République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exacte et Informatique
Département de Mathématique

№ d'ordre : ....
№ de séries : ....

Mémoire de fin d'études

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques.

Option : Mathématiques fondamentales et discrètes

Thème

Sur le calcul aux différences

Présenté par :
*** Faiza Medjider ***

Devant le jury :

Président	N. Touafek	Prof.	Université de Jijel
Encadreur	F. Belhannache	M.C.A	Université de Jijel
Co-Encadreur	A. Bouchair	Prof.	Université de jijel
Examinateur	M. Ahmia	M.C.A	Université de Jijel

Promotion **2022/2023**

REMERCIEMENTS

Je tiens, d'abord à remercier ***Allah*** *le tout puissant miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à ma directrice de mémoire ***Mme. Farida Belhannache****, maître de conférences à l'université de Jijel, de m'avoir proposé le sujet de mon mémoire, de ses remarques et suggestions.*

Je remercie ***Mr. Abderrahmane Bouchair****, professeur à l'université de Jijel, de m'avoir fait l'honneur d'être co-encadreur de mon mémoire.*

Mes vifs remerciements vont également à ***Mr. Nouressadat Touafek****, professeur à l'université de Jijel et* ***Mr. Moussa Ahmia****, maître de conférences à l'université de Jijel de m'avoir fait l'honneur d'être membres du jury de mon mémoire.*

J'adresse un grand merci à toute ma famille qui a toujours été présente lorsque j'en ai eu besoin, en particulier à ***mon père et ma mère****.*

Enfin, je remercie toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Merci...Merci...Merci

Faiza

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire connait au dernières années une grande popularité parmi les chercheurs en sciences fondamentales et appliquées. Il étend les opérations de dérivation et d'intégration aux ordres non entiers. Au début, certains mathématiciens voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordres entiers à des ordres fractionnaires. L'opérateur de différences défini par $\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$ a des propriétés similaires que celles de l'opérateur différentiel. Les opérateurs et les systèmes d'ordres fractionnaires ont été appliqués dans presque tous les domaines de la science telles que la génie électrique, l'électrochimie, la biologie, la physique, ...etc.

Dans ce travail on s'intéresse à donner quelques propriétés essentielles qui sont utilisées dans le calcul aux différences et le calcul aux différences fractionnaire pour étudier les équations linéaires et les équations aux différences fractionnaires. Ce mémoire est composé d'une introduction, de trois chapitres, d'une conclusion et d'une bibliographie.
Dans le premier chapitre nous présentons des notions préliminaires utilisées dans le calcul aux différences. Nous commençons par définir l'opérateur de différence Δ, ensuite nous étudions la fonction gamma et la factorielle décroissante et quelques propriétés de ces fonctions. A la fin de ce chapitre, nous présentons le théorème de Taylor.
L'objet du deuxième chapitre est le calcul fractionnaire. Nous commençons par donner la définition de la somme fractionnaire et la définition de l'opérateur de différence fractionnaire. Ensuite nous donnons les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire.
Le dernier chapitre est partagé en cinq sections. Dans la première section et la deuxième section, nous introduisons la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques discrètes. Dans la troisième section nous étudions une équation aux différences linéaire du premier ordre. Dans la quatrième section, on va utiliser la méthode de factorisation pour résoudre une équation aux différences linéaire d'ordre deux. Nous finissons le chapitre par

l'étude de l'existence de la solution d'une équation aux différences fractionnaire.

NOTATIONS

Dans ce mémoire on désignera par

- $\mathbb{C}$ L'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.
- $\mathbb{N}$ L'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z}$ L'ensemble des nombres entiers.
- $\mathbb{N}_a$= {a, a+1, ...} où a $\in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}_a^b = \{a, a+1, \ldots, b\}$, a, b $\in \mathbb{R}$ et $b - a > 1$.
- $\mathcal{R}e(z)$ La partie réelle de z.
- $\binom{n}{k}$ Coefficient binomial.
- I L'opérateur d'identité.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons des notions préliminaires utilisées dans le calcul aux différences. Nous commençons par définir l'opérateur de différence Δ, ensuite nous étudions la fonction gamma et la factorielle décroissante et quelques propriétés de ces fonctions. A la fin de ce chapitre, nous présentons le théorème de Taylor. Les notion de ce chapitre sont de [5, 6, 7, 8].

1.1 Opérateur de différence Δ

Définition 1.1.1. *Soit $f : \mathbb{N}_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On définit l'opérateur de différence Δ par*

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a^{b-1}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.2. *On définit l'opérateur de décalage $\sigma : \mathbb{N}_a^{b-1} \longrightarrow \mathbb{N}_a^b$ par*

$$\sigma(t) = t + 1, \quad t \in \mathbb{N}_a^{b-1}. \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.1. *1. On note par f^σ la fonction définie sur $\mathbb{N}_a^{b-1}$ par*

$$\begin{aligned} f^\sigma(t) &= (f \circ \sigma)(t) \\ &= f(\sigma(t)) \\ &= f(t+1). \end{aligned}$$

2. On note par $\Delta^n f$ la fonction définie sur $\mathbb{N}_a^{b-1}$ par

$$\Delta^n f(t) = \begin{cases} \Delta(\Delta^{n-1} f(t)), & n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \\ f(t), & n = 0. \end{cases}$$

Théorème 1.1.1. *Soient f, g :* $\mathbb{N}_a^b \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonction réelles et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, alors pour tout* $t \in \mathbb{N}_a^{b-1}$ *on a*

(i) $\Delta\alpha = 0$.

(ii) $\Delta(\alpha f)(t) = \alpha\Delta f(t)$.

(iii) $\Delta(f+g)(t) = \Delta f(t) + \Delta g(t)$.

(iv) $\Delta\alpha^{t+\beta} = (\alpha-1)\alpha^{t+\beta}$.

(v) $\Delta(fg)(t) = f(\sigma(t))\Delta g(t) + \Delta f(t)g(t)$.

(vi) $\Delta\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$, $g(t) \neq 0$.

Démonstration . En utilisant la définition de l'opérateur Δ on a

(i) $\Delta\alpha = \alpha - \alpha = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha f)(t) &= \alpha f(t+1) - \alpha f(t)\\ &= \alpha(f(t+1) - f(t))\\ &= \alpha\Delta f(t).\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\Delta(f+g)(t) &= (f+g)(t+1) - (f+g)(t)\\ &= f(t+1) + g(t+1) - f(t) - g(t)\\ &= f(t+1) - f(t) + g(t+1) - g(t)\\ &= \Delta f(t) + \Delta g(t).\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\Delta\alpha^{t+\beta} &= \alpha^{t+1+\beta} - \alpha^{t+\beta}\\ &= \alpha\alpha^{t+\beta} - \alpha^{t+\beta}\\ &= (\alpha-1)\alpha^{t+\beta}.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(t) &= \Delta(f(t)g(t))\\ &= (fg)(t+1) - (fg)(t)\\ &= f(t+1)g(t+1) - f(t)g(t)\\ &= f(t+1)(g(t+1) - g(t)) + g(t)(f(t+1) - f(t)).\end{aligned}$$

D'après la Remarque 1.1.1 on trouve

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(t) &= f(\sigma(t))\Delta g(t) + g(t)\Delta f(t)\\ &= f(\sigma(t))\Delta g(t) + \Delta f(t)g(t).\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \frac{f(t+1)}{g(t+1)} - \frac{f(t)}{g(t)}\\ &= \frac{f(t+1)g(t) - f(t)g(t+1)}{g(t)g(t+1)}\\ &= \frac{g(t)[f(t+1) - f(t)] - f(t)[g(t+1) - g(t)]}{g(t)g(\sigma(t))}\\ &= \frac{g(t)\Delta f(t) - f(t)\Delta g(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.\end{aligned}$$

■

1.2 Fonction gamma

Définition 1.2.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathcal{R}e(z) > 0$. La fonction gamma est définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt. \tag{1.3}$$

Propriétés 1.2.1. *Soit Γ la fonction définit par (1.3). Alors*

1)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{1.4}$$

2)

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Démonstration . 1) En utilisant la définition de la fonction gamma on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(z+1)-1}dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z}dt\\ &= [-e^{-t}t^z]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2) Montrons par récurrence (1.5)

Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(0+1)-1}dt = \Gamma(1) = 1 = 0!$.
Supposons que $\Gamma(n+1) = n!$ et montrons que $\Gamma(n+2) = (n+1)!$. Posons dans (1.4) $z = n+1$ on trouve que

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1).$$

En utilisant l'hypothèse de la récurrence on trouve que

$$\Gamma(n+2) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

■

1.3 Factorielle décroissante

Définition 1.3.1. *Soit $t \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit la factorielle décroissante par*

$$t^{\underline{n}} = \begin{cases} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1), & si \quad n > 0 \\ 1, \quad si \quad n = 0 \\ \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+|n|)}, & si \quad n < 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Définition 1.3.2. *Soit $t \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit la factorielle décroissante généralisée par*

$$t^{\underline{r}} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}, \tag{1.7}$$

avec $t^{\underline{r}} = 0$ si $t - r + 1 < 0$ et $t + 1 \geq 0$.

Théorème 1.3.1. *Soit Δ l'opérateur de différence. Alors pour tout $t \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\Delta t^{\underline{n}} = n t^{\underline{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \tag{1.8}$$

et

$$(t-r)t^{\underline{r}} = t^{\underline{r+1}}. \tag{1.9}$$

Démonstration . 1. En utilisant (1.1) et (1.6) on obtient

$$\begin{aligned} \Delta t^{\underline{n}} &= (t+1)^{\underline{n}} - t^{\underline{n}} \\ &= (t+1)t(t-1)\cdots(t-n-2) - t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) \\ &= t(t-1)(t-2)\cdots(t-n-2)[(t+1)-(t-n+2)] \\ &= n t^{\underline{n-1}}, \end{aligned}$$

d'où (1.8).

2. En utilisant (1.4) et (1.7) on trouve

$$\begin{aligned} (t-r)t^{\underline{r}} &= (t-r)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)} \\ &= (t-r)\frac{\Gamma(t+1)}{(t-r)\Gamma(t-r)} \\ &= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r)} \\ &= t^{\underline{r+1}}. \end{aligned}$$

Donc (1.9) est vérifiée.

■

Remarque 1.3.1. [5]

1. $\lim\limits_{z\to -n} |\Gamma(z)| = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. $$\lim_{s\to t} s^{\underline{r}} = \lim_{s\to t} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-r+1)} = 0, \quad si \quad t-r+1<0 \quad et \quad t+1\geq 0.$$

Théorème 1.3.2. *Soient r, $\alpha \in \mathbb{R}$ et Δ, σ les opérateurs définis par* (1.1) *et* (1.2) *respectivement, alors*

$$\Delta(t+\alpha)^{\underline{r}} = r(t+\alpha)^{\underline{r-1}}, \tag{1.10}$$

et

$$\Delta(\alpha-t)^{\underline{r}} = -r(\alpha-\sigma(t))^{\underline{r-1}}. \tag{1.11}$$

Démonstration . En utilisant (1.1), (1.2) et (1.7) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta(t+\alpha)^{\underline{r}} &= (t+\alpha+1)^{\underline{r}} - (t+\alpha)^{\underline{r}} \\
&= \frac{\Gamma(t+\alpha+2)}{\Gamma(t+\alpha+2-r)} - \frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+1-r)} \\
&= \frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+2-r)}\left[(t+\alpha+1)-(t+\alpha+1-r)\right] \\
&= r\frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha-r+2)} \\
&= r(t+\alpha)^{\underline{r-1}}.
\end{aligned}$$

Donc (1.10) est vérifiée.

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha-t)^{\underline{r}} &= \Delta\left(\frac{\Gamma(\alpha-t+1)}{\Gamma(\alpha-t+1-r)}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha-t)}{\Gamma(\alpha-t-r)} - \frac{\Gamma(\alpha-t+1)}{\Gamma(\alpha-t+1-r)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha-t)}{\Gamma(\alpha-t+1-r)}\left[(\alpha-t-r)-(\alpha-t)\right] \\
&= -r\frac{\Gamma(\alpha-t)}{\Gamma(\alpha-t+1-r)} \\
&= -r(\alpha-(t+1))^{\underline{r-1}} \\
&= -r(\alpha-\sigma(t))^{\underline{r-1}}.
\end{aligned}$$

D'où (1.11) . ■

Proposition 1.3.1. *Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Alors*

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{\Gamma(k+1)}. \tag{1.12}$$

Démonstration . En utilisant la définition du coefficient binomial el la propriété (1.5) on obtient

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}\frac{1}{\Gamma(k+1)} \\ &= \frac{n^{\underline{k}}}{\Gamma(k+1)}.\end{aligned}$$

■

Définition 1.3.3. *Le coefficient binomial généralisé* $\binom{t}{r}$ *est défini par*

$$\binom{t}{r} = \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)}, \tag{1.13}$$

où t *et* r *sont tels que le mombre droit de* (1.13) *soit défini.*

Proposition 1.3.2. *Soient* Δ *l'opérateur de difference. Alors*

(i) $\Delta\binom{t}{r} = \binom{t}{r-1}$.

(ii) $\Delta\binom{r+1}{t} = \binom{r+1}{t+1}$.

(iii) $\Delta\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t)$.

Démonstration . En utilisant (1.1), (1.4), (1.7) et (1.13) on trouve

(i)

$$\begin{aligned}\Delta\binom{t}{r} &= \Delta\left(\frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)}\right) \\ &= \frac{(t+1)^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} - \frac{t^{\underline{r}}}{\Gamma(r+1)} \\ &= \frac{(t+1)^{\underline{r}} - t^{\underline{r}}}{r\Gamma(r)} \\ &= \frac{\frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(t-r+2)} - \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+1)}}{r\Gamma(r)} \\ &= \frac{\frac{\Gamma(t+1)(t+1)-\Gamma(t+1)(t-r+1)}{\Gamma(t-r+2)}}{r\Gamma(r)} \\ &= \frac{(t+1-t+r-1)\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)}}{r\Gamma(r)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\binom{t}{r} &= \frac{r\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)}}{r\Gamma(r)} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-r+2)}}{\Gamma(r)} \\
&= \frac{t^{\underline{r-1}}}{\Gamma(r)} \\
&= \binom{t}{r-1}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta\binom{r+1}{t} &= \Delta\left(\frac{(r+1)^{\underline{t}}}{\Gamma(t+1)}\right) \\
&= \frac{(r+1)^{\underline{t+1}}}{\Gamma(t+2)} - \frac{(r+1)^{\underline{t}}}{\Gamma(t+1)} \\
&= \frac{(r+1)^{\underline{t+1}} - (r+1)^{\underline{t}}(t+1)}{\Gamma(t+2)} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r-t+1)} - \frac{\Gamma(r+2)(t+1)}{\Gamma(r-t+2)}}{\Gamma(t+2)} \\
&= \frac{(r-t+1)\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r-t+2)}}{\Gamma(t+2)} \\
&= \frac{\frac{(r-t+1)\Gamma(r+2)}{(r-t+1)\Gamma(r-t+1)}}{\Gamma(t+2)} \\
&= \frac{\frac{\Gamma(t+2)}{\Gamma(r-t+1)}}{\Gamma(t+2)} \\
&= \frac{(r+1)^{\underline{t+1}}}{\Gamma(t+2)} \\
&= \binom{r+1}{t+1}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma(t) &= \Gamma(t+1) - \Gamma(t) \\
&= t\Gamma(t) - \Gamma(t) \\
&= (t-1)\Gamma(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.3.3. [5] *L'expression binomiale pour $\Delta^n f(t)$ est définit par*

$$\Delta^n f(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(t+n-i). \tag{1.14}$$

Définition 1.3.4. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $c \leq d$, $c \in \mathbb{N}_a$. On définit l'intégrale de f par*

$$\int_c^d f(t)\Delta t = \sum_{t=c}^{d} f(t), \tag{1.15}$$

avec $\int_c^d f(t)\Delta t = f(c) + f(c+1) + \cdots + f(d-1)$, si $d > c$.

