sous le logiciel Matlab avec une application dans un cas pratique.

Chapitre 1

Rappels mathématiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et propriétés des fonctions quadratiques, des matrices définies et non définies, et des notions sur la convexité [8, 9, 4, 35, 17, 2, 19, 40]. Ceci nous aidera dans l'étude ultérieure de la programmation quadratique convexe (P.Q.C.).

1.2 Les formes quadratiques

Définition 1.1. *Une fonction $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme suivante :*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = x' A x + c' x, \tag{1.1}$$

est dite forme quadratique de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
c est n-vecteur colonne.
$A = (a_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n)$ est une matrice carrée d'ordre n.
Le symbole (') est l'opérateur de transposition vectorielle et matricielle.
Pour $i \neq j$, le coefficient du terme $x_i x_j$ s'écrit $a_{ij} + a_{ji}$. En vertu de cela, la matrice A peut être supposée symétrique. En effet, en définissant de nouveaux coefficients :

$$d_{ij} = d_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, 1 \leq i, j \leq n.$$

1.2.1 Représentation matricielle d'une forme quadratique

Exemple 1.1. *Soient $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$.*
Pour $n = 2$ et d'après la formule (1.1), on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j + \sum_{j=1}^{2} c_jx_j \\
&= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{21}x_2x_1 + c_1x_1 + c_2x_2 \\
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}) + c_1x_1 + c_2x_2 \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= x'Dx + c'x.
\end{aligned}$$

Considérons la forme quadratique suivante :

$$F(x) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 10x_1 - 6x_2.$$

La matrice symétrique associée est

$$D = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ et } c = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Gradient et Hessien d'une forme quadratique

Définition 1.2. *Soit une fonction de classe C^1 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le gradient de la fonction F est définie par :*

$$g(x) = \nabla F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 2Dx + c,$$

où $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de F par rapport à x_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Définition 1.3. *Soit une fonction de classe C^2 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La hessienne de la fonction F est définie par :*

$$H(x) = \nabla^2 F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}.$$

Définition 1.4. *[10] Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. La dérivée directionnelle de F dans la direction l au point x est :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial l}(x) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(x+tl) - F(x)}{t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x+tl) \mid_{t=0} l_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x+tl) \mid_{t=0} l_n \\ &= l'\nabla F(x)\end{aligned}$$

Remarque 1.1. *Si $||l|| = 1$, la dérivée directionnelle est le taux d'accroissement de F dans la direction l au point x. Le taux d'accroissement est maximal dans la direction du gradient.*

1.2.3 Formes quadratiques définies et non définies

Soit la forme quadratique $F(x) = x'Dx$ avec D est symétrique.

Définition 1.5. *On dit que $F(x)$ est définie positive si : $x'Dx > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite semi-définie positive ou définie non négative si : $x'Dx \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 1.6. *On dit que $F(x)$ est définie négative si $x'Dx < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$. Elle est dite définie non positive si $x'Dx \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 1.7. *Une matrice symétrique D est dite matrice définie positive (non négative) et se note $D > 0, (D \geq 0)$, si elle est associée à une forme quadratique définie positive (non négative).*

Définition 1.8. *Une forme quadratique $F(x)$ est dite non définie si $F(x)$ est positive pour certaines valeurs de x et négative pour d'autres.*

Définition 1.9. *Soit D une matrice carrée, on dit que D est symétrique si : $d_{ij} = d_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.*

1.2.4 Propriétés des matrices définies positives et non négatives

Les matrices symétriques définies positives ont des propriétés très intéressantes. Voici quelques unes [4, 38] :

Propriétés 1.10. *Soit une matrice symétrique $D = (d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n)$. Si D est définie positive (non négative), alors on a :*

$$d_{ii} > 0 \quad (d_{ii} \geq 0), \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Propriétés 1.11. *Soit D une matrice symétrique $n \times n$. On dit que D est semi-définie positive ou définie non négative et on note $D \geq 0$, quand :*

$$xDx' \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On dit que D est définie positive et on note $D > 0$, quand :

$$xDx' > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad et \quad x \neq 0.$$

Propriétés 1.12. *Soit D une matrice symétrique $n \times n$. On note $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$ ses valeurs propres réelles. On a les équivalences suivantes :*

- $D \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n$;
- $D > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$;
- *D est indéfinie si et seulement si certains λ_i sont positifs et d'autres négatifs.*

Propriétés 1.13. *Soit la matrice D par blocs de la manière suivante :*

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $D > 0$ ($D \geq 0$), alors les sous matrices principales D_{11} et D_{22} sont aussi définies positives (non négatives). D'une manière générale, toute sous matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est définie positive (non négative).

Propriétés 1.14. *Un élément de la diagonale d'une matrice symétrique D définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.*

Propriétés 1.15. *Soit D une matrice symétrique définie non négative. Si x est un point quelconque mais fixé de $\mathbb{R}^n$ tel que $x'Dx = 0$, on a alors $Dx = 0$.*

1.2.5 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 1.16. *Soit A une matrice d'ordre $m \times n$.*
Le noyau de A est l'ensemble :

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

L'image ou l'espace image de A est l'ensemble :

$$Im(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ \exists x \in \mathbb{R}^n, \ Ax = y\}.$$

Proposition 1.17.

- *$N(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*
- *$Im(A)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A.*

Définition 1.18. *On appelle rang d'une matrice, la dimension de l'image de la matrice A :*

$$rang(A) = dim(Im(A)).$$

1.2.6 L'inverse des matrices

Définition 1.19. *La matrice carrée A d'ordre n est dite inversible (ou régulière ou non singulière) s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$, I_n est une matrice d'identité.*
On dit que B est la matrice inverse de A et on écrit $B = A^{-1}$.
Une matrice qui n'est pas inversible est dite singulière.

Définition 1.20. *Une matrice est inversible si son déterminant est non nul ($det(A) \neq 0$).*
Si A est inversible, son inverse est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
De plus, si A et B sont deux matrices inversibles d'ordre n, donc le produit AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Propriétés 1.21. *On dit que la matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.*

1.3 Notions sur la convexité

La convexité joue un rôle central dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

1.3.1 Ensembles convexes

Définition 1.22. *Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in S^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a :*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S.$$

Géométriquement, toute partie relie deux points quelconques x et y de S, le segment $[x, y]$ doit être aussi dans S (voir la figure (1.3.1)).

Définition 1.23. *Un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de points de l'ensemble est encore un point de l'ensemble.*

Définition 1.24. *Un ensemble S est dit cône si $x \in S$ implique que $\lambda x \in S$ pour tout $\lambda > 0$. Si, de plus, S est convexe, alors S est appelé cône convexe.*

1.3.2 Propriétés des ensembles convexes

Propriétés 1.25. *[2] Soit une famille $(S_i)_{i=1,\dots,n}$ d'ensembles convexes, donc on a :*
$S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$ est un ensemble convexe.

Propriétés 1.26. *[17] Si S est convexe alors :*

$$(\lambda_1 + \lambda_2)S = \lambda_1 S + \lambda_2 S, \quad \textit{pour toute} \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$$

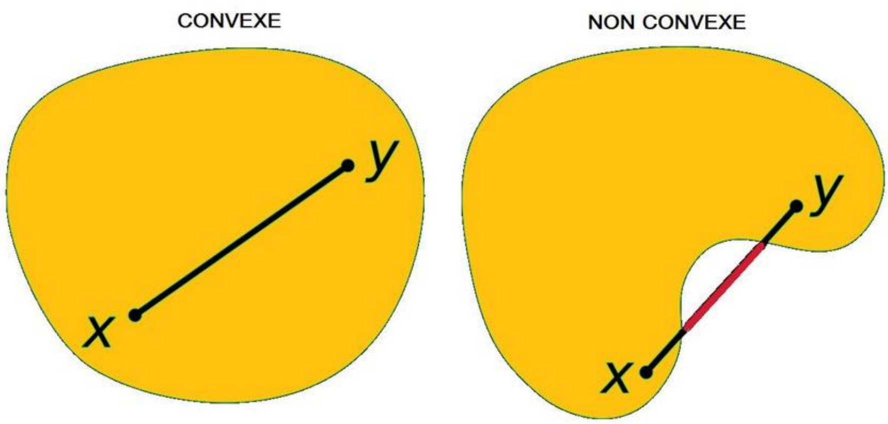

FIGURE 1.1 – Illustration des ensembles convexes et non convexes.

Propriétés 1.27. *[17] Si S est convexe, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $K = \{x \mid x = \lambda y, y \in S\}$ est un ensemble convexe.*

Propriétés 1.28. *[17] Si S_1 et S_2 sont deux ensembles convexes de $\mathbb{R}$, alors $K = S_1 \cap S_2$ et $K = \{x \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in S_1$ et $x_2 \in S_2\}$ est convexe.*

1.3.3 Polyèdre convexe et Polytope

Définition 1.29. *Un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme :*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ sont fixés.

Définition 1.30. *Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^n$ non nul ; on appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $a'x = b, \quad b \in \mathbb{R}^n$. Cet hyperplan à dimension $(n-1)$ divise l'espace de $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces :*

$$H^+ = \{x| \ a'x \geq b\} \quad et \quad H^- = \{x| \ a'x \leq b\},$$

où H^+ et H^- sont convexes.

Théorème 1.31. *[2] Un polyèdre est un ensemble convexe.*

Définition 1.32.

- *Un polyèdre borné, i.e., un polyèdre pour lequel il existe un nombre B tel que chaque point du polyèdre a des coordonnées comprises entre $-B$ et B, est appelé polytope.*
- *Un polytope à 2 dimensions est un polygone.*

1.3.4 Fonctions convexes

Définition 1.33. *Une fonction F réelle définie sur un ensemble convexe S de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout nombre réel positif ou nul λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y). \tag{1.2}$$

Définition 1.34.

- *Une fonction convexe $F(x), x \in S$, est dite strictement convexe si l'inégalité (1.2) est stricte $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.*

- *Une fonction F est concave si $-F$ est convexe.*

- *L'interprétation géométrique de cette définition est que le graphe de la fonction est toujours en dessous du segment reliant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.*

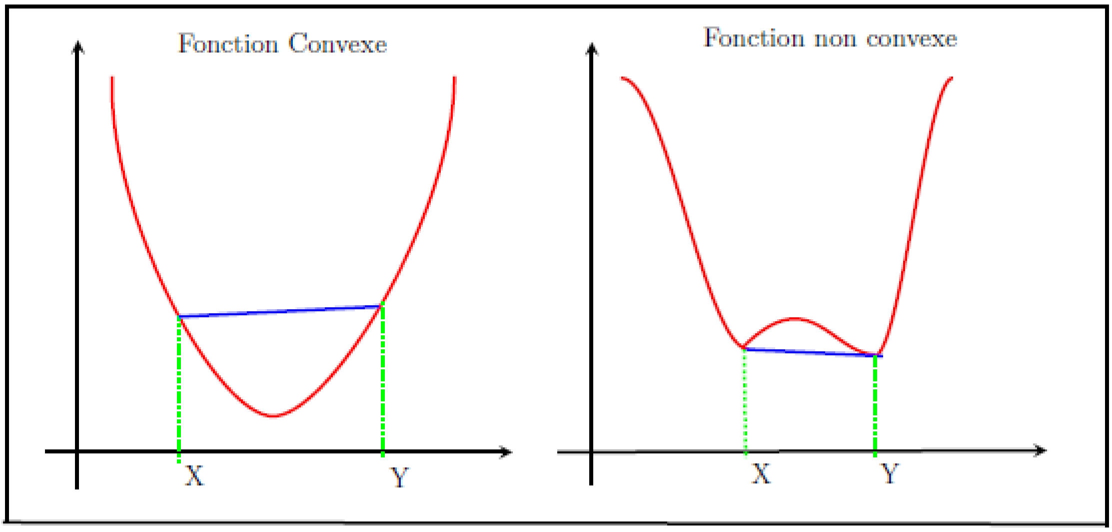

FIGURE 1.2 – Fonction convexe.

