République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Filière : Mathématiques.
Spécialité : Mathématiques fondamentales et discrètes

Thème

Nombres de s-Stirling modulaire et fonctions symétriques

Présenté par :
BOULKROUNE BOCHRA

Devant le jury

Président	**BOUCHAIR ABDERAHMANE**	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	**AHMIA MOUSSA**	M.C.A	Université de Jijel
Examinateur	**HARROUCHE NESRINE**	M.C.B	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

DÉDICACE

Je me dois d'avouer pleinement ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont soutenue durant mon parcours, qui ont su me hisser vers le haut pour finaliser ce travail. C'est avec amour, respect et gratitude que,

Je dédie ce travail à :

mon père, *qui veillait sur notre confort et notre éducation, j'espère qu'Allah prolonge sa vie afin de qu'il se réjouisse avec plus de succès.*

celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi **chère mère** *toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance.*

toute ma famille

des personnes spéciales **dans ma vie**, *qu'ils étaient avec moi tout le temps. tous ceux ou celles qui me sont chèrs.*

tous mes enseignants tout au long de mes études.

tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce travail.

Bochra

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, je rende grâce à ***Allah*** *le tout puissant qui m'a fait ouvrir les portes du savoir, qui m'a donné le courage, la volonté, la force nécessaire durant tout mon cursus pédagogiques.*

Ma profonde gratitude à mes parents pour leur soutien moral indéfectible.

Je tiens à remercie mon encadreur ***Mr M. Ahmia****, pour son aide, ses conseils, et ses orientations pour l'accomplissement de ce mémoire.*

Je remercie également ***Mr A. Bouchair*** *qui m'a fait l'honneur en acceptant de présider mon jury de mémoire. Je remercie également* ***Mlle N. Harrouche****, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de participer à ce jury..*

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes ***amis*** *et* ***collègues*** *pour le soutien moral et matériel.*

Merci

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **2**

1 Préliminaires **3**

1.1 Outils de base de combinatoire . . . 3
1.1.1 Fonction ou série génératrice . . . 3
1.1.2 Factorielle, factorielles montante et descendante . . . 4
1.1.3 Objets combinatoires . . . 5
1.1.4 Chemins dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . 7
1.2 Fonctions symétriques . . . 8
1.2.1 Fonctions symétriques monômiales . . . 8
1.2.2 Fonctions symétriques élémentaires . . . 8
1.2.3 Fonctions symétriques complètes . . . 10
1.2.4 Fonctions symétriques somme des puissances . . . 13
1.3 Coefficients binomiaux et multinomiaux . . . 14
1.3.1 Coefficients binomiaux . . . 14
1.3.2 Coefficients multinomiaux . . . 16
1.4 Nombre de Stirling . . . 17
1.4.1 Nombre de Stirling de première espèce . . . 17
1.4.2 Nombre de Stirling de deuxième espèce . . . 20

2 Fonctions symétriques généralisée **23**

2.1 Fonctions symétrique élémentaire généralisée 23

2.1.1 Définitions et propriétés 23

2.1.2 Interprétation combinatoire de la fonction symétrique élémentaire généralisée 25

2.2 Fonction symétrique complète généralisée 26

2.2.1 Définitions et propriétés 26

2.2.2 Interprétations combinatoire de la fonction symétrique complète généralisée 27

2.3 Applications 28

2.3.1 Coefficients bi^{s}nomiaux 28

3 Fonction symétrique modulaire et Nombre de s-Stirling modulaire **31**

3.1 Fonction symétrique modulaire 31

3.1.1 Définitions et propriétés 31

3.2 Interprétations combinatoires de fonction symétrique modulaire 38

3.2.1 Interprétation par chemin 38

3.2.2 Interprétation par pavage 39

3.3 Application 40

3.3.1 Nombre de s- Stirling modulaire de deuxième espèce 40

TABLE DES FIGURES

1.1 Une 3-permutation de [4]. 6

1.2 Une 2-partition de [4]. 7

1.3 Le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 7

1.4 Un chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 7

2.1 Les chemins de $(0,0)$ à $(3,2)$ associés à $E_3^{(2)}(3)$. 25

2.2 Les trois chemins de u à v associés à $H_4^{(3)}(3)$. 28

3.1 Chemin de réseau pondéré dans $\mathcal{P}_{6,12}^{(2)}$. 39

3.2 Les trois chemins associés à $M_4^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$. 39

3.3 Un pavage pondéré dans $\mathcal{T}_{6,12}^{(2)}$. 40

3.4 Les trois pavages associés à $M_4^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$. 40

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Triangle de Pascal. 15
1.2 Les nombres de Stirling de première espèce non-signés. 18
1.3 Les nombres de Stirling de deuxième espèce. 20

2.1 Triangle des coefficients bi^{2}nomiaux $\binom{n}{k}_2$. 29

INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la combinatoire. La combinatoire est un domaine passionnant de recherche qui étudie les structures discrètes et les configurations d'objets finis. Elle explore les combinaisons, les arrangements et les dénombrements d'ensembles finis, offrant ainsi des outils puissants pour résoudre des problèmes complexes. La combinatoire trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que les mathématiques, l'informatique, la physique, la biologie et l'optimisation. Elle joue un rôle essentiel dans la résolution des problèmes pratiques et théoriques, en permettant de comprendre et de quantifier les possibilités de combinaisons et de configurations. Les techniques et les outils pratiques de la combinatoire ouvrent de nouvelles perspectives pour la résolution des problèmes dans divers domaines et promettent des avancées significatives dans la compréhension des structures discrètes.

Le concept des fonctions symétriques est un concept fondamental en mathématiques qui trouve des applications dans de nombreux domaines, tels que l'algèbre, l'analyse et la combinatoire. Elles jouent un rôle essentiel dans l'étude des propriétés symétriques des objets mathématiques. Elles sont utilisées pour décrire les relations entre les racines d'un polynôme, les coefficients d'une équation, et bien d'autres propriétés mathématiques. La fonction symétrique est un outil puissant et essentiel pour comprendre et résoudre des problèmes mathématiques complexes, et son étude continue à susciter un grand intérêt et de nouvelles découvertes.

Les nombres de Stirling de première espèce et de deuxième espèce furent introduits par Stirling [14] et nommés par Nielsen [13] en l'honneur de ce premier. Ces nombres se manifestent dans de nombreux problèmes de combinatoire et sont reliés à pleins d'autres nombres tels que les nombres de Bernoulli, les nombres Eulérien, etc. Les nombres de Stirling de première espèce, notés $c(n, k)$, comptent le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments avec exactement k cycles. Les nombres de Stirling de deuxième espèce, notés $S(n, k)$ comptent le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en k

sous-ensembles non vides.

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'une nouvelle généralisation des nombres de Stirling de deuxième espèce à l'aide d'une nouvelle classe des fonctions symétriques (le travail de Bazeniar et al [5]).

Notre mémoire est composé de trois chapitres et une conclusion générale.

Le premier chapitre, contient trois sections. La première section regroupe les notions et les outils de base essentiels de la combinatoire nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, tels les fonctions génératrices, la factorielle, les permutations, les arrangements, les chemins dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et les fonctions symétriques. Dans la deuxième section, nous abordons les coefficients binomiaux et les coefficients multinomiaux. La dernière section est consacrée pour les nombres de Stirling des deux espèces.

Au deuxième chapitre, nous abordons une nouvelle généralisation des fonctions symétriques élémentaire et complète. En particulier, nous présentons la fonction symétrique élémentaire généralisée $E_k^{(s)}$ et la fonction symétrique complète généralisée $H_k^{(s)}$ ainsi leur interprétation combinatoire. Comme application, nous utilisons la fonction symétrique élémentaire généralisée pour interpréter les coefficients bi^{s}nomiaux.

Dans le dernier chapitre, nous considérons aussi une nouvelle généralisation des fonctions symétriques classiques. Plus précisément, nous donnons la définition de la fonction symétrique modulaire notée $M_k^{(s)}$. Puis nous montrons que cette fonction peuvent être exprimée en termes des fonctions symétriques élémentaire et complète, et en termes aussi de leur généralisation $E_k^{(s)}$ et $H_k^{(s)}$. Après nous considérons quelques interprétations combinatoire pour la fonction symétrique modulaire à travers les chemins et les pavages. Enfin, comme application de la fonction symétrique modulaire, nous introduisons les nombres de s-Stirling modulaires de deuxième espèce et nous donnons leur interprétation combinatoire.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions et les définitions de base essentielles pour la compréhension de la suite de ce travail. Nous abordons les outils de base nécessaires de combinatoire comme les factorielles, les arrangements, les permutations et les chemins dans le plan. Ensuite, nous présentons les définitions des fonctions symétriques monomiales, élémentaires, complètes et fonction symétrique somme des puissances avec des exemples explicatifs pour chaque notion. Puis nous exposons la notion des coefficients binomiaux et des coefficients multinomiaux. Enfin, nous terminons ce chapitre par la présentation des nombres de Stirling de première et de deuxième espèce. Les principales références utilisées pour la rédaction de ce chapitre sont [7–12].

1.1 Outils de base de combinatoire

1.1.1 Fonction ou série génératrice

Soient $(a_n)_n$ une suite et f_n une fonction. On appelle fonction génératrice ou série génératrice de la suite $(a_n)_n$ la série formelle

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f_n(x).$$

On dit qu'une fonction génératrice est une série génératrice ordinaire si elle est de la forme

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

De même, une fonction génératrice est dite exponentielle si la fonction $f_n(x)$ est de la forme

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Deux fonctions génératrices ordinaires (ou exponentielles) $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\left(A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\right)$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ $\left(B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}\right)$ sont égaux si et seulement si $a_n = b_n$, pour tout $n \geq 0$.

Le produit de convolution de deux séries génératrices ordinaires $A(x)$ et $B(x)$ est une série génératrice ordinaire $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$, $n \geq 0$. De même, le produit de deux séries génératrices exponentielles, appelé produit de convolution binomiale, est une série génératrice $C(x) = A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$, où $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}, n \geq 0$.