Théorème 1.3.3. *Soient f, $g : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles, b, c, $d \in \mathbb{N}_a$, $b \leq c \leq d$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

(i) $\int_b^c \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_b^c f(t)\Delta t$,

(ii) $\int_b^c (f(t)+g(t))\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_b^c g(t)\Delta t$,

(iii) $\int_b^d f(t)\Delta t = \int_b^c f(t)\Delta t + \int_c^d f(t)\Delta t$,

(iv) $| \int_b^c f(t)\Delta t | \leq \int_b^c |f(t)| \Delta t$,

(v) *Si* $F(t) = \int_b^t f(s)\Delta s$, $\forall t \in \mathbb{N}_b^c$, *alors* $\Delta F(t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}_b^{c-1}$,

(vi) *Si* $f(t) \geq g(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}_b^{c-1}$, *alors* $\int_b^c f(t)\Delta t \geq \int_b^c g(t)\Delta t$.

Démonstration . En utilisant (1.15), on obtient

(i)

$$\begin{aligned}\int_b^c \alpha f(t)\Delta t &= \sum_{t=b}^{c} \alpha f(t)\\ &= \alpha \sum_{t=b}^{c} f(t)\\ &= \alpha \int_b^c f(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_b^c (f(t)+g(t))\Delta t &= \sum_{t=b}^{c} (f(t)+g(t))\\ &= \sum_{t=b}^{c} f(t) + \sum_{t=b}^{c} g(t)\\ &= \int_b^c f(t)\Delta t + \int_b^c g(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\int_b^d f(t)\Delta t &= \sum_{t=b}^{d} f(t)\\ &= \sum_{t=b}^{c} f(t) + \sum_{t=c}^{d} f(t)\\ &= \int_b^c f(t)\Delta t + \int_c^d f(t)\Delta t.\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} \mid \int_b^c f(t)\Delta t \mid &= \mid \sum_{t=b}^{c} f(t) \mid \\ &\leq \sum_{t=b}^{c} \mid f(t) \mid \\ &\leq \int_b^c \mid f(t) \mid \Delta t. \end{aligned}$$

(v) Si $F(t) = \int_b^t f(s)\Delta s$. En utilisant la définition de l'opérateur Δ, alors

$$\begin{aligned} \Delta F(t) &= \Delta \left(\int_b^t f(s)\Delta s \right) \\ &= \Delta \left(\sum_{s=b}^{t} f(s) \right) \\ &= \sum_{s=b}^{t+1} f(s) - \sum_{s=b}^{t} f(s) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

(vi) Supposons que $f(t) \geq g(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}_b^{c-1}$, alors

$$\sum_{t=b}^{c} f(t) \geq \sum_{t=b}^{c} g(t),$$

donc

$$\int_b^c f(t)\Delta t \geq \int_b^c g(t)\Delta t.$$

■

Définition 1.3.5. *Soit $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$ si*

$$\Delta F(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a^{b-1}. \tag{1.16}$$

Exemple 1.3.1. *On a*

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{2} 3^t \right) &= \frac{1}{2} 3^{t+1} - \frac{1}{2} 3^t \\ &= \frac{1}{2} 3^t 3 - \frac{1}{2} 3^t \\ &= \frac{1}{2} 3^t (3-1) \\ &= 3^t, \quad t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors $F(t) = \frac{1}{2}3^t$ est une primitive de $f(t) = 3^t$ sur $\mathbb{N}$.

Théorème 1.3.4. *Soient $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, G une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$ et $c \in \mathbb{R}$ une constante. Alors la fonction F définie par*

$$F(t) = G(t) + c, \quad t \in \mathbb{N}_a^b,$$

est une primitive de f.

Démonstration . Supposons que G est une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$. Soient $F(t) = G(t)+c$, $t \in \mathbb{N}_a^b$ et c une constante. Alors

$$\begin{aligned}\Delta F(t) &= \Delta(G(t) + c)\\ &= \Delta G(t) + \Delta c\\ &= \Delta G(t)\\ &= f(t), \quad t \in \mathbb{N}_a^b.\end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$. ∎

Définition 1.3.6. *Soit $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, l'intégrale indéfinie de f est donnée par*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c, \tag{1.17}$$

où F est une primitive de f et c est une constante réelle.

Théorème 1.3.5. *Soient r et α deux constantes. Alors*

(i) $\int (t-\alpha)^{\underline{r}}\Delta t = \frac{1}{r+1}(t-\alpha)^{\underline{r+1}} + c, \quad r \neq -1,$

(ii) $\int (\alpha - \sigma(t))^{\underline{r}}\Delta t = \frac{-1}{r+1}(\alpha - t)^{\underline{r+1}} + c, \quad r \neq -1,$

(iii) $\int \binom{t}{r}\Delta t = \binom{t}{r+1} + c, \quad r \neq 1,$

(iv) $\int \binom{r+t}{t}\Delta t = \binom{r+t}{t-1} + c,$

(v) $\int (t-1)\Gamma(t)\Delta t = \Gamma(t) + c,$

(vi) $\int \alpha^t\Delta t = \frac{1}{\alpha-1}\alpha^t + c, \quad \alpha \neq 1.$

Démonstration . En utilisant (1.8), (1.11) et la Proposition 1.3.2 on trouve

(i) $\frac{1}{r+1}(t-\alpha)^{\underline{r+1}}$ est une primitive de $(t-\alpha)^{\underline{r}}$, donc

$$\int (t-\alpha)^{\underline{r}}\Delta t = \frac{1}{r+1}(t-\alpha)^{\underline{r+1}} + c.$$

(ii) $\frac{-1}{r+1}(\alpha - t)^{\underline{r+1}}$ est une primitive de $(\alpha - \sigma(t))^{\underline{r}}$, alors

$$\int (\alpha - \sigma(t))^{\underline{r}}\Delta t = \frac{-1}{r+1}(\alpha - t)^{\underline{r+1}} + c.$$

(iii) $\binom{t}{r+1}$ est une primitive de $\binom{t}{r}$ puisque $\Delta\binom{t}{r+1} = \binom{t}{r}$, donc

$$\int \binom{t}{r}\Delta t = \binom{t}{r+1} + c.$$

(iv) $\binom{r+t}{t-1}$ est une primitive de $\binom{r+t}{t}$ puisque $\Delta\binom{r+1}{t-1} = \binom{r+t}{t}$, donc

$$\int \binom{r+t}{t}\Delta t = \binom{r+t}{t-1} + c.$$

(v) $\Gamma(t)$ est une primitive de $(t-1)\Gamma(t)$, alors

$$\int (t-1)\Gamma(t)\Delta t = \Gamma(t) + c.$$

(vi) $\frac{1}{\alpha-1}\alpha^t$ est une primitive de α^t, donc

$$\int \alpha^t \Delta t = \frac{1}{\alpha-1}\alpha^t + c.$$

■

Théorème 1.3.6. *Soient $f : \mathbb{N}_a^b \to \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$. Alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b \Delta F(t)\Delta t = F(t)|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.18}$$

Démonstration . D'après le Théorème 1.3.3 (v), la fonction G définie par

$$G(t) = \int_a^t f(s)\Delta s, \quad t \in \mathbb{N}_a^b,$$

est une primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$, et d'après le Théorème 1.3.4 la fonction F est donnée par

$$F(t) = G(t) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

est une autre primitive de f sur $\mathbb{N}_a^b$. Alors

$$\begin{aligned} F(t)|_a^b &= F(b) - F(a) \\ &= [(G(b) + c) - (G(a) + c)] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\Delta t. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.3.7. [5]***(Intégration par parties)***

Soient $u,\ v : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles et $b,\ c \in \mathbb{N}_a$, $b < c$, on a les formules suivantes

$$\int_b^c u(t)\Delta v(t)\Delta t = u(t)v(t)|_b^c - \int_b^c v(t)\Delta u(t)\Delta t. \tag{1.19}$$

$$\int_b^c u(\sigma(t))\Delta v(t)\Delta t = u(t)v(t)|_b^c - \int_b^c v(t)\Delta u(t)\Delta t. \tag{1.20}$$

Lemme 1.3.1. ***(Formules de Leibniz).***
Soit $f : \mathbb{N}_{a+\mu} \times \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$*, alors*

$$\Delta\left[\int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau\right] = \int_a^{t-\mu+1} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + f(t+1, t-\mu+1), \tag{1.21}$$

et

$$\Delta\left[\int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau\right] = \int_a^{t-\mu+2} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + f(t, t-\mu+1). \tag{1.22}$$

Démonstration . En utilisant la définition de Δ, la Définition 1.3.4 et le Théorème 1.3.3 (iv), alors

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau\right] &= \int_a^{t-\mu+2} f(t+1,\tau)\Delta\tau - \int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+1} f(t+1,\tau)\Delta\tau + \int_{t-\mu+1}^{t-\mu+2} f(t+1,\tau)\Delta\tau - \int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+1} \left[f(t+1,\tau) - f(t,\tau)\right]\Delta\tau + \int_{t-\mu+1}^{t-\mu+2} f(t+1,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+1} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + \int_{t-\mu+1}^{t-\mu+2} f(t+1,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+1} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + f(t+1, t-\mu+1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\left[\int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau\right] &= \int_a^{t-\mu+2} f(t+1,\tau)\Delta\tau - \int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+2} \left[f(t+1,\tau) - f(t,\tau)\right]\Delta\tau \\
&\quad + \int_a^{t-\mu+2} f(t,\tau)\Delta\tau - \int_a^{t-\mu+1} f(t,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+2} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + \int_{t-\mu+1}^{t-\mu+2} f(t,\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\mu+2} \Delta_t f(t,\tau)\Delta\tau + f(t, t-\mu+1).
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.3.8. *Soit* $f : \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$*. Alors*

$$\Delta\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right) = \int_a^t \Delta_t f(t,s)\Delta s + f(\sigma(t), t), \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{1.23}$$

Démonstration . En utilisant la définition de Δ et le Théorème 1.3.3 (iv), alors

$$\begin{aligned}\Delta\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right) &= \int_a^{t+1} f(t+1,s)\Delta s - \int_a^t f(t,s)\Delta s\\ &= \int_a^t f(t+1,s)\Delta s + \int_t^{t+1} f(t+1,s)\Delta s - \int_a^{t+1} f(t,s)\Delta s\\ &= \int_a^t [f(t+1,s)-f(t,s)]\,\Delta s + \int_t^{t+1} f(t+1,s)\Delta s\\ &= \int_a^t \Delta_t f(t,s)\Delta s + \int_t^{t+1} f(t+1,s)\Delta s\\ &= \int_a^t \Delta_t f(t,s)\Delta s + \int_t^{t+1} f(\sigma(t),s)\Delta s\\ &= \int_a^t \Delta_t f(t,s)\Delta s + f(\sigma(t),t).\end{aligned}$$

■

1.4 Théorème de Taylor

Définition 1.4.1. *Soit $s \in \mathbb{N}_a$. On définit les monômes de Taylor discrets $h_n(t,s)$, $n \in \mathbb{N}$ par*

$$h_n(t,s) = \frac{(t-s)^{\underline{n}}}{n!}, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{1.24}$$

Théorème 1.4.1. *Soient $h_n(t,s)$ le monôme de Taylor et c une constante réelle. Alors*

(i) $h_0(t,a) = 1, \quad t \in \mathbb{N}_a,$

(ii) $h_n(t,t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_a, \quad n \in \mathbb{N}_1,$

(iii) $\Delta h_{n+1}(t,a) = h_n(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

(iv) $\int h_n(t,a)\Delta t = h_{n+1}(t,a) + c, \quad t \in \mathbb{N}_a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

(v) $\Delta_s h_{n+1}(t,s) = -h_n(t,\sigma(s)), \quad t \in \mathbb{N}_a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

(vi) $\int h_n(t,\sigma(s))\Delta s = -h_{n+1}(t,s) + c, \quad t \in \mathbb{N}_a, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

c est une constante.

Démonstration . En utilisant (1.6), (1.24) et le Théorème 1.3.5 on trouve

(i) $h_0(t,a) = \frac{(t-a)^{\underline{0}}}{0!} = 1.$

(ii) $h_n(t,t) = \frac{(t-t)^{\underline{n}}}{n!} = 0.$

(iii) De (1.1) on a

$$\begin{aligned}\Delta h_{n+1}(t,a) &= \Delta\left(\frac{(t-a)^{\underline{n+1}}}{(n+1)!}\right)\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\Delta(t-a)^{\underline{n+1}},\end{aligned}$$

et d'après (1.7) on obtient

$$
\begin{aligned}
\Delta h_{n+1}(t,a) &= \frac{1}{(n+1)!}\Delta\left(\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a+1-n-1)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\Delta\left(\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-n)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\Gamma(t-a+2)}{\Gamma(t-a-n+1)}-\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-n)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\Gamma(t-a+2)-\Gamma(t-a+1)(t-a-n)}{\Gamma(t-a-n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left((t-a-t+a+n)\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-n+1)}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)n!}\left((n+1)\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-n+1)}\right)\\
&= \frac{\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-n+1)}}{n!}\\
&= \frac{(t-a)^{\underline{n}}}{n!}\\
&= h_n(t,a).
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\int h_n(t,a)\Delta t &= \int \frac{(t-a)^{\underline{n}}}{n!}\Delta t\\
&= \frac{1}{n!}\int (t-a)^{\underline{n}}\Delta t\\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}(t-a)^{\underline{n+1}}+c\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)n!}(t-a)^{\underline{n+1}}+c\\
&= \frac{1}{(n+1)!}(t-a)^{\underline{n+1}}+c\\
&= h_{n+1}(t,a)+c.
\end{aligned}
$$

(v)

$$
\begin{aligned}
\Delta_s h_{n+1}(t,s) &= \Delta_s\frac{(t-s)^{\underline{n+1}}}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}\Delta_s(t-s)^{\underline{n+1}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant (1.11) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_s h_{n+1}(t,s) &= \frac{1}{(n+1)n!}(-(n+1)(t-\sigma(s)))^{\underline{n+1-1}}\\ &= -\frac{1}{n!}(t-\sigma(s))^{\underline{n}}\\ &= -\frac{(t-\sigma(s))^{\underline{n}}}{n!}\\ &= -h_n(t,\sigma(s)).\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}\int h_n(t,\sigma(s))\Delta s &= \int \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{n}}}{n!}\Delta s\\ &= \frac{1}{n!}\int (t-\sigma(s))^{\underline{n}}\Delta s\\ &= \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{n+1}(t-s)^{\underline{n+1}}+c\right)\\ &= -\frac{1}{(n+1)n!}(t-s)^{\underline{n+1}}+c\\ &= -\frac{1}{(n+1)!}(t-s)^{\underline{n+1}}+c\\ &= -h_{n+1}(t,s)+c.\end{aligned}$$

■

Théorème 1.4.2. ***(Formule de Taylor)***.
Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$f(t) = p_n(t) + R_n(t), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

où

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(a)\frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(a) h_k(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

et

$$R_n(t) = \int_a^t \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{n}}}{n!}\Delta^{n+1} f(s)\Delta s = \int_a^t h_n(t,\sigma(s))\Delta^{n+1} f(s)\Delta s, \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

Démonstration . • Si $n = 0$, alors

$$\begin{aligned}p_0(t) + R_0(t) &= \sum_{k=0}^{0} \Delta^0 f(a) h_0(t,a) + \int_a^t h_0(t,\sigma(s))\Delta^{0+1} f(s)\Delta s\\ &= f(a)h_0(t,a) + \int_a^t h_0(t,\sigma(s))\Delta f(s)\Delta s.\end{aligned}$$

On a d'après (1.19) et le Théorème 1.4.1

$$\begin{aligned}
p_0(t) + R_0(t) &= f(a) + \int_a^t \Delta f(s)\Delta s \\
&= f(a) + f(s)|_a^t - \int_a^t f(s)\Delta 1 \Delta t \\
&= f(a) + f(t) - f(a) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème de Taylor est vérifié pour $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}_1$. Montrons que $R_n(t) = f(t) - p_n(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}_a$.