Exemple 1.2. *On définit la fonction distance :*

$$d_S(x) = inf\{\|x - z\|, z \in S\},$$

où $S \subset \mathbb{R}^n$ est ensemble non vide convexe et $\|.\|$ est une norme quelconque dans $\mathbb{R}^n$. Alors, la fonction d_S est convexe.

Démonstration. Soient $x, y \in S, \lambda \in [0,1]$ on a :

$$\begin{cases} d_S(x) = inf\{\|x - z_1\|, \quad z_1 \in S\}, \\ d_S(y) = inf\{\|y - z_2\|, \quad z_2 \in S\}, \end{cases}$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists z_1 \in S, \quad \lambda d_S(x) \leq \lambda \|x - z_1\| < \lambda(d_S(x) + \varepsilon). \tag{1.3}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists z_2 \in S, \quad (1-\lambda) d_S(y) \leq (1-\lambda)\|x - z_1\| < (1-\lambda)(d_S(y) + \varepsilon). \tag{1.4}$$

Donc :

$$\lambda\|x - z_1\| + (1-\lambda)\|y - z_2\| < \lambda d_S(x) + (1-\lambda) d_S(y) + \varepsilon.$$

D'autre part :

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)\| \leq \|\lambda x - z_1\| + (1-\lambda)\|y - z_2\| < \lambda d_S(x) + (1-\lambda) d_S(y) + \varepsilon,$$

on prend $z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in S$.

$$\inf_{z \in S} \|\lambda x + (1-\lambda)y - z\| \leq \|\lambda x + (1-\lambda)y - z\| < \lambda d_S(x) + (1-\lambda) d_S(y) + \varepsilon,$$

Donc :

$$d_S(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda d_S(x) + (1-\lambda) d_S(y) + \varepsilon.$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$d_S(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda d_S(x) + (1-\lambda) d_S(y),$$

alors la fonction d_S est convexe. □

Définition 1.35. *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ ensemble non vide et $F : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. L'épigraphe de F, noté $epi(F)$, est l'ensemble :*

$$epi(F) = \{(x, \alpha) | F(x) \leq \alpha, x \in S, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 1.36. *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ ensemble convexe non vide et $F : S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, F est convexe si et seulement si $epi(F)$ est un ensemble convexe.*

Démonstration. On suppose que F est convexe.
Soient $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in epi(F)$.
D'après les définitions de l'épigraphe et de la fonction convexe, on a :

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \leq \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Puisque S est un ensemble convexe, alors

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S,$$

d'où

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2) \in epi(F),$$

ce qui implique que $epi(F)$ est convexe.
D'autre part, on suppose que $epi(F)$ est convexe.
Soient $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in epi(F)$, alors, d'après la convexité de $epi(F)$, on a :

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)) \in epi(F), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Donc

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2), \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

D'où F est convexe. □

Théorème 1.37.

- *Soit F une fonction convexe sur un ensemble convexe $S \subset \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$ un nombre réel, alors αF est aussi une fonction convexe sur S.*
- *Soient F_1, F_2 deux fonctions convexes sur un ensemble S convexe, alors la fonction F_1+F_2 est aussi convexe sur S.*
- *Soient $F_1, F_2, \ldots, F_m$ des fonctions convexes sur l'ensemble S convexe et les nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \geq 0$, alors la fonction $\sum_{i=1}^m \alpha_i F_i$ est aussi convexe sur S.*

1.3.5 Propriétés des fonctions convexes

Théorème 1.38. *[32] Si F est continûment différentiable, les conditions (i) et (ii) ci-dessous sont équivalentes.*
Les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessous sont équivalentes si la fonction F est deux fois continûment différentiable :

(i) F est convexe ;

(ii) $\forall x, y \in S, F(y) \geq F(x) + \nabla F(x)'(y-x)$;

(iii) $\forall x \in S$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x)$ est semi-définie positive.

Alors, d'après ce théorème, on déduit facilement qu'une fonction quadratique $F(x) = x'Dx + c'x$ est convexe si et seulement si sa matrice associée D est semi-définie positive. Cela provient du fait que $D = \nabla^2 F(x)$.

Propriétés 1.39. *[13](**Inégalité de Jensen**) Soit la fonction F réelle définie sur un ensemble convexe $S \subset \mathbb{R}^n$, alors F est convexe si et seulement si :*

$$F(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i F(x_i),$$

où $x_i \in S$, $i = 1, \ldots, k$, $\lambda \geq 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions et les propriétés des formes quadratiques. Ensuite, nous avons vu des notions sur la convexité et les propriétés des ensembles et des fonctions convexes qui sont fondamentales pour l'optimisation non linéaire.

Chapitre 2

La programmation quadratique convexe (P.Q.C.)

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous verrons des définitions sur les problèmes quadratiques et convexes, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'optimalité de ces problèmes.

2.2 Programmation non linéaire sous contraintes

2.2.1 Formulation du problème

On définit le problème d'optimisation non linéaire sous contraintes dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} min \;\; F(x), \\ h_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, p, \\ g_i(x) \leq 0, \;\; i = p+1, \ldots, m, \end{cases} \tag{2.1}$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, F est la fonction objectif ou critère économique et $(h_i), \; i = 1, \ldots, p, \; (g_i), \; i = p+1, \ldots, m$, sont les contraintes du problème.

Définition 2.1. *On appelle ensemble réalisable $X = \{x \in \mathbb{R}^n | h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p \; et \; g_i(x) \leq 0, \; i = p+1, \ldots, m\}$ l'ensemble des vecteurs vérifiant toutes les contraintes du problème.*

2.2.2 Les minimums locaux et globaux

Définition 2.2. ***(Minimum local)***
Le vecteur $x^* \in X$ est appelé minimum local du problème (2.1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$F(x) \geq F(x^*), \; \forall x \in X \; \textit{tel que} \; \|x - x^*\| < \varepsilon.$$

Définition 2.3. ***(Minimum local strict)***
Le vecteur $x^* \in X$ est appelé minimum local du problème (2.1) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$F(x) > F(x^*),\ \forall x \in X,\ x \neq x^* \text{tel que } \|x - x^*\| < \varepsilon.$$

Définition 2.4. ***(Minimum global)***
Le vecteur $x^* \in X$ est appelé minimum global du problème (2.1) si :

$$F(x) \geq F(x^*),\ \forall x \in X.$$

Définition 2.5. ***(Minimum global strict)***
Le vecteur $x^* \in X$ est appelé minimum global strict du problème (2.1) si :

$$F(x^*) < F(x),\ \forall x \in X,\ x \neq x^*.$$

2.2.3 Existence et unicité

Théorème 2.6. *[3]**(Weierstrass)***
Si $\mathbb{K}$ est un compact (fermé et borné) non vide de $\mathbb{R}^n$ et si F est continue sur $\mathbb{K}$, alors le problème (2.1) admet au moins une solution optimale globale $x^* \in \mathbb{K}$.

Théorème 2.7. *[3] Si $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$, F est continue et coercitive (c'est-à-dire : $\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty$), alors le problème (2.1) admet une unique solution optimale globale.*

2.3 Conditions d'optimalité sans contraintes

Soit le programme non linéaire sans contraintes suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x). \tag{2.2}$$

2.3.1 Conditions nécessaires de minimalité locale

Théorème 2.8. ***(Conditions nécessaires du premier ordre)***
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tel que F est différentiable au point $x^* \in \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla F(x^*)'\ell < 0$. Alors il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$F(x^* + \alpha\ell) < F(x^*),\ \forall \alpha \in]0, \lambda[.$$

La direction ℓ s'appelle dans ce cas direction de descente.

Démonstration. Comme F est différentiable en x^* donc :

$$F(x^* + \alpha\ell) = F(x^*) + \alpha\nabla F(x^*)'\ell + \alpha\|\ell\|\xi(x^* + \alpha\ell),$$

où $\xi(x^* + \alpha\ell) \to 0$ pour $\alpha \to 0$. Alors :

$$\frac{F(x^* + \alpha\ell) - F(x^*)}{\alpha} = \nabla F(x^*)'\ell + \|\ell\|\xi(x^* + \alpha\ell), \quad \alpha \neq 0.$$

Et comme $\nabla F(x^*)'\ell < 0$ et $\xi(x^* + \alpha\ell) \to 0$ pour $\alpha \to 0$, il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\nabla F(x^*)'\ell + \|\ell\|\xi(x^* + \alpha\ell) < 0, \ \forall \alpha \in]0, \lambda[.$$

Par conséquent, on a :

$$F(x^* + \alpha\ell) < F(x^*), \quad \forall \alpha \in]0, \lambda[.$$

□

Corollaire 2.1. *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en x^*, si x^* est un minimum local alors :*

$$\nabla F(x^*) = 0.$$

Démonstration. En démontrant par l'absurde, on suppose que :

$$\nabla F(x^*) \neq 0 \text{ et } \ell = -\nabla F(x^*),$$

alors on a :

$$\nabla F(x^*)'\ell = -\|\nabla F(x^*)\|^2 < 0.$$

Donc, d'après le théorème précédent, il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$F(x^* + \alpha\ell) < F(x^*), \ \forall \alpha \in]0, \lambda[.$$

Contradiction avec le fait que x^* est un minimum local d'où $\nabla F(x^*) = 0$. □

Théorème 2.9. ***(Conditions nécessaires du seconde ordre)***
Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûellement différentiable, x^* est un minimum local de F. Alors :

$$\nabla F(x^*) = 0 \ et \ \nabla^2 F(x^*) \ \ est\ semi\text{-}définie\ positive.$$

Démonstration. Le corollaire ci-dessus montre la première condition du théorème.
D'après le développement de Taylor de F en x^* :

$$F(x^* + \alpha\ell) = F(x^*) + \alpha\nabla F(x^*)'\ell + \frac{1}{2}\alpha^2\nabla^2 F(x^*)\ell + \alpha^2\|\ell\|^2\xi(x^* + \alpha\ell), \ \alpha \neq 0.$$

Comme x^* est un minimum local, alors $F(x^* + \alpha\ell) \geq F(x^*)$ pour α suffisamment petit, d'où :

$$\frac{1}{2}\nabla^2 F(x^*)\ell + \|\ell\|^2\xi(x^* + \alpha\ell) \geq 0, \ \alpha \text{ est petit.}$$

En passant à la limite quand $\alpha \to 0$, on obtient que $\ell'\nabla^2 F(x^*)\ell \geq 0$, d'où $\nabla^2 F(x^*)$ est semi-définie positive. □

2.3.2 Conditions suffisantes de minimalité locale

Théorème 2.10. *Soit la fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois continûellement différentiable au point x^*.*
Si $\nabla F(x^*) = 0$ et $\nabla^2 F(x)$ est définie positive, alors x^* est un minimum local strict de F.

