République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité Mathématiques.

Option Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

Thème

Sur le comportement des solutions de certains modèles de systèmes d'équations aux différences

Par :

Ilham Benyahia

Devant le jury

Présidente	I. Dekkar	M.C.B	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Encadreur	N. Touafek	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel
Examinatrice	M. Kemiha	M.A.A	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Promotion 2022/2023

Remerciements

Tout d'abord et avant tout, je remercie $\mathcal{ALLAH}$ qui m'a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et gratitude à mon encadreur Mr. Touafek Nouressadat, professeur à l'université Mohamed Seddik Ben Yahia-Jijel pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.
Mme Imane Dekkar, qui me fait l'honneur de présider ce jury.
Mme Mounira Kemiha pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie aussi tous les enseignants du département de mathématiques, en particulier du spécialité Mathématiques Fondamentales et Discrètes.

Je tiens à remercier tous ceux qui se sont impliqués dans ce travail, directement ou indirectement, en particuller Mme Hamida Hamioud.

Enfin, je tiens à remercier ma famille. Elle a toujours cru en moi. Elle m'a soutenu au fil des ans. Ce soutien indéfectible est l'élément le plus précieux à mes yeux.

♡ *Dédicace* ♡

Du profond du mon cœur, je dédie ce modeste travail :

À la personne la plus précieuse et la plus chère, ma mère Zahra je t'aime.

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, à toi mon père Mouloud je t'aime.

À la lumière de ma vie, la source de mes efforts et mon bonheur, ma grande sœur Wissam et ma princesse Alaa sadjida.

À tous mes très chers frères Nasreddine, Abderaouf et Mouslim.

À mes amies proches Hafida, Wafa, Kenza et Faiza, elles n'ont cessé de consentir pour moi, par leur encouragement et leur profonde affection.

À tous les membres de la famille Benyahia et Hantit.

À tous ceux qui ont une place dans mon cœur.

À tout qui m'aiment et que j'aime.

♡ *Ilham* ♡

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce mémoire est une contribution au domaine des équations aux différences. Ce type d'équations est souvent utilisé pour l'étude des phénomènes discrets, mais aussi dans la discrétisation des problèmes gouvernés par des dérivées dans le cas continue et dont la résolution explicite est quasi-impossible. Notons que beaucoup de chercheurs ont travaillé dans ce domaine, voir par exemples les références suivantes [1], [3, 4, 5, 6], [10], [13, 14, 15, 16].

Dans notre travail, on s'intéresse à des systèmes de trois équations aux différences de type rationnal d'ordre deux. Le choix de ces systèmes est motivé par les travaux réalisés dans les références [2], [9], [11], [12] et [17]. Nos systèmes peuvent être regardés comme étant des extensions de ceux étudiés dans [2], [9], [10], [17], cela explique que nous suivons pratiquement les mêmes techniques que dans ces références.

Le mémoire se compose d'une introduction, trois chapitres, une conclusion et se termine par une liste de références.
Le premier chapitre est réservé aux notions et résultats connus nécessaires pour la réalisation de ce travail.
Dans le deuxième chapitre, on étudiera la stabilité des points d'équilibre du système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{a_1 x_n + b_1 x_{n-1}}{\alpha_1 + y_n^{p_1} y_{n-1}^{q_1}}, \quad y_{n+1} = \frac{a_2 y_n + b_2 y_{n-1}}{\alpha_2 + z_n^{p_2} z_{n-1}^{q_2}}, \quad z_{n+1} = \frac{a_3 z_n + b_3 z_{n-1}}{\alpha_3 + x_n^{p_3} x_{n-1}^{q_3}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0 et les paramètres a_i, b_i, α_i, $i = 1, 2, 3$, sont des nombres réels positifs, $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2, 3$.

La motivation principale pour l'étude de ce système, est le système

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{\alpha_1 + y_n y_{n-1}}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{\alpha_2 + x_n x_{n-1}}, \ n \in \mathbb{N},$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 et les paramètres α_1, α_2 sont des nombres réels positifs, étudié dans [17] et le système

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{\alpha_1 + y_n^p y_{n-1}^q}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n + y_{n-1}}{\alpha_2 + x_n^p x_{n-1}^q}, \ n \in \mathbb{N},$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 et les paramètres α_1, α_2 sont des nombres réels positifs, p, $q \in \mathbb{N}^*$, étudié dans [2].
Enfin dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la résolution explicite du système d'équations aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \alpha, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{z_n - \alpha} + \alpha, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{x_n - \alpha} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N},$$

où le paramètre α et les valeurs initiales x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i = 0, 1$ sont des nombres réels non nuls. Ce système peut être regardé comme une extension tridimensionnelle du système

$$x_{n+1} = \frac{a x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \qquad y_{n+1} = \frac{b x_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N},$$

où les paramètres α, β et les valeurs initiales x_{-i}, y_{-i}, $i = 0, 1$ sont des nombres réels non nuls, déjà étudié dans [9], [11] mais avec $\beta = \alpha$ et $a = b = 1$. Notre système peut être regardé aussi comme une variante du système étudiè dans [12].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Avant d'entamer l'étude de nos systèmes, nous rappelons quelques notions et résultats connus sur les équations aux différences, pour plus de détails nous recommendons les deux références [7, 8].

1.1 Systèmes de trois équations aux différences d'ordre deux

Définition 1.1.1. *Un système de trois équations aux différences d'ordre deux et un système de la forme*

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}, z_n, z_{n-1}), \\ y_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}, z_n, z_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}, \\ z_{n+1} = h(x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}, z_n, z_{n-1}), \end{cases} \tag{1.1}$$

avec f, g, h sont des fonctions definies (continues) sur E^6 à valeurs dans E, x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, $z_{-1} \in E$, sont les valeurs initiales et E une partie de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.1. *1. Si le système* (1.1) *s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1x_n + a_2x_{n-1} + a_3y_n + a_4y_{n-1} + a_5z_n + a_6z_{n-1} + r, \\ y_{n+1} = b_1x_n + b_2x_{n-1} + b_3y_n + b_4y_{n-1} + b_5z_n + b_6z_{n-1} + s, \\ z_{n+1} = c_1x_n + c_2x_{n-1} + c_3y_n + c_4y_{n-1} + c_5z_n + c_6z_{n-1} + t, \end{cases} \tag{1.2}$$

avec r, t, s et a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, \cdots, 6$, sont des constants, alors le système est dit linéaire, et si de plus $r = t = s = 0$, le système est dit homogène.

2. Si $h \equiv g \equiv f$ et $z_{-i} = y_{-i} = x_{-i}$, $i = 0, 1$ le système (1.1) *se réduit à l'équation aux différences*

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N},$$

et ses versions linéaire et homogène s'ecrivent

$$x_{n+1} = a_1x_n + a_2x_{n-1} + r, \tag{1.3}$$

$$x_{n+1} = a_1x_n + a_2x_{n-1}. \tag{1.4}$$

Rappellons qu'une solution du système (1.1) et le triplet $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq-1}$, avec $(x_n)_{n\geq-1}$, $(y_n)_{n\geq-1}$, $(z_n)_{n\geq-1}$ sont des suites de E, telle que $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq-1}$ satisfait (1.1).

Maintenant, on donne la définition des solutions périodiques.

Définition 1.1.2. *Une solution $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq-1}$ du système* (1.1) *est dite éventuellement périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe $n_0 \geq -1$ tel que*

$$x_{n+p} = x_n, \quad y_{n+p} = y_n, \quad z_{n+p} = z_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

De plus si $n_0 = -1$, la solution est dite périodique de période p.

Le lemme suivant sera très utile pour la suite du mémoire.

Lemme 1.1.1.

1. Considérons l'équation aux différences du premier ordre (cas particulier de (1.3)*, $a_2 = 0$)*

$$x_{n+1} = a_1x_n + r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors,

$$x_n = \begin{cases} x_0 + rn, & a_1 = 1, \\ a_1^n x_0 + \left(\frac{a_1^n - 1}{a_1 - 1}\right) r, & a_1 \neq 1. \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. *Considérons l'équation aux différences de second ordre* (1.4), *alors toute solution s'écrit sous la forme :*

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad n \geq -1,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n, , \quad n \geq -1,\ \lambda_1 = \lambda_2$$

avec c_1 *et* $c_2 \in \mathbb{C}$ *sont des constantes qui peuvent être exprimées en fonction des valeurs initiales* x_{-1} *et* x_0, *et* λ_1, λ_2 *sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation* (1.4), *i.e.,*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2.$$

1.2 Stabilité d'un point d'équilibre du système (1.1)

Définition 1.2.1. *Un point* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in E^3$ *est dit point d'équilibre du système* (1.1), *s'il est solution du système*

$$\begin{cases} x = f(x, x, y, y, z, z). \\ y = g(x, x, y, y, z, z). \\ z = h((x, x, y, y, z, z). \end{cases}$$

Afin de faciliter notre étude on va écrire le système (1.1) sous une forme vectorielle, pour cela soit :

$$F(U) = (f(U), f_1(U), g(U), g_1(U), h(U), h_1(U)),$$

avec

$$U = (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2)^t \in E^6,$$

et

$$f(U) = f(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2), \qquad f_1(U) = u_1,$$
$$g(U) = g(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2), \qquad g_1(U) = v_1,$$
$$h(U) = h(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2), \qquad h_1(U) = w_1,$$

dans ce cas le système (1.1) s'écrit sous la forme vectorielle equivalente suivante :

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n = 0, 1, \cdots, \tag{1.5}$$

avec

$$X_n = (x_n, x_{n-1}, y_n, y_{n-1}, z_n, z_{n-1})^t \in E^6,$$

et

$$X_0 = (x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1}),$$

le vecteur(initial) des valeurs initiales.

Remarque 1.2.1.

1. *Les points d'équilibres du système* (1.5) *sont les solutions dans* E^6 *de l'équation*

$$\bar{X} = F(\bar{X}).$$

2. *Il résulte que* $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$*, est un point d'équilibre du système* (1.1)*, si et seulement si* $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{z})$*, est un point d'équilibre du système* (1.5)*.*

Définition 1.2.2. *Soit* $\|.\|$ *une norme quelconque sur* $\mathbb{R}^6$ *et soit* $\bar{X}$ *un point d'équilibre du système* (1.5)*.*

1. *Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *telque* $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta \Rightarrow \|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$ *pour* $n \geq 0$*, sinon le point* $\bar{X}$ *est dit instable.*
2. *Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dite asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable, et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que*

$$\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} X_n = \bar{X}.$$

3. *Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit globalement attractif, si pour tout* $X_0 \in E^k$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \bar{X}.$$

4. *Le point d'équilibre* $\bar{X}$ *est dit globalement asymptotiquement stable(globalement stable) s'il est stable et globalement attractif.*

1.3 Le système linéaire associé au système (1.5) autour d'un point d'équilibre

Supposons que F est une fonction de classe C^1 sur E^6, et soit $\bar{X}$ un point d'équilibre du système (1.5), alors on associe au système (1.5), le système linéaire suivant

$$W_{n+1} = J_F(\bar{X})W_n, \quad n = 0, 1, \cdots ,$$

avec

$$W_n = X_n - \bar{X},$$

avec $J_F(\bar{X})$ la matrice Jacobienne de la fonction F evaluée au point d'équilibre $\bar{X}$.