1.1.2 Factorielle, factorielles montante et descendante

Définition 1.1. *(**Factorielle montante**) Soit x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle montante (croissante) de x d'ordre n notée $x^{\overline{n}}$, est définie par*

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+1)\cdots(x+n-1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.2. *(**Factorielle descendante**) Soit x un nombre réel et n un entier positif, la factorielle descendante (décroissante) de x d'ordre n notée $x^{\underline{n}}$, est définie par*

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\cdots(x-n+1) & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.
1. *On peut exprimer la factorielle montante en fonction de la factorielle descendante comme suit :*

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}},$$

$$(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}}.$$

2. *Pour $x = 1$ dans l'équation (1.1), ou pour $x = n$ dans (1.2), on obtient la factorielle classique $1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}} = n!$.*

1.1.3 Objets combinatoires

Définition 1.3. *(**Arrangement**) Soit* $[n] = \{1, \ldots, n\}$*, on appelle arrangement de* k *éléments, toute suite de* k *éléments distincts de* $[n]$.

Remarque 1.2. *Le nombre d'arrangements de* $[k]$ *dans* $[n]$ *noté* $A_{n,k}$ *est compté par la factorielle descendante, on écrit*

$$A_{n,k} = (n)^{\underline{k}}. \tag{1.3}$$

Lorsque $k = n$ *le terme dédié est "permutation" (bijection).*

Exemple 1.1. *Soit* $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$.

- $(2, 4, 3)$ *est un arrangement de trois éléments, mais* $(2, 1, 2)$ *n'est pas un arrangement.*

Définition 1.4. *(**Permutation**) Soit* $n \in \mathbb{N}$*, on appelle permutation toute bijection* σ *de* $[n]$ *dans* $[n]$*. Une permutation* σ *de* $[n]$ *est,*

$$\sigma = \{(i, \sigma(i)) \ \mid \ i \in [n]\}.$$

On peut représenter la permutation σ par une forme matricielle

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ est $n!$.

On note l'ensemble des permutations de $[n]$ par $S(n)$.

Exemple 1.2. *Soit l'ensemble* $[3]$*. Le nombre de permutations est* $3! = 6$.

$$S(n) \quad = \quad \{123, 132, 213, 231, 312, \underline{321}\}.$$

La forme matricielle de la permutation $\sigma = 3\ 2\,1$ *de* $[3]$ *est ,*

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Définition 1.5. *On appelle **orbite*** O_i *de* $i \in [n]$ *l'ensemble des images de* i*, obtenues en appliquant successivement la permutation* σ *sur l'élément* i*, c'est à dire* $O_i = \{\sigma^p(i), p \in \mathbb{N}\}$.

L'orbite de l'élément 1 dans Exemple 1.2 est $O_1 = \{1, \sigma(1) = 3\}$.

Définition 1.6. *Une permutation* σ *de taille* n *est **un cycle** si tous ses éléments appartiennent à la même orbite.*

Dans Exemple 1.2, on remarque que $O_1 = O_3$. Ces éléments $\{1, 3\}$ pris dans cet ordre, forment un cycle noté $(1, 3)$ où chaque élément est l'image du précédent par σ (1 est l'image de 3, 3 est l'image de 1). Une permutation σ peut être écrite comme un produit de cycles, par exemple, la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,3\,4 \end{pmatrix}.$$

peut être écrite

$$\sigma = (1, 2), (3)(4).$$

Cette représentation est appelée : **écriture en cycles**. Nous conviendrons d'appeler k-permutation toute permutation ayant k cycles.

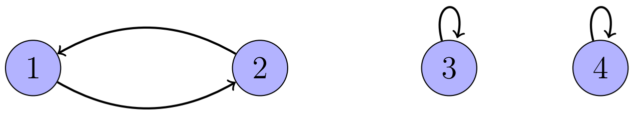

FIGURE 1.1 – Une 3-permutation de [4].

Définition 1.7. *(**Partition**) Soit $n \in \mathbb{N}$.*

- ***Un block (ou part)** B de $[n]$ est un sous-ensemble non vide de $[n]$.*
- ***Une partition** π de $[n]$ est une famille de blocks $B_1, \ldots, B_k$ disjoints deux à deux, tels que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = [n]$.*

Exemple 1.3. *Soit l'ensemble $[3] = \{1, 2, 3\}$, les partitions de $[3]$ sont*

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}; \quad \{\{1, 2\}, \{3\}\}; \quad \{\{1, 3\}, \{2\}\}; \quad \{\{2, 3\}, \{1\}\}; \quad \{\{1, 2, 3\}\}.$$

Aussi, nous conviendrons d'appeler k-partition toute partition de $[n]$ en k parts.

Exemple 1.4. *Les 2-partitions de $[4]$ sont :*
$\{\{1, 2\}\{3, 4\}$
$\{\{1, 3\}\{2, 4\}\}$
$\{\{1, 4\}\{2, 3\}\}$
$\{\{1\}\{2, 3, 4\}\}$
$\{\{2\}\{1, 3, 4\}\}$
$\{\{3\}\{1, 2, 4\}\}$
$\{\{4\}\{1, 2, 3\}\}$

Notez qu'une k-permutation peut être considérée comme un partitionnement de $[n]$ en k cycles.

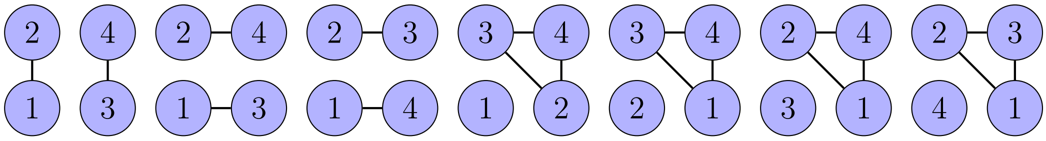

FIGURE 1.2 – Une 2-partition de [4].

1.1.4 Chemins dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Définition 1.8. *Le plan (ou réseau combinatoire) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble des points à coordonnées entières positives (ou nulles) du plan cartésien.*

Comme illustré à la figure suivante :

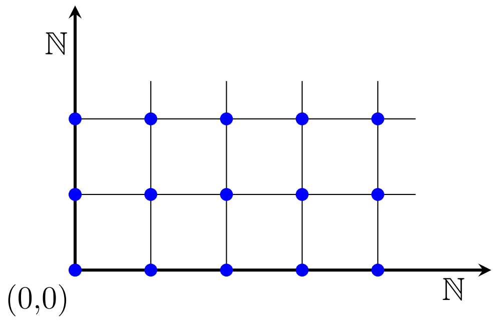

FIGURE 1.3 – Le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Définition 1.9. *Un chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une suite $\omega = \{s_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des points $s_i = (x_i, y_i)$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, tels que :*

- *Le point s_0 est la source (point de départ) du chemin ω, et le point s_n est son but (point d'arrivé).*
- *Les couples (s_i, s_{i+1}) sont appelés les pas élémentaires du chemin ω.*
- *L'entier n est la longueur du chemin ω, que nous noterons $|\omega|$. Par exemple, la figure 1.4 montre un chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

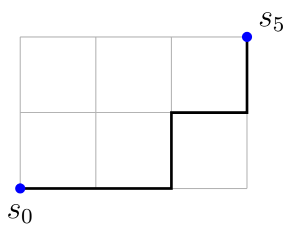

FIGURE 1.4 – Un chemin dans le plan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

1.2 Fonctions symétriques

Définition 1.10. *Soit $\mathbb{Z}[x_1, x_2, ..., x_n]$ l'anneau des polynômes en n variables indeterminées à coefficients entiers. Un polynôme de cet anneau est dit symétrique, si pour tout permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$ on a :*

$$\sigma f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = f(x_1, ..., x_n). \tag{1.4}$$

Définition 1.11. *Soit $n \in \mathbb{N}$, une partition de n est une suite décroissante finie d'entiers positif notée par $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ vérifiant :*

$$\begin{cases} \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_k, \\ |\lambda| = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = n. \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ sont les parts de λ.

On appelle la longueur de λ le nombrer des parts de λ notée par $l(\lambda) = k$. Si λ est une partition de n, on écrit $\lambda \dashv n$.

Exemple 1.5. *On a*
$\lambda = (4, 2, 1)$ la partition de 7 en trois parts. $|\lambda| = 7$ et $l(\lambda) = 3$, on écrit $\lambda \dashv 7$.

Définition 1.12. *Si λ a m_i parts de taille i, on écrit encore λ par $\lambda = 1^{m_1}2^{m_2}...n^{m_n}$, avec m_i est la multiplicité de la parts i dans λ, donc :*

$$m_i = m_i(\lambda) = card\{j, \lambda_j = i\}.$$

Exemple 1.6. *Pour $\lambda = (2, 2, 2, 1)$ on a $\lambda = 2^3 1$.*

1.2.1 Fonctions symétriques monômiales

Définition 1.13. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ une partition de m. La fonction symétrique monômiale correspondante est*

$$m_\lambda(n) := m_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_k}^{\lambda_k}, \tag{1.5}$$

où la somme est pour toutes les permutations distinctes des entrées de la partition.

1.2.2 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 1.14. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction symétrique élémentaire $e_k(n)$, la fonction définie par*

$$e_k(n) := e_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 ... < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = m_{(1^k)}(n), \tag{1.6}$$

avec $e_0(n) = 1$, *et* $e_k(n) = 0$ *si* $k > n$ *ou* $k < 0$.

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, *on définit* $e_\lambda(n)$ *par*

$$e_\lambda(n) = e_{\lambda_1}(n)e_{\lambda_2}(n)\cdots e_{\lambda_k}(n), \tag{1.7}$$

Exemple 1.7. *Pour* $k = 3$, $n = 4$ *on a*

$$e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4.$$

Cas particulier On peut montrer d'une autre façon qu'une fonction est élémentaire, s'il est possible de l'écrire sous la forme d'un polynôme de degré n, c'est à dire

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0,$$

à n racines réelles ou complexes $x_1, x_2, ..., x_n$. Si on développe le membre de gauche, on trouve :

$$x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} - e_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^n e_n = 0,$$

où e_i sont des polynômes en fonction des x_i qui représentent des fonctions symétriques élémentaires.