Démonstration. En montrant par l'absurde, soit le développement de Taylor de F en x^* :

$$F(x) = F(x^*) + \nabla F(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)'\nabla^2 F(x^*)(x - x^*) + \|x - x^*\|^2 \xi(x - x^*),$$

avec $\xi(x - x^*) \to 0$ quand $x \to x^*$.
Au voisinage de x^*, tout vecteur x peut s'écrire $x = x^* + \theta\ell$, où ℓ est une direction tel que $\|\ell\| = 1$, alors $\theta = x - x^*$. Donc on a :

$$F(x) = F(x^* + \theta\ell) = F(x^*) + \frac{\theta^2}{2}\ell'\nabla^2 F(x^*)\ell + \theta^2\xi(\theta),$$

avec $\xi(\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$.
En vertu de deuxième hypothèse, on a $\ell'\nabla^2 F(x^*)\ell > 0$, alors pour un $\theta > 0$ suffisamment petit, on aura $F(x^* + \theta\ell) > F(x^*)$, ce qui est la contradiction.
Donc, x^* est bien un minimum local strict de F. □

Théorème 2.11. *[32] Soit F une fonction convexe continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *x^* est un minimum global de F sur $\mathbb{R}^n$;*
- *x^* est un minimum local de F sur $\mathbb{R}^n$;*
- *x^* est un point stationnaire de F, i.e, $\nabla F(x^*) = 0$.*

2.4 Conditions d'optimalité avec contraintes

2.4.1 Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires d'égalités

On va s'intéresser au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'égalités seulement :

$$\begin{cases} min\ F(x), \\ h_i(x) = A_i'x - b_i = 0,\ i = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois continûment différentiable, b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et A une matrice d'ordre $m \times n$, formée des vecteurs colonnes et lignes suivants :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ \vdots \\ A_m' \end{pmatrix}; \quad \text{et } h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{pmatrix}$$

est une fonction vectorielle définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Propriétés 2.12. *Un vecteur $\ell \in \mathbb{R}^n$ est une direction admissible au point x si et seulement si : $A\ell = 0$. De plus, on a : $x(\alpha) = x + \alpha\ell \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Remarque 2.1. *Pour que l'ensemble des solutions réalisables X ne soit pas vide ou ne soit pas réduit à un point isolé, on considère que $rang(A) = m < n$.*

Définition 2.13. *La fonction $\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$ est dite fonction de Lagrange associée au problème* (2.3).
Le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, est formé des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 2.14. *Soit x un minimum local (ou global) pour le problème (2.3). Alors, il existe un vecteur multiplicateurs de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, tel que :*

$$\nabla \mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit x un minimum du problème (2.3), alors il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$\nabla F(x^*) + A'\lambda = 0. \tag{2.4}$$

Aussi, si A est de rang complet en lignes, alors λ est unique.
La condition (2.4) peut être donnée autrement, en utilisant la fonction de Lagrange :

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = \nabla F(x) + A'\lambda = 0 \tag{2.5}$$

De plus, un minimum local est tout d'abord un point réalisable, qui vérifie :

$$Ax = b \Rightarrow \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) = Ax - b = 0. \tag{2.6}$$

Donc, d'après les relations (2.4) et (2.5), on trouve la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre pour le problème (2.3). □

2.4.2 Conditions d'optimalité pour le cas des contraintes linéaires d'inégalités

On va s'intéresser au problème suivant, dit problème d'optimisation avec contraintes d'inégalités seulement :

$$\begin{cases} min \ F(x), \\ g_j(x) = A_j x - b_j \leq 0, \ j = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{2.7}$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ et A est une matrice d'ordre $m \times n$, formée des vecteurs colonnes et des vecteurs lignes suivantes :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ \vdots \\ A'_q \end{pmatrix};$$

et $g(x)$ la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.15. *L'ensemble des indices actifs au point x^* est formé des indices i qui vérifient $g_j(x^*) = 0$. Il est noté :*

$$I_a = I_a(x^*) = \{j = 1, 2, \ldots, m/g_j(x^*) = 0 \Rightarrow A'_j x^* = b_j\}.$$

Lemme 2.16. ***(Farkas)**[38]*
Soit $(m+1)$ vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$: $c, A_j,\ 1 \leq j \leq m,\ m < n$.
Si pour chaque vecteur x satisfait $A'_j x \leq 0,\ 1 \leq j \leq m$, on a $c'x \leq 0$, alors il existe des coefficients $\lambda_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m$, tel que :

$$c = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j.$$

Lemme 2.17. *Soit S l'ensemble des contraintes d'inégalités du problème (2.7), un vecteur ℓ de $\mathbb{R}^n$ est une direction admissible au point x^* si et seulement si :*

$$A'_j \ell \leq 0,\ \forall j \in I_a(x^*).$$

Théorème 2.18. ***(Théorème de Karush-Kuhn-Tucker)**[1] Soit x^* un point minimum du problème (2.7). Il existe $\lambda^* = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \geq 0$ tel que :*

•Pour la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = F(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_j(x^*)$, la condition de stationnarité est vérifiée :

$$\nabla F(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* A_j = 0.$$

• La condition de complémentarité est remplie :

$$\lambda_j^* g(x^*) = 0,\ \forall j = 1, \ldots, m.$$

2.5 Programmation convexe

Définition 2.19. *On dit qu'un problème de programmation mathématique est convexe (strictement convexe), s'il consiste à minimiser une fonction convexe (strictement convexe) dans un domaine convexe.*

Définition 2.20. *Le problème (2.1) est convexe si F est convexe, les fonctions $h_i(x), i = 1, \ldots, p$, sont linéaires et les fonctions $g_j(x), j = 1, \ldots, q$, sont convexes.*

2.5.1 Propriétés des problèmes convexes

Pour tout problème de programmation convexe, nous avons les propriétés suivantes[5, 32] :

Propriétés 2.21. *Tout minimum local est un minimum global.*

Propriétés 2.22. *Soit la fonction F convexe définie sur un convexe $S \in \mathbb{R}^n$. Alors, l'ensemble X des points où F atteint son minimum est convexe.*

Propriétés 2.23. *Si la fonction F est strictement convexe, alors son minimum global, lorsque qu' il existe, est atteint en un seul point x^*.*

Théorème 2.24. *Soient la fonction convexe F et le couple de vecteurs (x^*, λ^*) vérifiant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker :*

(i.) $\nabla \mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*) = 0, \quad \lambda_j^* \geq 0, \; j = 1, \ldots, q$ *;*

(ii.) $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, \; j = 1, \ldots, q$.

Alors, le vecteur x^* constitue un minimum global de F.

Les conditions de KKT sont à la fois des conditions nécessaires et suffisantes de minimalité (c'est le théorème de KKT-convexe).

2.6 Problème Quadratique Convexe (P.Q.C)

Il s'agit d'une classe de problème d'optimisation où la fonction objectif est quadratique, s'écrivant sous la forme $F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x$, avec D symétrique, que l'on minimise sur un polyèdre convexe fermé.

Remarque 2.2. *On remarque qu'un problème linéaire n'est autre qu'un problème quadratique dégénéré ($D = 0$), et c'est toujours un problème convexe.*

L'étude des problèmes quadratiques convexes constitue un domaine propre de la théorie de la programmation quadratique.

2.7 Les domaines d'application de P.Q.C.

La programmation quadratique convexe est le plus simple problème d'optimisation non linéaire avec contraintes. Elle est naturellement utilisée dans la modélisation d'une variété d'applications, telles que :

• La gestion de portefeuille [30, 31, 14] ;
• L'analyse structurelle [35, 29] ;
• Le contrôle optimal [16, 6, 7] ;
• Les machines à vecteurs de support (SVM) [39, 15].

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les conditions d'optimalité pour un problème quadratique convexe sans et sous contraintes.

Chapitre 3

Méthode directe de support pour la programmation quadratique convexe à variables bornées

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons la méthode de R. Gabassov et F.M. Kirillova [27, 36] appelée méthode directe du support pour la résolution d'un problème quadratique convexe à variables bornées. Le principe de cette méthode est : en partant d'une solution réalisable de support initiale, formée d'une solution réalisable et de deux matrices non dégénérées correspondantes respectivement aux contraintes et à la fonction objectif, chaque itération consiste à trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction en améliorant la valeur de la fonction objectif, tout en s'assurant de ne pas sortir du domaine admissible déterminé par les contraintes du problème.

3.2 Position du problème

Le problème de la programmation quadratique convexe à variables bornées est défini sous la forme suivante :

$$min\ F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x, \tag{3.1}$$

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$d^- \leq x \leq d^+, \tag{3.3}$$

où la matrice D est symétrique et semi-définie positive, A est une matrice de dimension $m \times n$, avec $rang(A) = m < n$, b un m-vecteur, x, c, d^- et d^+ sont des n-vecteurs ; $\|d^-\| < \infty$, $\|d^+\| < \infty$.
On a : $I = 1, 2, \ldots, m$, $J = 1, 2, \ldots, n$, sont les ensembles des indices des lignes et des colonnes de A.

On définit les répartitions suivantes :

$$J = J_B \cup J_N, \text{ avec } J_B \cap J_N = \emptyset, \; J_N = J \setminus J_B, \mid J_B \mid = m.$$

Alors, on peut écrire et fractionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :
$x = x(J) = (x_j, \; j \in J)$,

$x = \begin{pmatrix} x_B \\ -- \\ x_N \end{pmatrix}, \; x_B = x(J_B) = (x_j, \; j \in J_B), \; x_N = x(J_N) = (x_j, \quad j \in J_N)\,;$

$c = c(J) = \begin{pmatrix} c_B \\ -- \\ c_N \end{pmatrix}, \; c_B = (c_j, \; j \in J_B), \; c_N = (c_j, \quad j \in J_N)\,;$

$b = b(I) = (b_i, \quad i \in I), \; d^- = (d_j^-, \; j \in J), \; d^+ = (d_j^+, \; j \in J)\,;$

$A = A(I, J) = (a_{ij}, \; i \in I, \; j \in J); \; A = (a_j, \; j \in J); \; a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$

$A = (A_B | A_N), \; A_B = A(I, J_B), \; A_N = A(I, J_N).$

3.2.1 Notations et définitions

Définition 3.1. ***(Solution réalisable)***
Le vecteur x vérifiant les contraintes (3.2) et (3.3) est appelé solution réalisable (SR) du problème (3.1)-(3.3).

Définition 3.2. ***(Solution optimale)***
Une solution réalisable x^* est dite optimale si

$$F(x^*) = \frac{1}{2}(x^*)' D x + c' x^* = min \; \frac{1}{2} x' D x + c' x,$$

où x^* est pris parmi toutes les solutions réalisables du problème(3.1)-(3.3).

Définition 3.3. ***(Solution suboptimale)***
un plan (solution) x^ϵ est appelé ϵ-optimal ou suboptimal si

$$F(x^\epsilon) - F(x^*) \leq \epsilon,$$
$$\frac{1}{2}(x^\epsilon)' D x^\epsilon + c' x^\epsilon - \frac{1}{2}(x^*)' D x^* - c' x^* \leq \epsilon,$$

où x^* est un solution optimale du problème (3.1)-(3.3) et ϵ est un nombre positif ou nul.

