REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Sientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED SEDDIK BEN YAHIA
JIJEL

N° d'ordre :
Série :

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat (LMD)

Spécialité Mathématiques Appliquées

Par

Siham BOUROUROU

Thème

Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles aux q-différences et aux différences dans l'espace des fonctions méromorphes p-adiques

---

Soutenue publiquement le 20/02/2016

Devant le jury composé de

Président :	**Prof. M. YAROU**	Univ. de Jijel
Directeur :	**Prof. T. ZERZAIHI**	Univ. de Jijel
Co.Directeur :	**Prof. A. BOUTABAA**	Univ. Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, France)
Examinateurs :		
	Prof. B. BELAIDI	Univ. de Mostaganem
	Prof. D. AZZAM-LAOUIR	Univ. de Jijel

Remrciements

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir accordé la volonté et le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **le Professeur T. ZERZAIHI**, mon directeur de thèse, pour son aide, sa disponibilité, ses précieux conseils et pour la patience qu'il a montré jusqu'à l'aboutissement de cette thèse.

J'exprime ma plus vive gratitude à Monsieur **A. BOUTABAA**, mon co-directeur de thèse, professeur à l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand (France), pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse et pour sa précieuse écoute et ses encouragements chaleureux tout au long de ce travail. Merci encore pour l'organisation de mon séjour en France durant l'année 2015.

Je voudrais adresser mes remerciements à Monsieur **le Professeur M. YAROU** d'avoir immédiatement accepté la tâche du président du jury.

Je suis très honorée par la présence de Monsieur **le Professeur B. BELAIDI** et Madame **le Professeur D. AZZAM-LAOUIR** et je leur adresse toute ma gratitude pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour avoir accepté d'examiner et de juger cette thèse.

J'adresse ma profonde reconnaissance et mes sentiments d'amour à **Mes parents**, **Mon Mari** et à tous les membres de **Ma Famille**, qui m'ont soutenue aussi bien financièrement que moralement tout au long de mes études. Merci pour votre amour, vos encouragements et votre soutien.

Mes remerciements seraient incomplets si je ne remercierais pas chaleureusement tous les membres du laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA) de l'université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel. En particulier, **Mes collègues** de doctorat LMD chacun par son nom, sans oublier de remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de l'université Blaise Pascal à Clermont-Ferrand pour leur soutien. J'en profite aussi pour remercier tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

Enfin, Merci à toute personne qui m'a encouragé afin de terminer ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à décrire le comportement des solutions méromorphes dans un corps ultramétrique complet et algébriquement clôs (qui sera noté $\mathbb{K}$), de certaines équations fonctionnelles linéaires aux q-différences et aux différences de la forme,

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x),$$

et

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x+i) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{K}$ telle que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

Dans le cas complexe, beaucoup d'études ont été faites sur la résolution des équations fonctionnelles, en étudiant en particulier l'ordre de la taille de la solution, dans le cas où elle existe, de ces équations (voir par exemple [4], [5], [20]). On insiste surtout sur l'étude de la solution méromorphe en général et la solution entière en particulier. Les caractéristiques de la solution dépendent particulièrement de la nature des coefficients de ces équations qui peuvent être méromorphes, entières ou constants.

Récemment, dans le cas ultramétrique, de nombreux articles (voir par exemple [8],[9], [10], [15]) axés sur ces équations, et de nombreux résultats significatifs ont été obtenus à propos de la croissance de leurs solutions. Dans cette thèse, nous étendrons certains de ces résultats. On est souvent guidé par l'analogie avec des résultats obtenus dans l'analyse complexe que nous appellerons "classique", et, comme pour celles-ci, un outil important est la théorie de distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Beaucoup d'études ont été faites au cours de ces dernières années sur la distribution de valeurs des fonctions méromorphes complexes, notamment de la part de G. Gundersen, M. Reinders, E. Mues, G. Franck, C.C. Yang, Ping Li, Liangwen Wao, Ilpo Laine..., etc. Les problèmes étudiés concernent d'une part la répartition des zéros des fonctions méromorphes complexes et d'autre part des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes complexes satisfaisant certaines équations fonctionnelles.

Il était donc naturel d'examiner des problèmes analogues de distribution des zéros pour différents types de fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$. De même, des problèmes d'unicité pour des fonctions méromorphes ultramétriques dans $\mathbb{K}$ ou dans un disque ouvert de $\mathbb{K}$, qui satisfont certaines conditions.

Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distribution de valeurs (complexe ou bien p-adique), la Théorie de Nevanlinna qui joue un role majeur. La théorie de Nevanlinna ultramétrique a été introduite en 1989 par A. Boutabaa ([12], [13]). Elle s'applique non seulement à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais aussi, en 2001, A. Boutabaa et A. Escassut ont appliqué cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$, en tenant compte du problème de Lazard. Il existe deux théorèmes fondamentaux qui occupent une place importante dans la théorie de Nevanlinna. Le premier théorème fondamental de Nevanlinna est juste une reformulation de la formule de Jensen pour des fonctions méromorphes. Le deuxième théorème fondamental est, toutefois, un élégant théorème qui joue un rôle dans la théorie de Nevanlinna. En raison de ce théorème, la théorie de Nevanlinna devient une riche théorie.

Cette thèse est constituée de cette introduction et de trois chapitres ainsi que une liste bibliographique et, Conclusion et perspectives.

Dans Le premier chapitre on présente une introduction générale. Le deuxième chapitre est composé de deux parties. Dans la première, nous donnons quelques notions de base d'un corps ultramétrique et ses propriétés fondamentales analytiques et topologiques. Puis on va décrire les méthodes de construction du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$, ainsi que l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Ensuite, on définit le développement de Hensel d'un nombre p-adique et on donne quelques propriétés analytiques et topologiques du corps des nombres p-adiques. La deuxième partie est essentiellement destinée à rappeler des propriétés classiques liées aux fonctions analytiques et méromorphes, dans un corps ultramétrique et dans un disque. On étudie aussi le Polygone de Valuation qui joue un rôle important pour établir la formule de Jensen dans le cas ultramétrique.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à la théorie de Nevanlinna sur un corps ultramétrique. Pour cela on a besoin de définir les notions classiques de cette théorie ; la fonction de comptage de zéros de f avec multiplicité $Z(r, f)$, la fonction de comptage de pôles de f avec multiplicité $N(r, f)$, la fonction de compensation $m(r, f)$, et la fonction caractéristique de Nevanlinna $T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$ qui est positive et prolonge $\log |f|(r)$ quand f est analytique. On va étudier aussi quelques propriétés élémentaires liées à la théorie de Nevanlinna qui sont assez semblables à celles connues dans le cas complexe. Ces fonctions sont utilisées pour donner une version ultramétrique de la formule de Jensen et le premier théorème fondamental de Nevanlinna qui est seulement une reformulation de la formule de Jensen. Ce théorème fournit la taille du nombre de racines de l'équation $f(x) = a$, valable pour tout $a \in \mathbb{K}$. Puis, on donne la version ultramétrique du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Il montre qu'en général, $m(r, f)$ est petit par rapport à $T(r, f)$, et en conséquence $N(r, f)$ approche $T(r, f)$, avec tous les détails des démonstrations.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à l'application de la théorie de Nevanlinna ultramétrique aux équations fonctionnelles linéaires. Nous étudions deux classes d'équations fonctionnelles. La première concerne des équations fonctionnelles aux q-différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telle que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

Dans le cas ultramétrique, on utilise les notions de base de la théorie de Nevanlinna ultramétrique pour caractériser la taille des solutions méromorphes de ces équations et étudier le comportement et l'ordre de croissance de ces solutions. La deuxième classe est celle de certaines équations aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x + i) = h(x),$$

où $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telle que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$. La même approche est appliquée dans ce cas pour obtenir des estimations de la solution méromorphe en fonction des conditions que doivent vérifier les coefficients $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$.

CHAPITRE 2

Notions élémentaires en analyse ultramétrique

Sommaire

Ce deuxième chapitre est essentiellement destiné à rappeler quelques notions fondamentales sur l'analyse ultramétrique et leurs applications aux fonctions méromorphes ultramétriques qui nous seront utiles dans la démonstration de nos résultats. Nous donnons tout d'abord quelques rappels sur les corps ultramétriques. Puis, on construit le corps des nombres p-adiques et on traite quelques propriétés de ce corps. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous nous intéressons à certaines propriétés des fonctions analytiques et méromorphes ultramétriques dans un disque ou dans le corps tout entier.

2.1 Valeurs absolues ultramétriques.

On a besoin de rappeler quelques définitions basiques qui concernent les corps ultramétriques.