Théorème 1.3.1 (Stabilité par linéarisation).

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne* $J_F(\bar{X})$ *sont de modules* < 1, *alors le point d'équilibre* $\bar{X}$ *du système* (1.2) *est asymptotiquement stable.*
2. *S'il existe une valeur propre de la matrice Jacobienne* $J_F(\bar{X})$ *avec le module* > 1, *alors le point d'équilibre* $\bar{X}$ *du système* (1.2) *est instable.*

CHAPITRE 2

SUR LE COMPORTEMENT D'UN SYSTÈME TRIDIMENSIONNEL D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES DE TYPE RATIONNEL

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement des solutions du système tridimensionnel d'équations aux différences de type rationnel suivant

$$x_{n+1} = \frac{a_1 x_n + b_1 x_{n-1}}{\alpha_1 + y_n^{p_1} y_{n-1}^{q_1}}, \quad y_{n+1} = \frac{a_2 y_n + b_2 y_{n-1}}{\alpha_2 + z_n^{p_2} z_{n-1}^{q_2}}, \quad z_{n+1} = \frac{a_3 z_n + b_3 z_{n-1}}{\alpha_3 + x_n^{p_3} x_{n-1}^{q_3}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0 sont des nombres réels positifs et les paramètres a_i, b_i, α_i, $i = 1, 2, 3$, sont des nombres réels sterctement positifs, $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2, 3$.

2.1 Points d'équilibre et écriture vectorielle du système (2.1)

Il est facile de voir que les points d'équilibre du système (2.1), i.e., les solutions du système

$$\bar{x} = \frac{(a_1 + b_1)\bar{x}}{\alpha_1 + \bar{y}^{p_1+q_1}}, \qquad \bar{y} = \frac{(a_2 + b_2)\bar{y}}{\alpha_2 + \bar{z}^{p_2+q_2}}, \qquad \bar{z} = \frac{(a_3 + b_3)\bar{z}}{\alpha_3 + \bar{x}^{p_3+q_3}},$$

dans $[0,+\infty[^3$ sont $E_1=(0,0,0)$ et lorsque $a_i+b_i>\alpha_i$, $i=1,2,3$,

$$E_2=\left(\sqrt[p_3+q_3]{a_3+b_3-\alpha_3},\ \sqrt[p_1+q_1]{a_1+b_1-\alpha_1},\ \sqrt[p_2+q_2]{a_2+b_2-\alpha_2}\right).$$

Le système (2.1) peut s'écrir sous la forme vectorielle suivante

$$X_{n+1}=F(X_n),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.2}$$

avec

$$X_n=(x_n,x_{n-1},y_n,y_{n-1},z_n,z_{n-1})^t,$$

et

$$F:[0,+\infty[^6\to[0,+\infty[^6,$$

est la fonction donnée par

$$F(U)=\left(f_1(U),f_2(U),g_1(U),g_2(U),h_1(U),h_2(U)\right),$$

avec

$$U=(u_1,u_2,v_1,v_2,w_1,w_2)^t,$$

et

$$\begin{aligned}
f_1(U)&=\frac{a_1u_1+b_1u_2}{\alpha_1+v_1^{p_1}v_2^{q_1}}, &\quad g_1(U)&=\frac{a_2v_1+b_2v_2}{\alpha_2+w_1^{p_2}w_2^{q_2}}, &\quad h_1(U)&=\frac{a_3w_1+b_3w_2}{\alpha_3+u_1^{p_3}u_2^{q_3}},\\
f_2(U)&=u_1, & g_2(U)&=v_1, & h_2(U)&=w_1.
\end{aligned}$$

2.2 Stabilité du point d'équilibre E_1

Théorème 2.2.1.

1. *Supposons que $\alpha_i>a_i+b_i$, $i=1,2,3$. Alors, le point d'équilibre $E_1=(0,0,0)$ du système (2.1) est asymptotiquement stable.*
2. *Supposons que $\alpha_i<a_i+b_i$, $i=1,2,3$. Alors, le point d'équilibre $E_1=(0,0,0)$ du système (2.1) est instable.*

Preuve. Le système linéaire associé au système (2.1) autour du point d'équilibre

$$E_1=(0,0,0),$$

est donneé par

$$X_{n+1} = J_F(\bar{E_1})X_n,$$

avec $J_F(\bar{E_1})$ est la matrice Jacobienne de F évaluée au point d'équlibre $\bar{E_1} = (0,0,0,0,0,0)$. On a

$$J_F(\bar{E_1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_1}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_1}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_2}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_2}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_2}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial f_2}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_1}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_1}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_2}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_2}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_2}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial g_2}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_1}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_1}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_1}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_1}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_1}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_2}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_2}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_2}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_2}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & \frac{\partial h_2}{\partial w_2}(\bar{E_1}) \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & = \frac{a_1}{\alpha_1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & = \frac{b_1}{\alpha_1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial w_2}(\bar{E_1}) & = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & = 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial w_2}(\bar{E_1}) & = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & = \frac{a_2}{\alpha_2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & = \frac{b_2}{\alpha_2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial w_2}(\bar{E_1}) & = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v_1}(\bar{E_1}) & = 1, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v_2}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_1}(\bar{E_1}) & = 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_2}(\bar{E_1}) & = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_2}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v_1}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v_2}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial w_1}(\bar{E}_1) &= \frac{a_3}{\alpha_3}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial w_2}(\bar{E}_1) &= \frac{b_3}{\alpha_3}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial h_2}{\partial u_1}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_2}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_1}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_2}(\bar{E}_1) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_1}(\bar{E}_1) &= 1, \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_2}(\bar{E}_1) &= 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$J_F(\bar{E}_1) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha_1} & \frac{b_1}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{\alpha_2} & \frac{b_2}{\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_3}{\alpha_3} & \frac{b_3}{\alpha_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de la matrice $J_F(\bar{E}_1)$.
On a

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(J_F(\bar{E}_1) - \lambda I_6) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{a_1}{\alpha_1} - \lambda & \frac{b_1}{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_2}{\alpha_2} - \lambda & \frac{b_2}{\alpha_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_3}{\alpha_3} - \lambda & \frac{b_3}{\alpha_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \\ &= \left(\lambda^2 - \lambda\frac{a_1}{\alpha_1} - \frac{b_1}{\alpha_1}\right)\left(\lambda^2 - \lambda\frac{a_2}{\alpha_2} - \frac{b_2}{\alpha_2}\right)\left(\lambda^2 - \lambda\frac{a_3}{\alpha_3} - \frac{b_3}{\alpha_3}\right), \end{aligned}$$

donc

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{3} P_i(\lambda), \tag{2.3}$$

avec

$$P_i(\lambda) = \lambda^2 - \lambda\frac{a_i}{\alpha_i} - \frac{b_i}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous avons pour $i = 1, 2, 3$,

$$P_i(0) = -\frac{b_i}{\alpha_i}, \qquad P_i(1) = \frac{\alpha_i - a_i - b_i}{\alpha_i}, \qquad P_i(-1) = \frac{\alpha_i + a_i - b_i}{\alpha_i}.$$

Il est clair que

$$P_i(0) < 0.$$

1. Supposons que $\alpha_i > a_i + b_i$, $i = 1, 2, 3$. Alors,

$$P_i(1) > 0.$$

De plus en utilisant le fait que : $\alpha_i > a_i + b_i$, $i = 1, 2, 3$, il s'en suit que

$$\alpha_i + a_i - b_i > 2a_i > 0, \; i = 1, 2, 3,$$

donc

$$P_i(-1) > 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Donc d'après le théoèreme de la moyenne $\exists\, \lambda_{i,1} \in (0, 1)$ et $\exists\, \lambda_{i,2} \in (-1, 0)$, telsque :

$$P_i(\lambda_{i,1}) = 0, \; P_i(\lambda_{i,2}) = 0.$$

C'est-à-dire, les six racines du polynôme caractéristique (2.3) sont de module inférieur à 1, d'où le point d'équilibre $E_1 = (0, 0, 0)$ du système (2.1) est asymptotiquement stable.

2. Supposons que $\alpha_i < a_i + b_i$, $i = 1, 2, 3$. Dans ce cas

$$P_i(1) = \frac{\alpha_i - a_i - b_i}{\alpha_i} < 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

et

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P_i(\lambda) = +\infty.$$

Il résulte que $\exists\, \delta_i \in [1, +\infty[$, $i = 1, 2, 3$, telque :

$$P_i(\delta_i) = 0.$$

Comme δ_1, δ_2 et δ_3 sont de module > 1 d'aprés le Théorème 1.3.1, le point d'équilibre $E_1 = (0,0,0)$ est instable.

■

Théorème 2.2.2. *Supposons que $\alpha_i > a_i + b_i$, $i = 1,2,3$. Alors, Le point d'équilibre $E_1 = (0,0,0)$ du système (2.1) est globalement attractif.*

Preuve. On a

$$x_{n+1} \leq \frac{a_1}{\alpha_1} x_n + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{n-1}, \quad y_{n+1} \leq \frac{a_2}{\alpha_2} y_n + \frac{b_2}{\alpha_2} y_{n-1}, \quad z_{n+1} \leq \frac{a_3}{\alpha_3} z_n + \frac{b_3}{\alpha_3} z_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considérons la première inégalité, c'est-à-dire

$$x_{n+1} \leq \frac{a_1}{\alpha_1} x_n + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et soit l'équation aux différences linéaire de second ordre définie par

$$U_{n+1} = \frac{a_1}{\alpha_1} U_n + \frac{b_1}{\alpha_1} U_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

avec $U_{-1} = x_{-1}$ et $U_0 = x_0$.
Alors,

$$x_n \leq U_n, \quad n = -1, 0, \cdots$$

Montrons cette inégalité par récurrence.
Pour $n = 0$, on a

$$U_1 = \frac{a_1}{\alpha_1} U_0 + \frac{b_1}{\alpha_1} U_{-1},$$
$$U_1 = \frac{a_1}{\alpha_1} x_0 + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{-1}.$$

En utilisant le fait que

$$x_1 \leq \frac{a_1}{\alpha_1} x_0 + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{-1}.$$

Il résulte que

$$x_1 \leq U_1, \quad (car \quad \frac{a_1}{\alpha_1} x_0 + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{-1} = U_1).$$

Supposons la propriété est vraie pour $n-1$ et n et montrons pour $n+1$.