Définition 3.4. ***(Support des contraintes)***
On appelle l'ensemble $J_B \subset J$, $|J_B| = m$, support des contraintes du problème(3.1)-(3.3) si

$$det(A_B) = det(A(I, J_B)) \neq 0.$$

Définition 3.5. ***(Solution réalisable de support)***
Le couple $\{x, J_B\}$, formé du solution réalisable (plan) x et du support J_B, est appelé solution réalisable de support (SRS).

Définition 3.6. ***(Solution réalisable de support non dégénérée)***
La SRS x est dite non dégénérée, si

$$d_j^- < x_j < d_j^+, \ \forall j \in J_B.$$

Définition 3.7.

- *Le vecteur $g(x) = Dx + c$ est le gradient de la fonction objectif* (3.1) *au point x, avec*

$$g' = (g_j, \ j \in J) = (g'_B, g'_N), \ g(J_B) = (g_j, \ j \in J_B), \ g(J_N) = (g_j, \ j \in J_N).$$

- *Le vecteur des multiplicateurs (potentiels) u est défini par :*

$$u' = g'_B A_B^{-1}.$$

- *Le vecteur des estimations (des coûts réduits) E est défini par :*

$$E' = g' - u'A = (E'_B, E'_N),$$

tel que $E'_B = E'(J_B) = 0$, $E'_N = g'_N - u'A_N$.

Définition 3.8. ***(Support de la fonction objectif)***
On appelle l'ensemble d'indices $J_S \subset J_N$ support de la fonction objectif (3.1) si la sous-matrice $M_S = M(J_S, J_S)$ de M est non singulière,c-à-d, det$(M(J_S, J_S) \neq 0$, où

$$M = M(J_N, J_N) = Z'DZ, \ \text{et } Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

$I_N = I(J_N, J_N)$ est la matrice d'identité d'ordre $(n - m)$.

Définition 3.9. ***(Support du problème)***
On appelle support du problème (3.1)-(3.3) l'ensemble $J_P = \{J_B, J_S\}$, formé du support des contraintes J_B et celui de la fonction objectif J_S.

Définition 3.10. ***(Direction admissible - Direction d'amélioration)***
On dit que le vecteur ℓ est une direction admissible pour le problème (3.1)-(3.3) si

$$\forall \ell \in \mathbb{R}^n, \ A\ell = 0.$$

Une direction admissible ℓ est dite direction d'amélioration au point x si $E'\ell < 0$.

Définition 3.11. ***(Estimation de suboptimalité)***
Soit $\{x, J_B\}$ une solution réalisable de support (SRS) du problème (3.1)-(3.3). On appelle estimation de suboptimalité de la SRS $\{x, J_B\}$, la quantité $\beta(x, J_B)$ définie par :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+). \tag{3.5}$$

Définition 3.12. ***(Plan de support)***
On appelle plan de support du problème (3.1)-(3.3) le couple $\{x, J_P\}$ formé du plan x et du support J_P ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.

3.3 Formule d'accroissement de la fonction objectif

Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (3.1)-(3.3) et considérons un autre plan quelconque $\overline{x} = x + \Delta x$.
L'accroissement de la fonction objectif s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(\bar{x}) - F(x) \\
&= \frac{1}{2}\bar{x}'D\bar{x} + c'\bar{x} - \frac{1}{2}x'Dx - c'x \\
&= \frac{1}{2}(x+\Delta x)'D(x+\Delta x) + c'(x+\Delta x) - \frac{1}{2}x'Dx - c'x \\
&= \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x + \Delta' x(Dx+c) \\
&= \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x + g'(x)\Delta x.
\end{aligned}$$

Alors

$$F(\bar{x}) - F(x) = g'(x)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x. \tag{3.6}$$

D'autre part, on a

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A\bar{x} = b, \end{cases} \Leftrightarrow A\bar{x} = A(\Delta x + x) = A\Delta x + Ax = b \Rightarrow A\Delta x = 0.$$

En posant $\Delta x_B = \Delta x(J_B), \Delta x_N = \Delta x(J_N), \Delta x = (\frac{\Delta x_B}{\Delta x_N})$.
On a

$$A\Delta x = 0 \Leftrightarrow A_B\Delta x_B + A_N\Delta x_N = 0,$$

d'où

$$\Delta x_B = -A_B^{-1}A_N\Delta x_N. \tag{3.7}$$

En vertu de la relation (3.7), la formule (3.6) devient

$$\begin{aligned}
F(\bar{x}) - F(x) &= g'_B\Delta x_B + g'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x \\
&= g'_B(-A_B^{-1}A_N\Delta x_N) + g'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x \\
&= [-g'_BA_B^{-1}A_N + g'_N]\Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x \\
&= E'_N\Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' xD\Delta x.
\end{aligned}$$

On exprime le terme $\Delta' x D \Delta x$ en fonction de Δx_N :

$$\begin{aligned}\Delta' x D \Delta x &= \begin{pmatrix}\Delta x_B \\ \Delta x_N\end{pmatrix}' D \begin{pmatrix}\Delta x_B \\ \Delta x_N\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N\end{pmatrix}' D \begin{pmatrix}-A_B^{-1} A_N \Delta x_N \\ \Delta x_N\end{pmatrix} \\ &= \Delta' x_N \begin{pmatrix}-A_B^{-1} A_N \\ I_n\end{pmatrix}' D \begin{pmatrix}-A_B^{-1} A_N \\ I_n\end{pmatrix} \Delta x_N.\end{aligned}$$

Alors,

$$F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta' x_N Z' D Z \Delta x_N.$$

L'expression finale de l'accroissement est :

$$\Delta F = F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta' x_N M \Delta x_N. \tag{3.8}$$

3.4 Critère d'optimalité

Théorème 3.13. *[20] Soit $\{x, J_B\}$ une SRS du problème (3.1)-(3.3).*
Alors, les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, \ \textit{pour } x_j = d_j^-, \\ E_j \leq 0, \ \textit{pour } x_j = d_j^+, \\ E_j = 0, \ \textit{pour } d_j^- < x_j < d_j^+, \ j \in J_N, \end{cases} \tag{3.9}$$

sont suffisantes pour l'optimalité de la solution réalisable x. Ces mêmes relations sont aussi nécessaires si la SRS $\{x, J_B\}$ est non dégénérée.

Démonstration. **Condition suffisante**
Soit $\{x, J_B\}$ une SRS vérifiant les relations (3.9). Pour tout plan $\bar{x}$ du problème (3.1)-(3.3), la formule d'accroissement (3.8) devient :

$$F(\bar{x}) - F(x) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta' x_N M \Delta x_N \geq E'_N \Delta x_N,$$

car M est la matrice semi-définie positive, donc

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(\bar{x} - x_j) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(\bar{x} - x_j).$$

On a $d_j^- \leq \bar{x}_j \leq d_j^+$, alors $\bar{x}_j - d_j^- \geq 0$ et $\bar{x}_j - d_j^+ \leq 0$.
En vertu des relations d'optimalité (3.9) on aura :

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(\bar{x} - x_j) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(\bar{x} - x_j) \geq 0,$$

d'où

$$F(\bar{x}) - F(x) \geq 0 \Rightarrow F(\bar{x}) \geq F(x).$$

Par conséquent, x est une solution optimale.

Condition nécessaire : On montre par l'absurde.
Soit $\{x, J_B\}$ un plan optimal non dégénéré du problème (3.1)-(3.3).
On suppose que les relations (3.9) ne sont pas vérifiées, c-à-d, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$ tel que :

$$E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d^+_{j_0} \text{ ou } E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d^-_{j_0}.$$

Soit $\bar{x} = x + \theta\ell$, où θ est un nombre réel positif dit pas, et ℓ est un vecteur dit direction d'amélioration calculé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ \ell_j = 0,\ j \neq j_0,\ j \in J_N. \end{cases}$$

De plus, on a :

$$A\bar{x} = Ax + \theta A\ell = b \Leftrightarrow A\ell = A_B\ell_B + A_N\ell_N = 0.$$

D'où

$$\ell_B = -A_B^{-1}A_N\ell_N = A_B^{-1}a_{j_0}signE_{j_0}.$$

Alors :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ \ell_j = 0,\ j \neq j_0,\ j \in J_N, \\ \ell_B = A_B^{-1}a_{j_0}signE_{j_0}. \end{cases}$$

En vertu de la procédure de construction de la direction d'amélioration ℓ, le vecteur $\bar{x}$ satisfait la contrainte principale (3.2), et pour qu'il soit une solution du problème (3.1)-(3.3), il doit en plus vérifier les inégalités (3.3) :

$$d^- \leq \bar{x} \leq d^+ \Leftrightarrow d^- \leq x + \theta\ell \leq d^+ \Leftrightarrow d^- - x \leq \theta\ell \leq d^+ - x.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{cases} d^-_j - x_j \leq \theta\ell_j \leq d^+_j - x_j,\ j \in J_B, \\ d^-_{j_0} - x_{j_0} \leq \theta\ell_{j_0} \leq d^+_{j_0} - x_{j_0},\ j \in J_N. \end{cases}$$

Comme la solution de support est non dégénérée, alors on peut toujours trouver $\theta \geq 0$ tel que le vecteur $\bar{x}$ est SRS du problème (3.1)-(3.3).
La formule d'accroissement devient alors :

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' x_N M \Delta x_N \\ &= \theta E'_N \ell_N + \frac{1}{2}\theta^2 \ell'_N M \ell_N \\ &= \theta(-E_j sign E_{j_0} + \frac{1}{2}\theta \ell'_N M \ell_N) \\ &= \theta(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta \ell'_N M \ell_N), \end{aligned}$$

d'où

$$F(\bar{x}) - F(x) = \theta(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta \ell'_N M \ell_N). \tag{3.10}$$

Pour θ et ℓ choisis de telle sorte que $-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta \ell'_N M \ell_N < 0$, on aura $F(\bar{x}) - F(x) < 0$.
Alors x n'est pas optimale, ce qui contredit avec l'hypothèse de départ.
Donc, le critère d'optimalité (3.9) est forcément satisfait si le plan de support optimal est non dégénéré. □

3.5 Critère de suboptimalité

Théorème 3.14. *[20] Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.1)-(3.3) et $\epsilon \geq 0$. Si la quantité*

$$\beta(x, J_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) \leq \epsilon, \tag{3.11}$$

Alors, $\{x, J_B\}$ est un suboptimal.

Démonstration. Soit x^* une solution optimale du problème (3.1)-(3.3),
En remplaçant $\bar{x}$ par x^* dans la formule d'accroissement (3.8) et en minorant l'expression, nous aurons :

$$\begin{aligned} F(x^*) - F(x) &= E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2}\Delta' x_N M \Delta x_N + \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j) + \frac{1}{2}\Delta' x_N M \Delta x_N \\ &\geq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j^* - x_j), \end{aligned}$$

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - x_j^*).$$

Mais $d_j^- \leq x^* \leq d_j^+, \ j \in J_N$, alors on aura :

$$\begin{cases} E_j(x_j - x_j^*) \leq E_j(x_j - d_j^-), \ E_j > 0, \\ E_j(x_j - x_j^*) \leq E_j(x_j - d_j^+), \ E_j < 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient :

$$F(x) - F(x^*) \leq \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) < \epsilon.$$

D'où, x est suboptimal.
Donc

- si $\beta(x) = 0$, alors x est optimal.
- si $\beta(x) \leq \epsilon$, alors x est suboptimal.
- si $\beta(x) > \epsilon$, il faut améliorer le plan x.