Proposition 1.1. *Soit* $k \geqslant 0$, *alors*

$$e_k(n) = e_k(n-1) + x_n e_{k-1}(n-1). \tag{1.8}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} e_k(n-1) + x_n e_{k-1}(n-1) &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_k\leqslant n-1} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} + x_n \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_{k-1}\leqslant n-1} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{k-1}} \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_k\leqslant n-1} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_{k-1}\leqslant n-1} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{k-1}}x_n \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_{k-1}<i_k<n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_{k-1}<n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{k-1}}x_n \\ &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_{k-1}<i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k} \\ &= e_k(n). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. *La série génératrice pour* e_k *est*

$$E(t) = \sum_{k\geqslant 0} e_k(n)t^k = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_it). \tag{1.9}$$

Preuve. Montrons par récurrence sur n.
Pour $n = 2$ on a :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{2}(1+x_it) &= (1+x_1t)(1+x_2t)\\ &= 1+(x_1+x_2)t+x_1x_2t^2\\ &= e_0(2)+e_1(2)t+e_2(2)t^2\\ &= \sum_{k\geqslant 0}^{2} e_k(2)t^k.\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n

$$\sum_{k\geqslant 0} e_k(n) = \prod_{i=1}^{n}(1+x_it),$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$

$$\sum_{k\geqslant 0} e_k(n+1)t^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1+x_it).$$

On a

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_it) &= \prod_{i=1}^{n}(1+x_it)(1+x_{n+1})\\ &= \sum_{k\geqslant 0} e_k(n)t^k(1+x_{n+1})\\ &= \sum_{k\geqslant 0} e_k(n)t^k + x_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} e_k(n)t^{k+1}\\ &= \sum_{k\geqslant 0} e_k(n)t^k + x_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} e_{k-1}(n)t^k\\ &= \sum_{k\geqslant 0}(e_k(n)+x_{n+1}e_{k-1}(n))t^k\\ &= \sum_{k\geqslant 0} e_k(n+1)t^k.\end{aligned}$$

La preuve est complète. □

1.2.3 Fonctions symétriques complètes

Définition 1.15. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction symétrique complète $h_k(n)$, la fonction définie par*

$$h_k(n) := h_k(x_1,...,x_n) = \sum_{|\lambda|=k} m_\lambda(n) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2...\leqslant i_k\leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}, \tag{1.10}$$

où $h_0(n) = 1$, $h_1(n) = e_1(n)$ *et* $h_k(n) = 0$ *si* $k < 0$.

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, *on définit* $h_\lambda(n)$ *par*

$$h_\lambda(n) = h_{\lambda_1}(n) h_{\lambda_2}(n) \cdots h_{\lambda_k}(n). \tag{1.11}$$

Exemple 1.8. *Pour* $k = 3$, $n = 3$ *on a*

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_1 x_2 x_3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Proposition 1.3. *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$h_k(n) = h_k(n-1) + x_n h_{k-1}(n). \tag{1.12}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
h_k(n-1) + x_n h_{k-1}(n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_k \leqslant n-1} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + x_n \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_k \leqslant n-1} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} x_n \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k < n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}} x_n \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_{k-1} \leqslant i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} \\
&= h_k(n).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.4. *La série génératrice pour* $h_k(n)$ *est*

$$H(t) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(n) t^k = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t)^{-1}. \tag{1.13}$$

Preuve. On montre par récurrence sur n. Pour $n = 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geqslant 0} h_k(2) t^k &= h_0(2) + h_1(2) t + h_2(2) t^2 + \cdots \\
&= 1 + (x_1 + x_2) t + (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) t^2 + \cdots \\
&= (1 + x_1 t + x_1^2 t^2 + \cdots)(1 + x_2 t + x_2^2 t^2 + \cdots) \\
&= \left(\sum_{k \geqslant 0} (x_1 t)^2 \right) \left(\sum_{k \geqslant 0} (x_2 t)^2 \right) \\
&= \frac{1}{(1 - x_1 t)(1 - x_2 t)} \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{2} (1 - x_i t)}.
\end{aligned}$$

Supposons que la propriété est vraie pour n

$$\sum_{k\geqslant 0} h_k(n)t^k = \prod_{i=1}^{n}(1-x_it)^{-1},$$

et montrons que la propriété est vraie pour $n+1$

$$\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k = \prod_{i=1}^{n+1}(1-x_it)^{-1}.$$

On a

$$h_k(n+1) = h_k(n) + x_{n+1}h_{k-1}(n+1),$$

alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k &= \sum_{k\geqslant 0}(h_k(n) + x_{n+1}h_{k-1}(n+1))t^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)t^k + x_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} h_{k-1}(n+1)t^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)t^k + x_{n+1}\sum_{k\geqslant 1} h_{k-1}(n+1)t^k \\
&= \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)t^k + x_{n+1}\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^{k+1} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} h_k(n)t^k + x_{n+1}t\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k,
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k - x_{n+1}t\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k = \prod_{i=1}^{n}(1-x_it)^{-1},$$

ce qui équivalent à

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} h_k(n+1)t^k &= \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_it)^{-1}}{(1-x_{n+1}t)} \\
&= \prod_{i=1}^{n+1}(1-x_it)^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Les liens entre les fonctions symétriques élémentaires et complètes sont donnés dans la proposition suivante.

Proposition 1.5. *1.*
$$H(t)E(-t) = 1. \tag{1.14}$$

2. Pour tout $k \geqslant 1$, on a
$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^k e_r h_{k-r} = 0. \tag{1.15}$$

P*reuve.* 1. On utilise la proposition 1.2 et la proposition 1.4.

2. On a
$$\begin{aligned} H(t)E(-t) &= \sum_{j\geqslant 0} h_j t^j \sum_{r\geqslant 0} e_r(-t)^r \\ &= \sum_{j\geqslant 0}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r e_r h_j t^{j+r}. \end{aligned}$$

On pose $k = j + r$, on trouve
$$\begin{aligned} H(t)E(-t) &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{k=j+r}(-1)^r e_r h_{k-r} t^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\sum_{r=0}^{k}(-1)^r e_r h_{k-r} t^k. \end{aligned}$$

D'autre part, on a
$$H(t)E(-t) = 1.$$

Par identification, on obtient
$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^k e_r h_{k-r} = 0, \text{ pour } k \geqslant 1.$$

□

1.2.4 Fonctions symétriques somme des puissances

Définition 1.16. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle fonction symétrique somme de puissance $p_k(n)$, la fonction définie par*
$$p_k(n) := p_k(x_1, ..., x_n) = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} x_i^k = m_k(n). \tag{1.16}$$

Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, on définit
$$p_\lambda(n) = p_{\lambda_1}(n)p_{\lambda_2}(n)\cdots p_{\lambda_k}(n), \tag{1.17}$$

Exemple 1.9. *Pour $n = 2$, on a*

$$p_1(2) = m_1(2) = x_1 + x_2,$$

$$p_2(2) = m_2(2) = x_1^2 + x_2^2,$$

$$p_3(2) = m_3(2) = x_1^3 + x_2^3.$$

1.3 Coefficients binomiaux et multinomiaux

Les coefficients binomiaux forment l'un des triangles le plus ancien de l'histoire des mathématiques. L'étude de leurs propriétés, leurs interprétations et leurs applications a intéressé les mathématiciens depuis longtemps, comme : Omar Khayyam (1048-1131), Tartaglia (1499-1557), Pascal (1623-1662), Newton (1643-1727) , Euler (1707-1783) et bien d'autres.

1.3.1 Coefficients binomiaux

Définition 1.17. *Soit n, $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Le coefficient binomial est le nombre noté $\binom{n}{k}$ qui égale de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble de n éléments. La formule explicite est donnée par*

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si \;\; 0 \leq k \leqslant n, \\ 0 & si \;\; k > n \;\; ou \;\; k < 0. \end{cases}$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a + b)^n$ appelée relation du binôme de Newton qui a été découvert par Issac Newton (1646-1727) en 1676, où a et b sont des nombres réels ou complexe.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}. \quad (1.18)$$

Remarque 1.3.

1. *$\binom{n}{0} = 1$ car $\varnothing$ est la seule partie de E a zéro élément.*
2. *$\binom{n}{n} = 1$ car E est la seule partie de E a n éléments.*
3. *Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$ car il ne peut y avoir des parties de k éléments d'un ensemble en contenant n.*

Proposition 1.6 (Formule de Pascal). *Le coefficient binomial satisfait la relation de récurrence d'ordre deux suivante :*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (1.19)$$

P*reuve.* $\binom{n}{k}$est le nombre de sous-ensemble de $[n]$ de cardinalité k . Ce nombre est la somme de nombre de sous-ensemble de $[n]$ de cardinalité k qui contiennent le nombre"n", avec le nombre de sous-ensemble de $[n]$ de cardinalité k qui ne contiennent pas le nombre"n".

1. Le nombre de sous-ensembles qui contiennent "n" est $\binom{n-1}{k-1}$(car sinon suprime"n",il reste $n-1$ élement dans l'ensomble principale et $k-1$ éléments dans cas sous-ensombles)
2. Le nombre de sous-ensombles qui ne contiennent pas le"n" est $\binom{n-1}{k}$. Donc $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

□

Proposition 1.7 (Formule de Vandermonde ou Chu-Vandermonde). *Le coefficient binomial satisfait la relation suivante :*

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}. \quad (1.20)$$

P*reuve.* Soient A et B deux ensembles tels que $|A| = n$, $|B| = m$ et $A \bigcap B = \varnothing$, on a alors $|A \bigcup B| = n + m$.