On a

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq \frac{a_1}{\alpha_1} x_n + \frac{b_1}{\alpha_1} x_{n-1}, \\ &\leq \frac{a_1}{\alpha_1} U_n + \frac{b_1}{\alpha_1} U_{n-1} = U_{n+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Soit $(U_n)_{n \geq -1}$ une solution de l'équation aux différences (2.4), alors

$$U_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n, \quad n = -1, 0, \cdots,$$

avec c_1, c_2 sont des constantes réelles qui peuvent être exprimées à l'aide de U_{-1}, U_0 et λ_1, λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation (2.4), i.e.,

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{a_1}{\alpha_1} \lambda - \frac{b_1}{\alpha_1}.$$

On a $\mid \lambda_1 \mid < 1$, $\mid \lambda_2 \mid < 1$, il s'en suit que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} U_n = 0.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $0 < x_n \leq U_n, \forall n \geq -1$. Nous déduisons que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} x_n = 0.$$

D'une manière analogue on démontre que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} y_n = \lim_{n \mapsto +\infty} z_n = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \mapsto +\infty} (x_n, y_n, z_n) = (0, 0, 0).$$

Ainsi le point d'équilibre $E_1 = (0, 0, 0)$ est globalement attractif. ■

Le Théorème suivant est une conséquence du Théorème 2.2.1 partie (1) et du Théorème 2.2.2.

Théorème 2.2.3. *Si $\alpha_i > a_i + b_i$, $i = 1, 2, 3$. Alors, le point d'équilibre $E_1 = (0, 0, 0)$ du système (2.1) est globalement stable.*

2.3 Remarques sur la stabilité du point d'équilibre E_2

Dans cette partie, on prend $a_i = b_i = p_i = q_i = 1$, $i = 1, 2, 3$.

Le système linéaire associé au système (2.1) autour du point d'équilibre

$$E_2 = \left(\sqrt{2-\alpha_3}, \sqrt{2-\alpha_1}, \sqrt{2-\alpha_2}\right),$$

est

$$X_{n+1} = J_F(\bar{E}_2)X_n,$$

avec $J_F(\bar{E}_2)$ est la matrice Jacobienne de F évaluée au point d'équilibre

$$\bar{E}_2 = \left(\sqrt{2-\alpha_3}, \sqrt{2-\alpha_3}, \sqrt{2-\alpha_1}, \sqrt{2-\alpha_1}, \sqrt{2-\alpha_2}, \sqrt{2-\alpha_2}\right).$$

On a

$$J_F(\bar{E}_2) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial f_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2) \\
\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) \\
\frac{\partial g_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial g_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2) \\
\frac{\partial h_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) \\
\frac{\partial h_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & \frac{\partial h_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2)
\end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{cases}
\frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & = \frac{1}{2}, \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & = \frac{1}{2}, \\
\frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & = \mu, \\
\frac{\partial f_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & = \mu, \\
\frac{\partial f_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & = 0, \\
\frac{\partial f_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) & = 0,
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
\frac{\partial f_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) & = 1, \\
\frac{\partial f_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) & = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) & = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) & = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) & = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2) & = 0,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) &= \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) &= \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) &= \beta, \\ \frac{\partial g_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) &= \beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial g_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) &= 1, \\ \frac{\partial g_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2) &= 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial u_1}(\bar{E}_2) &= \delta, \\ \frac{\partial h_1}{\partial u_2}(\bar{E}_2) &= \delta, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial v_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_1}{\partial w_1}(\bar{E}_2) &= \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial h_1}{\partial w_2}(\bar{E}_2) &= \frac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial h_2}{\partial u_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_1}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_2}(\bar{E}_2) &= 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_1}(\bar{E}_2) &= 1, \\ \frac{\partial h_2}{\partial w_2}(\bar{E}_2) &= 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$J_F(\bar{E}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \mu & \mu & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta & \delta & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$\mu = -\frac{\sqrt{(2-\alpha_1)(2-\alpha_3)}}{2}.$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)}}{2}.$$

$$\delta = -\frac{\sqrt{(2-\alpha_2)(2-\alpha_3)}}{2}.$$

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne. On a

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(J_F(\bar{E}_2) - \lambda I_6) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \mu & \mu & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ \delta & \delta & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^6 - \frac{3}{2}\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{1}{8}\left(11 - (\alpha_1-2)(\alpha_2-2)(\alpha_3-2)\right)\lambda^3 \\ &+ \frac{3}{8}\left(1 - (\alpha_1-2)(\alpha_2-2)(\alpha_3-2)\right)\lambda^2 - \frac{3}{8}\left(1 + (\alpha_1-2)(\alpha_2-2)(\alpha_3-2)\right)\lambda \\ &- \frac{1}{8}\left(1 + (\alpha_1-2)(\alpha_2-2)(\alpha_3-2)\right). \end{aligned}$$

⋆ Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$, alors

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \frac{3}{2}\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{115}{64}\lambda^3 + \frac{105}{64}\lambda^2 + \frac{57}{64}\lambda + \frac{19}{64}.$$

En utilisant Maple, on trouve que ce polynôme admet une racine de module 1.690536345, donc le point d'équilibre $E_2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ est instable.

⋆ Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{3}{2}$, alors

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \frac{3}{2}\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{89}{64}\lambda^3 + \frac{27}{64}\lambda^2 - \frac{21}{64}\lambda - \frac{7}{64}.$$

En utilisant Maple, on trouve que ce polynôme admet une racine de module 1.203254736, donc le point d'équilibre $E_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}\right)$ est instable.

⋆ Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{5}$, alors

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \frac{3}{2}\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{263}{125}\lambda^3 + \frac{1281}{500}\lambda^2 + \frac{453}{250}\lambda + \frac{151}{250}.$$

En utilisant Maple, on trouve que ce polynôme admet une racine de module 1.840687045, donc le point d'équilibre $E_2 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ est instable.

⋆ Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{6}{5}$, alors

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \frac{3}{2}\lambda^5 - \frac{3}{4}\lambda^4 + \frac{1439}{1000}\lambda^3 + \frac{567}{1000}\lambda^2 - \frac{183}{1000}\lambda - \frac{61}{1000}.$$

En utilisant Maple, on trouve que ce polynôme admet une racine de module 1.344617902, donc le point d'équilibre $E_2 = \left(\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ est instable.

Remarque 2.3.1. *D'aprés ce qui précede on conjecture que dans ce cas le point d'équilibre*

$$E_2 = \left(\sqrt{2-\alpha_3}, \sqrt{2-\alpha_1}, \sqrt{2-\alpha_2}\right),$$

du système (2.1) *est instable.*

CHAPITRE 3

SUR LES SOLUTIONS DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES $X_{N+1} = \frac{X_N Y_{N-1}}{Y_N - \alpha} + \alpha,\ Y_{N+1} = \frac{Y_N Z_{N-1}}{Z_N - \alpha} + \alpha,\ Z_{N+1} = \frac{Z_N X_{N-1}}{X_N - \alpha} + \alpha$

Ce chapitre est consacré à la résolution explicite du système d'équations aux différences d'ordre deux suivant

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \alpha, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{z_n - \alpha} + \alpha, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{x_n - \alpha} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

où le paramètre α est un nombre réel et les valeurs initiales $x_{-i},\ y_{-i},\ z_{-i},\ i = 0, 1$ sont des nombres réels non nuls.

3.1 La forme et la périodicité des solutions du système (3.1)

Notre but dans cette partie est de donner une forme explicite des solutions bien définies du système (3.1). En se basant sur les formules obtenues, on étudiera aussi l'existence des solutions périodiques de notre système.

Définition 3.1.1. *On dit qu'une solution du Système* (3.1) *est bien définie si*

$$(x_n - \alpha)(y_n - \alpha)(z_n - \alpha) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Le lemme suivant justifie pourquoi on doit choisir les valeurs initiales non nuls, et montre également que les solutions bien définies ne s'annulent jamais.

Lemme 3.1.1.

1. *Si l'une des valeurs initiales x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}, x_0, y_0, z_0 est nulle, alors la solution du système* (3.1) *n'est pas définie.*
2. *Toute solution bien définie du système* (3.1) *vérifie :*

$$x_n \neq 0, \quad y_n \neq 0, \quad z_n \neq 0, \quad \forall n \geq -1.$$

Preuve. 1. • Si $x_{-1} = 0$, alors

$$z_1 = \frac{z_0 x_{-1}}{x_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$

et comme

$$y_2 = \frac{y_1 z_0}{z_1 - \alpha} + \alpha,$$

donc, y_2 n'est pas définie.

• Si $x_0 = 0$, alors

$$x_1 = \frac{x_0 y_{-1}}{y_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$

et comme

$$z_2 = \frac{z_1 x_0}{x_1 - \alpha} + \alpha,$$

ainsi, z_2 n'est pas définie.

• Si $y_{-1} = 0$, alors

$$x_1 = \frac{x_0 y_{-1}}{y_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$

d'où

$$z_2 = \frac{z_1 x_0}{x_1 - \alpha} + \alpha,$$

et donc, z_2 n'est pas définie.

• Si $y_0 = 0$, alors

$$y_1 = \frac{y_0 z_{-1}}{z_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$

et comme

$$x_2 = \frac{x_1 y_0}{y_1 - \alpha} + \alpha,$$

donc, x_2 n'est pas définie.

- Si $z_{-1} = 0$, alors
$$y_1 = \frac{y_0 z_{-1}}{z_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$
d'où
$$x_2 = \frac{x_1 y_0}{y_1 - \alpha} + \alpha,$$
et donc, x_2 n'est pas définie.
- Si $z_0 = 0$, alors
$$z_1 = \frac{z_0 x_{-1}}{x_0 - \alpha} + \alpha = \alpha,$$
et comme
$$y_2 = \frac{y_1 z_0}{z_1 - \alpha} + \alpha.$$
donc, y_2 n'est pas définie.

2. - Supposons qu'il existe un $n_0 \geq 1$ telque
$$x_{n_0} = 0,$$
alors nous obtenons
$$x_{n_0+1} = \frac{x_{n_0} y_{n_0-1}}{y_{n_0} - \alpha} + \alpha = \alpha,$$
d'où
$$z_{n_0+2} = \frac{z_{n_0+1} x_{n_0}}{x_{n_0+1} - \alpha} + \alpha.$$
donc, z_{n_0+2} n'est pas définie.
- Supposons qu'il existe un $n_1 \geq 1$ telque
$$y_{n_1} = 0,$$
alors nous obtenons
$$y_{n_1+1} = \frac{y_{n_1} z_{n_1-1}}{z_{n_1} - \alpha} + \alpha = \alpha,$$
d'où
$$x_{n_1+2} = \frac{x_{n_1+1} y_{n_1}}{y_{n_1+1} - \alpha} + \alpha,$$
donc, x_{n_1+2} n'est pas définie.
- Supposons qu'il existe un $n_2 \geq 1$ telque
$$z_{n_2} = 0,$$

alors nous obtenons

$$z_{n_2+1} = \frac{z_{n_2} x_{n_2-1}}{x_{n_2} - \alpha} + \alpha = \alpha,$$

et comme

$$y_{n_2+2} = \frac{y_{n_2+1} z_{n_2}}{z_{n_2+1} - \alpha} + \alpha.$$

donc, y_{n_2+2} n'est pas définie.