Définition 2.1.1 ***(Valeur absolue sur un corps)***

Soit $\mathbb{K}$ *un corps. Une valeur absolue sur* $\mathbb{K}$ *est une application* $x \mapsto |x|$ *de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les trois propriétés suivantes*

(i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall\, x \in \mathbb{K}$,

(ii) $|xy| = |x||y|, \forall\, x, y \in \mathbb{K}$,

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall\, x, y \in \mathbb{K}$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 2.1.2 ***(Valeur absolue ultramétrique)***

Une valeur absolue sur $\mathbb{K}$ *est dite ultramétrique ou non-archimédienne, si elle vérifie la propriété*

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \forall\, x, y \in \mathbb{K}.$$

Cette propriété est connue comme l'inégalité triangulaire forte ou ultramétrique ; elle est plus forte que la propriété (iii).

En posant pour $x, y \in \mathbb{K}$, $d(x,y) = |x - y|$. On définit une distance sur $\mathbb{K}$. Dans le cas d'une valeur absolue ultramétrique, on a

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}, \; \forall x, y, z \in \mathbb{K}.$$

Lorsque $\mathbb{K}$ est muni de la distance $d(x,y) = |x - y|$ est un espace métrique complet, on dit que $\mathbb{K}$ est un corps ultramétrique complet.

Exemple 2.1.3 *La valeur absolue triviale, définie par*

$$|x| = \begin{cases} 1 & si\; x \neq 0 \\ \\ 0 & si\; x = 0 \end{cases}$$

vérifie clairement la condition d'une valeur absolue ultramétrique sur un corps $\mathbb{K}$.

2.2 Propriétés élémentaires d'un corps ultramétrique

Le théorème suivant est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une valeur absolue est ultramétrique.

Théorème 2.2.1 ***(Caractéristique du corps ultramétrique)****[34]*

Soit $|.|$ *une valeur absolue sur le corps* $\mathbb{K}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $|.|$ *est une valeur absolue ultramétrique,*

(ii) *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \leq 1$.

Preuve. On démontre $(i) \Rightarrow (ii)$ par récurrence ; Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si $n = 1$, on a $|1| = 1$. Supposons $|k| \leq 1$ pour tout $k = 1, ...n - 1$, et montrons que $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} |n| = |(n-1) + 1| &\leq \max(|n-1|, |1|) \\ &\leq 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}$, on a $n = -n'$, $n' \in \mathbb{N}$. Nous avons toujours $|n| = |-n'| = |n'| \leq 1$, donc $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que $|n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Nous voulons prouver que pour deux éléments quelconques $x, y \in \mathbb{K}$, nous avons $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$. Si $y = 0$, c'est évident. Sinon, nous pouvons diviser par $|y|$, et nous voyons que cela équivant à l'inégalité

$$\Big|\frac{x}{y} + 1\Big| \leq \max\Big\{\Big|\frac{x}{y}\Big|, 1\Big\}.$$

Cela signifie que nous devons prouver l'inégalité dans le cas où le second terme de la somme est 1. En d'autres termes, nous voulons prouver que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$|x+1| \leq \max\big\{|x|, 1\big\}.$$

Maintenant, soit n un entier positif. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} |x+1|^n = |(x+1)^n| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\Big| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} |C_n^k||x|^k. \end{aligned}$$

Puisque C_n^k est un entier, on a $|C_n^k| \leq 1$, donc on peut continuer avec

$$|x+1|^n \leq \sum_{k=0}^{n} |x|^k \leq (n+1)\max\{1, |x|^n\}.$$

Pour la dernière étape, notons que la plus grand valeur de $|x|^k$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n$ est égale à $|x|^n$ si $|x| > 1$ et égal à 1 sinon). Prenant la n-ième racine sur les deux côtés on a

$$|x+1| \leq \sqrt[n]{n+1}\ \max\{1, |x|\}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Par conséquent,

$$|x+1| \leq \max\{1, |x|\}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{K}.$$

$\blacksquare$

Proposition 2.2.2 *[34]*

Une valeur absolue $|.|$ *sur un corps* $\mathbb{K}$ *est dite archimédienne si*

$$\forall x, y \in \mathbb{K},\ x \neq 0,\ \exists n \in \mathbb{N} : |nx| > |y|.$$

Autrement dit

$$\sup\{|n|, n \in \mathbb{Z}\} = +\infty.$$

L'espace $\mathbb{K}$ *muni de cette valeur absolue est un espace archimédien.*

Proposition 2.2.3 *[3], [34]*

Soient a *et* x *deux éléments d'un corps ultramétrique* $(\mathbb{K}, |.|)$*, on a*

$$|x - a| < |a| \Rightarrow |x| = |a|.$$

Preuve.