On a $\binom{n+m}{k}$ est le nombre des sous ensembles de l'ensemble $A \bigcup B$ à k éléments. On choisit un certain élément j de l'ensemble A, et les $k-j$ éléments restants de l'ensemble B, puis considérer toutes les situations possibles pour $j = 0, \ldots, k$, on obtient le résultat. □

Á partir de la **formule de Pascal** nous pouvons construire le triangle de Pascal. Voir la table 1.1

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal.

Remarque 1.4. *On remarque que les lignes du triangle de Pascal sont symétriques, c'est à dire.*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \tag{1.21}$$

En effet, le fait choisir k personnes parmi n est équivalent à ne pas choisir $n-k$ personnes.

1.3.2 Coefficients multinomiaux

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, k_2, \ldots, k_t \in \mathbb{N}$ tels que $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n$, le coefficient multinomial $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t}$ est le nombre de partitions ordonnées d'un ensemble de taille n en t sous ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_t$ de tailles respectives $k_1, k_2, \ldots, k_t$, dont la formule explicite est donnée par

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_t!}. \tag{1.22}$$

Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n$ appelée formule du multinôme de Newton, qui a été formulée pour la première fois par G.W. Leibnize (1646-1716) et plus tard prouvé par Johan Bernoulli (1667-1748).

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_t=n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_t} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_t^{k_t}, \tag{1.23}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_t$ sont des nombres réels ou complexes.

Exemple 1.10. *On peut développer $(x+y+z)^4$.*

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^4 &= \sum_{k_1+k_2+k_3=4} \binom{4}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \\
&= \binom{4}{4,0,0} x^4 + \binom{4}{3,1,0} x^3 y + \binom{4}{3,0,1} x^3 z \\
&+ \binom{4}{1,3,0} xy^3 + \binom{4}{1,0,3} xz^3 + \binom{4}{2,1,1} x^2 yz \\
&+ \binom{4}{0,4,0} y^4 + \binom{4}{0,2,2} y^2 z^2 + \binom{4}{2,2,0} x^2 y^2 \\
&+ \binom{4}{0,0,4} z^4 + \binom{4}{0,1,3} yz^3 + \binom{4}{0,3,1} y^3 z + \binom{4}{1,2,1} xy^2 z + \binom{4}{1,1,2} xyz^2 \\
&= x^4 + 4x^3 y + 4x^3 z + 4xy^3 + 12xyz^2 \\
&+ 4xz^3 + 12x^2 yz + y^4 + 6y^2 z^2 + 12xy^2 z \\
&+ 6x^2 y^2 + z^4 + 4yz^3 + 4y^3 z.
\end{aligned}$$

1.4 Nombre de Stirling

1.4.1 Nombre de Stirling de première espèce

Définition 1.18. *Les nombres de Stirling de première espèce* ***signés*** $s(n,k)$ *sont les coefficients du développement de la factorielle décroissante* $x^{\underline{n}}$, *c'est-à-dire,*

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k. \tag{1.24}$$

$x^{\underline{0}}$*=1 car il s'agit d'un produit vide.*

Les nombres de Stirling de première espèce ***non signés*** $c(n,k)$ *(valeurs absolues des précédents) comptent le nombre de k-permutations de* $[n]$*. Ils apparaissent comme coefficients du développement de la factorielle croissante* $x^{\overline{n}}$, *c'est-à-dire que ;*

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k)x^k. \tag{1.25}$$

Exemple 1.11.

$$(x)^{\overline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

d'où,

$$c(3,0) = 0, c(1,3) = 2, c(3,2) = 3, c(3,3) = 1.$$

Relation de récurrence Les nombres de Stirling de première espèce non signés ont une relation de récurrence triagulaire d'ordre deux,

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)$$

avec $c(n,0) = \delta_{n,0}$ où δ est le symbole de Kronecker, et pour $n \neq 0$,$s(n,k) = 0$ lorsque $k \notin [n]$. Ils satisfont aussi une relation de récurrence verticale

$$c(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} c(n,i)\binom{i}{k}.$$

A partir de la formule de récurrence nous obtenons un tableau des valeurs de $c(n,k)$,pour les premiers nombres n et k. Voir le tableau 1.2

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	

TABLE 1.2 – Les nombres de Stirling de première espèce non-signés.

Série génératrice

Théorème 1.1. *1. La fonction gènèratrice exponontielle double est*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c(n,k)y^k \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{(1-x)^y}. \tag{1.26}$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce est

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!}\ln^k(1-x). \tag{1.27}$$

P*reuve.* 1. On a la fonction génératrice exponentielle double des nombres de Stirling de première espèce signés est

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)y^k \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} s(n,k)y^k\right)\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{\underline{n}}}{n!}x^n (\textit{par la relation } (1.18))\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{y}{n}x^n\\ &= (1+x)^y.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} c(n,k)y^k\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}s(n,k)y^k\frac{x^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-y)^k\frac{(-x)^n}{n!}\\ &= (1-x)^{-y}\\ &= \frac{1}{(1-x)^y}.\end{aligned}$$

2. De la relation (1.26), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c(n,k)y^k\frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{(1-x)^y}\\ &= (1-x)^{-y}\\ &= exp((-y)\ln(1-x))\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-y\ln(1-x))^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\ln(1-x)^k}{k!}y^k.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^k}{k!}\ln^k(1-x).$$

□

Formes explicites

Théorème 1.2. *Une forme explicite des nombres de Stirling de première espèce non signés est donnée par :*

$$c(n,k) = \frac{n!}{k!}\sum_{i_1+\cdots+i_k=n}\frac{1}{i_1\cdots i_k}. \tag{1.28}$$

Remarque 1.5. *Les nombres de Stirling de première espèce signés et non-signés sont liés par la relation suivante :*

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k). \tag{1.29}$$

Remarque 1.6. *Les nombres de Stirling de première espaces non signés une cas spéciale de la fonction symétrique élémentaire*

$$c(n,k) = e_{n-k}(1,2,...,n-1)$$

.

1.4.2 Nombre de Stirling de deuxième espèce

Définition 1.19. *Les nombres de Stirling de deuxième espèce $S(n,k)$ $(n,k \in \mathbb{N}, k \leq n)$ comptent le nombre de k-partitions de $[n]$, et qui figurent dans le développement de x^n comme combinaison linéaire des polynomes $x^{\underline{k}}$ $(0 \leq k \leq n)$. On a précisément pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}} \tag{1.30}$$

Relation de récurrence Les nombres de Stirling de deuxième espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux,

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \tag{1.31}$$

avec $S(n,0) = \delta_{n,0}$, et pour $n \neq 0$ $S(n,k) = 0$ lorsque $k \notin [n]$. Ils ont aussi, une relation de récurrence verticale

$$S(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} S(i,k).$$

A partir de la formule de récurrence nous obtenons le tableau des valeurs de $S(n,k)$, pour les deuxièmes nombres n et k.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

TABLE 1.3 – Les nombres de Stirling de deuxième espèce.

Forme explicite

Proposition 1.8. *Deux formes explicites des nombres de Stirling de deuxième espèce :*

$$S(n,k) = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1+\cdots+i_k=n} \frac{1}{i_1! \cdots i_k!}, \tag{1.32}$$

et

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{k!} \binom{k}{i} i^n. \tag{1.33}$$

Série génératrice

Théorème 1.3. *1. La série génératrice ordinaire associée aux nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{n-k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-x^i}. \tag{1.34}$$

2. La fonction génératrice exponentielle des nombres de stirling de deuxième espèce est

$$\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}. \tag{1.35}$$

3. La fonction génératrice exponentielle double est

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k = exp(y(e^x-1)). \tag{1.36}$$

P*reuve*. 1. Posons

$$f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n.$$

De la relation de récurrence (1.31), on trouve

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) x^n \\ &= x\sum_{n=k}^{+\infty} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{n-1} \\ &= x\sum_{n=k-1}^{+\infty} \left\{ {n \atop k-1} \right\} x^{n} + kx \sum_{n=k}^{+\infty} x^{n} \\ &= xf_{k-1}(x) + kxf_k(x). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} f_{k-1}(x). \tag{1.37}$$

Alors si on procède la relation (1.37) sur k, on aura

$$f_k(x) = \frac{x}{1-kx} \times \frac{x}{1-(k-1)x} \times \cdots \times \frac{x}{1-x} f_0(x)$$

où $f_0(x) = \left\{ {0 \atop 0} \right\} x^0 = 1$. D'où le résultat.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la forme explicite (1.33), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left\{\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{i}(k-i)^n\right\}\frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^t\binom{k}{i}\frac{((k-i)x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((k-i)x)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{i}e^{(k-t)x} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{i}(e^x)^{k-t} \\
&= \frac{1}{k!}(e^x-1).
\end{aligned}$$

3. D'après (1.35) on aura :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)\frac{x^n}{n!}y^k &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^x-1)^k}{k!}y^k \\
&= exp(y(e^x-1)).
\end{aligned}$$

□

Remarque 1.7. *Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont des spécialisation de la fonction symétrique complète*

$$S(n,k) = h_{n-k}(1,2,...,k), \tag{1.38}$$

CHAPITRE 2

FONCTIONS SYMÉTRIQUES GÉNÉRALISÉE

Dans ce chapitre, on présente des nouvelles généralisation des fonctions symétriques classiques. On commence par présenter les définitions et les propriétés de la fonction symétrique élémentaire généralisée et de la fonction symétrique complète généralisée. On y présente leur interprétation combinatoire et citons quelques exemples explicatifs pour chaque notion. Dans la dernière section on présente les coefficients bi^{s}nomiaux comme application de ces fonctions symétriques. Les principales références utilisées pour la rédaction de ce chapitre sont [1,3].

2.1 Fonctions symétrique élémentaire généralisée

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soit s un entier positif, la fonction symétrique élémentaire généralisée notée $E_k^{(s)}(n)$ est définie par :*

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant s}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}, \tag{2.1}$$

où $E_0^{(s)}(n) = 1$ et $E_k^{(s)}(n) = 0$ si $sn < k$ ou $k < 0$.