■

3.1.1 Solution du système $u_{n+1} = \frac{1}{v_n}, v_{n+1} = \frac{1}{w_n}, w_{n+1} = \frac{1}{u_n}$

Le théorème suivant est consacré à la résolution du système d'équations aux différences

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{w_n}, \qquad w_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

avec $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}^*$.

Théorème 3.1.1. *Soit $(u_n, v_n, w_n)_{n\geq 0}$ une solution du système (3.2), avec $u_0 v_0 w_0 \neq 0$. On a :*

$$u_{n+6} = u_n, \quad v_{n+6} = v_n, \quad w_{n+6} = w_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

C'est-à-dire, la solution est périodique de période 6, et elle est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{aligned}
u_{6n} &= u_0, & v_{6n} &= v_0, & w_{6n} &= w_0.\\
u_{6n+1} &= u_1, & v_{6n+1} &= v_1, & w_{6n+1} &= w_1.\\
u_{6n+2} &= u_2, & v_{6n+2} &= v_2, & w_{6n+2} &= w_2.\\
u_{6n+3} &= \frac{1}{u_0}, & v_{6n+3} &= \frac{1}{v_0}, & w_{6n+3} &= \frac{1}{w_0}.\\
u_{6n+4} &= \frac{1}{u_1}, & v_{6n+4} &= \frac{1}{v_1}, & w_{6n+4} &= \frac{1}{w_1}.\\
u_{6n+5} &= \frac{1}{u_2}, & v_{6n+5} &= \frac{1}{v_2}, & w_{6n+5} &= \frac{1}{w_2}.
\end{aligned}$$

Preuve. Soit $(u_n, v_n, w_n)_{n\geq 0}$ une solution du système (3.2). On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{w_n}, \qquad w_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

donc

$$u_{n+2} = \frac{1}{v_{n+1}}, \qquad v_{n+2} = \frac{1}{w_{n+1}}, \qquad w_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

alors

$$u_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{w_n}} = w_n, \qquad v_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}} = u_n, \qquad w_{n+2} = \frac{1}{\frac{1}{v_n}} = v_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

De plus

$$u_{n+3} = w_{n+1}, \qquad v_{n+3} = u_{n+1}, \qquad w_{n+3} = v_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

d'où

$$u_{n+3} = \frac{1}{u_n}, \qquad v_{n+3} = \frac{1}{v_n}, \qquad w_{n+3} = \frac{1}{w_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Aussi

$$u_{n+4} = \frac{1}{u_{n+1}}, \qquad v_{n+4} = \frac{1}{v_{n+1}}, \qquad w_{n+4} = \frac{1}{w_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Donc de (3.2), on trouve

$$u_{n+4} = \frac{1}{\frac{1}{v_n}} = v_n, \qquad v_{n+4} = \frac{1}{\frac{1}{w_n}} = w_n, \qquad w_{n+4} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}} = u_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$u_{n+5} = v_{n+1} = \frac{1}{w_n}, \qquad v_{n+5} = w_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \qquad w_{n+5} = u_{n+1} = \frac{1}{v_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Enfin

$$u_{n+6} = \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}} = u_n, \quad v_{n+6} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{v_n}} = v_n, \quad w_{n+6} = \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{w_n}} = w_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous obtenons

$$u_{n+6} = u_n, \qquad v_{n+6} = v_n, \qquad w_{n+6} = w_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

C'est-à-dire, la solution est périodique de période 6.

Ainsi :

$$\left\{(u_n, v_n, w_n)_{n\geq 0}\right\} = \{(u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3), (u_4, v_4, w_4), (u_5, v_5, w_5), (u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3), (u_4, v_4, w_4), (u_5, v_5, w_5), \cdots\}.$$

De ce qui précède, on obtient :

$$\left\{(u_n, v_n, w_n)_{n\geq 0}\right\} = \left\{(u_0, v_0, w_0), (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), \left(\frac{1}{u_0}, \frac{1}{v_0}, \frac{1}{w_0}\right), \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{v_1}, \frac{1}{w_1}\right), \left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{w_2}\right), (u_0, v_0, w_0), \cdots\right\}.$$

Ou d'une manière équivalente :

$$\begin{aligned}
&u_{6n} = u_0, \quad u_{6n+1} = u_1, \quad u_{6n+2} = u_2, \quad u_{6n+3} = \frac{1}{u_0}, \quad u_{6n+4} = \frac{1}{u_1}, \quad u_{6n+5} = \frac{1}{u_2}.\\
&v_{6n} = v_0, \quad v_{6n+1} = v_1, \quad v_{6n+2} = v_2, \quad v_{6n+3} = \frac{1}{v_0}, \quad v_{6n+4} = \frac{1}{v_1}, \quad v_{6n+5} = \frac{1}{v_2}.\\
&w_{6n} = w_0, \quad w_{6n+1} = w_1, \quad w_{6n+2} = w_2, \quad w_{6n+3} = \frac{1}{w_0}, \quad w_{6n+4} = \frac{1}{w_1}, \quad w_{6n+5} = \frac{1}{w_2}.
\end{aligned}$$

■

3.1.2 Formules explicites de solutions du système (3.1)

Le théorème suivant décrit la forme explicite des solutions du système (3.1).

Théorème 3.1.2. *Soit* $\left\{(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}\right\}$ *une solution bien définie du système* (3.1). *Alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n.\\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha.\\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}(z_0-\alpha)}{(y_0-\alpha)z_{-1}}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n + \alpha\left(\frac{z_0+z_{-1}-\alpha}{z_{-1}}\right).\\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}} + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n + \alpha\left(\frac{x_{-1}(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)z_{-1}} + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right). \\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{6n} &= y_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n. \\
y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha. \\
y_{6n+2} &= \frac{(x_0-\alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0-\alpha)}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha\left(\frac{x_0+x_{-1}-\alpha}{x_{-1}}\right). \\
y_{6n+3} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}y_0}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)} + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha\left(\frac{y_{-1}(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{6n+4} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right). \\
y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n. \\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}z_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n + \alpha. \\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}}z_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n + \alpha\left(\frac{y_0+y_{-1}-\alpha}{y_{-1}}\right). \\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}z_0}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)} + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha\left(\frac{z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)}{y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)}z_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right). \\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}z_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

avec

$$A=y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha).$$

Preuve. On a

$$x_{n+1}=\frac{x_ny_{n-1}}{y_n-\alpha}+\alpha,\qquad y_{n+1}=\frac{y_nz_{n-1}}{z_n-\alpha}+\alpha,\qquad z_{n+1}=\frac{z_nx_{n-1}}{x_n-\alpha}+\alpha,\qquad n\in\mathbb{N},$$

alors

$$x_{n+1}-\alpha=\frac{x_ny_{n-1}}{y_n-\alpha},\qquad y_{n+1}-\alpha=\frac{y_nz_{n-1}}{z_n-\alpha},\qquad z_{n+1}-\alpha=\frac{z_nx_{n-1}}{x_n-\alpha},\qquad n\in\mathbb{N},$$

donc, le système (3.1) s'écrit comme suit

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n}=\frac{y_{n-1}}{y_n-\alpha},\qquad \frac{y_{n+1}-\alpha}{y_n}=\frac{z_{n-1}}{z_n-\alpha},\qquad \frac{z_{n+1}-\alpha}{z_n}=\frac{x_{n-1}}{x_n-\alpha},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Posons

$$u_n=\frac{x_n-\alpha}{x_{n-1}},\qquad v_n=\frac{y_n-\alpha}{y_{n-1}},\qquad w_n=\frac{z_n-\alpha}{z_{n-1}},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{3.3}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
u_{n+1}&=\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n}, & v_{n+1}&=\frac{y_{n+1}-\alpha}{y_n}, & w_{n+1}&=\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_n}, & n\in\mathbb{N}.\\
&=\frac{\frac{x_ny_{n-1}}{y_n-\alpha}+\alpha-\alpha}{x_n}, & &=\frac{\frac{y_nz_{n-1}}{z_n-\alpha}+\alpha-\alpha}{y_n}, & &=\frac{\frac{z_nx_{n-1}}{x_n-\alpha}+\alpha-\alpha}{z_n}, & n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

D'où

$$u_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{y_n-\alpha},\qquad v_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{z_n-\alpha},\qquad w_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{x_n-\alpha},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{v_n}, \qquad v_{n+1} = \frac{1}{w_n}, \qquad w_{n+1} = \frac{1}{u_n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

D'après le Théorème 3.1.1, la solution du système (3.4) est périodique de période 6 et elle est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{6n} = u_0, \quad u_{6n+1} = u_1, \quad u_{6n+2} = u_2, \quad u_{6n+3} = \frac{1}{u_0}, \quad u_{6n+4} = \frac{1}{u_1}, \quad u_{6n+5} = \frac{1}{u_2}. \tag{3.5}$$

$$v_{6n} = v_0, \quad v_{6n+1} = v_1, \quad v_{6n+2} = v_2, \quad v_{6n+3} = \frac{1}{v_0}, \quad v_{6n+4} = \frac{1}{v_1}, \quad v_{6n+5} = \frac{1}{v_2}. \tag{3.6}$$

$$w_{6n} = w_0, \quad w_{6n+1} = w_1, \quad w_{6n+2} = w_2, \quad w_{6n+3} = \frac{1}{w_0}, \quad w_{6n+4} = \frac{1}{w_1} \quad w_{6n+5} = \frac{1}{w_2}. \tag{3.7}$$

De (3.3), on aura

$$x_n = u_n x_{n-1} + \alpha. \tag{3.8}$$

$$y_n = v_n y_{n-1} + \alpha. \tag{3.9}$$

$$z_n = w_n z_{n-1} + \alpha. \tag{3.10}$$

Remplaçons n respectivement par $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$ et $6n+5$ dans (3.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
x_{6n} &= u_{6n} x_{6n-1} + \alpha. \\
x_{6n+1} &= u_{6n+1} x_{6n} + \alpha. \\
x_{6n+2} &= u_{6n+2} x_{6n+1} + \alpha. \\
x_{6n+3} &= u_{6n+3} x_{6n+2} + \alpha. \\
x_{6n+4} &= u_{6n+4} x_{6n+3} + \alpha. \\
x_{6n+5} &= u_{6n+5} x_{6n+4} + \alpha.
\end{aligned}$$

Les relations (3.5), nous donne :

$$x_{6n} = u_0 x_{6n-1} + \alpha. \tag{3.11}$$

$$x_{6n+1} = u_1 x_{6n} + \alpha. \tag{3.12}$$

$$x_{6n+2} = u_2 x_{6n+1} + \alpha. \tag{3.13}$$

$$x_{6n+3} = \frac{1}{u_0} x_{6n+2} + \alpha. \tag{3.14}$$

$$x_{6n+4} = \frac{1}{u_1} x_{6n+3} + \alpha. \tag{3.15}$$

$$x_{6n+5} = \frac{1}{u_2} x_{6n+4} + \alpha. \tag{3.16}$$

Résolvons maintenant les équations (3.11)-(3.15).

Commençons par l'équation (3.11). Pour cela, remplaçons n par $n+1$.