□

3.6 Construction de l'algorithme direct de support

Soient un plan de support initial accordé $\{x, J_P\}$ et $\epsilon \geq 0$ une précision arbitraire choisie à l'avance. Le but de l'algorithme est de déterminer un plan ϵ-optimal x^ϵ ou carrément optimal x^*. Une itération de l'algorithme direct de support consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$ vers $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ tel que $F(\bar{x}) \leq F(x)$. La nouvelle solution $\bar{x}$ est construite de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta \ell,$$

où ℓ est la direction d'amélioration, et θ le pas le long de cette direction.

Dans cet algorithme, on choisira la métrique du simplexe. On ne fera donc varier qu'une seule composante parmi celles qui ne vérifient pas les relations (3.9). Pour que l'accroissement de la fonction objectif F soit maximale, il faut prendre l'indice j_0 tel que :

$$|E_{j_0}| = max(|E_j|, \ j \in J_{NNO}), \tag{3.12}$$

où $J_{NNO} \subset J_N, J_{NNO} = J_N \setminus J_S$ est l'ensemble des indices non optimaux, avec :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_j > 0, \ x_j > d_j^-] \text{ ou } [E_j < 0, \ x_j < d^+]\}$$

3.6.1 Calcul de la direction ℓ

Si la condition de suboptimalité $\beta(x, J_P) \leq \epsilon$ n'est pas vérifiée, alors on construit une direction d'amélioration $\ell = (\ell'_B, \ell'_S, \ell'_{NNO})$ comme suit :

- On choisit l'indice j_0 qui vérifie (3.12), puis on calcule le vecteur ℓ_{NNO} de telle sorte $E'\ell < 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ \ell_j = 0, \; j \neq j_0, \; j \in J_{NNO}. \end{cases}$$

- On calcule les composantes de ℓ_S de telle sorte que :

$$\bar{E_j} = E(\bar{x}) = E_j(x + \theta\ell) = 0, \; j \in J_S.$$

D'après l'expression (3.4), on a :

$$\begin{aligned} E'_N = g'_N - g'_B A_B^{-1} A_N &= -g_B A_B^{-1} A_N + g'_N I_N \\ &= (g'_B, g'_N) \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \\ &= (g'_B, g'_N) Z = g'(x) Z. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \bar{E'_N} &= g'(x + \theta\ell) Z = [D(x + \theta\ell) + c]' Z \\ &= g'(x) Z + \theta\ell'_N Z = E'_N + \theta\ell'_N Z' D Z \\ &= E'_N + \theta M \ell_N. \end{aligned}$$

Alors, on obtient :

$$\bar{E_N} = E_N + \theta M \ell_N.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_N)\ell_N = 0 \Rightarrow M(J_S, J_S)\ell(J_S) + M(J_S, J_N)\ell(J_{NNO}) = 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \ell_S = \ell(J_S) &= -M_S^{-1} M(J_S, J_{NNO})\ell(J_{NNO}), \\ &= -M_S^{-1} M(J_S, j_0)\ell_{j_0}. \end{aligned}$$

- On calcule ℓ_B tel que $A\ell = 0$:

$$\begin{aligned} \ell_B = \ell(J_B) &= -A_B^{-1}(A_S \ell_S + A_{NNO}\ell_{NNO}) \\ &= -A_B^{-1}[A(I, J_S)\ell_S + A(I, j_0)\ell_{j_0}]. \end{aligned}$$

Donc

$$l_B = -A_B A_N \ell_N.$$

Alors, pour l'indice j_0, nous avons les formules suivantes pour la construction de la direction d'amélioration $\ell = (\ell_j, j \in J) = (\ell(J_B), \ell(J_S), \ell(J_{NNO}))$:

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ \ell_j = 0, \; j \neq j_0, \; j \in J_{NNO}, \\ \ell(J_S) = -M_S^{-1} M(J_S, j_0)\ell_{j_0}, \\ \ell(J_B) = -A_B^{-1}[A(I, J_S)\ell_S + A(I, j_0)\ell_{j_0}]. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.6.2 Changement de la solution réalisable et du vecteur des estimations

On construit une nouvelle solution réalisable $\bar{x}$ et un nouveau vecteur des estimations $\bar{E}$ tel que $\{\bar{x}, J_P\}$ soit une SRS accordée, tout en diminuant la valeur de la fonction objectif du problème. En effet :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell, \ \bar{E}_N = E_N + \theta^0 M \ell_N, \ \bar{E}_B = 0,$$

où ℓ est la direction d'amélioration définie précédemment par les relations (3.13) et le nombre θ^0 est le optimal pas le long de cette direction, avec $\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_F\}$. Les nombres θ_{j_0}, θ_{j_1} et θ_{j_S} se calculent de façon à ce que les contraintes de bornes sur le vecteur $\bar{x}$ soient vérifiées :

$$d_j^- - x_j \leq \theta \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \ j \in J_B, \tag{3.14}$$

$$d_j^- - x_j \leq \theta \ell_j \leq d_j^+ - x_j, \ j \in J_S, \tag{3.15}$$

$$d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq \theta \ell_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0} \Rightarrow d_{j_0}^- - x_{j_0} \leq -\theta sign E_{j_0} \leq d_{j_0}^+ - x_{j_0}. \tag{3.16}$$

3.6.3 Calcul du pas θ^0

En se basant sur les relations (3.14)-(3.16), on calcule le pas optimal θ^0.
D'après (3.14), on a :

$$\theta_{j_1} = min\{\theta_j, \ j \in J_B\}, \text{ où } \ \theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j < 0, \\ \infty, & \text{si } \ell_j = 0. \end{cases}$$

D'après (3.15), on a :

$$\theta_{j_S} = min\{\theta_j, \ j \in J_S\}, \text{ où } \theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{\ell_j}, & \text{si } \ell_j < 0, \\ \infty, & \text{si } \ell_j = 0. \end{cases}$$

D'après (3.16), on a :

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} d_{j_0}^+ - x_{j_0}, & \text{si } E_{j_0} < 0, \\ x_{j_0} - d_{j_0}^-, & \text{si } E_{j_0} > 0. \end{cases}$$

Ensuite, déterminons la pas θ_F pour lequel le passage de x à $\bar{x}$ doit assurer une diminution maximale de la fonction objectif (3.10) alors :

$$\Phi(\theta) = F(\bar{x}) - F(x) = \theta(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta \ell'_N M \ell_N).$$

On a :

$$\Phi(\theta) = \theta(-|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta\delta) \text{ avec } \delta = \ell'_N M \ell_N,$$

On doit avoir :

$$\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow -|E_{j_0}| + \frac{1}{2}\theta\delta = 0.$$

On déduit que la valeur de θ_F est égale à :

$$\theta_F = \begin{cases} \frac{|E_{j_0}|}{\delta}, & \text{si } \delta > 0, \\ \infty, & \text{si } \delta = 0. \end{cases}$$

Enfin, on prend

$$\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_F\}.$$

3.6.4 Calcul de la nouvelle estimation de suboptimalité

Le nouveau plan est $\bar{x} = x + \theta^0\ell$.
Si $\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0|E_{j_0}| \leq \epsilon$, alors le plan $\bar{x}$ est ϵ-optimal et l'algorithme de résolution s'arrête l'algorithme.
Sinon, on procédera au changement de support.

3.6.5 Changement de support

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors on pose :

$$\bar{J_B} = J_B, \ \bar{J_S} = J_S, \ \bar{J_P} = J_P;$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, alors on pose :

$$\bar{J_B} = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \ \bar{J_S} = J_S, \ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\};$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$, alors on pose :

$$\bar{J_B} = J_B, \ \bar{J_S} = J_S \backslash \{j_s\}, \ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\};$$

- Si $\theta^0 = \theta_F$, alors on pose :

$$\bar{J_B} = J_B, \ \bar{J_S} = J_S \cup \{j_0\}, \ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}.$$

Poser $x = \bar{x}$, $J_B = \bar{J_B}$, $J_S = \bar{J_S}$, $J_P = \{J_B, J_S\}$ et faire une autre itération avec le nouveau plan de support $\{x, J_P\}$.

Remarque 3.1. *Le passage de $\{x, J_B\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{J_P}\}$ assure les conditions*

$$det(\bar{A_B}) \neq 0, \ det(\bar{M_S}) \neq 0, \ et \ \bar{E}(\bar{J_S}) = 0.$$

3.7 Algorithme de la méthode

Soit $\{x, J_P\}$ un plan de support accordé du problème (3.1)-(3.3). Le schéma de la méthode directe de support pour la résolution du programme quadratique convexe à variables bornées est décrit dans les étapes suivantes :

Algorithme 1. *(Algorithme de la méthode directe de support)*

(0) *Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ϵ et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ tel que $J_P = \{J_B, J_S\}$, avec $J_S = \emptyset$ pour plus de facilité ;*

(1) *Calculer les matrices :*

$$M = Z'DZ, \text{ et } Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix}.$$

(2) *Calculer le vecteur des estimations :*

$$g(x) = (g'_B, g'_N), u' = g'_B A_B^{-1}, E'_N = g'_N - u'A_N.$$

(3) *Calculer l'estimation de suboptimalité avec la formule :*

$$\beta(x, J_B) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+).$$

- ***Si*** $\beta(x, J_B) = 0$, *alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_P\}$ une SRS optimale ;*
- ***Si*** $\beta(x, J_B) \leq \epsilon$, *alors l'algorithme s'arrête avec $\{x, J_P\}$ une SRS ϵ-optimale ;*
- ***Si*** $\beta(x, J_B) > \epsilon$ *aller à l'étape **(4)**.*

(4) *Calculer la direction d'amélioration ℓ :*

- *Choisir l'indice j_0 tel que $|E_{j_0}| = max(|E_j|,\ j \in J_{NNO})$, où J_{NNO} est l'ensemble des indices non optimaux ;*

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = -signE_{j_0}, \\ \ell_j = 0,\ j \neq j_0, \quad j \in J_{NN}, \\ \ell(J_S) = -M_S^{-1}M(J_S, J_0)signE_{j_0}, \\ \ell(J_B) = -A_B^{-1}[A(I, J_S)\ell(J_S) + A(I, J_0)signE_{j_0}]. \end{cases}$$

(5) *Calculer le pas θ^0 :*

- *Calculer le nombre θ_{j_0} :*

$$\theta_{j_0} = \begin{cases} d_{j_0}^+ - x_{j_0}, & si\ E_{j_0} < 0, \\ x_{j_0} - d_{j_0}^-, & si\ E_{j_0} > 0. \end{cases}$$

- *Calculer* $\theta_{j_1} = min\{\theta_j,\ j \in J_B\}$ *et* $\theta_{j_S} = min\{\theta_j,\ j \in J_S\}$*, tel que :*

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_j^+ - x_j}{\ell_j}, & si\ \ell_j > 0, \\ \frac{d_j^- - x_j}{\ell_j}, & si\ \ell_j < 0, \\ \infty, & si\ \ell_j = 0. \end{cases}$$