Soient u et v telles que

$$u(\sigma(s)) = h_n(t, \sigma(s)), \quad \Delta v(s) = \Delta^{n+1} f(s).$$

Alors

$$u(s) = h_n(t, s), \quad v(s) = \Delta^n f(s).$$

D'après le Théorème 1.4.1 (v) on a

$$\Delta_s h_n(t, s) = \Delta_s u(s) = -h_{n-1}(t, \sigma(s)).$$

En utilisant la formule (1.20) on trouve

$$\begin{aligned}
R_n(t) &= \int_a^t h_n(t, \sigma(s))\Delta^{n+1} f(s)\Delta s \\
&= h_n(t, s)\Delta^n f(s)|_{s=a}^{s=t} + \int_a^t h_{n-1}(t, \sigma(s))\Delta^n f(s)\Delta s \\
&= h_n(t, t)\Delta^n f(t) - h_n(t, a)\Delta^n f(a) + \int_a^t h_{n-1}(t, \sigma(s))\Delta^n f(s)\Delta s \\
&= -h_n(t, a)\Delta^n f(a) + \int_a^t h_{n-1}(t, \sigma(s))\Delta^n f(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

• Si $n \geq 2$ on applique la formule d'intégration par parties (1.20), pour obtenir

$$\begin{aligned}
R_n(t) &= -\Delta^n f(a)h_n(t, a) + h_{n-1}(t, s)\Delta^{n-1} f(s)|_{s=a}^{s=t} + \int_a^t h_{n-2}(t, \sigma(s))\Delta^{n-1} f(s)\Delta s \\
&= -\Delta^n f(a)h_n(t, a) - \Delta^{n-1} f(a)h_{n-1}(t, a) + \int_a^t h_{n-2}(t, \sigma(s))\Delta^{n-1} f(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

• Par induction sur n, on obtient

$$\begin{aligned}
R_n(t) &= -\sum_{k=1}^{n} \Delta^k f(a)h_k(t, a) + \int_a^t h_0(t, \sigma(s))\Delta f(s)\Delta s \\
&= -\sum_{k=1} \Delta^k f(a)h_k(t, a) + f(t) - f(a) \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(a)h_k(t, a) + f(t).
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.4.1. *Le polynôme p_n est appelé polynôme de Taylor de degré n et R_n est le reste de Taylor.*

Définition 1.4.2. *Soit $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, on définit la série de Taylor de f en $t = a$ par*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k f(a) \frac{(t-a)^{\underline{k}}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k f(a) h_k(t,a).$$

CHAPITRE 2

CALCUL FRACTIONNAIRE

Nous commençons ce chapitre par donner la définition de la somme fractionnaire et la définition de l'opérateur de différence fractionnaire. Ensuite nous donnons les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire. Les notion de ce chapitre sont de [4, 6].

2.1 Somme fractionnaire et opérateur de différence fractionnaire

Théorème 2.1.1. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et h_n les monômes de Taylor. Alors*

$$\int_a^t \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\Delta\tau_n \cdots \Delta\tau_2\Delta\tau_1 = \int_a^t h_{n-1}(t, \sigma(s))f(s)\Delta s. \qquad (2.1)$$

Démonstration . Montrons par récurrence (2.1).

- Si $n = 1$, (2.1) est vraie.
- Supposons que (2.1) est vraie pour n est montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$.

Soient

$$y(t) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \int_a^{\tau_n} f(\tau_{n+1})\Delta\tau_{n+1}\Delta\tau_n \cdots \Delta\tau_2\Delta\tau_1,$$

et

$$g(\tau_n) = \int_a^{\tau_n} f(\tau_{n+1})\Delta\tau_{n+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^t h_{n-1}(t,\sigma(s))g(s)\Delta s \\ &= \int_a^t u(s)\Delta v(s)\Delta s, \end{aligned}$$

telle que

$$u(s) = g(s), \quad \Delta v(s) = h_{n-1}(t,\sigma(s)).$$

Donc d'après le Théorème 1.4.1 (v) on a

$$\Delta u(s) = f(s), \quad v(s) = -h_n(t,s), \quad v(\sigma(s)) = -h_n(t,\sigma(s)).$$

En intégrant par parties on trouve que

$$\begin{aligned} y(t) &= -h_n(t,s)\int_a^s f(\tau_{n+1})\Delta\tau_{n+1}|_a^t + \int_a^t h_n(t,\sigma(s))f(s)\Delta s \\ &= \int_a^t h_n(t,\sigma(s))f(s)\Delta s. \end{aligned}$$

■

Définition 2.1.1. *Le monôme de Taylor fractionnaire d'ordre ν est défini par*

$$h_\nu(t,s) = \frac{(t-s)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{2.2}$$

Théorème 2.1.2. *Soient $t, s \in \mathbb{N}_a$. Alors*

(i) $h_\nu(t,t) = 0$,

(ii) $\Delta h_\nu(t,a) = h_{\nu-1}(t,a)$,

(iii) $\Delta_s h_\nu(t,s) = -h_{\nu-1}(t,\sigma(s))$,

(iv) $\int h_\nu(t,a)\Delta t = h_{\nu+1}(t,a) + c$,

(v) $\int h_\nu(t,\sigma(s))\Delta s = -h_{\nu+1}(t,s) + c$.

Démonstration . En utilisant (1.1), (1.4), (1.7) et (2.2), on trouve

(i) $h_\nu(t,t) = \frac{(t-t)^{\underline{v}}}{\Gamma(\nu+1)} = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\Delta h_\nu(t,a) &= \Delta\left(\frac{(t-a)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}\right)\\
&= \frac{(t-a+1)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{(t-a)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}\\
&= \frac{\Gamma(t-a+2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-a-\nu+2)} - \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-a-\nu+1)}\\
&= \frac{\Gamma(t-a+1)(t-a+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-a-\nu+2)} - \frac{\Gamma(t-a+1)(t-a-\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-a-\nu+2)}\\
&= [(t-a+1)-(t-a-\nu+1)]\,\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-a-\nu+2)}\\
&= \nu\frac{\Gamma(t-a+1)}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(t-a-\nu+2)}\\
&= \frac{(t-a)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}\\
&= h_{\nu-1}(t,a).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\Delta_s h_\nu(t,s) &= h_\nu(t,s+1) - h_\nu(t,s)\\
&= \frac{(t-s-1)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)} - \frac{(t-s)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}\\
&= \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-\nu)\Gamma(\nu+1)} - \frac{\Gamma(t-s+1)}{\Gamma(t-s+1-\nu)\Gamma(\nu+1)}\\
&= [(t-s-\nu)-(t-s)]\,\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(t-s-\nu+1)}\\
&= -\frac{\nu\Gamma(t-s)}{\nu\Gamma(\nu)\Gamma(t-s-\nu+1)}\\
&= -\frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(\nu)\Gamma(t-s-\nu+1)},
\end{aligned}$$

en utilisant (1.11), alors

$$\begin{aligned}
\Delta_s h_\nu(t,s) &= -\frac{(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}\\
&= -h_{\nu-1}(t,\sigma(s)).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\int h_\nu(t,a)\Delta t &= \int \frac{(t-a)^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}\Delta t\\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int (t-a)^{\underline{\nu}}\Delta t.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 1.3.5 (i) on obtient

$$\begin{aligned}\int h_\nu(t,a)\Delta t &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left[\frac{1}{\nu+1}(t-a)^{\underline{\nu+1}}+c\right]\\ &= \frac{(t-a)^{\underline{\nu+1}}}{\Gamma(\nu+2)}+c\\ &= h_{\nu+1}(t,a)+c.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\int h_\nu(t,\sigma(s))\Delta s &= \int \frac{(t-\sigma(s))^{\underline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)}\Delta s\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int (t-\sigma(s))^{\underline{\nu}}\Delta s.\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 1.3.5 (ii), alors

$$\begin{aligned}\int h_\nu(t,\sigma(s))\Delta s &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left[-\frac{1}{\nu+1}(t-s)^{\underline{\nu+1}}+c\right]\\ &= -\frac{(t-s)^{\underline{\nu+1}}}{\Gamma(\nu+2)}+c\\ &= -h_{\nu+1}(t,s)+c.\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.2. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $\nu > 0$. On définit la somme fractionnaire d'ordre ν de f par*

$$\begin{aligned}\Delta_a^{-\nu} f(t) &= \int_a^{t-\nu+1} h_{\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\\ &= \sum_{\tau=a}^{t-\nu} h_{\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau), \quad t\in\mathbb{N}_{a+\nu}. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Remarque 2.1.1. *$\Delta_a^{-\nu} f$ est définie sur $\mathbb{N}_{a+\nu-m}$ où $m\in\mathbb{N}$ avec $m-1<\nu\le m$ car*

$$\Delta_a^{-v} f(t) = 0, \quad t\in\mathbb{N}_{a+v-m}^{a+v-1}.$$

Lemme 2.1.1. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $\nu > 0$. Alors la somme fractionnaire d'ordre ν de f en a est une combinaison linéaire de $f(a), f(a+1), \ldots, f(t-\nu-1), f(t-\nu)$. De plus on a*

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) = h_{\nu-1}(t,\sigma(a))f(a) + \cdots + \nu f(t-\nu-1) + f(t-\nu). \qquad (2.4)$$

Démonstration . D'après la définition de $\Delta_a^{-\nu}$ on a

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) = h_{\nu-1}(t,\sigma(a))f(a)+\ldots+h_{\nu-1}(t,\sigma(t-\nu-1))f(t-\nu-1)+h_{\nu-1}(t,\sigma(t-\nu))f(t-\nu). \qquad (2.5)$$

En utilisant la définition de σ et de $h_{\nu-1}$ on trouve

$$\begin{aligned}
h_{\nu-1}(t,\sigma(t-1-\nu)) &= \frac{(t-(t-\nu))^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu-1+1)} \\
&= \frac{\nu^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}.
\end{aligned}$$

D'après (1.7) on a

$$h_{\nu-1}(t,\sigma(t-1-\nu)) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2)\Gamma(\nu)} = \nu, \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned}
h_{\nu-1}(t,\sigma(t-\nu)) &= h_{\nu-1}(t,t-\nu+1)) \\
&= \frac{(t-(t-\nu+1))^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \\
&= \frac{(\nu-1)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)}.
\end{aligned}$$

De (1.7) on a

$$h_{\nu-1}(t,\sigma(t-\nu)) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(1)} = 1. \tag{2.7}$$

En combinant (2.5), (2.6) et (2.7) on trouve (2.4). ■

Exemple 2.1.1. *Calculons* $\Delta_0^{-\frac{1}{2}}1$.
On a

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{\frac{1}{2}}1 &= \int_0^{t+\frac{1}{2}} h_{-\frac{1}{2}}(t,\sigma(s)).1\Delta s \\
&= -h_{\frac{1}{2}}(t,s)\Big|_{s=0}^{s=t+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.1.2 et (1.7) *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{\frac{1}{2}}1 &= -h_{\frac{1}{2}}(t,t+\frac{1}{2}) + h_{\frac{1}{2}}(t,0) \\
&= -\frac{(-\frac{1}{2})^{\underline{\frac{1}{2}}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{t^{\underline{\frac{1}{2}}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \\
&= -\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(0)\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(t+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(t+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$

Définition 2.1.3. *Soient* $f:\mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ *et* $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ *avec* $n-1 < \nu \leq n$. *On définit l'opérateur de différence fractionnaire d'ordre* ν *par*

$$\Delta_a^{\nu} f(t) = \begin{cases} \Delta^n \Delta_a^{-(n-\nu)} f(t), & t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}, \\ \Delta^n f(t), & \nu = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Théorème 2.1.3. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}_+^*$, avec $n-1 < \nu \leq n$. Alors*

$$\Delta_a^\nu f(t) = \begin{cases} \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau, & n-1<\nu<n \\ \Delta^n f(t), \quad \nu = n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour $t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}$.

Démonstration . Soient $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ avec $n-1 < \nu \leq$ n.

• Supposons que $\nu = n$, alors

$$\begin{aligned} \Delta_a^\nu f(t) &= \Delta^n \Delta_a^{-(n-n)} f(t) \\ &= \Delta^n \Delta_a^{-0} f(t) \\ &= \Delta^n f(t). \end{aligned}$$

• Soit $n-1 < \nu < n$. Donc

$$\begin{aligned} \Delta_a^\nu f(t) &= \Delta^n \Delta_a^{-(n-\nu)} f(t) \\ &= \Delta^n \left[\int_a^{t-(n-\nu)+1} h_{n-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \right] \\ &= \Delta^{n-1} \Delta \left[\int_a^{t-(n-\nu)+1} h_{n-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (1.22) on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_a^\nu f(t) = \Delta^{n-1} &\left[\int_a^{t-(n-\nu-1)+1} h_{n-\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \right. \\ &\left. + h_{n-\nu-1}(t, t-(n-\nu-2)) f(t-(n-\nu-1)) \right] \end{aligned}$$

calcule $h_{n-\nu-1}(t, t-(n-\nu-2)) f(t-(n-\nu-1))$.