Soient $x, a \in \mathbb{K}$, par l'inégalité ultramétrique, on a

$$|x| = |x - a + a| \leq \max\{|x - a|, |a|\} = |a|,$$

$$|a| = |a - x + x| \leq \max\{|x - a|, |x|\}.$$

Si $\max\{|x - a|, |x|\} = |x|$, on a le résultat.

Corollaire 2.2.4 *[34]*

Dans un espace ultramétrique, tous les triangles sont isocèles.

2.3 Le corps des nombres p-adiques

Il est connu que le corps des nombres p-adiques est un exemple très répandu des espaces ultramétriques. Dans cette section, nous allons construire ce corps en utilisant la méthode topologique (analytique) basée sur le théorème de complétion, de plus, nous allons exposer certaines propriétés de ce corps qui restent pour la plupart vraies dans le cas d'un corps ultramétrique.

2.3.1 Valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

Comme $\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$, on peut le munir de la valeur absolue usuelle. Nous allons nous intéresser ici à d'autres valeurs absolues de $\mathbb{Q}$, associées à un nombre premier p.

Définition 2.3.1 ***(Valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$)***

Soit p un nombre premier. La valuation p-adique sur $\mathbb{Z}$ est la fonction

$$\begin{aligned} v_p : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \\ a &\mapsto \begin{cases} v_p(a) & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

où $v_p(a)$ est le plus grand entier positif tel que $p^{v_p(a)}$ dévise a, i.e, $a = p^{v_p(a)}b$ avec p ne dévise pas b.

On peut étendre la valuation p-adique v_p au corps $\mathbb{Q}$ de la façon suivante, si $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on pose,

$$v_p(x) = v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.3.2 (1) *Soit $a = 315 = 3^2.5.7$. On a $v_3(a) = 2$, $v_5(a) = 1$, $v_7(a) = 1$ et $v_p(a) = 0$ pour tout nombre premier p différent de* 3, 5 *et* 7.

(2) *On a $v_2(\frac{12}{25}) = 2$, $v_3(\frac{12}{25}) = 1$ et $v_5(\frac{12}{25}) = -2$. Pour p différent de $2, 3, 5$, on a $v_p(\frac{12}{25}) = 0$.*

(3) *On a $v_p(p^n) = n$, pour tout entier n.*

La propriété fondamentale de la valuation p-adique est

Proposition 2.3.3 *[7], [34]*

Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$, la valuation p-adique vérifie les propriétés suivantes

(i) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$,

(ii) $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.

Preuve.

Pour montre (i) et (ii) soient a, b deux nombres entiers ne sont pas nuls, on peut écrire

$$a = p^{\alpha} n_1 \text{ avec } \alpha = v_p(a) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_1,$$

$$b = p^{\beta} n_2 \text{ avec } \beta = v_p(b) \text{ et } p \text{ ne divise pas } n_2.$$

Donc,

$$ab = p^{\alpha+\beta}(n_1 n_2) \text{ avec } p \text{ ne divise pas } n_1 n_2.$$

d'où

$$v_p(ab) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b).$$

Pour (ii), on distingue trois cas,

Si $\alpha < \beta$, nous avons $a + b = p^{\alpha}(n_1 + p^{\beta-\alpha} n_2)$, d'où

$$v_p(a+b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha > \beta$, nous avons $a + b = p^{\beta}(p^{\alpha-\beta} n_1 + n_2)$, d'où

$$v_p(a+b) = \beta \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

Si $\alpha = \beta$, on a $a + b = p^{\alpha}(n_1 + n_2)$, où p ne divise pas $n_1 + n_2$. D'où

$$v_p(a+b) = \alpha \geq \min[v_p(a), v_p(b)].$$

■

Définition 2.3.4 ***(Valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$)***

Soit p un nombre premier. On définit la valeur absolue p-adique comme l'application

$$\begin{aligned} |.|_p : \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto |x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Avec cette définition, on voit que $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ pour tous rationnels x et y, car $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

Ainsi, si x s'écrit $\prod_i p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers, alors $v_{p_i}(x) = \alpha_i$ et $|x|_{p_i} = \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$.

Notons que $1 = \prod_i p_i^0$, donc $v_p(1) = 0$, pour tout nombre premier p.