- *Calculer le nombre* θ_F *:*

$$\delta = \ell'_N M \ell_N,$$

$$\theta_F = \begin{cases} \frac{|E_{j0}|}{\delta}, & si\ \delta > 0, \\ \infty, & si\ \delta = 0. \end{cases}$$

- *Calculer le pas* $\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_F\}$ *;*

(6) *Calculer* $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$ *;* $\bar{E_N} = E_N + \theta^0 M \ell_N$ *;* $F(\bar{x}) = F(x) - \theta^0 |E_{j_0}| + \frac{1}{2}(\theta^0)^2 \delta$ *;*

(7) *Test d'optimalité du nouveau plan* $\bar{x}$ *;*
- ***Si*** $\beta(\bar{x}, J_P) = \beta(x, J_P) - \theta^0 |E_{j_0}| \leq \epsilon$*, alors l'algorithme s'arrête avec* $\{\bar{x}, J_P\}$ *une SRS* ϵ*-optimale ;*
- ***Sinon*** *Aller à l'étape* ***(8)*** *;*

(8) *Changement de support* J_P *en* $\bar{J}_P$ *:*
- ***Si*** $\theta^0 = \theta_{j_0}$ *alors :*

$$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = J_S,\ \bar{J}_P = J_P;$$

- ***Si*** $\theta^0 = \theta_{j_1}$ *alors :*

$$\bar{J}_B = (J_B \backslash \{j_1\}) \cup \{j_0\}, \quad \bar{J}_S = J_S,\ \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\};$$

- ***Si*** $\theta^0 = \theta_{j_s}$ *alors :*

$$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = J_S \backslash \{j_s\},\ \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\};$$

- ***Si*** $\theta^0 = \theta_F$ *alors :*

$$\bar{J}_B = J_B,\ \bar{J}_S = J_S \cup \{j_0\},\ \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

(9) *Poser* $x = \bar{x}, J_B = \bar{J}_B, J_S = \bar{J}_S, J_P = \{J_B, J_S\}$ *et aller à l'étape* ***(1)****.*

3.8 Exemple

Soit le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\begin{cases} F(x) = x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_3x_4 + 6x_1 - x_2 \to min, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 3, \quad 0 \leq x_3 \leq 2, \quad 0 \leq x_4 \leq 6. \end{cases} \tag{3.17}$$

À partir du système, on aura

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad d^- = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x = (0, 0, 2, 6)$ un plan initial du problème. On pose $J_B = \{1, 2\}, J_N = \{3, 4\}$.
On a

$$F(x) = \frac{1}{2}x'Dx + c'x = 100,$$

$$A_B^{-1} = A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Première itération :
Calculer les matrices Z et M :

$$Z = Z(J, J_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer les vecteurs :

$$g(x) = Dx + c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix},$$

avec

$$g'_B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad g'_N = \begin{pmatrix} -20 & 40 \end{pmatrix}.$$

Calculer les vecteurs des potentiels et des coûts réduits :

$$u' = g'_B A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$E'_N = (E_3, E_4)' = g'_N - u' A_N = \begin{pmatrix} -33 & 47 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'estimation de suboptimalité :

$$\beta(x, J_P) = \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+)$$
$$= -33(2-2) + 47(6-0) = 282 > \epsilon.$$

Déterminer l'ensemble des indices non-optimaux :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_4 > 0, \quad x_4 > d_4^-]\} = \{[47 > 0, \quad 6 > 0]\},$$

$$|E_{j_0}| = max(|E_j|, \quad j \in J_{NNO}) \Rightarrow j_0 = 4.$$

Calculer la direction ℓ :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = \ell_4 = -signE_4 = -1, \\ \ell_3 = 0, \quad j \neq j_0, \end{cases} \quad \Rightarrow \ell_N = (\ell_3, \ell_4) = (0, -1)$$

$$\ell(J_B) = A_B^{-1} A(I, J_0) signE_{j_0} = (-1, 1);$$
$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (-1, 1, 0, -1)'.$$

Calculer le pas θ^0 :

$$\theta_{j_0} = \theta_4 = x_4 - d_4^- = 6 - 0 = 6.$$

$$\theta_{j_1} = min\{\theta_j, \ j \in J_B\} = min\{\theta_1, \theta_2\},$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{d_1^- - x_1}{\ell_1} = 3, \ \ell_1 = -1 < 0, \\ \theta_2 = \frac{d_1^+ - x_2}{\ell_2} = 3, \ \ell_2 = 1 > 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \theta_{j_1} = \theta_1 = 3.$$

$$\theta_{j_s} = \infty \ \text{ car } \ J_S = \emptyset,$$

$$\delta = \ell'_N M \ell_N = 8 > 0, \quad \theta_F = \frac{|E_4|}{\delta} = 5,875;$$

$$\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\} = \theta_{j_1} = 3.$$

Calculer la nouvelle solution et le nouveau vecteur des côuts réduits :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (-3, 3, 2, 3)', \quad \bar{E_N} = E_N + \theta^0 M \ell_N = (-21, 23)'.$$

On aura

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{x}' D \bar{x} + c'\bar{x} = -5.$$

Calculer la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \bar{E}_3(\bar{x_3} - d_3^+) + \bar{E}_4(\bar{x_4} - d_4^-) = 69 > 0.$$

On fait le changement de support

$$\theta^0 = \theta_{j_1} \text{ alors } \bar{J_B} = (J_B \backslash j_1) \cup j_0 = \{2, 4\}, \ \bar{J_S} = J_S = \emptyset, \ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}.$$

Deuxième itération :

$$J_B = \{2, 4\}, \ J_S = \emptyset, \ J_N = \{1, 3\}, \ x = (-3, 3, 2, 3)', \ F(x) = -5.$$

Calculer les matrices Z et M :

$$g(x) = Dx + c = (6, -1, -8, 16)', \ g'_B = (-1, 16), \ g'_N = (6, -8),$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A_N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ M = Z' D Z = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer le vecteur des coûts réduits :

$$u' = g'_B A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -17 \end{pmatrix}.$$

$$E'_N = (E_1, E_3)' = g'_N - u' A_N = \begin{pmatrix} 23 & 25 \end{pmatrix}'.$$

Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J)$:

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= \sum_{E_j > 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j < 0, j \in J_N} E_j(x_j - d_j^+) \\ &= 21(-3 + 3) + 25(2 - 0) = 50 > \epsilon. \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des indices non-optimaux :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_3 > 0, \quad x_3 > d_3^-]\}.$$

$$|E_{j_0}| = max(|E_j|, \quad j \in J_{NNO}) \Rightarrow j_0 = 3,$$

Calculer la direction ℓ :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = \ell_3 = -signE_3 = -1, \\ \ell_1 = 0, \quad j \neq j_0, \end{cases} \quad \Rightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_3) = (0, -1).$$

$$\ell(J_B) = A_B^{-1} A(I, J_0) signE_{j_0} = (1, -2);$$
$$\ell = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (0, 1, -1, -2)'.$$

Calculer le pas θ^0 :

$$\theta_{j_0} = \theta_3 = x_3 - d_3^- = 2 - 0 = 2.$$

$$\theta_{j_1} = min\{\theta_j, \ j \in J_B\} = min\{\theta_2, \theta_4\},$$
$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{d_2^+ - x_2}{\ell_2} = 0, \ \ell_2 = 1 > 0, \\ \theta_4 = \frac{d_4^- - x_4}{\ell_4} = \frac{3}{2}, \ \ell_4 = -2 < 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \theta_{j_1} = \theta_2 = 0.$$

$$\theta_{j_s} = \infty \quad \text{car} \quad J_S = \emptyset,$$

$$\delta = \ell_N' M \ell_N = 8 > 0, \quad \theta_F = \frac{|E_3|}{\delta} = 3.125;$$

$$\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_s}, \theta_F\} = \theta_{j_1} = 0.$$

Calculer la nouvelle solution et le nouveau vecteur des côuts réduits :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (-3, 3, 2, 3)', \quad \bar{E_N} = E_N + \theta^0 M \ell_N = (23, 25)'.$$

On aura

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{2} \bar{x}' D \bar{x} + c' \bar{x} = -5.$$

Calculer la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \bar{E_3}(\bar{x_3} - d_3^+) + \bar{E_4}(\bar{x_4} - d_4^-) = 69 > 0.$$

On fait le changement de support :

$$\theta^0 = \theta_{j_1} \quad \text{alors} \quad \bar{J_B} = (J_B \backslash j_1) \cup \{j_0\} = \{3, 4\}, \ \bar{J_S} = J_S = \emptyset, \ \bar{J_P} = \{\bar{J_B}, \bar{J_S}\}.$$

Troisième itération :

$$J_B = \{3,4\},\ J_S = \emptyset,\ J_N = \{1,2\},\ x = (-3,3,2,3)',\ F(x) = -5.$$

Calculer les matrices Z et M :

$$g(x) = Dx + c = (6,-1,-8,16)',\ g'_B = (-8,16),\ g'_N = (-1,6),$$
$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$Z = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calculer le vecteur des coûts réduits :

$$u' = g'_B A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$E'_N = (E_3, E_4)' = g'_N - u'A_N = \begin{pmatrix} -2 & -25 \end{pmatrix}.$$

Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(x, J_B)$:

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= \sum_{E_j>0, j\in J_N} E_j(x_j - d_j^-) + \sum_{E_j<0, j\in J_N} E_j(x_j - d_j^+) \\ &= -2(-3-1) - 25(3-3) = 8 > \epsilon. \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des indices non-optimaux :

$$J_{NNO} = \{j \in J_N : [E_1 < 0, \quad x_1 < d_1^+] = [-2 < 0, \quad 3 < 1]$$

$$|E_{j_0}| = max(|E_j|, \quad j \in J_{NNO}) \Rightarrow j_0 = 1,$$

Calculer la direction ℓ :

$$\begin{cases} \ell_{j_0} = \ell_1 = -signE_1 = 1, \\ \ell_2 = 0, \quad j \neq j_0, \end{cases} \Rightarrow \ell_N = (\ell_1, \ell_2) = (1,0),$$

$$\begin{aligned} \ell(J_B) &= A_B^{-1}A(I, J_0)signE_{j_0} = (-1,-1); \\ \ell &= (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)' = (1,0,-1,-1)'. \end{aligned}$$

Calculer le pas θ^0 :

$$\theta_{j_0} = \theta_1 = d_1^+ - x_1 = 1 - (-3) = 4.$$

$$\theta_{j_1} = min\{\theta_j,\ j \in J_B\} = min\{\theta_3, \theta_4\},$$

$$\begin{cases} \theta_3 = \frac{d_3^- - x_3}{\ell_3} = 2,\ \ell_4 = -1 < 0, \\ \theta_4 = \frac{d_4^- - x_4}{\ell_4} = 3,\ \ell_4 = -1 < 0. \end{cases} \Rightarrow \theta_{j_1} = \theta_3 = 2.$$

$$\theta_{j_s} = \infty \quad \text{car} \quad J_S = \emptyset,$$

$$\delta = \ell'_N M \ell_N = 2 > 0, \quad \theta_F = \frac{|E_1|}{\delta} = 1;$$

$$\theta^0 = min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_F\} = \theta_F = 1.$$

Calculer la nouvelle solution et le nouveau vecteur des côuts réduits :

$$\bar{x} = x + \theta^0 \ell = (-2, 3, 1, 2)', \quad \bar{E_N} = E_N + \theta^0 M \ell_N = (0, -29)'.$$

On aura

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\bar{x}' D \bar{x} + c'\bar{x} = -6.$$

Calculer la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité :

$$\bar{\beta} = \beta(\bar{x}, J_B) = \bar{E_2}(\bar{x_2} - d_2^+) = 0.$$

Donc, le critère de suboptimalité est vérifié.
Par conséquent, la solution réalisable optimale et la valeur optimale de la fonction objectif du problème 3.17 sont données par :

$$x^* = (-2, 3, 1, 2)', \text{ et } F(x^*) = -6.$$

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé la méthode directe de support pour la programmation quadratique convexe à variables bornées, basée sur la métrique du simplexe qui consiste à varier un seul indice parmi les indices non optimaux à chaque itération. Sa particularité est de manipuler les variables de décision telles qu'elles se présentent initialement sans modification préliminaire. De plus, cet algorithme est doté d'un critère d'arrêt qui peut donner une solution approchée avec une précision choisie à l'avance.