Ainsi, nous obtenons

$$x_{6(n+1)} = u_0 x_{6n+5} + \alpha.$$

En utilisant (3.16), on trouve

$$x_{6(n+1)} = u_0 \left(\frac{1}{u_2} x_{6n+4} + \alpha \right) + \alpha,$$
$$x_{6(n+1)} = \frac{u_0}{u_2} x_{6n+4} + \alpha \left(u_0 + 1 \right).$$

De l'équation (3.15), on obtient

$$x_{6(n+1)} = \frac{u_0}{u_2} \left(\frac{1}{u_1} x_{6n+3} + \alpha \right) + \alpha(u_0 + 1),$$
$$x_{6(n+1)} = \frac{u_0}{u_1 u_2} x_{6n+3} + \alpha \left(\frac{u_0}{u_2} + u_0 + 1 \right).$$

De (3.14), on aura

$$x_{6(n+1)} = \frac{u_0}{u_1 u_2} \left(\frac{1}{u_0} x_{6n+2} + \alpha \right) + \alpha \left(\frac{u_0}{u_2} + u_0 + 1 \right),$$
$$x_{6(n+1)} = \frac{1}{u_1 u_2} x_{6n+2} + \alpha \left(\frac{u_0}{u_1 u_2} + \frac{u_0}{u_2} + u_0 + 1 \right).$$

En utilisant (3.13), on trouve

$$
\begin{aligned}
x_{6(n+1)} &= \frac{1}{u_1u_2}\left(u_2x_{6n+1}+\alpha\right)+\alpha\left(\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right),\\
x_{6(n+1)} &= \frac{1}{u_1}x_{6n+1}+\alpha\left(\frac{1}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right).
\end{aligned}
$$

Enfin de l'équation (3.12), on obtient

$$
x_{6(n+1)} = \frac{1}{u_1}\left(u_1x_{6n}+\alpha\right)+\alpha\left(\frac{1}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right),
$$

d'où

$$
x_{6(n+1)} = x_{6n}+\alpha\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right). \tag{3.17}
$$

Posons

$$
R_n = x_{6n}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.18}
$$

Alors, l'équation (3.17) devient l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante :

$$
R_{n+1} = R_n+\alpha\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right), \qquad n\in\mathbb{N}.
$$

Du Lemme 1.1.1, on obtient

$$
R_n = R_0+\alpha\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_1u_2}+\frac{u_0}{u_2}+u_0+1\right)n.
$$

De la relation (3.18), on aura, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$
x_{6n} = x_0+\alpha\left(\frac{1+u_0+u_2+u_0u_1+u_0u_1u_2+u_1u_2}{u_1u_2}\right)n. \tag{3.19}
$$

Nous allons maintenant résoudre les équations (3.12)–(3.16).

En utilisant (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} x_{6n+1} &= u_1 x_{6n} + \alpha, \\ &= u_1 \left(x_0 + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1 + u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2}{u_1 u_2} \right) n \right) + \alpha, \\ &= u_1 x_0 + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1 + u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2}{u_2} \right) n + \alpha. \end{aligned} \tag{3.20}$$

On a,

$$x_{6n+2} = u_2 x_{6n+1} + \alpha.$$

Donc par (3.20), on aura :

$$x_{6n+2} = u_1 u_2 x_0 + \alpha \left(1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1 + u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2\right) n + \alpha \left(u_2 + 1\right). \tag{3.21}$$

On a,

$$x_{6n+3} = \frac{1}{u_0} x_{6n+2} + \alpha,$$

Par (3.21), on trouve que :

$$x_{6n+3} = \frac{u_1 u_2}{u_0} x_0 + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1 + u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2}{u_0} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2}{u_0} \right). \tag{3.22}$$

On a,

$$x_{6n+4} = \frac{1}{u_1} x_{6n+3} + \alpha,$$

En utilisant (3.22), on obtient

$$x_{6n+4} = \frac{u_2}{u_0} x_0 + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1 + u_0 u_1 u_2 + u_1 u_2}{u_0 u_1} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0 u_1}{u_0 u_1} \right). \tag{3.23}$$

On a,

$$x_{6n+5} = \frac{1}{u_2} x_{6n+4} + \alpha.$$

La formule (3.23), nous donne

$$x_{6n+5} = \frac{1}{u_0} x_0 + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0u_1 + u_0u_1u_2 + u_1u_2}{u_0u_1u_2} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + u_0 + u_2 + u_0u_1 + u_0u_1u_2}{u_0u_1u_2} \right). \tag{3.24}$$

Maintenant, on va résoudre l'équation (3.9). Remplaçons n respectivement par $6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4$ et $6n+5$ dans (3.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
y_{6n} &= v_{6n} y_{6n-1} + \alpha. \\
y_{6n+1} &= v_{6n+1} y_{6n} + \alpha. \\
y_{6n+2} &= v_{6n+2} y_{6n+1} + \alpha. \\
y_{6n+3} &= v_{6n+3} y_{6n+2} + \alpha. \\
y_{6n+4} &= v_{6n+4} y_{6n+3} + \alpha. \\
y_{6n+5} &= v_{6n+5} y_{6n+4} + \alpha.
\end{aligned}$$

Les relations (3.6), nous donne :

$$y_{6n} = v_0 y_{6n-1} + \alpha. \tag{3.25}$$
$$y_{6n+1} = v_1 y_{6n} + \alpha. \tag{3.26}$$
$$y_{6n+2} = v_2 y_{6n+1} + \alpha. \tag{3.27}$$
$$y_{6n+3} = \frac{1}{v_0} y_{6n+2} + \alpha. \tag{3.28}$$
$$y_{6n+4} = \frac{1}{v_1} y_{6n+3} + \alpha. \tag{3.29}$$
$$y_{6n+5} = \frac{1}{v_2} y_{6n+4} + \alpha. \tag{3.30}$$

Résolvons maintenant les équations (3.25)-(3.29). Commençons par l'équation (3.25). Pour cela, remplaçons n par $n+1$.
Ainsi, nous obtenons

$$y_{6(n+1)} = v_0 y_{6n+5} + \alpha.$$

En utilisant (3.30), on trouve

$$\begin{aligned} y_{6(n+1)} &= v_0 \left(\frac{1}{v_2} y_{6n+4} + \alpha \right) + \alpha, \\ y_{6(n+1)} &= \frac{v_0}{v_2} y_{6n+4} + \alpha \left(v_0 + 1 \right). \end{aligned}$$

De l'équation (3.29), on obtient

$$\begin{aligned} y_{6(n+1)} &= \frac{v_0}{v_2} \left(\frac{1}{v_1} y_{6n+3} + \alpha \right) + \alpha(v_0 + 1), \\ y_{6(n+1)} &= \frac{v_0}{v_1 v_2} y_{6n+3} + \alpha \left(\frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right). \end{aligned}$$

De (3.28), on aura

$$\begin{aligned} y_{6(n+1)} &= \frac{v_0}{v_1 v_2} \left(\frac{1}{v_0} y_{6n+2} + \alpha \right) + \alpha \left(\frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right), \\ y_{6(n+1)} &= \frac{1}{v_1 v_2} y_{6n+2} + \alpha \left(\frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.27), on trouve

$$\begin{aligned} y_{6(n+1)} &= \frac{1}{v_1 v_2} \left(v_2 y_{6n+1} + \alpha \right) + \alpha \left(\frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right), \\ y_{6(n+1)} &= \frac{1}{v_1} y_{6n+1} + \alpha \left(\frac{1}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right). \end{aligned}$$

Enfin de l'équation (3.26), on obtient

$$y_{6(n+1)} = \frac{1}{v_1} \left(v_1 y_{6n} + \alpha \right) + \alpha \left(\frac{1}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right),$$

d'où

$$y_{6(n+1)} = y_{6n} + \alpha \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right). \tag{3.31}$$

Posons

$$L_n = y_{6n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.32}$$

Alors, l'équation (3.31), devient l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante

$$L_{n+1} = L_n + \alpha \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right) n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Du Lemme 1.1.1, on obtient

$$L_n = L_0 + \alpha \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_1 v_2} + \frac{v_0}{v_2} + v_0 + 1 \right) n.$$

De la relation (3.32), on aura, pour tout$n \in \mathbb{N}$,

$$y_{6n} = y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_1 v_2} \right) n. \tag{3.33}$$

Nous allons maintenant résoudre les équations (3.26)–(3.30). En utilisant (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} y_{6n+1} &= v_1 y_{6n} + \alpha, \\ &= v_1 \left(y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_1 v_2} \right) n \right) + \alpha, \\ &= v_1 y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_2} \right) n + \alpha. \end{aligned} \tag{3.34}$$

On a,

$$y_{6n+2} = v_2 y_{6n+1} + \alpha,$$

donc par (3.34), on aura :

$$y_{6n+2} = v_1 v_2 y_0 + \alpha \left(1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2\right) n + \alpha \left(v_2 + 1\right). \tag{3.35}$$

On a,

$$y_{6n+3} = \frac{1}{v_0} y_{6n+2} + \alpha,$$

par (3.35), on trouve que :

$$y_{6n+3} = \frac{v_1 v_2}{v_0} y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_0} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2}{v_0} \right). \tag{3.36}$$

On a,

$$y_{6n+4} = \frac{1}{v_1} y_{6n+3} + \alpha,$$

en utilisant (3.36), on obtient

$$y_{6n+4} = \frac{v_2}{v_0} y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_0 v_1} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1}{v_0 v_1} \right). \tag{3.37}$$

On a,

$$y_{6n+5} = \frac{1}{v_2} y_{6n+4} + \alpha,$$

la formule (3.37), nous donne

$$y_{6n+5} = \frac{1}{v_0} y_0 + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2 + v_1 v_2}{v_0 v_1 v_2} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + v_0 + v_2 + v_0 v_1 + v_0 v_1 v_2}{v_0 v_1 v_2} \right). \tag{3.38}$$

D'une manière analogue à celle de x_n et y_n, on obtient

$$z_{6n} = z_0 + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2}{w_1 w_2} \right) n. \tag{3.39}$$

$$z_{6n+1} = w_1 z_0 + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2}{w_2} \right) n + \alpha. \tag{3.40}$$

$$z_{6n+2} = w_1 w_2 z_0 + \alpha \left(1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2\right) n + \alpha \left(w_2 + 1\right). \tag{3.41}$$

$$z_{6n+3} = \frac{w_1 w_2}{w_0} z_0 + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2}{w_0} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2}{w_0} \right). \tag{3.42}$$

$$z_{6n+4} = \frac{w_2}{w_0} z_0 + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2}{w_0 w_1} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1}{w_0 w_1} \right). \tag{3.43}$$

$$z_{6n+5} = \frac{z_0}{w_0} + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2 + w_1 w_2}{w_0 w_1 w_2} \right) n + \alpha \left(\frac{1 + w_0 + w_2 + w_0 w_1 + w_0 w_1 w_2}{w_0 w_1 w_2} \right). \tag{3.44}$$