Exemple 2.1. *Pour s=2.*

1. $E_0^2(1) = 1, \quad E_1^2(1) = x_1, \quad E_2^2(1) = x_1^2$;
2. $E_0^2(2) = 1, \quad E_1^2(2) = x_1 + x_2, \quad E_2^2(2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

La fonction symétrique élémentaire généralisée $E_k^{(s)}(n)$ est le k-ième coefficient du développement en série de la fonction suivante :

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_it + \cdots + (x_it)^s) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(s)}(n)t^k. \tag{2.2}$$

Propriété 2.1. *La fonction symétrique élémentaire généralisée satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$E_k^{(s)}(n) = \sum_{j=0}^{s} x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1). \tag{2.3}$$

Preuve. On a

$$E_k^{(s)}(n) := E_k^{(s)}(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=k \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_n\leqslant s}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$$

et

$$E_k^{(s)}(n-1) = E_k^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}=k \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\leqslant s}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{s} x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1) &= \sum_{j=0}^{s} x_n^j \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}=k-j \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\leqslant s}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+j=k-j+j \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},j\leqslant s}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}x_n^j.\end{aligned}$$

On pose $i_n = j$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{s} x_n^j E_{k-j}^{(s)}(n-1) &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}+i_n=k \\ 0\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n\leqslant s}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_{n-1}^{i_{n-1}}x_n^{i_n} \\ &= E_k^{(s)}(n).\end{aligned}$$

□

2.1.2 Interprétation combinatoire de la fonction symétrique élémentaire généralisée

Théorème 2.1. *La fonction symétrique généralisée* $E_k^{(s)}$ *est interprétée comme une fonction génératrice des poids des chemins de réseau entre les points* $u = (0,0)$ *et* $v = (k, n-1)$*, avec au plus* s *pas dans la direction horizontale.*

Preuve. Il est facile de voir que la fonction symétrique élémentaire généralisée est une fonction génératrice des poids de chemin de réseau entre deux points. Pour chaque variable unitaire x_i dans $E_k^{(s)}$ on associe un pas horizontal unitaire, et si nous supposons que chaque chemin de réseau commençant par $u = (0,0)$, il se termine par $v = (k, n-1)$ avec au plus s pas dans la direction horizontale. □

Exemple 2.2. *Les chemins de* $(0,0)$ *à* $(3,2)$ *associés à* $E_3^{(2)}(3) = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3$.

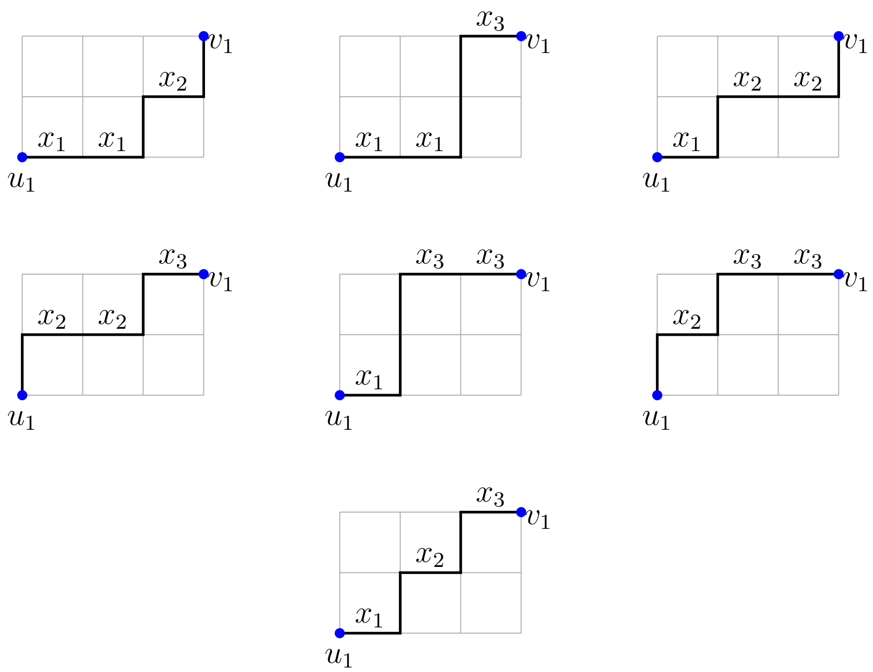

FIGURE 2.1 – Les chemins de $(0,0)$ à $(3,2)$ associés à $E_3^{(2)}(3)$.

2.2 Fonction symétrique complète généralisée

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2. *La fonction symétrique complète généralisée notée $H_k^{(s)}(n)$ est définie comme étant le k-iéme coefficient du développement :*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n) t^k, \tag{2.4}$$

où s est un entier positif.

Propriété 2.2. *La fonction symétrique complète généralisée satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$H_k^{(s)}(n-1) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j x_n^j H_{k-j}^{(s)}(n). \tag{2.5}$$

Preuve. D'après (2.4) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n-1) t^k &= \prod_{i=1}^{n-1}(1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= (1 - x_n t + \cdots + (-x_n t)^s) \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= (1 - x_n t + \cdots + (-x_n t)^s)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)}(n) t^k \\
&= \sum_{j=0}^{s} (-1)^j (x_n t)^j \sum_{k \geq 0} H_k^{(s)}(n) t^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{s} (-1)^j x_n^j H_k^{(s)}(n) t^{k+j} \\
&\overset{k=k+j}{=} \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{j=0}^{s} (-1)^j x_n^j H_{k-j}^{(s)}(n).
\end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$H_k^{(s)}(n-1) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j x_n^j H_{k-j}^{(s)}(n).$$

□

Théorème 2.2. *Considérons un entier positif k et un entier positif n. Soit s un autre entier positif. Définissons la fonction $H_k^{(s)}(n)$ comme suit :*

$$H_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{\lambda \dashv k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} mod(s+1)}} (-1)^{k+\sum_{i=1}^{l(\lambda)} \lambda_i mod(s+1)} m_\lambda(n). \tag{2.6}$$

Preuve. De la relation (2.4) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} H_k^{(s)} t^k &= \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t + \cdots + (-x_i t)^s)^{-1} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i t}{1 - (-x_i t)^{s+1}} = \prod_{i=1}^{n} (1 - (-x_i t)) \sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)} - \sum_{j=1}^{\infty} (-x_i t)^{j(s+1)+1} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{\lambda_i \equiv \{0,1\} mod(s+1)} (-1)^{\lambda_i mod(s+1)} (x_i t)^{\lambda_i} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda \dashv k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} mod(s+1)}} (-1)^{k+\sum_{i=0}^{l(\lambda)} \lambda_i mod(s+1)} m_\lambda(n) t^k.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Remarque 2.1. *Lorsque s est impair, la formule $H_k^{(s)}(n)$ peut être reformulée de la manière suivante :*

$$H_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{\lambda \dashv k \\ \lambda_i \equiv \{0,1\} mod(s+1)}} m_\lambda(n). \tag{2.7}$$

2.2.2 Interprétations combinatoire de la fonction symétrique complète généralisée

On utilise le théorème 2.2 pour interpréter combinatoirement la fonction symétrique complète généralisée.

Soit $\mathcal{P}_{k,n}^s$ l'ensembles des chemins de réseau entre les points $u = (0,0)$ et $v = (k, n-1)$ où le nombre de pas dans la direction horizontale est congru à 0 ou 1 modulo $s+1$. Pour $P = (p_1, p_2, \ldots, p_{n+k-1}) \in \mathcal{P}_{k,n}^s$, nous considérons
$n_i(P)$:=le nombre de pas horizontal modulo $s+1$ au niveau i.
On pose le $H^{(s)}$-étiquetage qui attribue l'étiquette pour chaque pas horizontal comme suit :

$L(p_i)$:=(le nombre de pas nord qui précédent p_i)+1.

Donc la fonction symétrique complète généralisée a l'interprétation suivante.

Théorème 2.3. *Soient n, k et s trois entiers positifs, alors*

$$H_k^{(s)}(n) = \begin{cases} \sum\limits_{P \in \mathcal{P}^s_{k,n}} X^P & si \quad s \; impair, \\ (-1)^k \sum\limits_{P \in \mathcal{P}^s_{k,n}} (-1)^{P'} X^P & sinon, \end{cases}$$

où $X^P = \prod_i x_{L(p_i)}$, et $P' = \sum_i n_i(P)$.

Preuve. D'après la relation (2.6), il est facile de voir que la fonction symétrique complète généralisée $H_k^{(s)}$ est une fonction génératrice des poids des chemins de réseau entre deux points. Pour chaque variable unitaire x_i dans cette fonction symétrique, nous associons un pas horizontal unitaire, et si nous supposons que chaque chemin de réseau commençant par $u = (0, 0)$ alors il se termine par $v = (k, n-1)$ où le nombre de pas dans la direction horizontale est égale à 0 ou 1 modulo $s + 1$. □

Exemple 2.3. *Figure 2.2 montre l'interprétation de $H_4^{(3)}(3)$ par chemin de réseau où*

$$H_4^{(3)}(3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4.$$

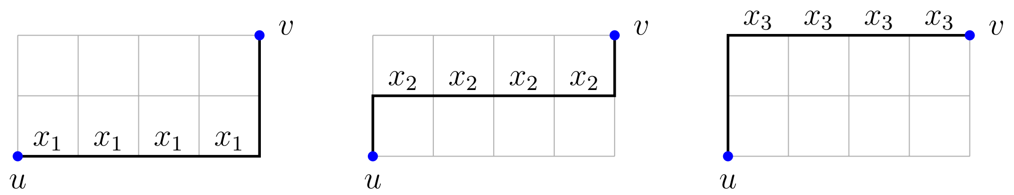

FIGURE 2.2 – Les trois chemins de u à v associés à $H_4^{(3)}(3)$.