Chapitre 4

Mise en œuvre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter les résultats numériques de la comparaison entre la méthode directe de support présentée dans le chapitre précédent et la méthode de points intérieurs du solveur **quadprog**, défini sous Matlab. La comparaison est faite sur des problèmes quadratiques convexes générés aléatoirement. La caractéristique de chaque problème est que la solution optimale x^*, ainsi que la valeur de la fonction objectif F^* à l'optimum sont connues à l'avance. Enfin, on va faire une simple application de la méthode directe de support sur le problème de gestion de portefeuille[34].

4.2 Générateur d'exemples

Afin de bien tester et comparer l'efficacité de la méthode étudiée dans le chapitre précédent, nous avons développé un générateur de problèmes quadratiques convexes à variables bornées. Ensuite, résoudre ces problèmes générés avec la méthode directe de support ainsi que la méthode de points intérieurs du Matlab. Puis, comparer les résultats obtenus.

Le programme du générateur aléatoire est une fonction appelée *generation exemples tests* :
$[xopt, fopt, D, c, A, b, dinf, dsup] = generateur\_exemple\_test(m, n);$

Paramètres d'entrées :

n : nombre de variables.
m : nombre de contraintes.

Paramètres de sorties :

A : matrice d'ordre $m \times n$, notée la matrice des contraintes.
D : matrice carrée symétrique d'ordre n, elle est semi-définie positive.
c : n-vecteur.

b : m-vecteur.
generer : est une fonction qui génère des nombres aléatoires dans l'intervalle $[-1, 1]$, suivant une loi uniforme. En Langage Matlab est *Urand*.

4.3 La méthode de points intérieurs pour la résolution de P.Q.C.

La méthode de points intérieurs (IPM : Interior Point Method) est une méthode classique développée en 1984 par Karmarkar [26] dans le cadre de problèmes linéaires, avant d'être généralisée à d'autres problèmes plus généraux notamment la programmation quadratique convexe.
Dans notre application, on a appelé la méthode de points intérieurs du solveur *quadprog* (disponible sous Matlab pour tous les versions), en l'appelant ainsi :
tic
$options = optimset('Algorithm','interior-point-convex');$
$[X, f\_int, e\_int, output\_int] = quadprog(D, c, [], [], A, b, dinf, dsup)$
toc
Pour avoir en sortie le nombre d'itérations on compose le code suivant : *output.iterations*.
Pour avoir le temps d'exécution de la méthode on utilise la commande *tic-toc*.
Pour plus d'informations sur ce solveur, vous composez ce code : *help quadprog*.

4.4 Implémentation de la méthode directe de support sous Matlab

La fonction implémentée sous Matalb est un programme permet de résoudre des problèmes quadratiques convexes à variables bornées avec la méthode directe de support (MDS) étudiée dans le chapitre précédent. Voici l'appel de ce programme :
tic
$[f, xopt, nbr\_iter, J_B] = support\_bornee(D, c, A, b, dinf, dsup, J_B)$
toc

4.4.1 Exemple d'exécution

Nous avons déjà trouvé la solution du problème (3.17), et maintenant nous allons résoudre ce problème sous Matlab par l'algorithme implémenté :

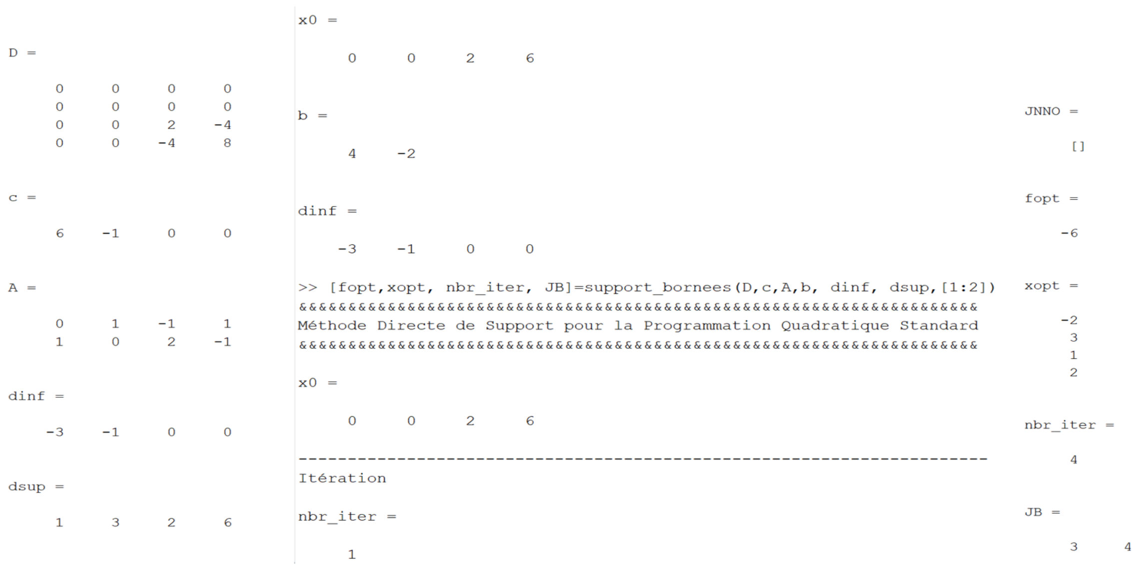

FIGURE 4.1 – Résolution de l'exemple en Matlab

4.4.2 Comparaison entre la méthode directe de support et IPM

Notation :

• CPU : Le temps d'exécution des problèmes tests en secondes. On a utilisé la fonction Matlab *tic-toc*.

• nit : Le nombre d'itérations requis pour la résolution des problèmes tests.

• ΔF : C'est la différence entre la valeur de la fonction objectif optimale et celles obtenues par les deux méthodes.

4.4.3 Discussion des résultats

Le tableau (4.4.2) présente les résultats comparatives des deux méthodes sur des problèmes générés sous Matlab. Les critères de comparaison sont la différence ΔF entre la solution optimale du problème et celles données par les deux méthodes, le temps d'exécution, ainsi que le nombre d'itérations.
Le tableau montre que les deux méthodes sont compétitives en termes de temps d'exécution et ΔF surtout pour les problèmes de petite taille.
Les résultats montrent également que les deux méthodes trouve $\Delta F = 0$, c-à-d, les algorithmes trouvent la solution exacte du problème et donc la valeur minimale de la fonction objective du problème.
En terme de nombre d'itérations, on remarque que la méthode de points intérieurs converge

Taille		MDS			IPM		
m	n	ΔF	CPU	nit	ΔF	CPU	nit
1	2	0	0.4019	2	0	0.3914	0
2	3	0	0.1946	2	0	0.3987	3
3	6	2.6645×10^{-15}	0.4927	3	0	0.3728	4
4	8	6.3434×10^{-9}	0.9185	7	7.1054×10^{-15}	0.4221	5
5	10	2.8109×10^{-11}	0.9333	8	2.8421×10^{-14}	0.4369	4
10	15	8.6221×10^{-10}	0.6738	6	9.9475×10^{-13}	0.3550	4
15	20	5.6843×10^{-14}	0.6769	5	2.8421×10^{-13}	0.3580	4
20	30	1.1368×10^{-13}	0.8124	11	1.1368×10^{-13}	0.3414	5
20	40	1.0004×10^{-11}	1.1554	25	5.2534×10^{-10}	0.3851	5
20	50	7.5895×10^{-8}	2.4938	55	1.0558×10^{-7}	0.4335	7
30	50	4.0927×10^{-12}	1.5625	36	6.5059×10^{-7}	0.3632	5
50	100	0	6.2022	107	1.8189×10^{-12}	0.3834	6

TABLE 4.1 – Les résultats de comparaison entre MDS et IPM

dans des cas avec 0 itération puisque la méthode utilise une technique de pré-traitement qui permet de détecter une solution optimale avant de démarrer l'algorithme de résolution. D'autre part, la méthode directe de support trouve la solution après un plus grand nombre d'itérations, cela le fait de la métrique du simplexe qui permet d'optimiser un seule indice non optimal à chaque itération.
Une autre particularité de la méthode directe de support est qu'elle utilise le principe de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision désirée et donc accélérer la convergence.

4.5 Application de la méthode directe de support dans la gestion de portefeuille

Sur le marché des capitaux, la sélection d'un titre ou actif dans le quel investir n'a jamais été une question simple. C'est au début des années cinquantaine (1952) que la théorie du portefeuille [34] était apparue avec la publication de l'article fondateur de Harry Markowitz [30]. Cette théorie permet de trouver un compromis entre un ensemble de n investissements potentiels (actifs ou projets) ayant chacun un rendement $r_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Les rendements ne sont pas généralement connus d'avance et ils sont souvent supposés être des variables aléatoires suivant la loi normale. Dans cette section, nous allons présenter le modèle de gestion d'un portefeuille [24] sous forme d'un problème d'optimisation quadratique convexe, et ensuite appliquer la méthode directe de support pour résoudre un exemple simple de gestion d'un portefeuille de trois actifs.

4.5.1 Modélisation de portefeuille

Soit un ensemble de n investissements potentiels (ou actifs) ayant chacun un rendement aléatoire $r_i, i = 1, 2, \ldots, n$.
Chaque variable aléatoire r_i est caractérisée par sa moyenne (espérance mathématique) $\mu_i = E[r_i]$ et sa variances $\sigma_i^2 = E[(r_i - \mu_i)^2]$.
La variance mesure les fluctuations de la variable r_i autour de sa moyenne. En effet, une grande valeur de σ_i indique un risque d'investissement.
Un investisseur construit son portefeuille en attribuant une proportion x_i des fonds disponibles et on suppose que les rentes courtes ne sont pas permises.
Donc, les contraintes du problème sont :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ 0 \leq x \leq 1.$$

La rentabilité du portefeuille est donné par :

$$R = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i.$$

On doit calculer le rendement espéré et la variance du portefeuille pour avoir sa désirabilité. En effet, on mesure le rendement espéré comme suit :

$$E[R] = E[\sum_{i=1}^{n} r_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} E(r_i) x_i = \mu' x.$$

La variance dépend de la covariance entre chaque paire d'investissements (projets). Elle se mesure à partir des lois élémentaires de statistique comme suit :

$$\rho_{ij} = \frac{E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\sigma ij}{\sigma_i \sigma_j}, \ \forall i, j = 1, 2, ..., n.$$

La corrélation donne la tendance des rendements des investissements i et j à évoluer dans la même direction. Par conséquent, deux investissements dont les recettes tendent à augmenter et à baisser ensemble ont une covariance positive ; pour un ρ_{ij} proche de 1, les deux investissements sont fortement liés. Par contre, les investissements dont les recettes tendent à varier dans des directions opposées ont une covariance négative.

$$E(R - ER)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j = x' D x,$$

où la matrice de variance-covariance D est carrée d'ordre n, symétrique et définie positive, avec :

$$D = (d_{ij}) = (\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

On s'intéresse aux portefeuilles pour lesquels le rendement espéré $\mu' x$ est grand, alors que la variance du portefeuille $x'Dx$ est petite. Donc, pour déterminer le portefeuille optimal, on pose le problème de programmation quadratique convexe à variables bornées suivant :

$$\begin{cases} min\ x'Dx - \mu' x, \\ Ax = b, \\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

avec x et μ sont des n-vecteurs, b est un m-vecteur, et A est une matrice d'ordre $(n \times m)$.