En utilisant (1.7) et (2.2) on trouve

$$\begin{aligned} h_{n-\nu-1}(t, t-(n-\nu-2)) f(t-(n-\nu-1)) &= \frac{(t-t+(n-\nu-2))^{\underline{n-\nu-1}}}{\Gamma(n-\nu-1+1)} f(t-(n-\nu-1)) \\ &= \frac{(n-\nu-2)^{\underline{n-\nu-1}}}{\Gamma(n-\nu)} f(t-(n-\nu-1)) \\ &= \frac{\Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(0)\Gamma(n-\nu)} f(t-(n-\nu-1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta_a^\nu f(t) &= \Delta^{n-1}\left[\int_a^{t-(n-\nu-1)+1} h_{n-\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] \\
&= \Delta^{n-2}\left[\int_a^{t-(n-\nu-2)+1} h_{n-\nu-3}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right. \\
&+ h_{n-\nu-2}(t,t-(n-\nu-3))f(t-(n-\nu-2))] \\
&= \Delta^{n-2}\left[\int_a^{t-(n-\nu-2)+1} h_{n-\nu-3}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \Delta^{n-n}\left[\int_a^{t-(n-\nu-n)+1} h_{n-\nu-n-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right. \\
&+ h_{n-\nu-1}(t,t-(n-\nu-(t+1)))f(t-(n-\nu-n))] \\
&= \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau + h_{-\nu}(t,t+\nu+1)f(t+\nu) \\
&= \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.4. *Soient $\mu \geq 0$ et $\nu \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}, \quad \forall t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}. \tag{2.10}$$

Démonstration . Supposons que $\mu \geq 0$ et $\nu \in \mathbb{R}_+^*$. On définit les deux fonctions g_1 et g_2 sur $\mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$ par

$$g_1(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}},$$

et

$$g_2(t) = \Delta_{a+\mu}^{-\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \sum_{s=a+\mu}^{t-\nu} h_{\nu-1}(t,\sigma(s))(s-a)^{\underline{\mu}}. \tag{2.11}$$

D'abord montrons que g_1 et g_2 sont des solutions du problème suivant

$$(t-a-(\mu+\nu)+1)\Delta g(t) = (\mu+\nu)g(t), \tag{2.12}$$

$$g(a+\mu+\nu) = \Gamma(\mu+1). \tag{2.13}$$

on a

$$g_1(a+\mu+\nu) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(\mu+\nu)^{\underline{\mu+\nu}}.$$

En utilisant (1.7) on obtient

$$\begin{aligned} g_1(a+\mu+\nu) &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu-\mu-\nu+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(1)} \\ &= \Gamma(\mu+1). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} g_2(a+\mu+\nu) &= \sum_{s=a+\mu}^{\mu} h_{\nu-1}(a+\mu+\nu, \sigma(s))(s-a)^{\underline{\mu}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+\mu}^{a+\mu} (a+\mu+\nu-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}(\nu-1)^{\underline{\nu-1}}\mu^{\underline{\mu}}. \end{aligned}$$

En utilisant (1.7) on trouve

$$\begin{aligned} g_2(a+\mu+\nu) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu-1+1)}{\Gamma(\nu-1-\nu+1+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\mu+1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Gamma(\nu)\Gamma(\mu+1) \\ &= \Gamma(\mu+1). \end{aligned}$$

Alors g_1 et g_2 vérifient (2.13).
Montrons que g_1 et g_2 vérifient l'équation aux différences (2.12).
Soit t $\in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$. En utilisant la définition de Δ et (1.7) on obtient

$$\begin{aligned} \Delta g_1(t) &= \Delta\left(\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\Delta\left((t-a)^{\underline{\mu+\nu}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\left[(t-a+1)^{\underline{\mu+\nu}} - (t-a)^{\underline{\mu+\nu}}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\left[\frac{\Gamma(t-a+1+1)}{\Gamma(t-a+1-\mu-\nu+1)} - \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-\mu-\nu+1)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\left[\frac{\Gamma(t-a+2)}{\Gamma(t-a-\mu-\nu+2)} - \frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-\mu-\nu+1)}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\left[((t-a+1)-(t-a-\mu-\nu+1))\frac{\Gamma(t-a+1)}{\Gamma(t-a-\mu-\nu+2)}\right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\Delta g_1(t) = (\mu+\nu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu-1}}. \tag{2.14}$$

Multiplions les deux membres de (2.14) par $t-a-(\mu+\nu)+1$ on trouve

$$\begin{aligned}(t-a-(\mu+\nu)+1)\Delta g_1(t) &= (\mu+\nu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}\left[t-a-(\mu+\nu-1)\right](t-a)^{\underline{\mu+\nu-1}}\\ &= (\mu+\nu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}\\ &= (\mu+\nu)g_1(t).\end{aligned}$$

D'où g_1 satisfait le problème (2.12)-(2.13).
Maintenant montrons que g_2 satisfait aussi l'équation aux différences (2.12). En appliquant (1.1) et (1.7) on obtient

$$\begin{aligned}\Delta g_2(t) &= \Delta\left[\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu} h_{\nu-1}(t,\sigma(s))(s-a)^{\underline{\mu}}\right]\\ &= \Delta\left[\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}\frac{(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu-1+1)}(s-a)^{\underline{\mu}}\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\Delta\left[\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}(s-a)^{\underline{\mu}}\right]\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(\nu-1)(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}(\nu-1)^{\underline{\nu-1}}(t+1-\nu-a)^{\underline{\mu}}.\end{aligned}$$

De (1.7) on trouve

$$\Delta g_2(t) = \frac{\nu-1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}+(t+1-\nu-a)^{\underline{\mu}}. \tag{2.15}$$

D'autre part, en utilisant (1.9) on obtient

$$\begin{aligned}g_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}\left[(t-\sigma(s))-(\nu-2)\right](t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}\left[(t-a-(\mu+\nu)+1)-(s-a-\mu)\right](t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}\\ &= \frac{t-a-(\mu+\nu)+1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\mu}\\ &- \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a-\mu)(s-a)^{\underline{\mu}}\\ &= h(t)-k(t).\end{aligned}$$

Où

$$h(t) = \frac{t-a-(\mu+\nu)+1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}}, \tag{2.16}$$

et

$$k(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+\mu}^{t-\nu} (t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a-\mu)(s-a)^{\underline{\mu}}. \tag{2.17}$$

De (2.15) et (2.16) on trouve

$$\begin{aligned}(t-a+(\mu+\nu)+1)\Delta g_2(t) &= (t-a+(\mu+\nu)+1)\frac{\nu-1}{\Gamma(\nu)} \\ &\quad \times \sum_{s=a+\mu}^{t-\nu} (t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu}} + (t+1-\nu-a)^{\underline{\mu}}.\end{aligned}$$

En utilisant (1.9) on a

$$(t-a+(\mu+\nu)+1)\Delta g_2(t) = (\nu-1)h(t) + (t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}}. \tag{2.18}$$

D'autre part en intégrant par parties on a

$$k(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+\mu}^{t-\nu} (t-\sigma(s))^{\underline{\nu-2}}(s-a)^{\underline{\mu+1}}.$$

En utilisant (1.8) et (1.9), on trouve

$$\begin{aligned}k(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left[-\frac{(s-a)^{\underline{\mu+1}}(t-s)^{\underline{\nu-1}}}{\nu-1}\right]_{s=a+\mu}^{t+1-\nu} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}\frac{(\mu+1)(s-a)^{\underline{\mu}}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}}{\nu-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\left[-\frac{\Gamma(\nu)}{\nu-1}(t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}}\right] \\ &+ \frac{\mu+1}{(\nu-1)\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}(s-a)^{\mu} \\ &= -\frac{(t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}}}{\nu-1} + \frac{\mu+1}{(\nu-1)\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}(s-a)^{\mu} \\ &= \frac{1}{\nu-1}\left[\frac{\mu+1}{\Gamma(\nu)}\sum_{s=a+\mu}^{t-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\nu-1}}(s-a)^{\underline{\mu}} - (t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}}\right].\end{aligned}$$

Donc

$$(\mu+1)g_2(t) - (\nu-1)k(t) = (t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}}. \tag{2.19}$$

De (2.18) et (2.19) on obtient

$$\begin{aligned}(t-a+(\mu+\nu)+1)\Delta g_2(t) &= (\nu-1)h(t) + (t+1-\nu-a)^{\underline{\mu+1}} \\ &= (\nu-1)h(t) - (\nu-1)k(t) + (\mu+1)g_2(t) \\ &= (\nu-1)g_2(t) + (\mu+1)g_2(t) \\ &= (\mu+\nu)g_2(t).\end{aligned}$$

D'où g_2 satisfait le problème (2.12)-(2.13).

Alors g_1 et g_2 vérifient la même équation avec une condition initiale, donc $g_1 \equiv g_2$. ∎

Exemple 2.1.2. *Calculons* $\Delta_{\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\underline{\frac{1}{2}}}$.
En utilisant (2.10) *et* (1.7) *on trouve*

$$\begin{aligned}\Delta_{\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\underline{\frac{1}{2}}} &= \Delta_{2+\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}}(t-2)^{\underline{\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}(t-2)^{\underline{2}}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(3)}\frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t-3)}, \quad t\in\mathbb{N}_2.\end{aligned}$$

Théorème 2.1.5. *Soient* $\mu > 0$ *et* $\nu \in \mathbb{R}_+^*$, *avec* $n-1<\nu<n$. *Alors*

$$\Delta_{a+\mu}^{\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}, \quad \forall t\in\mathbb{N}_{a+\mu+n-\nu}. \tag{2.20}$$

Démonstration . Pour $t\in\mathbb{N}_{a+\mu+n-\nu}$ on a

$$\begin{aligned}\Delta_{a+\mu}^{\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} &= \Delta^n\left[\Delta_{a+\mu}^{-(n-\nu)}(t-a)^{\underline{\mu}}\right]\\ &= \Delta^n\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\nu)}(t-a)^{\underline{\mu+n-\nu}}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\nu)}\Delta^n\left[(t-a)^{\underline{\mu+n-\nu}}\right].\end{aligned}$$

En utilisant (1.8) et (2.10) on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{a+\mu}^{\nu}(t-a)^{\underline{\mu}} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\nu)}\frac{\Gamma(\mu+n+1-\nu)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}.\end{aligned}$$

■

Exemple 2.1.3. *Calculons* $\Delta_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\underline{\frac{3}{2}}}$.
En utilisant (2.20) *on trouve*

$$\begin{aligned}\Delta_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{2}}(t-1)^{\underline{\frac{3}{2}}} &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1)}(t-1)^{\underline{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)}(t-1)^{\underline{1}}\\ &= \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)}(t-1), \quad t\in\mathbb{N}_1.\end{aligned}$$

Théorème 2.1.6. *Soient* $\mu > 0$ *et* $\nu\in\mathbb{R}_+^*$. *Alors*

(i) $\Delta_{a+\mu}^{-\nu}h_\mu(t,a) = h_{\mu+\nu}(t,a), \quad t\in\mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$,

(ii) $\Delta_{a+\mu}^{\nu}h_\mu(t,a) = h_{\mu-\nu}(t,a), \quad t\in\mathbb{N}_{a+\mu-\nu}$.

Démonstration . (i) D'après (2.10) et (2.2) on a

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{-\nu} h_\mu(t,a) &= \Delta_{a+\mu}^{-\nu} \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} (t-a)^{\underline{\mu+\nu}} \\
&= \frac{(t-a)^{\underline{\mu+\nu}}}{\Gamma(\mu+\nu+1)} \\
&= h_{\mu+\nu}(t,a).
\end{aligned}$$

(ii) En utilisant (2.20) et (2.2) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^{\nu} h_\mu(t,a) &= \Delta_{a+\mu}^{\nu} \frac{(t-a)^{\underline{\mu}}}{\Gamma(\mu+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} (t-a)^{\underline{\mu-\nu}} \\
&= \frac{(t-a)^{\underline{\mu-\nu}}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \\
&= h_{\mu-\nu}(t,a).
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.7. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $n-1 < \nu \leq n$. Alors*

$$\Delta_a^{\nu} f(t) = \sum_{k=0}^{t+\nu-a} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t+\nu-k), \quad t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}, \tag{2.21}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-\nu} f(t) &= \sum_{k=0}^{t-\nu-a} (-1)^k \binom{-\nu}{k} f(t-\nu-k) \\
&= \sum_{k=0}^{t-\nu-a} \binom{\nu+k-1}{k} f(t-\nu-k), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Démonstration . Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$, $n-1 \leq \nu \leq n$ et $t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}$. Alors

$t = a + n - \nu + m$ avec $m \in \mathbb{N}$. En utilisant (1.7), (2.2) et (2.9) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{\nu} f(t) &= \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-1}(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta\tau \\
&= \sum_{\tau=a}^{t+\nu} \frac{(t-\sigma(\tau))^{\underline{-\nu-1}}}{\Gamma(-\nu)} f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=a}^{t+\nu} \frac{\Gamma(t-\tau)}{\Gamma(t-\tau+\nu+1)\Gamma(-\nu)} f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=a}^{a+n+m} \frac{\Gamma(a+n-\nu+m-\tau)}{\Gamma(a+n+m-\tau+1)\Gamma(-\nu)} f(\tau) \\
&= \sum_{\tau=0}^{n+m} \frac{\Gamma(n+m-\tau-\nu)}{\Gamma(n+m-\tau+1)\Gamma(-\nu)} f(a+\tau) \\
&= f(a+n+m) + \sum_{\tau=0}^{n+m-1} \frac{(n+m-1-\tau-\nu)\cdots(-\nu)}{\Gamma(n+m-\tau+1)} f(a+\tau) \\
&= f(a+n+m) + \sum_{\tau=0}^{n+m-1} (-1)^{n+m-\tau} \frac{(\nu)\cdots(\nu-(n+m-\tau)+1)}{\Gamma(n+m-\tau+1)} f(a+\tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{\nu} f(t) &= \sum_{\tau=0}^{n+m} (-1)^{n+m-\tau} \binom{\nu}{n+m-\tau} f(a+\tau) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(a+n+m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{\nu}{k} f((a+n-\nu+m)+\nu-k) \\
&= \sum_{k=0}^{t-a+\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t+\nu-k).
\end{aligned}$$

Donc (2.21) est vérifié.
Pour montrer (2.22) il suffit d'utiliser (2.21) et la relation

$$\binom{-\nu}{k} = (-1)^k \binom{\nu+k-1}{k}.$$

■

2.2 Règles de compositions

2.2.1 Composition de deux sommes fractionnaires

.

Théorème 2.2.1. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ une fonction réelle et $\mu,\ \nu \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$\left[\Delta_{a+\nu}^{-\mu}(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) = (\Delta_a^{-(\mu+\nu)} f)(t) = \left[\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(\Delta_a^{-\mu} f)\right](t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}. \tag{2.23}$$

Démonstration . Soit t $\in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}$. En utilisant la définition de la somme fractionnaire on trouve

$$\begin{aligned}
\left[\Delta_{a+\nu}^{-\mu}(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) &= \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} h_{\mu-1}(t,\sigma(s))\left(\Delta_a^{-\nu} f\right)(s)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} (t-\sigma(s))^{\underline{\mu-1}}\left(\Delta_a^{-\nu} f\right)(s)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu} (t-\sigma(s))^{\underline{\mu-1}}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{r=a}^{s-\nu}(s-\sigma(r))^{\underline{\nu-1}} f(r)\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+\nu}^{t-\mu}\sum_{r=a}^{s-\nu}(t-\sigma(s))^{\underline{\mu-1}}(s-\sigma(r))^{\underline{\nu-1}} f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)}\sum_{s=r+\nu}^{t-\mu}(t-\sigma(s))^{\underline{\mu-1}}(s-\sigma(r))^{\underline{\nu-1}} f(r).
\end{aligned}$$

Soit $x = s-\sigma(r)$, alors si $s = t-\mu$, $x = t-\mu-\sigma(r)$ et $t-\sigma(s) = t-x-r-2$. Donc

$$\begin{aligned}
\left[\Delta_{a+\nu}^{-\mu}(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)}\left[\sum_{x=\nu-1}^{t-\mu-\sigma(r)}(t-x-r-2)^{\underline{\mu-1}} x^{\underline{\nu-1}}\right] f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)}\left[\sum_{x=\nu-1}^{t-\mu-r-1}(t-r-1-\sigma(x))^{\underline{\mu-1}} x^{\underline{\nu-1}}\right] f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{x=\nu-1}^{(t-r-1)-\mu}(t-\sigma(r)-\sigma(x))^{\underline{\mu-1}} x^{\underline{\nu-1}}\right] f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)}\left[\Delta_{\nu-1}^{-\mu} t^{\underline{\nu-1}}\right]_{t\to t-r-1} f(r).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.10) on obtient

$$\begin{aligned}
\left[\Delta_{a+\nu}^{-\mu}(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}(t-r-1)^{\underline{\mu+\nu-1}} f(r)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \sum_{r=a}^{t-(\mu+\nu)} (t-\sigma(r))^{\mu+\nu-1} f(r)\\
&= (\Delta_a^{-(\mu+\nu)}) f(t).
\end{aligned}$$

Comme μ et ν sont arbitraires, alors

$$\left[\Delta_{a+\nu}^{-\mu}(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) = (\Delta_a^{-(\mu+\nu)} f)(t) = \left[\Delta_{a+\mu}^{-\nu}(\Delta_a^{-\mu} f)\right](t), \quad \forall t \in \mathbb{N}_{a+\mu+\nu}.$$

■

2.2.2 Composition d'un opérateur de différence fractionnaire avec une somme fractionnaire

Lemme 2.2.1. *Soient* $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ *et* $\nu > 0$ *avec* $n-1 < \nu \leq n$. *Alors*

$$\left[\Delta^k(\Delta_a^{-\nu} f)\right](t) = (\Delta_a^{k-\nu} f)(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}, \tag{2.24}$$

et

$$\left[\Delta^k(\Delta_a^{\nu} f)\right](t) = (\Delta_a^{k+\nu} f)(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}. \tag{2.25}$$

Démonstration . Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $\nu > 0$ avec $n-1 < \nu \leq n$.