De (3.3), on a :

$$u_0 = \frac{x_0-\alpha}{x_{-1}}, \qquad u_1 = \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}, \qquad u_2 = \frac{z_0-\alpha}{z_{-1}}.$$
$$v_0 = \frac{y_0-\alpha}{y_{-1}}, \qquad v_1 = \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}, \qquad v_2 = \frac{x_0-\alpha}{x_{-1}}.$$
$$w_0 = \frac{z_0-\alpha}{z_{-1}}, \qquad w_1 = \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}, \qquad w_2 = \frac{y_0-\alpha}{y_{-1}}.$$

Remplaçons ces quantitées dans les formules (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) (3.33), (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) et (3.44) on obtient :

$$x_{6n} = x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n.$$
$$x_{6n+1} = \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha.$$
$$x_{6n+2} = \frac{y_{-1}(z_0-\alpha)}{(y_0-\alpha)z_{-1}}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n + \alpha\left(\frac{z_0+z_{-1}-\alpha}{z_{-1}}\right).$$
$$x_{6n+3} = \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}} + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n + \alpha\left(\frac{x_{-1}(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)z_{-1}}\right).$$

$$\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)z_{-1}} + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right). \\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}x_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

$$y_{6n} = y_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n.$$
$$y_{6n+1} = \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha.$$
$$y_{6n+2} = \frac{(x_0-\alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0-\alpha)}y_0 + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha\left(\frac{x_0+x_{-1}-\alpha}{x_{-1}}\right).$$
$$y_{6n+3} = \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}y_0}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)} + \alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n + \alpha\left(\frac{y_{-1}(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)}\right).$$

$$\begin{aligned}
y_{6n+4} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)}y_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right). \\
y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}y_0+\alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n. \\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}z_0+\alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right)n+\alpha. \\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}}z_0+\alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right)n+\alpha\left(\frac{y_0+y_{-1}-\alpha}{y_{-1}}\right). \\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}z_0}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}+\alpha\left(\frac{A}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n+\alpha\left(\frac{z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)}{y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)}z_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right). \\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}z_0+\alpha\left(\frac{A}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right)n \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}$$

avec

$$A=y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha).$$

Cela termine notre démonstration. ■

3.1.3 Existence des solutions périodiques du système (3.1)

Les deux corollaires suivants donnent la forme des solutions bien définies du système (3.1), lorsque $\alpha=0$ ou $A=0$.

Corollaire 3.1.1. *Soit* $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}$ *une solution du système* (3.1).

Supposons que $\alpha = 0$, alors la solution est périodique de période 6 est prend la forme,

$$
\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0, & y_{6n} &= y_0, & z_{6n} &= z_0.\\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0}x_0, & y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0}y_0, & z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0}z_0.\\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}z_0}{y_0z_{-1}}x_0, & y_{6n+2} &= \frac{x_0z_{-1}}{x_{-1}z_0}y_0, & z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}y_0}{x_0y_{-1}}z_0.\\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}z_0}{y_0z_{-1}}, & y_{6n+3} &= \frac{x_0y_{-1}z_{-1}}{x_{-1}z_0}, & z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_0z_{-1}}{x_0y_{-1}}.\\
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}z_0}{z_{-1}}, & y_{6n+4} &= \frac{x_0y_{-1}}{x_{-1}}, & z_{6n+4} &= \frac{y_0z_{-1}}{y_{-1}},\\
x_{6n+5} &= x_{-1}, & y_{6n+5} &= y_{-1}, & z_{6n+5} &= z_{-1},
\end{aligned}
$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. C'est une conséquence directe du Théorème 3.1.2.

■

Corollaire 3.1.2. *Soit $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}$ une solution bien définie du système (3.1) avec $\alpha \neq 0$. Supposons que $A = 0$, c'est-à-dire,*

$$A = y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha) = 0.$$

Alors, la solution est éventuellement périodique de période 6, et prend la forme :

$$
\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0.\\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}x_0+\alpha.\\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}(z_0-\alpha)}{(y_0-\alpha)z_{-1}}x_0+\alpha\left(\frac{z_0+z_{-1}-\alpha}{z_{-1}}\right).\\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}+\alpha\left(\frac{x_{-1}(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)z_{-1}}\\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}\right).\\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}x_0\\
&+ \alpha\left(\frac{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{6n} &= y_0. \\
y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}y_0+\alpha. \\
y_{6n+2} &= \frac{(x_0-\alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0-\alpha)}y_0+\alpha\left(\frac{x_0+x_{-1}-\alpha}{x_{-1}}\right). \\
y_{6n+3} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}y_0}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}+\alpha\left(\frac{y_{-1}(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{6n+4} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)}y_0 \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}\right). \\
y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}y_0 \\
&+ \alpha\left(\frac{y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0+z_{-1}-\alpha)+(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0. \\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}z_0+\alpha. \\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}}z_0+\alpha\left(\frac{y_0+y_{-1}-\alpha}{y_{-1}}\right). \\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}z_0}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}+\alpha\left(\frac{z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)}{y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)}z_0 \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right). \\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}z_0 \\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

De plus si :

$$x_0+x_{-1}-\alpha=0,\quad y_0+y_{-1}-\alpha=0,\quad z_0+z_{-1}-\alpha=0,$$

alors, la solution $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}$ *est périodique de période 2 et prend la forme*

$$\left\{(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}\right\} = \left\{(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), (x_0, y_0, z_0), (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), (x_0, y_0, z_0), \cdots\right\}.$$

Preuve. En prenant $A = 0$ dans le théorème 3.1.2, on obtient

$$\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0. \\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0 - \alpha} x_0 + \alpha. \\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}(z_0 - \alpha)}{(y_0 - \alpha)z_{-1}} x_0 + \alpha \left(\frac{z_0 + z_{-1} - \alpha}{z_{-1}}\right). \\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0 - \alpha)x_0}{(x_0 - \alpha)(y_0 - \alpha)z_{-1}} + \alpha \left(\frac{x_{-1}(z_0 + z_{-1} - \alpha) + (x_0 - \alpha)z_{-1}}{(x_0 - \alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0 - \alpha)x_0}{(x_0 - \alpha)z_{-1}} \\
&+ \alpha \left(\frac{x_{-1}(y_0 - \alpha)(z_0 + z_{-1} - \alpha) + (x_0 - \alpha)z_{-1}(y_0 + y_{-1} - \alpha)}{(x_0 - \alpha)y_{-1}z_{-1}}\right). \\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0 - \alpha} x_0 \\
&+ \alpha \left(\frac{x_{-1}(y_0 - \alpha)(z_0 + z_{-1} - \alpha) + (x_0 - \alpha)z_{-1}(y_0 + y_{-1} - \alpha) + (x_0 - \alpha)y_{-1}(z_0 - \alpha)}{(x_0 - \alpha)y_{-1}(z_0 - \alpha)}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{6n} &= y_0. \\
y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0 - \alpha} y_0 + \alpha. \\
y_{6n+2} &= \frac{(x_0 - \alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0 - \alpha)} y_0 + \alpha \left(\frac{x_0 + x_{-1} - \alpha}{x_{-1}}\right). \\
y_{6n+3} &= \frac{(x_0 - \alpha)y_{-1}z_{-1}y_0}{x_{-1}(y_0 - \alpha)(z_0 - \alpha)} + \alpha \left(\frac{y_{-1}(x_0 + x_{-1} - \alpha) + x_{-1}(y_0 - \alpha)}{x_{-1}(y_0 - \alpha)}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{6n+4} &= \frac{(x_0 - \alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0 - \alpha)} y_0 \\
&+ \alpha \left(\frac{y_{-1}(z_0 - \alpha)(x_0 + x_{-1} - \alpha) + x_{-1}(y_0 - \alpha)(z_0 + z_{-1} - \alpha)}{x_{-1}(y_0 - \alpha)z_{-1}}\right). \\
y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0 - \alpha} y_0 \\
&+ \alpha \left(\frac{y_{-1}(z_0 - \alpha)(x_0 + x_{-1} - \alpha) + x_{-1}(y_0 - \alpha)(z_0 + z_{-1} - \alpha) + (x_0 - \alpha)(y_0 - \alpha)z_{-1}}{(x_0 - \alpha)(y_0 - \alpha)z_{-1}}\right).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0.\\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}z_0+\alpha.\\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}}z_0+\alpha\left(\frac{y_0+y_{-1}-\alpha}{y_{-1}}\right).\\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}z_0}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)}+\alpha\left(\frac{z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)}{y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)}z_0\\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)}{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)}\right).\\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}z_0\\
&+ \alpha\left(\frac{(x_0-\alpha)z_{-1}(y_0+y_{-1}-\alpha)+y_{-1}(z_0-\alpha)(x_0+x_{-1}-\alpha)+x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi la solution est éventuellement périodique de période 6.

Supposons maintenat que

$$x_0+x_{-1}-\alpha=0,\quad y_0+y_{-1}-\alpha=0,\quad z_0+z_{-1}-\alpha=0.$$

Alors, $A=0$, et on a

$$
\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0, & y_{6n} &= y_0.\\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}x_0+\alpha, & y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}y_0+\alpha.\\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}(z_0-\alpha)}{(y_0-\alpha)z_{-1}}x_0, & y_{6n+2} &= \frac{(x_0-\alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0-\alpha)}y_0.\\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}+\alpha, & y_{6n+3} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}y_0+\alpha.\\
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)z_{-1}}x_0, & y_{6n+4} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)}y_0.\\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}x_0+\alpha, & y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}y_0+\alpha,
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0. \\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha} z_0 + \alpha. \\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}} z_0. \\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)} z_0 + \alpha. \\
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)} z_0. \\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha} z_0 + \alpha.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$x_0 + x_{-1} - \alpha = 0, \quad y_0 + y_{-1} - \alpha = 0, \quad z_0 + z_{-1} - \alpha = 0,$$