4.5.2 Exemple pratique

On considère un univers constitué de trois titres risqués (3 actifs) dont les rendements nets et les volatilités (écart-types) sont les suivants :

titres	rend.esp en %	volatilité en %
growth stocks	12	20
value stocks	10	6
bonds	6	6

La matrice des corrélations est la suivante :

titres	growth stocks	value stocks	bonds
growth stocks	1	0.6	-0.2
value stocks	0.6	1	-0.1
bonds	-0.2	-0.1	1

Le problème d'optimisation du portefeuille le moins risqué de cet univers est sous la forme suivante :

$$\begin{cases} min\ F(x) = x'Dx, \\ \sum_{i=1}^{3} x_i = 1, \\ \sum_{i=1}^{3} \mu_i x_i = E_0, \\ 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{4.1}$$

Où :
- x est le vecteur des proportions investies.
- μ est le vecteur des rendements espérés. Dans notre cas $\mu = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.1 & 0.06 \end{pmatrix}$.
- E_0 est le rendement espéré du portefeuille, tel que : $E_0 = 6.8024 \times 10^{-2}$ dans notre cas.

La matrice des covariances D est alors donnée par le produit suivant :

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Numériquement, dans notre cas, on a donc :

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.16 & -0.2 \\ 0.6 & 1 & -0.1 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \\ 0 & 0 & 0.06 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.04 & 0.0192 & -0.0024 \\ 0.0192 & 0.0256 & -0.00096 \\ -0.0024 & -0.00096 & 0.0036 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En comparant la formulation du problème (4.1) avec celle du problème (3.1) − (3.3) qui nous avons vu dans le chapitre précédent, on détermine la matrice A et les vecteurs b, d^- et d^+ comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.12 & 0.1 & 0.06 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.068024 \end{pmatrix}, \ d^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme de la méthode directe de support implémenté sous Matlab avec ces données de la gestion du portefeuille, on a trouvé la solution optimale du problème (4.1) :

$$x^* = \begin{pmatrix} 8.20 \times 10^{-2} \\ 7.76 \times 10^{-2} \\ 84.04 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

```
D =

    0.0400    0.0192   -0.0024
    0.0192    0.0256   -0.0010
   -0.0024   -0.0010    0.0036


A =

    1.0000    1.0000    1.0000
    0.1200    0.1000    0.0600


l =

     0
     0
     0


b =

    1.0000
    0.0680


u =

     1
     1
     1
```

```
x =

    0.0820
    0.0776
    0.8404


JB =

     1     2


JS =

     3


JP =

     1     2     3

-----------------------
Itération

nbr_iter =

     2
```

FIGURE 4.2 – Résolution de l'exemple de gestion du portefeuille.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation Matlab et les résultats comparatives entre la méthode directe de support et celle de points intérieurs. La comparaison est faite sur des problèmes de minimisation quadratiques convexes générés aléatoirement. Ensuite, nous avons faire une application simple pour la résolution d'un problème de gestion de portefeuille par la méthode directe de support.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la programmation quadratique convexe sous contraintes d'un point de vue théorique et pratique. Le but principal de ce travail consiste à appliquer la méthode directe de support pour la résolution d'un problème quadratique convexe. Pour cela, on a suivi le plan suivant :

Dans le premier chapitre, on a rappelé des notions fondamentales sur l'algèbre matricielle, les formes quadratiques, et la notion de la convexité.

Dans le deuxième chapitre, on a présenté une aperçu sur la programmation quadratique convexe, notamment les conditions d'optimalité de Lagrange et de Karush-Kuhn-Tuker.

Dans le troisième chapitre, nous avons exposé le principe de la méthode directe de support pour la résolution d'un problème quadratique convexe à variable bornées, avec les critères d'optimalité, l'algorithme de résolution, et une illustration numérique.

Afin de tester l'efficacité de cette méthode, nous l'avons implémentée sous Matlab. Les résultats obtenus montrent que la méthode étudiée est compétitive avec la méthode de points intérieurs pour les problèmes testés. Enfin, nous avons illustré la méthode avec un exemple pratique qui consiste à optimiser un portefeuille financier constitué de 3 titres et nous avons obtenu la solution optimale du problème.

Perspectives

• Résoudre un problème de minimisation quadratique convexe par d'autres méthodes telles que : la méthode duale de support, la méthode du gradient projeté, la méthode du simplexe,...,etc.

• Appliquer la méthode directe de support sur des bases de données de la gestion du portefeuille de grande taille.

• Appliquer la méthode directe de support dans d'autres domaines d'application comme : la classification SVM, la gestion de la production,...,etc.

Bibliographie

[1] J. Abadie. On the Kuhn-Theorem, in : Nonlinear programming. North Holand, Amsterdam, j. abadie edition, 1967.

[2] S. Adly. A Variational Approach to Nonsmooth Dynamics Applications in Unilateral Mechanics and Electronics, Springer, Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland, 2010.

[3] S. Bazarra, H.D. Sherali and C.M Shetty. Nonlinear programming, theory and algorithms, Second edition, 1993.

[4] D. Bensoussan. Commande moderne, Approche par modéles continus et discrets. Canada, 2008.

[5] M. O. Bibi. Cours de programmation Mathématique 4eme année Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, 1998.

[6] M.O. Bibi. Optimization of a linear dynamic system with double terminal constraint on the trajectories, Optimization, vol. 30, pp. 359-366, 1994.

[7] M.O. Bibi. Support method for solving a linear-quadratic problem with polyhedral constraints on control, Optimization, vol. pp, 37. 139-147, 1996.

[8] M. Bierlaire. Introduction à l'optimisation différentiable, Italie, 2006.

[9] R. Cairoli. Algèbre linéaire. Italie, 2004.

[10] Y. H. Dai and Y. Yuan, A non linear conjugate gradient method with a strong global, SIAMJ. Optim. 1999.

[11] Daniel de wolf. Théorie et pratique de l'optimisation. Université Charles de gaulle Lille 3, Ufr de mathématiques, sciences économiqique et sociales, Villeneuve d'ascq, Octobre 2002.

[12] G. B. Dantzig. Linear Programming and Extensions ,Princeton University Press,Princeton, New-Jersey , 1963.

[13] D. Delaunay. Exercices d'analyse MP/MP*, Pays-Bas, 2017.

[14] V. DeMiguel, L. Garlappi et Raman Uppal. Optimal Versus Naive Diversification : How Inefficient is the 1/N Portfoloi Strategy, Review of Financial Studies, 2007.

[15] S. Djemai, B. Brahmi, and M .O. Bibi, A primal-dual method for SVM training. Neurocomputing, 2016.

[16] H. J. Ferreau, Portfoloi selection : An onlin active set stratzgy for fast solution of parametric quadratic program wih applications to predictive engine control, PhD thesis, university of Heidelberg, 2006.

[17] J. Ferrera. An Introduction to Nonsmooth Analysis,United States of America, Elsevier, 2014.

[18] R. Flether, Practical Methods of Optimization, J. Wiley and Sons, second edition, University of Dundee, Scotland, UK, 1987.

[19] M. Florenzano. C. Le Van. Finite Dimensional Convexity and Optimization. Milan, Paris, Singapore, Tokyo. Springer, 2001.

[20] R. Gabassov, F.M. Kirillova, end V.M.Raketsky. On methodes for solving the general problem of convex quadratic programming. Soviet. Mathematics Doklady,pp 653-657,in Russian. 1981.

[21] R. Gabassov, F. M. Kirillov, end O. I. Kostyukova. Solution of linear quadratic extremal problems. Sovet. Math. Dokl., 31 :99-103, 1985.

[22] R. Gabassov, F. M. Kirillov, end V. M. Raketsky, end O. I. Kostyukova. Constructive methods of optimization, volume 4 : Convex Problems. University Press, Minsk, 1987.

[23] R. Gabasov, F.M. Kirillova and A. I. Tyatyushkin, Constructive Methods of Optimization, Part I, Linear Problems. Universitetskoye, Minsk, 1984.

[24] R. Gillet. end G. Hübner. La gestion de portefeuille instruments stratégie et performance, 3^e édition, paris, septembre 2019.

[25] R. Goldstein, L. Po-lyak. The gradient projection Method , 1960, 1964, 1966.

[26] N. K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. Combinatorica, 4 : 375-395, 1984.

[27] R. Gabasov et F.M Kirrilova . Méthode de programation linéaire, volumes, 1, 2 et 3 Edition de l'Université, Minsk,1977,1978 et 1980.

[28] E.A.Kostina and O. I. Kostlykova. An algorithm for solving quadratic programing problems with linear equality containts, compitational Mathematics and Mathematical physcs, vol. 41. no. 7, pp. 960-97, 2001.

[29] V. Lemieux, end M. Ouimet. L'analyse structurale des réseaux sociaux. Canada, 2004.

[30] H. M. Markowitz. Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1) : 77-91, 1852.

[31] H. M. Markowitz. Portfolio Selection : Efficient Diversification in Investments. John Wily and Sons, New York, 1959.

[32] M. Minoux. Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes, Bordas et C.N.E.T-ENST, Paris, 1983.

[33] Y. E. Nesterov and A.S. Nemirrovsky. Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming. SIAM Publication, 1994.

[34] P. Poncet et R. Portait, La Théorie Moderne du Portefeuille, 1^{ire} édition, Saint Germain, Paris, France, pp. 795-798, 1998.

[35] A. Quarteroni, R. Sacco, end F. Saleri. Méthodes Numériques. Algorithmes, analyse et applications. Springer-Verlag Italia, Milano, 2004.

[36] S. Radjef, M.O. Bibi. An effective generalization of direct support method in quadratic convex programming. Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, no.31, pp. 1525-1540, 2012.

[37] Roger. Clarke, Harindra de Silva et Steven Thorley. Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market, Journal of Portfolio Management, 33(1), pp. 10-24.2006.

[38] W. Sun and Y. Yuan. Optimization theory and methods nonlinear Programming. Edition Springer, 2006.

[39] V. N. Vapnik. The Nature of Statistical Learning Theory. Springer-Verlag, 1995.

[40] H. Varian. Traduit de l'anglais par J. M. Hommte, Révision scientifique par B. Thiry. Analyse micronomique, Belgique, 2008.

[41] P. Wolfe. The simplex method for quadratic programming. Econometrica, (27) :382-398, 1959.