• Supposons que $\nu = n$, alors pour $t \in \mathbb{N}_{a+n}$ on a

$$\Delta\Delta_a^{-1} f(t) = \Delta\left[\int_a^t f(\tau)\Delta\tau\right].$$

En utilisant le Théorème 1.3.3 (v) on trouve

$$\Delta\Delta_a^{-1} f(t) = f(t).$$

Maintenant soit $k \geq 1$. En utilisant (2.23) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1}\Delta_a^{k+1} f(t) &= \Delta^{k+1}\Delta_{a+k}^{-1}\Delta_a^{-k} f(t) \\
&= \Delta^k\left[\Delta\Delta_{a+k}^{-1}\right]\Delta_a^{-k} f(t) \\
&= \Delta^k\Delta_a^{-k} f(t) \\
&= f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+k+1}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{N}_{a+n}$ on a

$$\begin{cases}
\Delta^k\Delta_a^{-n} f(t) = \Delta^{k-n}\left[\Delta^n\Delta_a^{-n}\right] f(t) = \Delta^{k-n} f(t), \quad k \geq n, \\
\Delta^k\Delta_a^{-n} f(t) = \Delta^k\Delta_{a+n-n}^{-k}\left[\Delta_a^{-(n-k)}\right] f(t) = \Delta_a^{k-n} f(t), \quad k < n.
\end{cases}$$

Alors pour tout k $\in \mathbb{N}$, (2.24) est vraie pour le cas $\nu = n$.

Pour (2.25). Il est clair que les opérateurs de différence d'ordre entier commutent.

• Supposons que $n-1 < \nu < n$. Tout d'abord montrons que

$$\Delta\Delta_a^{\nu} f(t) = \Delta_a^{1+\nu} f(t).$$

En utilisant les formules (1.21) et (2.9) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta_a^\nu f(t) &= \Delta\left[\int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-1}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau\right] \\
&= \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau + h_{\nu-1}(\sigma(t),t+\nu+1)f(t+\nu+1) \\
&= \int_a^{t+\nu+1} h_{-\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau + f(t+\nu+1) \\
&= \int_a^{t+\nu+2} h_{-\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \\
&= \Delta_a^{-(-\nu-1)} f(t) \\
&= \Delta_a^{1+\nu} f(t).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Delta^k \Delta_a^\nu f(t) &= \Delta^{k-1}\left[\Delta\Delta_a^\nu f(t)\right] \\
&= \Delta^{k-1}\Delta_a^{1+\nu} f(t) \\
&= \Delta_a^{k+\nu} f(t).
\end{aligned}$$

D'où (2.25).

De la même manière on peut montrer (2.24).

■

Théorème 2.2.2. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ et $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \nu \le n$, $n \in \mathbb{N}_1$. Alors*

$$\Delta_{a+\mu}^\nu \Delta_a^{-\mu} f(t) = \Delta_a^{\nu-\mu} f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu+n-\nu}. \tag{2.26}$$

Démonstration . Soient $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \nu \le n$ et $t \in \mathbb{N}_{a+\mu+n-\nu}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+\mu}^\nu \Delta_a^{-\mu} f(t) &= \Delta^n \Delta_{a+\mu}^{-(n-\nu)} \Delta_a^{-\mu} f(t) \\
&= \Delta^n \Delta_a^{-(n-\nu+\mu)} f(t).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.23) on obtient

$$\Delta_{a+\mu}^\nu \Delta_a^{-\mu} f(t) = \Delta_a^{n-(n-\nu+\mu)} f(t).$$

De (2.24) on trouve

$$\Delta_{a+\mu}^\nu \Delta_a^{-\mu} f(t) = \Delta_a^{\nu-\mu} f(t).$$

■

2.2.3 Composition d'une somme fractionnaire avec un opérateur de différence fractionnaire

Théorème 2.2.3. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, $k \in \mathbb{N}$ et $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \mu \leq n$. Alors*

$$\Delta_a^{-\nu}\Delta^k f(t) = \Delta_a^{k-\nu} f(t) - \sum_{j=0}^{k-1} h_{\nu-k+j}(t,a)\Delta^j f(a), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\nu}, \tag{2.27}$$

et

$$\Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta_a^{\mu} f(t) = \Delta_a^{\mu-\nu} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} h_{\nu-n+j}(t-n+\nu,a)\Delta_a^{j-(n-\mu)} f(a+n-\mu), \quad t \in \mathbb{N}_{a+n-\mu+\nu}. \tag{2.28}$$

Démonstration . 1. Montrons (2.27)

i) Supposons que k = 1.

$$\begin{aligned} h_{\nu-1}(t, t-\nu+1) &= \frac{(t-t+\nu-1)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu-1+1)} \\ &= \frac{(\nu-1)^{\underline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \\ &= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)\Gamma(\nu)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\nu-2}(t, t-\nu+2) &= \frac{(t-t+\nu-2)^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-2+1)} \\ &= \frac{(\nu-2)^{\underline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-1)} \\ &= \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(1)\Gamma(\nu-1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties et

$$h_{\nu-1}(t, t-\nu+1) = 1 = h_{\nu-2}(t, t-\nu+2), \quad t \in \mathbb{N}_{a+\nu},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-\nu}\Delta f(t) &= \int_a^{t-\nu+1} h_{\nu-1}(t,\sigma(\tau))\Delta f(\tau)\Delta\tau \\
&= h_{\nu-1}(t,\tau)f(t)|_{\tau=a}^{t-\nu+1} + \int_a^{t-\nu+1} h_{\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \\
&= h_{\nu-1}(t,t-\nu+1)f(t-\nu+1) - h_{\nu-1}(t,a)f(a) + \int_a^{t-\nu+1} h_{\nu-2}(t,\sigma(\tau))\Delta\tau \\
&= f(t-\nu+1) - h_{\nu-1}(t,a)f(a) + \int_a^{t-\nu+1} h_{\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau \\
&= \int_a^{t-\nu+2} h_{\nu-2}(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau - h_{\nu-1}(t,a)f(a) \\
&= \Delta_a^{1-\nu}f(t) - h_{\nu-1}(t,a)f(a).
\end{aligned}$$

Donc (2.27) est vérifiée pour $k=1$.

ii) Supposons que $k \geq 1$. Donc pour $t \in \mathbb{N}_{a+n-\nu}$ on a

$$\Delta_a^{-\nu}\Delta^{k+1}f(t) = \Delta_a^{-\nu}\Delta^k\Delta f(t).$$

En utilisant (2.23) on obtient

$$\Delta_a^{-\nu}\Delta^{k+1}f(t) = \Delta_a^{k-\nu}\Delta f(t) - \sum_{j=0}^{k-1}\Delta h_{\nu-k+j}(t,a)\Delta^j f(a)$$

En utilisant le Théorème 2.1.6 on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta_a^{-\nu}\Delta^{k+1}f(t) &= \Delta_a^{k-\nu}\Delta f(t) - \sum_{j=0}^{k-1} h_{\nu-k-1+j}(t,a)\Delta^j f(a) \\
&= \Delta_a^{-\nu}\Delta^{k+1}f(t) - \sum_{j=0}^{k-1} h_{\nu-k-1+j}(t,a)\Delta^j f(a).
\end{aligned}$$

D'où (2.27).

2. Montrons maintenant (2.28).
   Soit $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \mu \leq n$. Supposons que $g(t) = \Delta_a^{-(n-\mu)}f(t)$ et $b = a+n-\mu$, alors pour $t \in \mathbb{N}_{a+n-\mu+\nu}$ on a

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) &= \Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta^n(\Delta_a^{-(n-\mu)})f(t) \\
&= \Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta^n g(t).
\end{aligned}$$

En appliquant (2.27) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) &= \Delta_{a+n-\mu}^{n-\nu}g(t) - \sum_{j=0}^{n-1} h_{\nu-n+j}(t,b)\Delta^j g(b) \\
&= \Delta_{a+n-\mu}^{n-\nu}\Delta_a^{-(n-\mu)}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} h_{\nu-n+j}(t,b)\Delta^j\Delta_a^{-(n-\mu)}f(b).
\end{aligned}$$

En utilisant (2.26) on trouve

$$\Delta_{a+n-\mu}^{-\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) = \Delta_a^{\mu-\nu}f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} h_{\nu-n+j}(t-n+\nu,a)\Delta_a^{j-n+\mu}f(a+n-\mu).$$

Donc (2.28) est vérifiée.

■

2.2.4 Composition de deux opérateurs de différence fractionnaires

Théorème 2.2.4. *Soient $f : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ une fonction réelle $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \nu \leq n$ et $m-1 < \mu \leq m$. Alors si $t \in \mathbb{N}_{a+m-\mu+n-\nu}$ on a*

$$\Delta_{a+m-\mu}^{\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) = \Delta_a^{\nu+\mu}f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} h_{-\nu-m+j}(t-m+\mu,a)\Delta_a^{j-m+\mu}f(a+m-\mu). \quad (2.29)$$

Si $\nu = n$ avec $n-1 < \nu < n$, alors (2.29) *simplifie par*

$$\Delta_{a+m-\mu}^{\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) = \Delta_a^{\nu+\mu}f(t), \quad t \in \mathbb{N}_{a+m-\mu}.$$

Démonstration . Posons que $\nu, \mu > 0$ avec $n-1 < \nu \leq n$ et $m-1 < \mu \leq m$.

- Supposons que $\nu = n$, alors d'après le Lemme 2.2.1 on a (2.29).
- Si $n-1 < \nu < n$, alors pour t $\in \mathbb{N}_{a+m-\mu+n-\nu}$ on a

$$\begin{aligned}\Delta_{a+m-\mu}^{\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) &= \Delta^n \left[\Delta_{a+m-\mu}^{-(n-\nu)}\Delta_a^{\mu}f(t)\right] \\ &= \Delta^n \Big[\Delta_a^{-n+\nu+\mu}f(t) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_a^{j-m+\mu}f(a+m-\mu)h_{n-\nu-m+j}(t-m+\mu,a)\Big].\end{aligned}$$

En utilisant (2.28) et le Lemme 2.2.1 on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_{a+m-\mu}^{\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) &= \Delta_a^{\nu+\mu}f(t) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_a^{j-m+\mu}f(a+m-\mu)\Delta^n h_{n-\nu-m+j}(t-m+\mu,a).\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 2.1.6 on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_{a+m-\mu}^{\nu}\Delta_a^{\mu}f(t) &= \Delta_a^{\nu+\mu}f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_a^{j-m+\mu}f(a+m-\mu)h_{-\nu-m+j}(t-m+\mu,a) \\ &= \Delta_a^{\nu+\mu}f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta_a^{j-m+\mu}h_{-\nu-m+j}(t-m+\mu,a)f(a+m-\mu).\end{aligned}$$

D'où (2.29). ■

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

Ce chapitre est partagé en cinq sections. Dans la première section et la deuxième section, nous introduisons la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques discrètes. Dans la troisième section nous étudions une équation aux différences linéaire du premier ordre. Dans la quatrième section, on va utiliser la méthode de factorisation pour résoudre une équation aux différences linéaire d'ordre deux. Nous finissons le chapitre par l'étude de l'existence de la solution d'une équation aux différences fractionnaire. Les notion de ce chapitre sont de [6].

3.1 Fonction exponentielle

Considérons le problème suivant

$$\Delta x(t) = p(t)x(t), \tag{3.1}$$

$$x(s) = 1, \tag{3.2}$$

où $t, s \in \mathbb{N}_a$.

Théorème 3.1.1. *Soient $p \in \mathcal{R}$ telle que $\mathcal{R} = \{p : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}, 1 + p(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{N}_a\}$ et $s \in \mathbb{N}_a$. Alors*

$$e_p(t,s) = \begin{cases} \prod\limits_{\tau=s}^{t-1} [1 + p(\tau)], & t \in \mathbb{N}_s \\ \prod\limits_{\tau=t}^{s-1} [1 + p(\tau)]^{-1}, & t \in \mathbb{N}_a^{s-1}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Démonstration . De l'équation (3.1) on a

$$x(t+1) - x(t) = p(t)x(t), \quad t \in \mathbb{N}_s,$$

donc

$$x(t+1) = (1+p(t))x(t), \quad t \in \mathbb{N}_s. \tag{3.4}$$

1) Soit $t = s$, alors (3.4) devient

$$x(s+1) = (1+p(s))x(s).$$

En utilisant la condition (3.2) on trouve

$$x(s+1) = 1 + p(s). \tag{3.5}$$

Maintenant posons $t = s+1$ dans (3.4), alors

$$x(s+2) = (1+p(s+1))x(s+1). \tag{3.6}$$

Substituons (3.5) dans (3.6) on trouve

$$x(s+2) = (1+p(s+1))(1+p(s))$$

De la même manière on obtient

$$x(t,s) = \prod_{\tau=s}^{t-1}(1+p(\tau)) = e_p(t,s).$$

2) Supposons que $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$. De (3.4) on a

$$x(t) = \frac{1}{1+p(t)}x(t+1). \tag{3.7}$$

Soit $t = s-1$, alors

$$x(s-1) = \frac{1}{1+p(s-1)}x(s).$$

En utilisant la condition (3.2) on a

$$x(s-1) = \frac{1}{1+p(s-1)}. \tag{3.8}$$

Maintenant si $t = s-2$, alors de (3.7) on a

$$x(s-2) = \frac{1}{1+p(s-2)}x(s-1).$$

En utilisant (3.8) on trouve

$$x(s-2) = \frac{1}{(1+p(s-2))(1+p(s-1))}.$$

De la même manière on obtient

$$x(t) = \prod_{\tau=t}^{s-1}(1+p(\tau))^{-1} = e_p(t,s), \quad t \in \mathbb{N}_a^{s-1}.$$

$\blacksquare$

Définition 3.1.1. *Soit* $\mathcal{R} = \{p : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}, 1+p(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{N}_a\}$. *La fonction exponentielle* $e_p(t,s)$ *associée à* $p \in \mathcal{R}$ *en* $s \in \mathbb{N}_a$ *est la solution unique du problème* (3.1)-(3.2).