c'est-à-dire,

$$x_0 - \alpha = -x_{-1}, \quad y_0 - \alpha = -y_{-1}, \quad z_0 - \alpha = -z_{-1},$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
x_{6n} &= x_0, & y_{6n} &= y_0,\\
x_{6n+1} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}x_0+\alpha, & y_{6n+1} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha}y_0+\alpha,\\
&= \frac{y_{-1}}{-y_{-1}}x_0+\alpha, & &= \frac{z_{-1}}{-z_{-1}}y_0+\alpha,\\
&= -x_0+\alpha, & &= -y_0+\alpha,\\
&= x_{-1}, & &= y_{-1},\\
x_{6n+2} &= \frac{y_{-1}(z_0-\alpha)}{(y_0-\alpha)z_{-1}}x_0, & y_{6n+2} &= \frac{(x_0-\alpha)z_{-1}}{x_{-1}(z_0-\alpha)}y_0,\\
&= \frac{y_{-1}(-z_{-1})}{(-y_{-1})z_{-1}}x_0, & &= \frac{(-x_{-1})z_{-1}}{x_{-1}(-z_{-1})}y_0,\\
&= x_0, & &= y_0,\\
x_{6n+3} &= \frac{x_{-1}y_{-1}(z_0-\alpha)x_0}{(x_0-\alpha)(y_0-\alpha)z_{-1}}+\alpha, & y_{6n+3} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}z_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)(z_0-\alpha)}y_0+\alpha,\\
&= \frac{x_{-1}y_{-1}(-z_{-1})x_0}{(-x_{-1})(-y_{-1})z_{-1}}+\alpha, & &= \frac{(-x_{-1})y_{-1}z_{-1}}{x_{-1}(-y_{-1})(-z_{-1})}y_0+\alpha,\\
&= -x_0+\alpha, & &= -y_0+\alpha,\\
&= x_{-1}, & &= y_{-1},\\
x_{6n+4} &= \frac{x_{-1}(z_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)z_{-1}}x_0, & y_{6n+4} &= \frac{(x_0-\alpha)y_{-1}}{x_{-1}(y_0-\alpha)}y_0,\\
&= \frac{x_{-1}(-z_{-1})}{(-x_{-1})z_{-1}}x_0, & &= \frac{(-x_{-1})y_{-1}}{x_{-1}(-y_{-1})}y_0,\\
&= x_0, & &= y_0,\\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha}x_0+\alpha, & y_{6n+5} &= \frac{y_{-1}}{y_0-\alpha}y_0+\alpha,\\
&= \frac{x_{-1}}{-x_{-1}}x_0+\alpha, & &= \frac{y_{-1}}{-y_{-1}}y_0+\alpha,\\
&= -x_0+\alpha, & &= -y_0+\alpha,\\
&= x_{-1}, & &= y_{-1},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
z_{6n} &= z_0. \\
z_{6n+1} &= \frac{x_{-1}}{x_0-\alpha} z_0 + \alpha, \\
&= \frac{x_{-1}}{-x_{-1}} z_0 + \alpha, \\
&= -z_0 + \alpha, \\
&= z_{-1}. \\
z_{6n+2} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)}{(x_0-\alpha)y_{-1}} z_0, \\
&= \frac{x_{-1}(-y_{-1})}{(-x_{-1})y_{-1}} z_0, \\
&= z_0. \\
z_{6n+3} &= \frac{x_{-1}(y_0-\alpha)z_{-1}}{(x_0-\alpha)y_{-1}(z_0-\alpha)} z_0 + \alpha, \\
&= \frac{x_{-1}(-y_{-1})z_{-1}}{(-x_{-1})y_{-1}(-z_{-1})} z_0 + \alpha, \\
&= -z_0 + \alpha, \\
&= z_{-1}. \\
z_{6n+4} &= \frac{(y_0-\alpha)z_{-1}}{y_{-1}(z_0-\alpha)} z_0, \\
&= \frac{(-y_{-1})z_{-1}}{y_{-1}(-z_{-1})} z_0, \\
&= z_0. \\
z_{6n+5} &= \frac{z_{-1}}{z_0-\alpha} z_0 + \alpha, \\
&= \frac{z_{-1}}{-z_{-1}} z_0 + \alpha, \\
&= -z_0 + \alpha, \\
&= z_{-1}.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution $(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}$ est périodique de période 2 et prend la forme

$$\left\{(x_n, y_n, z_n)_{n\geq -1}\right\} = \left\{(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), (x_0, y_0, z_0), (x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}), (x_0, y_0, z_0), \cdots\right\}.$$

$\blacksquare$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette partie, nous donnons quelques exemples numériques pour confirmer nos résultats obtenus.

Exemple 3.2.1. *Considérons les paramètres*

α	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0	z_{-1}	z_0
0	-2	$1/2$	4	-3	1	-5

Alors, puisque $\alpha = 0$ *(cas du Corollaire 3.1.1), la solution est périodique de période 6 et prend la forme suivante :*

$$\left\{(-2,4,1),\left(\frac{1}{2},-3,-5\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{5},20\right),\left(\frac{10}{3},-\frac{3}{20},-15\right),\left(-\frac{40}{3},\frac{1}{5},3\right),\left(10,-1,-\frac{3}{4}\right),\right.$$
$$\left.(-2,4,1),\left(\frac{1}{2},-3,-5\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{5},20\right),\left(\frac{10}{3},-\frac{3}{20},-15\right),\left(-\frac{40}{3},\frac{1}{5},3\right),\left(10,-1,-\frac{3}{4}\right),\cdots\right\}$$

Voir, Figure (3.1) *pour* $(x_n)_{n\geq -1}$, *Figure* (3.2) *pour* $(y_n)_{n\geq -1}$ *et Figure* (3.3) *pour* $(z_n)_{n\geq -1}$.

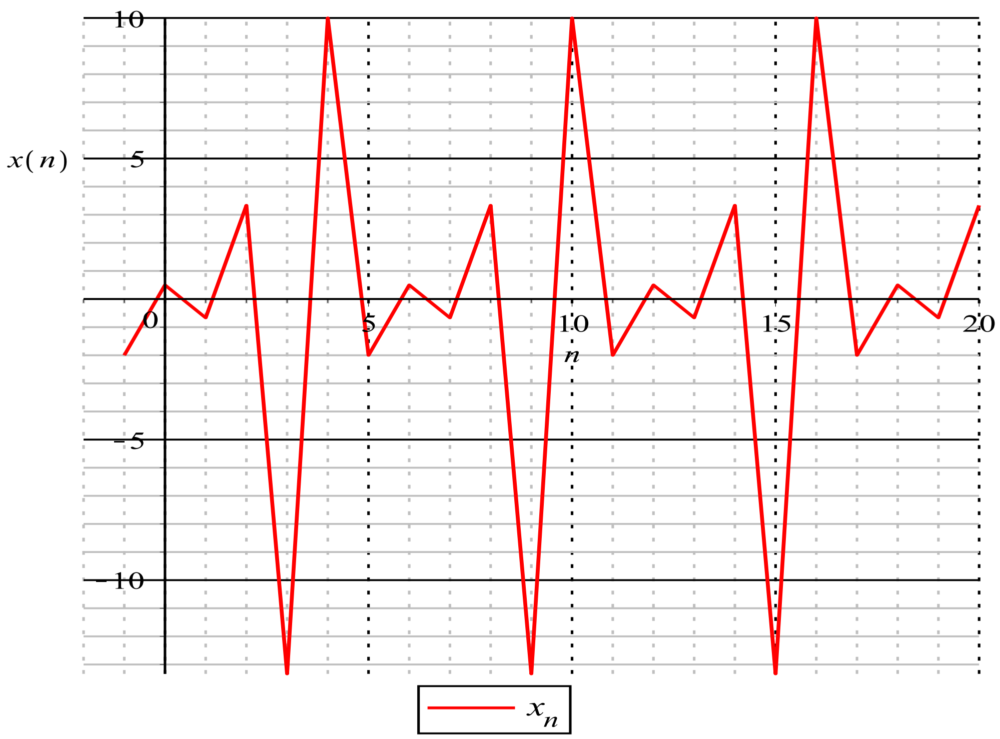

FIGURE 3.1 –

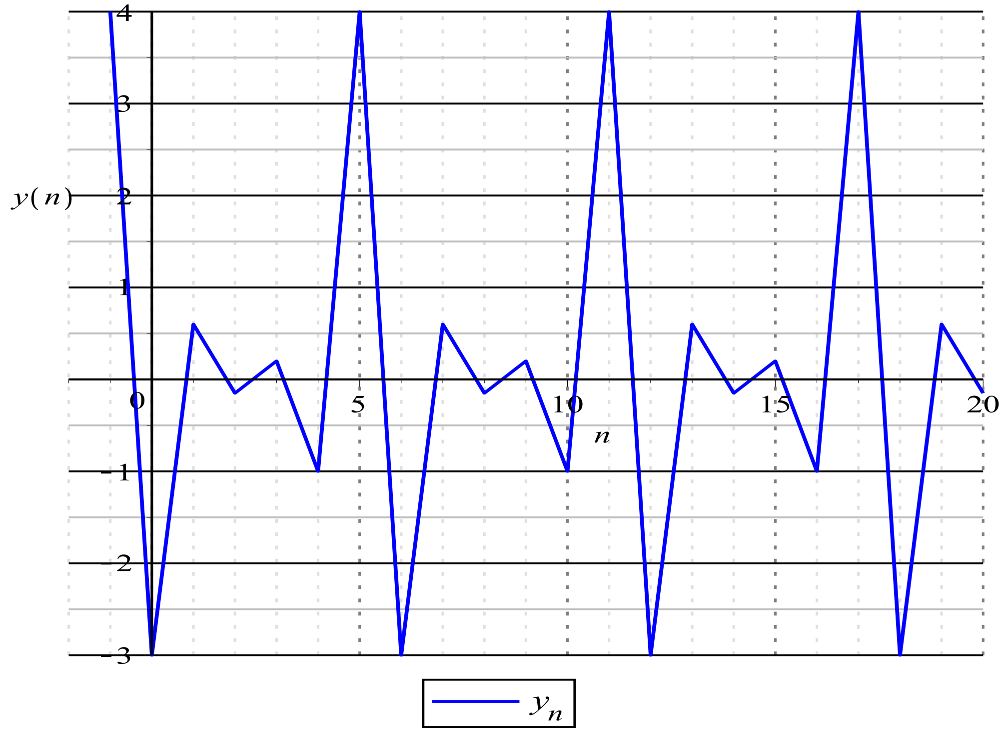

Figure 3.2 –

Figure 3.3 –

Exemple 3.2.2. *Considérons les paramètres*

α	x_{-1}	x_0	y_{-1}	y_0	z_{-1}	z_0
1	$2/3$	$1/3$	$3/2$	$-1/2$	$-3/2$	$5/2$

On a :

$$x_0 + x_{-1} = \alpha, \quad y_0 + y_{-1} = \alpha, \quad z_0 + z_{-1} = \alpha$$

est donc $A = 0$ *(cas du Corollaire 3.1.2), alors la solution est périodique de période 2 et elle est donnée par :*

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \cdots \right\}$$

Voir, Figure (3.4) *pour* $(x_n)_{n\geq -1}$, *Figure* (3.5) *pour* $(y_n)_{n\geq -1}$ *et Figure* (3.6) *pour* $(z_n)_{n\geq -1}$.