2.3 Applications

2.3.1 Coefficients bi^{s}nomiaux

Les coefficients bi^{s}nomiaux sont une généralisation des coefficients binomiaux classiques, qui permettent de déterminer le k-ième terme du développement de $(1+x)^n$, avec un paramètre supplémentaire $s \geqslant 1$. Plus précisément, le coefficient bi^{s}nomial $\binom{n}{k}_s$, est le coefficient du terme en x^k dans le développement.

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^s)^n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{k}_s x^k, \tag{2.8}$$

avec la convention que $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k < 0$ ou $k > sn$.

Interprétation combinatoire Le coefficient bi^{s}nomial $\binom{n}{k}_s$ compte le nombre de manières de distribuer k boules dans n urnes de sorte que chaque urne contient au plus s boules.

Propriété 2.3. *[4] Il existe des propriétés largement connues et établies :*

1. *La relation de symétrie*
$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn-k}_s. \tag{2.9}$$
2. *La relation de récurrence longitudinale*
$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n-1}{k-m}_s. \tag{2.10}$$
3. *La relation de récurrence diagonale*
$$\binom{n}{k}_s = \sum_{m=0}^{s} \binom{n}{m} \binom{m}{k-m}_{s-1}. \tag{2.11}$$

Remarque 2.2. *Les coefficients bi^{s}nomiaux, comme c'est le cas pour les coefficients binomiaux classiques, sont construits pour le triangle de Pascal connu sous le nom de s-triangle de Pascal.*

Pour illustrer la relation de récurrence longitudinale, nous présentons le triangle des coefficients bi^{2}nomiaux (c'est à dire le 2-triangle de Pascal). Voir la table 2.1.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1												
1	1	1	1										
2	1	2	3	2	1								
3	1	3	6	7	6	3	1						
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1				
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

TABLE 2.1 – Triangle des coefficients bi^{2}nomiaux $\binom{n}{k}_2$.

Remarque 2.3. *D'après les relations (2.2) et (2.8) il est facile de voir que les coefficients bi^{s}nomiaux sont des spécialisations de la fonction symétrique élémentaire généralisée $E_k^{(s)}$*
$$E_k^{(s)}(1,1,...,1) = \binom{n}{k}_s. \tag{2.12}$$

Alors d'après le théorème 2.1, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 2.1. *Pour $0 \leqslant k \leqslant sn$, soient $u = (0,0)$ et $v = (k, n-1)$ deux points, le nombre de chemins entre les point u et v avec au plus s pas dans la direction horizontale est exactement le coefficient bi^{s}nomial $\binom{n}{k}_s$.*

Proposition 2.1. *Les coefficients bi^{s}nomiaux s'expriment en termes des coefficients binomiaux comme suit :*

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s} \binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^k a^{-\sum_{r=1}^{s} r j_r}, \tag{2.13}$$

où $a = exp(\frac{2\pi i}{s+1})$.

Preuve. On pose $a = exp(\frac{2\pi i}{s+1})$, on a

$$\begin{aligned}
&(1 + x^2 + \cdots + x^s)^n \\
&= \left(\prod_{r=1}^{s}(x - a^r)\right)^n \\
&= \prod_{r=1}^{s}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(-a)^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{ns}\left(\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^{ns-k}a^{\sum_{r=1}^{s} r(n-j_r)}\right)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{ns}\left(\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_s=k}\binom{n}{j_1}\binom{n}{j_2}\cdots\binom{n}{j_s}(-1)^{k}a^{-\sum_{r=1}^{s} r j_r)}\right)x^k,
\end{aligned}$$

par identification avec la relation (2.8), on arrive au résultat. $\square$

CHAPITRE 3

FONCTION SYMÉTRIQUE MODULAIRE ET NOMBRE DE S-STIRLING MODULAIRE

Dans ce chapitre, on présente quelque définitions et propriétés de la fonction symétrique modulaire et ses interprétations combinatoires par chemin et par pavage. Enfin on présente le nombre de s-Stirling modulaire de deuxième espèce comme application de cette fonction symétrique. Tous les résultats donnés dans ce chapitre sont dues à Bazeniar et al [5] et [1–3].

3.1 Fonction symétrique modulaire

3.1.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. *Soit $s \geqslant 1$ un entier positif. Nous définissons la fonction symétrique modulaire par la formule suivante :*

$$M_k^{(s)}(n) := M_k^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_n=k \\ a_1,\cdots,a_n \equiv (0,1) mod (s+1)}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}, \tag{3.1}$$

avec $M_k^{(1)}(n) = h_k(n)$ et $M_k^{(s)}(0) = \delta_{k,0}$ où $\delta_{k,0}$ est le fonction delta de Kronecker.

Exemple 3.1. *Pour $s = n = 2$, on a*
$M_0^{(2)}(2) = 1,\ M_1^{(2)}(2) = x_1 + x_2,\ M_2^{(2)}(2) = x_1x_2,\ M_3^{(2)}(2) = x_1^3 + x_2^3.$

A partir de la définition de $M_k^{(s)}(n)$, nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Soient s et n des entiers positifs. Alors,*

$$\sum_{k\geqslant 0} M_k^{(s)}(n)t^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i t}{1-(x_i t)^{s+1}}. \tag{3.2}$$

Preuve. De la relation (3.1), on a

$$M_k^{(s)}(n) := M_k^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_n=k \\ a_1,\cdots,a_n\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} M_k^{(s)}(n)t^k &= \sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_n=k \\ a_1,\cdots,a_n\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{a_1+a_2+\cdots+a_n=k \\ a_1,\cdots,a_n\equiv(0,1)mod(s+1)}} (x_1 t)^{a_1}\cdots (x_n t)^{a_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sum_{a_i\equiv(0,1)mod(s+1)} (x_i t)^{a_i} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j\geqslant 0} (x_i t)^{(s+1)j} + \sum_{j\geqslant 0} (x_i t)^{(s+1)j+1} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1+x_i t) \sum_{j\geq 0} (x_i t)^{(s+1)j} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i t}{1-(x_i t)^{s+1}}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

La fonction symétrique modulaire satisfie les relations de récurrence suivantes.

Théorème 3.2. *Soient s et n des entiers positifs. Alors,*

1.

$$M_k^{(s)}(n) = \sum_{\substack{0\leq j\leq k \\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_{k-j}^{(s)}(n-1). \tag{3.3}$$

2.

$$M_k^{(s)}(n) = x_n^{s+1} M_{k-s-1}^{(s)}(n) + x_n M_{k-1}^{(s)}(n-1) + M_k^{(s)}(n-1) \tag{3.4}$$

pour $k \geqslant s+1$.

P*reuve.* 1. A partir de (3.1) et le théorème 3.1, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0} M_k^{(s)}(n)t^k &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_it}{1-(x_it)^{s+1}} = \prod_{i=1}^{n}\left(1+x_it)\sum_{j\geqslant 0}(x_it)^{(s+1)j}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\geqslant 0}(x_it)^{(s+1)j} + \sum_{j\geqslant 0}(x_it)^{(s+1)j+1}\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l\equiv\{0,1\}mod(s+1)} (x_it)^l\right)\\
&= \sum_{j\equiv\{0,1\}mod(s+1)} (x_nt)^j \prod_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{l\equiv\{0,1\}mod(s+1)} (x_it)^l\right)\\
&= \sum_{j\equiv\{0,1\}mod(s+1)} (x_nt)^j \sum_{l=0}^{\infty} M_l^{(s)}(n-1)t^l\\
&= \sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{\substack{j+l=k\\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_l^{(s)}(n-1)\\
&= \sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{\substack{0\leq j\leq k\\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_{k-j}^{(s)}(n-1).
\end{aligned}$$

En comparant le k-ième coefficient des deux cotés, nous obtenons la relation (3.3).

2. On utilise la relation (3.3), on trouve

$$\begin{aligned}
M_k^{(s)}(n) &= \sum_{\substack{0\leq j\leq k\\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_{k-j}^{(s)}(n-1)\\
&= x_n^0 M_{k-0}^{(s)}(n-1) + x_n^1 M_{k-1}^{(s)}(n-1) + \sum_{\substack{2\leq j\leq k\\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_{k-j}^{(s)}(n-1)\\
&= M_k^{(s)}(n-1) + x_n M_{k-1}^{(s)}(n-1) + \sum_{\substack{s+1\leq j\leq k\\ j\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^j M_{k-j}^{(s)}(n-1).
\end{aligned}$$

On pose $j' = j-s-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
M_k^{(s)}(n) &= M_k^{(s)}(n-1) + x_n M_{k-1}^{(s)}(n-1) + \sum_{\substack{0\leq j'\leq k-s-1\\ j'\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^{j'+s+1} M_{k-j'-s-1}^{(s)}(n-1)\\
&= M_k^{(s)}(n-1) + x_n M_{k-1}^{(s)}(n-1) + x_n^{s+1} \sum_{\substack{0\leq j'\leq k-s-1\\ j'\equiv(0,1)mod(s+1)}} x_n^{j'} M_{k-s-1-j'}^{(s)}(n-1)\\
&= M_k^{(s)}(n-1) + x_n M_{k-1}^{(s)}(n-1) + x_n^{s+1} M_{k-s-1}^{(s)}(n).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Remarque 3.1. *Prenant $s = 1$ dans la relation (3.3), nous avons l'égalité*

$$h_k(n) = \sum_{j=0}^{k} x_n^j h_{k-j}(n-1).$$

On peut exprimer la relation entre la fonction symétrique modulaire et la fonction symétrique élémentaire généralisée comme suit.