Exemple 3.1.1. *Si* $p \in \mathcal{R}$ *est une fonction constante avec* $p \neq -1$, *alors d'après la formule* (3.3). *On a*

$$\begin{aligned} e_p(t,s) &= \prod_{t=s}^{t-1} [1 + p(t)] \\ &= (1+p)^{t-s}, \quad t \in \mathbb{N}_a. \end{aligned}$$

Exemple 3.1.2. *Soit* p *la fonction définie par* $p(t) = t-1$, $t \in \mathbb{N}_1$, *alors* $1+p(t) = t \neq 0$. *En utilisant* (3.3) *on obtient*

$$\begin{aligned} e_p(t,s) &= \prod_{\tau=1}^{t-1} [1 + p(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=1}^{t-1} \tau \\ &= (t-1)!. \end{aligned}$$

Théorème 3.1.2. [6] *Soit* $p \in \mathcal{R}$. *Alors la solution générale de l'équation*

$$\Delta y(t) = p(t) y(t), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

est donnée par

$$y(t) = c e_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

où c *est une constante réelle.*

Définition 3.1.2. *Soient* p, $q \in \mathcal{R}$. *On définit l'opération* $\oplus$ *par*

$$p \oplus q = p + q + pq. \tag{3.9}$$

Théorème 3.1.3. *Soient* p, $q \in \mathcal{R}$ *et* t, s, $r \in \mathbb{N}_a$. *Alors*

(i) $e_0(t,s) = 1$, *et* $e_p(t,t) = 1$.

(ii) $e_p(t,s) \neq 0$.

(iii) *Si* $1 + p > 0$, *alors* $e_p(t,s) > 0$.

(iv) $\Delta e_p(t,s) = p(t) e_p(t,s)$.

(v) $e_p(t,s) = \frac{1}{e_p(s,t)}$.

(vi) $e_p^\sigma(t,s) = e_p(\sigma(t), s) = [1 + p(t)] e_p(t,s)$.

(vii) $e_p(t,s) e_p(s,r) = e_p(t,r)$.

(viii) $e_p(t,s) e_q(t,s) = e_{p \oplus q}(t,s)$.

Démonstration . $(i), (ii), (iii), (iv)$ et (v) sont évidents.
(vi) En utilisant le Théorème 3.1.1 on trouve

$$e_p(\sigma(t), s) = \prod_{\tau=s}^{\sigma(t)-1} [1 + p(\tau)], \quad t \in \mathbb{N}_s,$$

et

$$e_p(\sigma(t), s) = \prod_{\tau=\sigma(t)}^{s-1} [1 + p(\tau)]^{-1}, \quad t \in \mathbb{N}_a^{s-1}.$$

Alors si $t \in \mathbb{N}_s$ on a

$$\begin{aligned} e_p(\sigma(t), s) &= \prod_{\tau=s}^{t} [1 + p(\tau)] \\ &= [1 + p(t)] \prod_{\tau=s}^{t-1} [1 + p(\tau)] \\ &= [1 + p(t)] e_p(t, s). \end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$ on a

$$\begin{aligned} e_p(\sigma(t), s) &= \prod_{\tau=t+1}^{s-1} [1 + p(\tau)]^{-1} \\ &= [1 + p(t)] \prod_{\tau=t}^{s-1} [1 + p(\tau)]^{-1} \\ &= [1 + p(t)] e_p(t, s). \end{aligned}$$

(vii) Si $t \in \mathbb{N}_s$ et $s \in \mathbb{N}_r$, alors

$$\begin{aligned} e_p(t, s) e_p(s, r) &= \prod_{\tau=s}^{t-1} [1 + p(\tau)] \prod_{\tau=r}^{s-1} [1 + p(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=r}^{t-1} [1 + p(\tau)] \\ &= e_p(t, r). \end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$ et $s \in \mathbb{N}_a^{r-1}$, alors

$$\begin{aligned} e_p(t, s) e_p(s, r) &= \prod_{\tau=t}^{s-1} [1 + p(\tau)]^{-1} \prod_{\tau=s}^{r-1} [1 + p(\tau)]^{-1} \\ &= \prod_{\tau=t}^{r-1} [1 + p(\tau)]^{-1} \\ &= e_p(t, r). \end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{N}_s^{r-1}$, on a

$$\begin{aligned} e_p(t,s)e_p(s,r) &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)]\prod_{\tau=s}^{r-1}[1+p(\tau)]^{-1} \\ &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)]\prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)]^{-1}\prod_{\tau=t}^{r-1}[1+p(\tau)]^{-1} \\ &= \prod_{\tau=t}^{r-1}[1+p(\tau)]^{-1} \\ &= e_p(t,r). \end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{N}_r$, alors

$$\begin{aligned} e_p(t,s)e_p(s,r) &= \prod_{\tau=t}^{s-1}[1+p(\tau)]^{-1}\prod_{\tau=r}^{s-1}[1+p(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=t}^{s-1}[1+p(\tau)]^{-1}\prod_{\tau=r}^{t-1}[1+p(\tau)]\prod_{\tau=t}^{s-1}[1+p(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=r}^{t-1}[1+p(\tau)] \\ &= e_p(t,r). \end{aligned}$$

$(viii)$ Si $t \in \mathbb{N}_s$ on a

$$\begin{aligned} e_p(t,s)e_q(t,s) &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)]\prod_{\tau=s}^{t-1}[1+q(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)][1+p(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)+q(\tau)+p(\tau)q(\tau)] \\ &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+(p\oplus q)(\tau)] \\ &= e_{p\oplus q}(t,s). \end{aligned}$$

Si $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$, alors

$$\begin{aligned}
e_p(t,s)e_q(t,s) &= \prod_{\tau=t}^{s-1}[1+p(\tau)]^{-1}\prod_{\tau=t}^{s-1}[1+q(\tau)]^{-1}\\
&= \prod_{\tau=t}^{s-1}[1+p(\tau)]^{-1}[1+p(\tau)]^{-1}\\
&= \prod_{\tau=t}^{s-1}\frac{1}{[1+p(\tau)+q(\tau)+p(\tau)q(\tau)]}\\
&= \prod_{\tau=t}^{s-1}[1+(p\oplus q)(\tau)]^{-1}\\
&= e_{p\oplus q}(t,s).
\end{aligned}$$

■

Définition 3.1.3. *Soient $p,\ q \in \mathcal{R}$. On définit l'opération $\ominus$ par*

$$p \ominus q = p \oplus [\ominus q] = \frac{p-q}{1+q}, \tag{3.10}$$

où

$$\ominus p = \frac{-p}{1+p}, \quad \forall p \in \mathcal{R}. \tag{3.11}$$

Théorème 3.1.4. *Soient $p,\ q \in \mathcal{R}$ et $t,\ s \in \mathbb{N}_a$. Alors*

$$e_{\ominus p}(t,s) = \frac{1}{e_p(t,s)}. \tag{3.12}$$

$$\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s). \tag{3.13}$$

Démonstration . Supposons $t \in \mathbb{N}_s$, alors en utilisant (3.11) on obtient

$$\begin{aligned}
e_{\ominus p}(t,s) &= \prod_{\tau=s}^{t-1}[1+(\ominus p)(\tau)]\\
&= \prod_{\tau=s}^{t-1}\left[1-\frac{p(\tau)}{1+p(\tau)}\right]\\
&= \prod_{\tau=s}^{t-1}\frac{1}{1+p(\tau)}\\
&= \frac{1}{\prod\limits_{\tau=s}^{t-1}[1+p(\tau)]}\\
&= \frac{1}{e_p(t,s)}.
\end{aligned}$$

De la même manière on peut montrer (3.12) si $t \in \mathbb{N}_a^{s-1}$.
Montrons (3.13). En utilisant le Théorème 3.1.3 (*viii*) et (3.10) on trouve

$$\begin{aligned}\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} &= e_p(t,s)\frac{1}{e_q(t,s)}\\ &= e_p(t,s)e_{\ominus q}(t,s)\\ &= e_{p\oplus[\ominus q]}(t,s)\\ &= e_{p\ominus q}(t,s).\end{aligned}$$

■

Définition 3.1.4. *Soit $\mathcal{R}^+ = \{p \in \mathcal{R}, 1 + p(t) > 0, t \in \mathbb{N}_a\}$. On définit l'opération $\odot$ par*

$$\alpha \odot p = (1+p)^\alpha - 1, \tag{3.14}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathcal{R}^+$.

Théorème 3.1.5. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathcal{R}^+$, $t \in \mathbb{N}_a$, et $\odot$ l'opération définie par* (3.14). *Alors*
- $e_p^\alpha(t,a) = e_{\alpha\odot p}(t,a), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathcal{R}^+.$

Démonstration . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et p $\in \mathcal{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned}e_p^\alpha(t,a) &= \Big\{\prod_{\tau=a}^{t-1}[1+p(\tau)]\Big\}^\alpha\\ &= \prod_{\tau=a}^{t-1}[1+p(\tau)]^\alpha\\ &= \prod_{\tau=a}^{t-1}[1+(1+p(\tau))^\alpha - 1]\end{aligned}$$

En utilisant (3.14) on obtient

$$\begin{aligned}e_p^\alpha(t,a) &= \prod_{\tau=a}^{t-1}[1+(\alpha\odot p)(\tau)]\\ &= e_{\alpha\odot p}(t,a).\end{aligned}$$

■

Lemme 3.1.1. *Soit $p,\ q \in \mathcal{R}$. Supposons que*

$$e_p(t,a) = e_q(t,a), \quad \forall t \in \mathbb{N}_a.$$

Alors $p = q$.

Démonstration . Soit p, q $\in \mathcal{R}$ et $e_p(t,a) = e_q(t,a)$ pour t $\in \mathbb{N}_a$. Alors

$$\Delta e_p(t,a) = \Delta e_q(t,a).$$

En utilisant le Théorème 3.1.3 (iv) on trouve

$$p(t)e_p(t,a) = q(t)e_q(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

Divisons par $e_p(t,a)$ on trouve

$$p(t) = q(t), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

■

3.2 Fonctions trigonométriques

Définition 3.2.1. *Soient $\pm ip \in \mathcal{R}$. On définit la fonction cosinus et la fonction sinus respectivement par*

$$\cos_p(t,a) = \frac{e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a)}{2}, \quad \sin_p(t,a) = \frac{e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a)}{2i}, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.15}$$

Théorème 3.2.1. *Soient $\pm ip \in \mathcal{R}$. Alors*

(i) $\cos_p(a,a) = 1, \quad \sin_p(a,a) = 0.$

(ii) $\cos_p^2(t,a) - \sin_p^2(t,a) = e_{p^2}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

(iii) $\Delta \cos_p(t,a) = -p(t)\sin_p(t,a)$ *et* $\Delta \sin_p(t,a) = p(t)\cos_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

(iv) $\cos_{-p}(t,a) = \cos_p(t,a)$ *et* $\sin_{-p}(t,a) = -\sin_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

(v) $e_{ip}(t,a) = \cos_p(t,a) + \sin_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

Démonstration . En utilisant (3.15) on obtient

(i) D'après le Théorème 3.1.3 (i) on a

$$\cos_p(a,a) = \frac{e_{ip}(a,a) + e_{-ip}(a,a)}{2} = 1,$$

et

$$\sin_p(a,a) = \frac{e_{ip}(a,a) - e_{-ip}(a,a)}{2i} = 0.$$

(ii) En utilisant la définition de $\oplus$ on a

$$\begin{aligned}\cos_p^2(t,a) - \sin_p^2(t,a) &= \frac{(e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a))^2 - (e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a))^2}{4} \\ &= e_{ip}(t,a)e_{-ip}(t,a) \\ &= e_{ip\oplus(-ip)}(t,a) \\ &= e_{p^2}(t,a).\end{aligned}$$

(iii)

$$\Delta \cos_p(t,a) = \Delta \left[\frac{e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a)}{2} \right].$$

Mais Δ est linéaire donc

$$\Delta \cos_p(t,a) = \frac{1}{2} \left[\Delta e_{ip}(t,a) + \Delta e_{-ip}(t,a) \right].$$

D'après (3.1) on trouve

$$\begin{aligned}
\Delta \cos_p(t,a) &= \frac{1}{2} \Big[ip(t) e_{ip}(t,a) - ip(t) e_{-ip}(t,a) \Big] \\
&= ip(t) \left[\frac{e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a)}{2} \right] \\
&= -p(t) \sin_p(t,a),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta \sin_p(t,a) &= \Delta \left[\frac{e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a)}{2i} \right] \\
&= \frac{1}{2i} \left[\Delta e_{ip}(t,a) - \Delta e_{-ip}(t,a) \right] \\
&= \frac{1}{2i} \Big[ip(t) e_{ip}(t,a) + ip(t) e_{-ip}(t,a) \Big] \\
&= ip(t) \Big[\frac{e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a)}{2i} \Big] \\
&= p(t) \cos_p(t,a).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\cos_{-p}(t,a) &= \frac{e_{-ip}(t,a) + e_{ip}(t,a)}{2} \\
&= \cos_p(t,a),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sin_{-p}(t,a) &= \frac{e_{-ip}(t,a) - e_{ip}(t,a)}{2} \\
&= -\sin_p(t,a).
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
\cos_p(t,a) + \sin_p(t,a) &= \left(\frac{e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a)}{2} \right) + i \left(\frac{e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a)}{2i} \right) \\
&= \frac{2e_{ip}(t,a)}{2} \\
&= e_{ip}(t,a).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Définition 3.2.2. *Soit $\pm p \in \mathcal{R}$. On définit la fonction cosinus hyperbolique et la fonction sinus hyperbolique par*

$$\cosh_p(t,a) = \frac{e_p(t,a) + e_{-p}(t,a)}{2}, \quad \sinh_p(t,a) = \frac{e_p(t,a) - e_{-p}(t,a)}{2}, \quad t \in \mathbb{N}_a, \tag{3.16}$$

où $e_{\pm p}$ est la fonction exponentiel définit par (3.3).

Théorème 3.2.2. *Soient $\pm p \in \mathcal{R}$. Alors*

(i) $\cosh_p(a,a) = 1, \quad \sinh_p(a,a) = 0.$

(ii) $\cosh_p^2(t,a) - \sinh_p^2(t,a) = e_{-p^2}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

(iii) $\Delta \cosh_p(t,a) = p(t)\sinh_p(t,a)$ *et* $\Delta \sinh_p(t,a) = p(t)\cosh_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

(iv) $\cosh_{-p}(t,a) = \cosh_p(t,a)$ *et* $\sinh_{-p}(t,a) = -\sinh_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a,$

(v) $e_p(t,a) = \cosh_p(t,a) + \sinh_p(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$

Démonstration . (i) D'après le Théorème 3.1.3 (i) et (3.16) on a

$$\cosh_p(a,a) = \frac{e_p(a,a) + e_{-p}(a,a)}{2} = 1,$$

et

$$\sinh_p(a,a) = \frac{e_p(a,a) - e_{-p}(a,a)}{2} = 0.$$

(ii) En utilisant (3.16) et la définition de $\oplus$ on trouve

$$\begin{aligned}
\cosh_p^2(t,a) - \sinh_p^2(t,a) &= \frac{(e_p(t,a) + e_{-p}(t,a))^2 - (e_p(t,a) - e_{-p}(t,a))^2}{4} \\
&= e_p(t,a)e_{-p}(t,a) \\
&= e_{p\oplus(-p)}(t,a) \\
&= e_{-p^2}(t,a).
\end{aligned}$$

(iii) De (3.16) on a

$$\Delta \cosh_p(t,a) = \Delta\left[\frac{e_p(t,a) + e_{-p}(t,a)}{2}\right].$$

Mais Δ est linéaire donc

$$\Delta \cosh_p(t,a) = \frac{1}{2}\left[\Delta e_p(t,a) + \Delta e_{-p}(t,a)\right].$$

D'après (3.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta \cosh_p(t,a) &= \frac{1}{2}\Big[p(t)e_p(t,a) - p(t)e_{-p}(t,a)\Big] \\
&= p(t)\left[\frac{e_p(t,a) - e_{-p}(t,a)}{2}\right] \\
&= p(t)\sinh_p(t,a),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta \sinh_p(t,a) &= \Delta \left[\frac{e_p(t,a) - e_{-p}(t,a)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\Delta e_p(t,a) - \Delta e_{-p}(t,a)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[p(t)e_p(t,a) + p(t)e_{-p}(t,a)\Big] \\
&= p(t)\Big[\frac{e_p(t,a) + e_{-p}(t,a)}{2}\Big] \\
&= p(t)\cosh_p(t,a).
\end{aligned}$$

(iv) En utilisant (3.16) on trouve

$$\begin{aligned}
\cosh_{-p}(t,a) &= \frac{e_{-p}(t,a) + e_p(t,a)}{2} \\
&= \cosh_p(t,a),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sinh_{-p}(t,a) &= \frac{e_{-p}(t,a) - e_p(t,a)}{2} \\
&= -\sinh_p(t,a).
\end{aligned}$$

(v) De (3.16) on a

$$\begin{aligned}
\cosh_p(t,a) + \sinh_p(t,a) &= \frac{e_p(t,a) + e_{-p}(t,a) + e_p(t,a) - e_{-p}(t,a)}{2} \\
&= \frac{2e_p(t,a)}{2} \\
&= e_p(t,a).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3. *Soient $\pm ip \in \mathcal{R}$. Alors pour $t \in \mathbb{N}_a$ on a*

(i) $\sin_{ip}(t,a) = i\sinh_p(t,a)$.