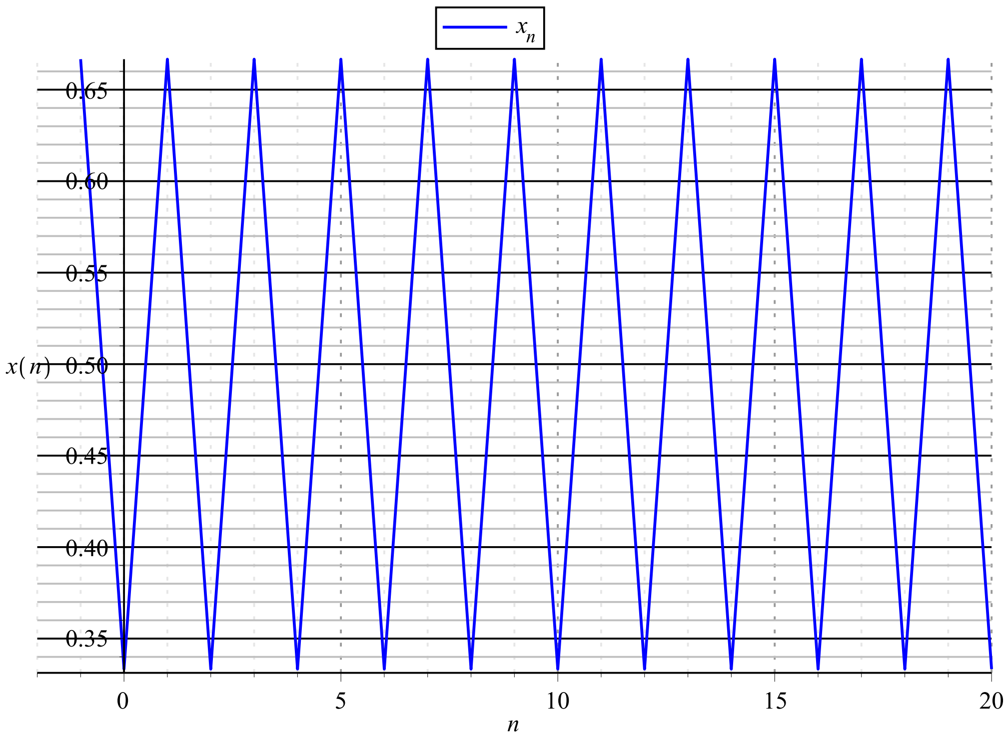

FIGURE 3.4 –

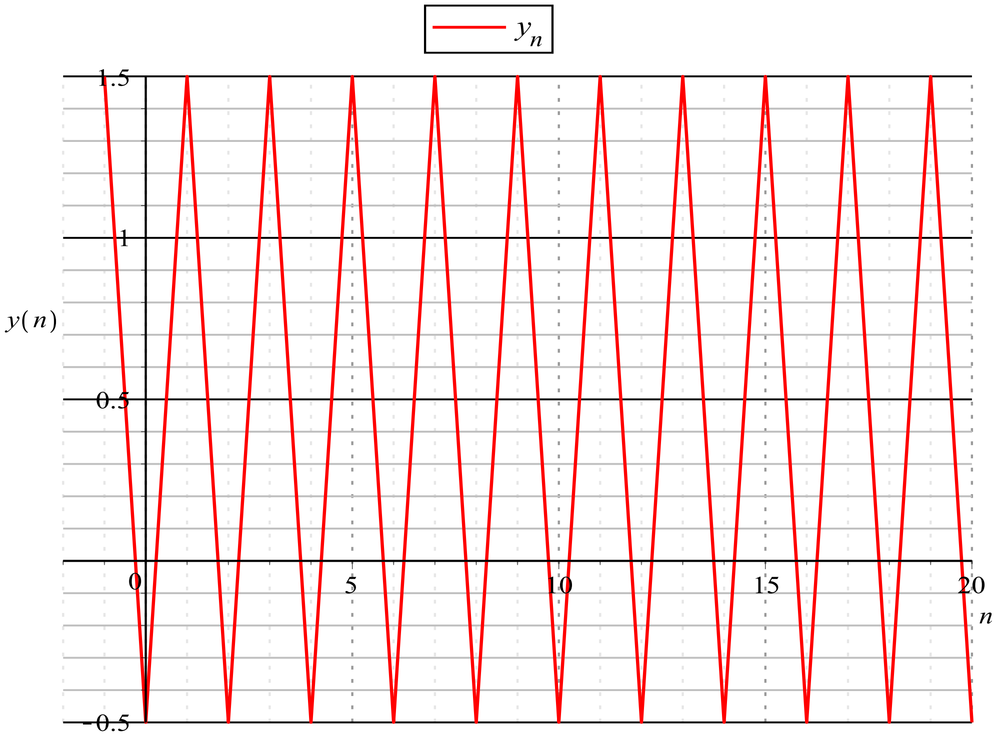

Figure 3.5 –

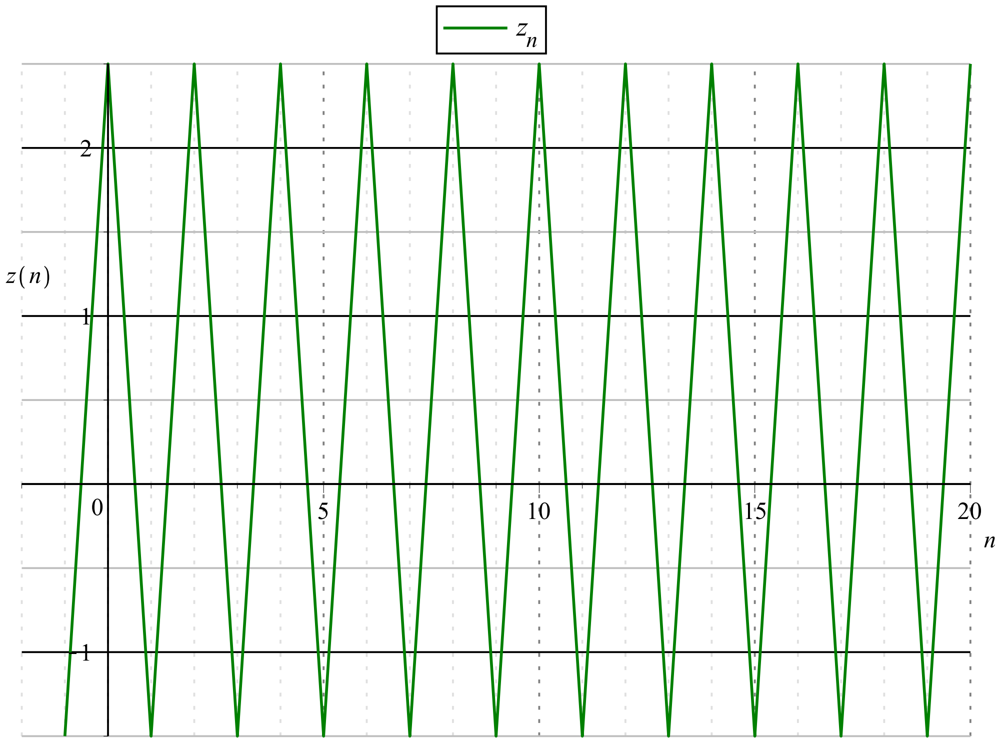

Figure 3.6 –

CONCLUSION

Dans ce mémoire on a étudié les deux systèmes d'équations aux différences d'ordre deux suivants :

$$x_{n+1} = \frac{a_1 x_n + b_1 x_{n-1}}{\alpha_1 + y_n^{p_1} y_{n-1}^{q_1}}, \quad y_{n+1} = \frac{a_2 y_n + b_2 y_{n-1}}{\alpha_2 + z_n^{p_2} z_{n-1}^{q_2}}, \quad z_{n+1} = \frac{a_3 z_n + b_3 z_{n-1}}{\alpha_3 + x_n^{p_3} x_{n-1}^{q_3}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.45)$$

où les valeurs initiales x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-1}, z_0 et les paramétres a_i, b_i, α_i, $i = 1, 2, 3$, sont des nombres réel positifs, $p_i, q_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2, 3$.

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \alpha, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{z_n - \alpha} + \alpha, \qquad z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{x_n - \alpha} + \alpha, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad (3.46)$$

où le paramètre α et les valeurs initiales x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, $i = 0, 1$ sont des nombres réels non nuls. Pour le système (3.45), on s'est intéressé à la stabilité de ces deux points d'équilibres. Pour le point $(0, 0, 0)$ des conditions suffisantes pour la stabilité globale ont été établis, cependant une conjecture sur l'instabilité du deuxième point d'équilibre
$E_2 = \left(\sqrt[p_3+q_3]{a_3 + b_3 - \alpha_3}, \ \sqrt[p_1+q_1]{a_1 + b_1 - \alpha_1}, \ \sqrt[p_2+q_2]{a_2 + b_2 - \alpha_2} \right)$ a été mise en évidence.

Pour le système (3.46), on a réussi à donner des formules explicites des solutions bien définies. De plus, on se basant sur ces formules on a donné des conditions pour l'existence des solutions périodiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Akrour, M. Kara, N. Touafek, Y. Yazlik, Solutions formulas for some general systems of difference equations, *Miskolc Math. Notes*, 22(2), 529-555, 2022.

[2] F. Belhannache, *Etude qualitative du comportement des solutions de certains équations et système d'équations aux différences,* Thèse doctorat en sciences, Université de Jijel, 2017.

[3] I. Dekkar, N. Touafek , Y. Yazlik, Global stability of a third-order nonlinear system of difference equations with period-two coefficients, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 111, 325-347, 2017.

[4] I. Dekkar, N. Touafek, Existence and global attractivity of periodic solutions in a max-type system of difference equations, *Turk. J. Math.*, 41, 412-425, 2017.

[5] I. Dekkar, N. Touafek, Q. Din, On the global dynamics of a rational difference equation with periodic coefficients, *J. Appl. Math. Comput.*, 60, 567-588, 2019.

[6] I. Dekkar, N. Touafek, Global stability of some nonlinear higher-order systems of difference equations, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, 27(2), 131-152, 2020.

[7] S. Elaydi, An introduction to difference equations, undergraduate texts in mathematics, 3rd edition, *Springer, New York, USA*, 2005.

[8] E. A. Grove, G. Ladas, Periodicities in nonlinear difference equations, *Chapman & Hall/CRC, USA*, 2005.

[9] N. Haddad, *Solutions de quelques système d'équations aux différences non linéaires,* Thèse doctorat LMD, Université de Jijel, 2017.

[10] N. Haddad, N. Touafek, J. F. T. Rabago, Solution form of a higher-order system of difference equations and dynamical behavior of its special case, *Math. Methods Appl. Sci.*, 40(10), 3599-3607, 2017.

[11] N. Haddad, N. Touafek, J. F. T. Rabago, Well-defined solutions of a system of difference equations, *J. Appl. Math. Comput.*, 56(1-2), 439-458, 2018.

[12] M. Kara, N. Touafek, Y. Yazilk, Well-defined solutions of a three dimensional system of difference equations, *GU J. Sci.*, 33(3), 767-778, 2020.

[13] N. Touafek, On some fractional systems of difference equations, *Iran. J Math Sci Inform*, 9(1), 73-86, 2014.

[14] N. Touafek, On a second order rational difference equation, *Hacet J. Math. Stat.*, 41, 867-874, 2012.

[15] Y. Yazlik, M. Kara, On a solvable system of difference equations of higher-order with period two coefficients, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68, 1675-1693, 2019.

[16] Y. Yazlik, D. T. Tollu, N. Taskara, On the solutions of a three-dimensional system of difference equations, *Kuwait. J. of Sci.*, 43(1), 95-111, 2016.

[17] Q. Zhang ,W. Zhang, *On the sytem of nonlinear rationnal difference equaions,* Int. J. Math. Comp. Phy. Elec. Comp. Eng. 8(4), 702-705, 2014.