Théorème 3.3. *Si s est impair. Alors pour tous entiers positifs n et k, l'identité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l E_l^{(s)}(n).M_{k-l}^{(s)}(n) = 0.$$

Preuve. Comme s est impair, on a

$$\sum_{j\geqslant 0} M_j^{(s)}(n)t^j = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-(x_it)^{s+1}}{1+x_it} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-(-x_it)^{s+1}}{1-(-x_it)}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{sn} E_l^{(s)}(n)^l &= \prod_{i=0}^{n}(1 + x_it + \cdots + (x_it)^s)\\ &= \prod_{i=0}^{n} \frac{1-(x_it)^{s+1}}{1-x_it}.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\sum_{l=0}^{ns} E_l^{(s)}(n)(-t)^l = \prod_{i=0}^{n} \frac{1-(-x_it)^{s+1}}{1-(-x_it)}.$$

Alors,

$$\sum_{l=0}^{ns} E_l^{(s)}(n)(-t)^l \sum_{j\geqslant 0} M_j^{(s)}(n)t^j = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{ns}\sum_{j\geqslant 0}(-1)^l E_l^{(s)}(n)M_j^{(s)}(n)t^{l+j} = 1.$$

On pose $k = l + j$, on obtient

$$\sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l E_l^{(s)}(n) M_{k-l}^{(s)}(n) = 1.$$

Comparant le coefficient de t^k, pour $k \geq 1$, des deux cotés de la dernière équation on obtient

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l E_l^{(s)}(n).M_{k-l}^{(s)}(n) = 0.$$

□

Nous pouvons exprimer la fonction symétrique modulaire $M_k^{(s)}$ en termes de convolutions impliquant les fonctions symétriques complètes et élémentaires.

Théorème 3.4. *Soient k, n et s des entiers positifs et soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ variables indépendantes. Alors,*

$$M_k^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/s+1 \rfloor} h_j(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) e_{k-(s+1)j}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Preuve. Selon l'équation (3.2), nous avons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^k &= \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - (x_i t)^{(s+1)}} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i t) \right) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) t^{(s+1)j} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} e_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^j \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor k/s+1 \rfloor} h_j(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) e_{k-(s+1)j}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \right) t^k.
\end{aligned}$$

Comme désiré. □

Inspirés par le théorème 3.4, nous proposons la généralisation suivante.

Théorème 3.5. *Soient k, n et s trois entiers positifs et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des variables indépendantes. Alors,*

$$h_j(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) = \sum_{j=0}^{k(s+1)} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M_{k(s+1)-j}^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, n_n)$$

et

$$e_k(x_1, x_2, \cdots, n_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/s+1 \rfloor} (-1)^j e_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M^{(s)}_{k-j(s+1)}(x_1, x_2, \cdots, n_n)$$

si k n'est pas congru à 0 modulo $s+1$. Alors

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M^{(s)}_{k-j}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

Preuve. La relation (3.2) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i t} \sum_{k=0}^{\infty} M^{(s)}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^k = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-(x_i t)^{(s+1)}}$$

ou

$$\prod_{i=1}^{n} (1-(x_i t)^{(s+1)}) \sum_{k=0}^{\infty} M^{(s)}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^k = \prod_{i=1}^{n} (1+(x_i t)).$$

Donc, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) t^{k(s+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^j \sum_{i=0}^{\infty} M^{(s)}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^i \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M^{(s)}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) t^{i+j}.
\end{aligned}$$

On pose $k = i + j$ dans le coté droite, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) t^{k(s+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M_{k-j}(x_1, x_2, \cdots, x_n).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La comparaison du coefficient de $t^{k(s+1)}$ des deux cotés nous donne

$$h_k(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \cdots, x_n^{s+1}) = \sum_{j=0}^{(s+1)k} (-1)^j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) M_{(s+1)k-j}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Alors si k n'est pas congru à 0 modulo $s+1$, le coefficient de t^k du coté droite de (3.5) est nulle, c'est à dire

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j h_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)M_{k-j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} e_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^k &\\ &=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j e_j(x_1^{s+1},x_2^{s+1},\cdots,x_n^{s+1})t^{j(s+1)}\sum_{i=0}^{\infty}M_i^{(s)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^i\\ &=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^j e_j(x_1^{s+1},x_2^{s+1},\cdots,x_n^{s+1})M_i^{(s)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^{j(s+1)+i}.\end{aligned}$$

On pose $k=j(s+1)+i$ dans le coté droite, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} e_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^k &\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}t^k\sum_{j=0}^{\lfloor k/s+1\rfloor}(-1)^j e_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)M_{k-j(s+1)}^{(s)}(x_1,x_2,\cdots,n_n).\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de t^k des deux cotés de cette équation on arrive au résultat. $\square$

Le résultat suivant nous permet d'exprimer une convolution de la fonction symétrique modulaire $M_k^{(s)}$ comme convolution impliquant les fonctions symétriques complètes et élémentaires.

Théorème 3.6. *Soient k, n et s trois entiers positifs et $x_1,x_2,\cdots,x_n$ des variables indépendantes. Alors,*

$$\sum_{j=0}^{k} e_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)h_{k-j}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{k}M_j^{(s)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)E_{k-j}^{(s)}(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}e_j(n)t^j\sum_{i=0}^{\infty}h_i(n)t^i &=\prod_{i=1}^{n}\frac{1+x_it}{1-(x_it)}\\ &=\prod_{i=1}^{n}\frac{1+x_it}{1-(x_it)^{s+1}}\times\left(\frac{1-(x_it)^{s+1}}{1-x_it}\right)\\ &=\sum_{j\geqslant 0}M_j^{(s)}(n)t^j\sum_{i\geqslant 0}E_j^{(s)}(n)t^i.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 0} e_j(n)h_i(n)t^{j+i} = \sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 0} M_j^{(s)}(n)E_i^{(s)}(n)t^{j+i}.$$

On pose $k = i + j$ dans les deux cotés, on trouve

$$\sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{j=0}^{k} e_j(n)h_{k-j}(n) = \sum_{k\geqslant 0} t^k \sum_{j=0}^{k} M_j^{(s)}(n)E_{k-j}^{(s)}(n).$$

Par identification on trouve

$$\sum_{j=0}^{k} e_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)h_{k-j}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=0}^{k} M_j^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)E_{k-j}^{(s)}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

□

3.2 Interprétations combinatoires de fonction symétrique modulaire

3.2.1 Interprétation par chemin

Le but de cette section est de présenter une interprétation combinatoire pour les fonctions symétriques modulaires à l'aide des chemins de réseau pondérés sur le plan $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Un chemin de réseau Γ dans le plan de réseau $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, avec des pas dans un ensemble donnée $S \subset \mathbb{Z}^2$, est une concaténation des pas dirigés de S, c'est-à-dire $\Gamma = s_1 s_2 ... s_l$, où $s_i \in S$, pour chaque $1 \leq i \leq l$. Soit $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des chemins de réseau du point $(0, 0)$ au point $(k, n-1)$, avec l'ensemble des pas $S = \{H = (1, 0), v = (0, 1)\}$, tels que les pas horizontaux sont étiquetés avec le poids x_i, où $i-1$ est le niveau de pas. Soit $\mathcal{P}_{n,k}^{(s)}$ les chemins de réseaux pondéré dans $\mathcal{P}_{n,k}$ tel que le nombre des pas horizontaux à chaque niveau soit congruent à 0 ou 1 modulo $s+1$. Étant donné un chemin pondéré Γ dans $\mathcal{P}_{n,k}^{(s)}$, nous désignons par $w(\Gamma)$ le poids associé au chemin Γ. Par exemple, dans la figure 3.1, nous montrons un chemin de réseau dans $\mathcal{P}_{6,12}^{(2)}$ du poids $x_1^4 x_3 x_4^6 x_6$.

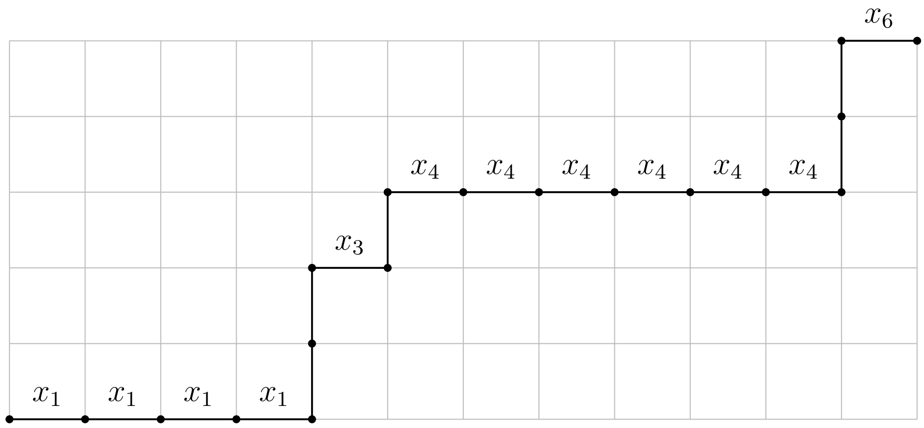

FIGURE 3.1 – Chemin de réseau pondéré dans $\mathcal{P}^{(2)}_{6,12}$.

A partir de la relation (3.1), on obtient l'interprétation combinatoire suivante.

Théorème 3.7. *Soient k,n et s des entiers positifs et soit des $x_1, x_2, ..., x_n$ variables indépendantes. Alors,*

$$M^{(s)}_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{P}^{(s)}_{n,k}} w(\Gamma).$$

La figure 3.2 montre l'interprétation par des chemins de réseaux pondérés pour $M^{(3)}_4(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

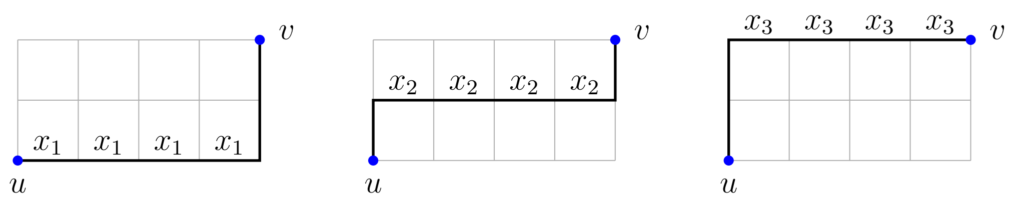

FIGURE 3.2 – Les trois chemins associés à $M^{(3)}_4(x_1, x_2, x_3)$.