(ii) $\cos_{ip}(t,a) = \cosh_p(t,a)$.

(iii) $\sinh_{ip}(t,a) = i\sin_p(t,a)$.

(iv) $\cosh_{ip}(t,a) = \cos_p(t,a)$.

Démonstration . En utilisant (3.16) et (3.15) on trouve

(i)

$$\begin{aligned}
\sin_{ip}(t,a) &= \frac{1}{2i}\Big[e_{i^2p}(t,a) - e_{-i^2p}(t,a)\Big] \\
&= i\frac{e_p(t,a) - e_{-p}(t,a)}{2} \\
&= i\sinh_p(t,a).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\cos_{ip}(t,a) &= \frac{1}{2}\Big[e_{i^2p}(t,a) + e_{-i^2p}(t,a)\Big] \\
&= \frac{e_{-p}(t,a) + e_p(t,a)}{2} \\
&= \cosh_p(t,a).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\sinh_{ip}(t,a) &= \frac{e_{ip}(t,a) - e_{-ip}(t,a)}{2} \\
&= i\sin_p(t,a).
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\cosh_{ip}(t,a) &= \frac{e_{ip}(t,a) + e_{-ip}(t,a)}{2} \\
&= i\cos_p(t,a).
\end{aligned}$$

■

3.3 Équations aux différences linéaires du premier ordre

Dans cette section on va étudier l'équation aux différence linéaire du premier ordre suivante

$$\Delta y(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in \mathbb{N}_a, \tag{3.17}$$

où $p, q : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$ avec $p(t) \neq -1$, $\forall t \in \mathbb{N}_a$.

Théorème 3.3.1. *Supposons que $p \in \mathcal{R}$ et $q : \mathbb{N}_a \to \mathbb{R}$. Alors le problème*

$$\Delta y(t) = p(t)y(t) + q(t), \quad t \in \mathbb{N}_a, \tag{3.18}$$

$$y(a) = y_a, \tag{3.19}$$

admet une solution unique et cette solution est donnée par

$$y(t) = y_a e_p(t,a) + \int_a^t e_p(t,\sigma(s))q(s)\Delta s, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.20}$$

Démonstration . Tout d'abord montrons l'unicité de la solution du problème (3.18)-(3.19). Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème (3.18)-(3.19) et soit $z = y_1 - y_2$, alors

$$z(t) = y_1(t) - y_2(t), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

En utilisant la définition de Δ on trouve

$$\begin{aligned}\Delta z(t) &= \Delta y_1(t) - \Delta y_2(t)\\ &= p(t)y_1(t) + q(t) - p(t)y_2(t) - q(t)\\ &= p(t)(y_1 - y_2)(t)\\ &= p(t)z(t),\end{aligned}$$

et $z(a) = y_1(a) - y_2(a) = 0$, donc

$$z(t+1) = (p(t)+1)z(a), \quad t \in \mathbb{N}_a, \tag{3.21}$$

$$z(a) = 0. \tag{3.22}$$

Posons $t = a$ dans (3.21) et on utilisons (3.22) on trouve

$$z(a+1) = (p(a)+1)z(a) = 0.$$

De la même manière on peut montrer que $z(t) = 0$, $\forall$ t $\in \mathbb{N}_a$, donc $y_1 \equiv y_2$.
Comme la solution du problème (3.18)-(3.19) est unique donc il suffit de vérifier que la fonction définie par (3.20) est une solution du problème (3.18)-(3.19).
En utilisant la formule de Leibniz (1.23), la linéarité de Δ et la définition de la fonction exponentielle $e_p(t,a)$ on obtient

$$\begin{aligned}\Delta y(t) &= \Delta(y_a e_p(t,a) + \int_a^t e_p(t, \sigma(s)q(s)\Delta s))\\ &= y_a \Delta(e_p(t,a)) + \int_a^t \Delta(e_p(t,\sigma(s)))q(s)\Delta s + e_p(\sigma(t),\sigma(t))q(t)\\ &= y_a p(t) e_p(t,a) + \int_a^t p(t)e_p(t,\sigma(s))q(s)\Delta s + q(t)\\ &= p(t)\left[y_a e_p(t,a) + \int_a^t e_p(t,\sigma(s))q(s)\Delta s\right] + q(t)\\ &= p(t)y(t) + q(t).\end{aligned}$$

De plus $y(a) = y_a e_p(a,a) = y_a$. ■

Exemple 3.3.1. *Soit le problème*

$$\Delta y(t) = (t-1)y(t) + 1, \quad t \in \mathbb{N}_1 \tag{3.23}$$

$$y(1) = 1 - e. \tag{3.24}$$

En utilisant le Théorème 3.3.1 avec $p(t) = t-1$, $q(t) = 1$, $t \in \mathbb{N}_1$, $a = 1$ et $y_1 = 1 - e$ on trouve que la solution du problème (3.23)-(3.24) *est donnée par*

$$y(t) = (1-e)e_{t-1}(t,1) + \int_1^t e_{t-1}(t,\sigma(s))1\Delta s.$$

D'après le Théorème 3.1.3 (vi) on trouve

$$y(t) = e_{t-1}(t,1)\left(1 - e + \int_1^t e_{t-1}(1,\sigma(s))\Delta s\right).$$

En utilisation le Théorème 3.1.3 (v) on obtient

$$y(t) = e_{t-1}(t,1)\left(1 - e + \int_1^t \frac{1}{e_{t-1}(\sigma(s),1)}\Delta s\right).$$

D'après l'Exemple 3.1.2 on a $e_{t-1}(t,1) = (t-1)!$. *Alors*

$$\begin{aligned} y(t) &= (t-1)!\left(1 - e + \int_1^t \frac{1}{(\sigma(s)-1)!}\Delta s\right) \\ &= (t-1)!\left(1 - e + \int_1^t \frac{1}{(s+1-1)!}\Delta s\right) \\ &= (t-1)!\left(1 - e + \sum_{s=1}^{t-1} \frac{1}{s!}\right) \\ &= -(t-1)!\sum_{k=t}^{\infty} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. *La solution générale de l'équation* (3.17) *est donnée par*

$$y(t) = ce_p(t,a) + \int_a^t e_p(t,\sigma(s))q(s)\Delta s, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.25}$$

Exemple 3.3.2. *Soit l'équation aux différences*

$$\Delta y(t) = (\ominus 2)y(t) + t, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Alors la solution générale de l'équation (3.26) *est donnée par*

$$\begin{aligned} y(t) &= ce_p(t,a) + \int_a^t e_p(t,\sigma(s))q(s)\Delta s \\ &= ce_{\ominus 2}(t,0) + \int_0^t se_{\ominus 2}(t,\sigma(s))\Delta s \\ &= ce_{\ominus 2}(t,0) + \int_0^t se_2(\sigma(s),t)\Delta s. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 3.1.3 (vi) on a

$$y(t) = ce_{\ominus 2}(t,0) + 3\int_0^t se_2(s,t)\Delta s.$$

En utilisant l'intégration par partie (1.19) *on obtient*

$$\begin{aligned}
y(t) &= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2} s e_2(s,t)|_{s=0}^{t} - \frac{3}{2}\int_0^t e_2(\sigma(s),t)\Delta s \\
&= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}\int_0^t e_2(s,t)\Delta s \\
&= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} e_2(s,t)|_0^t \\
&= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} e_2(t,t) + \frac{9}{4} e_2(0,t) \\
&= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} e_2(0,t) \\
&= ce_{\ominus 2}(t,0) + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4} \\
&= \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^t + \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

3.4 Équations aux différences linéaires du second ordre

Dans cette partie on va utiliser la méthode de factorisation pour résoudre des équations aux différences linéaires d'ordre deux.

Exemple 3.4.1. *Soit l'équation aux différences linéaire suivante*

$$\Delta^2 y(t) - (t+2)\Delta y(t) + 2ty(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{3.27}$$

Tout d'abord, l'équation (3.27) *s'écrit sous la forme*

$$\Delta(\Delta y(t) - 2y(t)) - t(\Delta y(t) - 2y(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

En utilisant l'opérateur I on trouve que (3.28) *devient*

$$(\Delta - tI)(\Delta - 2I)y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Soit

$$v(t) = (\Delta - 2I)y(t), \quad t \in \mathbb{N},$$

alors

$$(\Delta - tI)v(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\Delta v(t) = tv(t), \quad t \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 3.1.2 on a

$$v(t) = c_2 e_t(t,0) = c_2 \prod_{s=0}^{t-1}(1+s) = c_2 t!, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Substituons (3.30) *dans* (3.29) *on obtient*

$$\Delta y(t) = 2y(t) + c_2 t!. \tag{3.31}$$

D'après la Remarque 3.3.1, la solution générale de l'équation (3.31) *est donnée par*

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e_2(t,0) + \int_0^t e_2(t,\sigma(s)) c_2 s! \Delta s \\ &= c_1 3^t + c_2 \int_0^t 3^{t-s-1} s! \Delta s \\ &= c_1 3^t + c_2 3^{t-1} \int_0^t \left(\frac{s!}{3^s}\right) \\ &= c_1 3^t + c_2 3^{t-1} \sum_{s=0}^{t-1} \frac{s!}{3^s}. \end{aligned}$$

D'où

$$y(t) = \alpha 3^t + \beta 3^{t-1} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{k!}{3^k},$$

Exemple 3.4.2. *Considérons l'équation aux différence d'Euler-Cauchy suivante*

$$t\sigma(t)\Delta^2 y(t) + ct\Delta y(t) + dy(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.32}$$

Où

$$1 + \frac{d}{t\sigma(t)} - \frac{c}{\sigma(t)} \neq 0, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.33}$$

Définition 3.4.1. *On appelle équation caractéristique de l'équation* (3.32) *l'équation*

$$\lambda(\lambda - 1) + c\lambda + d = 0, \tag{3.34}$$

et les solutions de cette équation sont appelées les racines caractéristiques.

Remarque 3.4.1. *1) En utilisant la condition* (3.33) *on trouve l'existence et l'unicité de la solution de l'équation* (3.32) *avec* $y(t_0) = A$ *et* $y(t_0+1) = B$ *où* $t_0 \in \mathbb{N}_a$ *et* $A, B \in \mathbb{R}$.
2) D'après la condition (3.33) *on a la solution générale de l'équation* (3.32) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

où $y_1(t)$ *et* $y_2(t)$ *sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (3.32).

Proposition 3.4.1. *Soient* α *et* β *les racines caractéristiques de l'équation* (3.34). *Alors la condition* (3.33) *est vérifiée si et seulement si* $\frac{\alpha}{t} \in \mathcal{R}$ *et* $\frac{\beta}{t} \in \mathcal{R}$.

Démonstration . Soient α et β les racines caractéristiques de l'équation (3.33), alors

$$(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)=\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0.$$

Donc

$$c-1=-(\alpha+\beta), \quad d=\alpha\beta.$$

Alors

$$\begin{aligned}1+\frac{d}{t\sigma(t)}-\frac{c}{\sigma(t)}&=1+\frac{\alpha\beta}{t\sigma(t)}-\frac{1-\alpha-\beta}{\sigma(t)}\\&=\frac{t\sigma(t)-(1-\alpha-\beta)t+\alpha\beta}{t\sigma(t)}\\&=\frac{t^2+(\alpha+\beta)t+\alpha\beta}{t\sigma(t)}\\&=\frac{(t+\alpha)(t+\beta)}{t\sigma(t)}\\&=\frac{(1+\frac{\alpha}{t})(t+\frac{\beta}{t})}{\sigma(t)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{t\sigma(t)}-\frac{c}{\sigma(t)}\neq 0 \Leftrightarrow &\frac{(1+\frac{\alpha}{t})(1+\frac{\beta}{t})}{\sigma(t)}\neq 0\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}1+\frac{\alpha}{t}\neq 0\\ 1+\frac{\beta}{t}\neq 0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}\frac{\alpha}{t}\in\mathcal{R}\\ \frac{\beta}{t}\in\mathcal{R}.\end{cases}\end{aligned}$$

■

Théorème 3.4.1. *Supposons que* (3.33) *est vérifiée. Alors l'équation* (3.32) *est équivalente à l'équation suivante*

$$(t\Delta-\alpha I)(t\Delta-\beta I)y(t)=0, \quad t\in\mathbb{N}_a. \tag{3.35}$$

Démonstration . Soit $y:\mathbb{N}_a\to\mathbb{C}$, alors pour tout $t\in\mathbb{N}_a$ on a

$$\begin{aligned}t\sigma(t)\Delta^2y(t)+ct\Delta y(t)+dy(t)&=t\sigma(t)\Delta^2y(t)+(1-\alpha-\beta)t\Delta y(t)+\alpha\beta y(t)\\&=\left[t\sigma(t)\Delta^2y(t)+t\Delta y(t)\right]-\beta t\Delta y(t)-\alpha\left[t\Delta y(t)-\beta y(t)\right]\\&=t\Delta\left[t\Delta y(t)-\beta y(t)\right]-\alpha\left[t\Delta y(t)-\beta y(t)\right]\\&=(t\Delta-\alpha I)(t\Delta-\beta I)y(t).\end{aligned}$$

■

Remarque 3.4.2. *Pour résoudre l'équation* (3.32), *il suffit de résoudre l'équation* (3.35).

Théorème 3.4.2. *Soient α et β les racines caractéristique de l'équation* (3.34) *où $\frac{\alpha}{t}$, $\frac{\beta}{t}$ $\in \mathcal{R}$ et $\alpha \neq \beta$. Alors la solution générale de l'équation* (3.32) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) + c_2 e_{\frac{\beta}{t}}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.36}$$

Démonstration . De l'équation (3.35) on trouve que si

$$(t\Delta - \alpha I)y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

alors $y(t)$ est une solution de l'équation (3.32).
En utilisant la définition de la fonction exponentielle on obtient que $y_1(t) = e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)$ est solution de l'équation

$$\Delta y(t) = \frac{\alpha}{t} y(t), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

d'où

$$y_1(t) = e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

est une solution de l'équation (3.32).
De la même manière on trouve que $y_2(t) = e_{\frac{\beta}{t}}(t,a)$, t $\in \mathbb{N}_a$ est une solution de l'équation (3.32). Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes et d'après la Remarque 3.4.1 (2) on trouve que la solution générale de l'équation (3.32) dans ce cas est donnée par (3.36). ■

Exemple 3.4.3. *Déterminons la solution générale de l'équation*

$$t\sigma(t)\Delta^2 y(t) - 5t\Delta y(t) + 8y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_1. \tag{3.37}$$

On a l'équation caractéristique de l'équation (3.37) *est*

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

Donc les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, donc d'après le Théorème 3.4.2 la solution générale de l'équation (3.37) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{2}{t}}(t,1) + c_2 e_{\frac{4}{t}}(t,1), \quad t \in \mathbb{N}_1.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ *et* $\frac{2}{t}$, $\frac{4}{t} \in \mathcal{R}$, *car* $\frac{2}{t} + 1 \neq 0$ *et* $\frac{4}{t} + 1 \neq 0$.
En utilisant (3.3) *on obtient*

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \prod_{s=1}^{t-1} \left(1 + \frac{2}{s}\right) + c_2 \prod_{s=1}^{t-1} \left(1 + \frac{4}{s}\right) \\ &= c_1 \prod_{s=1}^{t-1} \left(\frac{s+2}{s}\right) + c_2 \prod_{s=1}^{t-1} \left(\frac{s+4}{s}\right) \\ &= c_1 \frac{\prod_{s=1}^{t-1}(s+2)}{\prod_{s=1}^{t-1} s} + c_2 \frac{\prod_{s=1}^{t-1}(s+4)}{\prod_{s=1}^{t-1} s}. \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction factorielle on trouve

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 \frac{(t+1)^{\underline{2}}}{2!} + c_2 \frac{(t+3)^{\underline{4}}}{4!} \\ &= a_1 (t+1)^{\underline{2}} + a_2 (t+3)^{\underline{4}}, \quad t \in \mathbb{N}_1, \end{aligned}$$

où a, $b \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.4.3. *Soit* $\alpha \in \mathcal{R}$ *une racine double de l'équation caractéristique* (3.34) *et* $\frac{\alpha}{t}$ $\in \mathcal{R}$. *Alors la solution générale de l'équation* (3.32) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) + c_2 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) \sum_{s=a}^{t-1} \frac{1}{s+\alpha}, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.38}$$

Démonstration . On a $y_1(t) = e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)$ est une solution de l'équation (3.35) donc pour déterminer la solution générale de l'équation (3.32) il suffit de trouver une autre solution de l'équation (3.35), notée y_2 telle que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Remarquons que si y est une solution de l'équation

$$(t\Delta - \alpha I) y(t) = e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.39}$$

alors elle est une solution de l'équation (3.35).
Soit y_2 la solution de l'équation

$$\Delta y(t) = \frac{\alpha}{t} y(t) + \frac{1}{t} e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a,$$

avec $y(a) = 0$.
D'après le Théorème 3.3.1 on a

$$y_2(t) = \int_a^t e_{\frac{\alpha}{t}}(t, \sigma(s)) \frac{1}{s} e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a) \Delta s.$$

En utilisant le Théorème 3.1.3 (vi) on trouve

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_a^t \frac{1}{s} e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) e_{\frac{\alpha}{t}}(a,\sigma(s)) e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a) \Delta s \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) \int_a^t \frac{1}{s} e_{\frac{\alpha}{t}}(a,\sigma(s)) e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a) \Delta s. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 3.1.4 (1) on obtient

$$\begin{aligned} y_2(t) &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\int_a^t \frac{1}{s}\frac{1}{e_{\frac{\alpha}{t}}(\sigma(s),a)}e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a)\Delta s \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\int_a^t \frac{1}{s}e_{\ominus\frac{\alpha}{t}}(\sigma(s),a)e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a)\Delta s \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\int_a^t \left(\frac{1}{s+\alpha}\right)e_{\ominus\frac{\alpha}{t}}(s,a)e_{\frac{\alpha}{t}}(s,a)\Delta s. \end{aligned}$$

D'après (3.10) on a

$$\begin{aligned} y_2(t) &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\int_a^t \left(\frac{1}{s+\alpha}\right)e_{\frac{\alpha}{t}\ominus\frac{\alpha}{t}}(s,a)\Delta s \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\int_a^t \left(\frac{1}{s+\alpha}\right)\Delta s \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sum_{s=a}^{t-1}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right). \end{aligned}$$

Comme $y_1(t), y_2(t)$ sont linéairement indépendantes alors la solution générale de l'équation (3.32) est donnée par

$$y(t) = c_1 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a) + c_2 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sum_{s=a}^{t-1}\frac{1}{s+\alpha}, \quad t\in\mathbb{N}_a.$$

■

Exemple 3.4.4. *On considère l'équation aux différences suivante*

$$t\sigma(t)\Delta^2 y(t) - 3t\Delta y(t) + 4y(t) = 0, \quad t\in\mathbb{N}_a, \tag{3.40}$$

où $a>0$.
L'équation caractéristique de l'équation (3.40) *est*

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0.$$

Donc on a une racine double $\lambda = 2$.
En appliquant le Théorème 3.4.3 on obtient que la solution générale de l'équation (3.40) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{2}{t}}(t,a) + c_2 e_{\frac{2}{t}}(t,a)\sum_{s=a}^{t-1}\frac{1}{s+2}.$$

Théorème 3.4.4. *Soient $\lambda_1 = \alpha+i\beta$, $\lambda_2 = \alpha-i\beta$ les racines caractéristiques de l'équation* (3.32) *avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $\frac{\alpha}{t}\in\mathcal{R}$. Alors la solution générale de l'équation* (3.32) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\cos_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a) + c_2 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sin_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a), \quad t\in\mathbb{N}_a. \tag{3.41}$$

Démonstration . On a $y(t) = e_{\frac{\alpha+i\beta}{t}}(t,a)$ est une solution de l'équation (3.32).
Comme $\frac{\alpha}{t} \in \mathcal{R}$, alors $-\alpha \notin \mathbb{N}_a$ donc $\frac{\beta}{t+\alpha}$ est défini sur $\mathbb{N}_a$.
En utilisant la définition de $\oplus$ on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{t} \oplus \frac{i\beta}{t+\alpha} &= \frac{\alpha}{t} + \frac{i\beta}{t+\alpha} + \frac{\alpha}{t}\frac{i\beta}{t+\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{t} + \frac{i\beta t + \alpha i\beta}{t(t+\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{t} + \frac{i\beta(t+\alpha)}{t(t+\alpha)} \\ &= \frac{\alpha}{t} + i\frac{\beta}{t}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}y(t) &= e_{\frac{\alpha+i\beta}{t}}(t,a) \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}+i\frac{\beta}{t}}(t,a) \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}\oplus\frac{i\beta}{t+\alpha}}(t,a) \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)e_{\frac{i\beta}{t+\alpha}}(t,a).\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 3.2.1 (v) on trouve

$$\begin{aligned}y(t) &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\left(\cos_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a) + i\sin_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a)\right) \\ &= e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\cos_{\frac{\beta}{t+\alpha}} + ie_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sin_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a).\end{aligned}$$

Mais $c, d \in \mathbb{R}$, alors

$$e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\cos_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a) \quad et \quad e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sin_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a),$$

sont des solutions réelles de l'équation (3.32) et comme elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{N}_a$ donc la solution générale de l'équation (3.32) est définit par

$$y(t) = c_1 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\cos_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a) + c_2 e_{\frac{\alpha}{t}}(t,a)\sin_{\frac{\beta}{t+\alpha}}(t,a), \quad t \in \mathbb{N}_a.$$

■

Exemple 3.4.5. *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$t\sigma(t)\Delta^2 y(t) - 5t\Delta y(t) + 13y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_a. \tag{3.42}$$

L'équation caractéristique associent à cette équation est

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Donc il y a deux racines caractéristiques complexes $r = 3 \pm 2i$.
En appliquant le Théorème 3.4.4 on obtient que la solution générale de l'équation (3.42) *est donnée par*

$$y(t) = c_1 e_{\frac{3}{t}}(t,a)\cos_{\frac{2}{t+3}}(t,a) + c_2 e_{\frac{3}{t}}(t,a).$$

3.5 Résolution d'une équation aux différences fractionnaire

Dans cette section on va étudier l'existence de la solution d'une équation aux différences fractionnaire

Exemple 3.5.1. *Considérons l'équation aux différences fractionnaire suivante*

$$\Delta_{\nu-m}^{\nu}y(t)+q(t)y(t+\nu-m)=f(t),\quad t\in\mathbb{N},\tag{3.43}$$

avec

$$y(\nu-m+i)=\alpha_i,\tag{3.44}$$

où $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $0\leq i\leq m-1$, *sont des constantes.* q, $f:\mathbb{N}_a\to\mathbb{R}$, $\nu>0$ *et* $m\in\mathbb{N}$ *tels que* $m-1<\nu\leq m$.

Théorème 3.5.1. *Le problème* (3.43)-(3.44) *admet une solution unique .*

Démonstration . On a

$$\Delta_{\nu-m}^{\nu}y(t)=\Delta^m\Delta_{\nu-m}^{-(m-\nu)}y(t).$$

D'après le Lemme 2.1.1 on a $\Delta_{\nu-m}^{-(m-\nu)}y(t)$ est une combinaison linéaire de

$$y(\nu-m),y(\nu-m+1),\ldots,y(t-m+\nu)$$

et le coefficient de $y(t-m+\nu)$ est égale à 1. Alors pour chaque t fixé, $\Delta_{\nu-m}^{\nu}y(t)$ est une combinaison linéaire de $y(\nu-m)$, $y(\nu-m+1)$, ..., $y(t+\nu)$ et le coefficient de $y(t+\nu)$ est égale à 1.
Supposons dans (3.43) que $t=0$, alors

$$\Delta_{\nu-m}^{\nu}y(0)+q(0)y(\nu-m)=f(0),$$

donc $\exists\ \lambda_i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq m$ tels que

$$\lambda_1y(\nu-m)+\lambda_2y(\nu-m+1)+\cdots+\lambda_my(\nu-1)+y(\nu)+q(0)y(\nu-m)=f(0).$$

En utilisant les conditions (3.44) on obtient

$$\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_{m-1}+y(\nu)+q(0)\alpha_0=f(0),\tag{3.45}$$

alors si $y(\nu)$ est une vérifiée l'équation (3.45) donc $y(t)$ est vérifiée l'équation (3.43) en $t=0$. Par induction on peut montrer que la solution de (3.43)-(3.44) existe et unique sur $\mathbb{N}_{\nu-m}$. ■

Théorème 3.5.2. *Soient $\mu > 0$ et$m \in \mathbb{N}$ tels que $m-1 < \mu \leq m$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors la fonction x définie par*

$$x(t) = c_1(t-a)^{\underline{\mu-1}} + c_2(t-a)^{\underline{\mu-2}} + \cdots + c_m(t-a)^{\underline{\mu-m}},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ sont des constantes, est une solution de l'équation

$$\Delta^{\mu}_{a+\mu-m} y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}_{a+\mu-m}. \tag{3.46}$$

Démonstration . Soient $\mu > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $m-1 < \mu \leq m$. Alors
Si $\mu = m$ on a pour tout $k \in [1, m]$

$$\Delta^{\mu}_{a+\mu-m}(t-a)^{\underline{\mu-k}} = \Delta^{m}(t-a)^{\underline{m-k}} = 0.$$

Si $m-1 < \mu < m$, alors d'après (2.3) on a

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu}_{a+\mu-m}(t-a)^{\underline{\mu-k}} &= \sum_{s=a+\mu-m}^{t+\mu} h_{-\mu-1}(t,\sigma(s))(s-a)^{\underline{\mu-k}} \\ &= \sum_{s=a+\mu-k}^{t+\mu} h_{-\mu-1}(t,\sigma(s))(s-a)^{\underline{\mu-k}}.\end{aligned}$$

Car $(s-a)^{\underline{\mu-k}} = 0$ si $s = a+\mu-m,\ a+\mu-m+1,\ \ldots,\ a+\mu-k-1$.
Donc

$$\Delta^{\mu}_{a+\mu-m}(t-a)^{\underline{\mu-k}} = \Delta^{\mu}_{a+\mu-k}(t-a)^{\underline{\mu-k}}.$$

En utilisant (2.20) on trouve

$$\Delta^{\mu}_{a+\mu-m}(t-a)^{\underline{\mu-k}} = \frac{\Gamma(\mu-k+1)}{\Gamma(1-k)}(t-a)^{\underline{-k}} = 0.$$

■

Corollaire 3.5.1. *On a Δ^{μ}_{a} est un opérateur linéaire donc la solution générale de l'équation* (3.46) *s'écrit sous la forme*

$$x(t) = a_1 h_{\mu-1}(t,a) + a_2 h_{\mu-2}(t,a) + \cdots + a_m h_{\mu-m}(t,a).$$

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons donné quelques propriétés essentielles qui sont utilisées dans le calcul aux différences et le calcul aux différences fractionnaire pour étudier des équations aux différences linéaires et des équations aux différences fractionnaires.
Dans le premier chapitre, nous avons défini l'opérateur de différence Δ, la fonction gamma et la factorielle décroissante. Nous avons présenté aussi le théorème de Taylor.
Dans le deuxième chapitre, nous avons donné la définition de la somme fractionnaire et de l'opérateur de différence fractionnaire. On a donné aussi les différentes compositions entre une somme fractionnaire et un opérateur de différence fractionnaire.
Dans le troisième chapitre, nous avons introduit la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques discrètes. Nous avons étudié une équations aux différences linéaire du premier ordre et une équation du deuxième ordre. A la fin, nous avons étudié l'existence de la solution d'une équation aux différences fractionnaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.M. Atici, P.M. Eloe, **Discrete fractional calculus with the nabla operator**, Electron .J. Qual.Theory Differ. Equ., 3, 1-12 (2009).

[2] F.M. Atici, S. Şengül, **Modeling with fractional difference equations**, J. Math. Anal. Appl., 369, 1-9 (2010).

[3] F.M. Atici, P.W. Eloe, **Initial value problems in discrete fractional calculus**, Proc. Am. Math. Soc., 137, 981-989 (2009).

[4] F.M. Atici and P.W. Eloe, **transform method in discrete fractional calculs**, International Journal Différence Equation, 2(2) : 165-176-2007.

[5] S. Elaydi, **An Introduction to Difference Equations**, 3rd ed, Springer, New York, 1999.

[6] A. George an Anastassion, **Discrete Fractional Calculus**, with Inequalities, pages 575-585. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.

[7] J. Jagan Mohan, G.V.S.R. Deekshitulu, **Fractional order difference equations**, Int.J. Differ. Equ., 2012 (Art. ID 780619), 11 pp. (2012).

[8] W.G. Kelley, A.C. Peterson, **Differnce Equations : An intrduction with Applications, Second Edition**, Academic Press, New York (2001).

[9] M. Marjan, F.A. Wahbi, **The Delta Discrete Fractional Calculus**, Int. J. C. Eng. Tech., 9(13) (2018) 1905-1912.

[10] K.S. Miller, B. Ross, **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**, John wiley and Sons, lnc., New York, 1993.