3.2.2 Interprétation par pavage

Dans cette section, nous utilisons des pavages pondérés pour donner une interprétation combinatoire supplémentaire de la fonction symétrique modulaire. Nous définissons un pavage pondéré comme un pavage d'un ruban (ou tableau) de longueur n (ruban de taille n) avec des carrés grises et noires, de sorte que chaque carré noire reçoit le poids x_{m+1}, où m est égal au nombre de carrés gris à gauche de ce carré noir dans le pavage. Soit $\mathcal{T}^{(s)}_{n,k}$ l'ensemble des pavages pondérés d'un ruban de taille $(n + k - 1)$ en utilisant exactement

k carrés noires et $n-1$ carrés grises, de sorte que le nombre successifs de carrés noires sont congruent à 0 ou 1 modulo $s+1$. Pour un pavage T, nous désignons $w(T)$ le poids de T. Par exemple, dans la figure 3.3 nous montons un pavage pondéré dans $\mathcal{T}^{(2)}_{6,12}$ de poids $x_1^4x_3x_4^6x_6$.

Il existe une bijection entre les ensembles $\mathcal{P}^{(s)}_{n,k}$ et $\mathcal{T}^{(s)}_{n,k}$. En effet, chaque pas verticale V est remplacé par un carré gris et chaque pas horizontale est remplacée par un carré noir.

FIGURE 3.3 – Un pavage pondéré dans $\mathcal{T}^{(2)}_{6,12}$.

Comme la bijection entre les chemins de réseau et les pavages préserve le poids, nous obtenons la résultat suivant.

Théorème 3.8. *Soient k, n et s des entiers positifs et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ variables indépendantes. Alors,*

$$M^{(s)}_k = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}^{(s)}_{n,k}} w(T).$$

La figure 3.4 montre l'interprétation du pavage pour $M^{(3)}_4(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

FIGURE 3.4 – Les trois pavages associés à $M^{(3)}_4(x_1, x_2, x_3)$.

3.3 Application

3.3.1 Nombre de s- Stirling modulaire de deuxième espèce

Dans cette partie, Nous introduisons un nouveau type des nombres de Stirling comme appplication de la fonction symétrique modulaire comme suit.

Définition 3.2. *Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tous k tels que $0 \leq k \leq n$, les nombres de s-Stirling modulaire de deuxième espèce, notés $\left\{ {n \atop k} \right\}^{(s)}$, sont définis par l'expression suivante :*

$$\left\{ {n \atop k} \right\}^{(s)} = M^{(s)}_{n-k}(1, 2, \cdots, k). \tag{3.6}$$

Il est clair que pour $s = 1$, nous retrouvons les nombres de Stirling de deuxième espèce, c'est-à-dire $\left\{{n \atop k}\right\}^{(1)} = \left\{{n \atop k}\right\}$.

A partir du théorème 3.2, nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\left\{{n \atop k}\right\}^{(s)} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}^{(s)} + k\left\{{n-2 \atop k-1}\right\}^{(s)} + k^{s+1}\left\{{n-s-1 \atop k}\right\}^{(s)} \tag{3.7}$$

avec les conditions initiales $\left\{{n \atop 0}\right\}^{(s)} = \delta_{0,n}$ et $\left\{{0 \atop k}\right\}^{(s)} = \delta_{k,0}$.

De plus, d'après la relation (3.2) nous avons le fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n \geqslant k} \left\{{n \atop k}\right\}^{(s)} x^{n-k} = \prod_{r=1}^{k} \frac{1 + rx^s}{1 - (rx)^{s+1}}.$$

On sait que le nombre de Stirling de deuxième espèce vérifie la relation suivante :

$$\left\{{n+k \atop n}\right\} = h_k(1, \cdots, n) = \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_n} 1^{a_1} \cdots n^{a_n} \tag{3.8}$$

L'équation (3.8) peut être interprétée en considérant l'algorithme suivant :

Algorithme Interprétation de (3.8)

1. Commencez par la partition de $[1]$ donnée par $\{1\}$.
2. Prenez tous les entiers de 2 à $1 + a_1$ et les placez dans le bloc de 1, de sorte que vous obtenez $\{1, 2, \cdots, 1 + a_1\}$.
3. Ensuite, vous placez $2 + a_1$ dans un nouveau bloc et pour chaque entier entre $3 + a_1$ et $3 + a_1 + a_2$ vous avez 2 options, soit vous placez ce nombre dans le premier bloc, soit dans le deuxième. Vous placez $3 + a_1 + a_2$ dans un nouveau bloc et vous avez maintenant 3 options.
4. Vous continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez placé $n + k$ éléments.

Exemple 3.2. *Pour $n = 3$ et $k = 5$, le terme $1^2 2^1 3^2$ correspond à une partition qui ressemble à $\{1, 2, 3, *\}$, $\{4, *\}$, $\{6, *\}$, où 5 peut aller dans l'un ou l'autre des 2 premiers blocs et 7,8 peuvent aller dans n'importe quel bloc (il y en a 3). Ce qui donne un total de $2^1.3^2$ options.*

On remarque alors que les entiers a_i ont une relation directe avec les éléments minimaux dans chacun des blocs d'une partition. Pour s'en convaincre, considérons la construction suivante :

Définition 3.3. *Soit $\Pi(n, k)$ l'ensemble des partition de $[n]$ ayant k blocs. Soit $\pi \in \Pi(n, k)$ représenté par $\pi = B_1/B_2/\ldots/B_k$, où B_i désigne le i-ème bloc avec $min(B_1) < min(B_2) < \ldots < min(B_k)$. Appelons $m_i = min(B_i)$ et définissons le vecteur des différences consécutives par*
$d(\pi) := (d_1, \ldots, d_k) = (m_2 - m_1 - 1, m_3 - m_2 - 1, \ldots, m_k - m_{k-1} - 1, n - m_k)$.

Remarque 3.2. *Dans l'exemple 3.2, on remarque que d_i correspond à a_i car il s'agit exactement du nombre d'éléments que nous devons placer dans i blocs et qu'il y a donc un total de i^{d_i} façons de le procéder. Remarquez en outre que, puisque $m_i = 1$, nous avons $d_1 + d_2 + \cdots + d_k{=}n - k$. Si nous imposons les condition de modularité sur les d_i, nous obtenons la fonction symétrique modulaire définie par la relation (3.1).*

Dans le théorème 3.2 nous donnons une interprétation combinatoire pour le nombre s-Stirling modulaire.

Théorème 3.9. *Le nombre de partitions d'ensemble π dans $\Pi(n, k)$, telles que les éléments du vecteur $d(\pi)$ satisfont $d_i \equiv 0,\ 1(mod\ s + 1)$ pour chaque $1 \leq i \leq k$ est donné par le nombre de s-Stirling modulaire, notés $\left\{ {n \atop k} \right\}^{(s)}$.*

Preuve. En imposant les condition de modularité sur le vecteur des différences consécutives donné ci-dessus et en appliquant l'algorithme page 41 le théorème s'ensuit. □

Exemple 3.3. *Pour $n = 5$ et $k = 2$ on a*

$$\left\{ {5 \atop 2} \right\}^{(2)} = 9$$

correspondant aux partitions d'ensemble

$$1234/5, 1345/2, 134/25, 135/24, 13/245$$

$$145/23, 14/235, 15/234, 1/2345$$

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons étudie une nouvelle généralisation des fonctions symétriques classiques. Nous avons défini la fonction symétrique modulaire, notée $M_k^{(s)}$, et montré sa relation avec les fonctions symétriques élémentaires et complètes, et leurs généralisations $E_k^{(s)}$ et $H_k^{(s)}$. Nous avons exploré différentes interprétations combinatoires de la fonction symétrique modulaire, notamment à travers les concepts des chemins et de pavage. Enfin, nous avons présenté les nombres de s-Stirling modulaires de deuxième espèce en tant qu'application de la fonction symétrique modulaire, et fourni leur interprétation combinatoire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ahmia and M. Merca, *A generalization of complete and elementary symmetric functions*, arxiv.2005.01447,1–24 (2020).

[2] A. Bazeniar, M. Ahmia, and S. Amrouche, *Generalized Stirling numbers of the first kind and symmetric functions*. Submitted.

[3] A. Bazeniar, M. Ahmia, and H. Belbachir, *Connection between bi^{s}nomial coefficients with their analogs and symmetric functions*, Turk J Math. **42**, 807–818.(2018).

[4] M. Benmezai. *Le q-analogue des suite de Fibounacci et de Lucas*, Thése de doctorat, Université d'Oran, Faculté des science exactes et appliquées (2016).

[5] A. Bazeniar, M. Ahmia, J. L. Ramírez, et D. Villamizar, *New modular symmetric function and its applications : Modular s-Stirling numbers*. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, **45**(3), 1093-1109 (2022).

[6] H. Belbachir, O. Igueroufa, *Congruence properties for bi^{s}nomial coefficients and like extended Ram and Kummer theorems under suitable hypothesi*, Mediterr. J. Math. **17**(36), (2020).

[7] F. Bergeron. *Introduction à la combinatoire Algébrique*, Université du Québec à Montréal (2015).

[8] I. E. Bousbaa. *Combinatoire de suite de Stirling généralise*, Thése de doctorat, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, Laboratoire RECITS (2017).

[9] M.J. Erickson. *Introduction to Combinatorics*, Department of Mathematics Truman State University Kirksville, MO.

[10] D. Foata et H. Guo-Niu. *Principes de combinatoires classique*, Cours et exercices corrigés. Univ Louis Pasteur. Strasbourg Département de mathématique (2008)

[11] H. W. Gould. *Combiatorial identities for Stirling numbres*, University of pennsylvania, USA (2015).

[12] I. G. Macadounald. *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press, oxford (1979).

[13] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Teubner, (1906).

[14] J. Stirling, *Methodus differentialis*, london, (1730). English translation : The Differential Method, (1749).