Exemple 2.3.5 (1) *On a* $\left|\frac{12}{25}\right|_2 = \frac{1}{4}$, $\left|\frac{12}{25}\right|_3 = \frac{1}{3}$, $\left|\frac{12}{25}\right|_5 = 25$ *et* $\left|\frac{12}{25}\right|_p = 1$ *pour* p *différent de* $2, 3, 5$.

(2) *On a* $|p^n|_p = \frac{1}{p^n}$ *: plus on est divisible par p, plus on est petit.*

Proposition 2.3.6 *[34]*

L'application $|.|_p$ *est une valeur absolue ultramétrique sur* $\mathbb{Q}$.

Preuve. Vérifions l'inégalité triangulaire forte, soient $x, y \in \mathbb{Q}$, si $x = 0$ (ou $y = 0$), on a le résultat, en effet, soit $y \neq 0, x = 0$, on a

$$|x + y|_p = |y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x + y = 0$, c'est à dire, $x = -y$, on a $|x|_p = |y|_p$ et

$$|x + y|_p = 0 \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Si $x, y \neq 0$, on a $|x + y|_p = p^{-v_p(x+y)}$. Soit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$, nous avons,

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
v_p(x + y) = v_p\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) &= v_p(ad + bc) - v_p(bd) \\
&= v_p(ad + bc) - v_p(b) - v_p(d) \\
&\geq \min\{v_p(a) + v_p(d), v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d) \\
&= \min\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\
&= \min\{v_p(x), v_p(y)\}.
\end{aligned}$$

Donc, $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$, i.e,

$$\begin{aligned} -v_p(x+y) &\leq -\min(v_p(x), v_p(y)) \\ &= \max(-v_p(x), -v_p(y)). \end{aligned}$$

Si $\max(-v_p(x), -v_p(y)) = -v_p(x)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(x)$, donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(x)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où, $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.
Si $\max(-v_p(x), -v_p(y)) = -v_p(y)$, on a $-v_p(x+y) \leq -v_p(y)$, donc

$$p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-v_p(y)} = \max\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\}.$$

D'où, $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, et par suite, $|.|_p$ est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$. ∎

Remarque 2.3.7 (1) *La valeur absolue p-adique $|.|_p$ prend ses valeurs dans l'ensemble discret définie par*

$$|\mathbb{Q}|_p = \{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

(2) *Par définition de la valeur absolue p-adique, on a pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $|x|_p \leq 1$.*

Proposition 2.3.8 *[25]*

Soient $|.|_1$ et $|.|_2$ deux valeurs absolues sur un corps $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $|.|_1$ et $|.|_2$ sont équivalentes,

(ii) pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $|x|_1 < 1$ si et seulement si $|x|_2 < 1$,

(iii) il existe $\alpha > 0$, un réel tel que pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a $|x|_1 = |x|_2^\alpha$.

Théorème 2.3.9 ***(Théorème d'Ostrowski)****[34]*

Toute valeur absolue non triviale $|.|$ *sur* $\mathbb{Q}$ *est équivalente soit à* $|.|_p$ *pour un nombre premier* p*, soit à la valeur absolue usuelle notée* $|.|_\infty$*.*

Remarque 2.3.10 *Il résulte de ce théorème que la valeur absolue usuelle et la valeur absolue* p*-adique sont les seules possibles dans* $\mathbb{Q}$*, en ce sens les topologies définies sur* $\mathbb{Q}$ *est donné par l'une des deux valeurs absolues.*

Proposition 2.3.11 ***(Formule du produit)****[1]*

Pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$*, on a*

$$\prod_{p \leq \infty} |x|_p = 1.$$

où $p \leq \infty$ *sinifie que nous prenons le produit sur l'ensemble des nombres premiers de* $\mathbb{Q}$*, y compris "l'infini".*

Preuve.

Il est facile de voir que nous avons seulement besoin de prouver la formule lorsque x est un entier positif, et que le cas général s'ensuit directement. Donc, soit x un entier positif, que nous pouvons factoriser comme suit : $x = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$. Nous avons

$$|x|_\infty = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}.$$

Et

$$|x|_p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \notin \{p_i,\, i = 1, ...k\} \\ p_i^{-\alpha_i} & \text{si} \quad p \in \{p_i,\, i = 1, ...k\}. \end{cases}$$

D'où, le résultat. ■

2.3.2 Complétion de $\mathbb{Q}$

Ce paragraphe présente une construction du corps des nombres p-adiques. La méthode utilisée pour construire ce corps est semblable à la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$.

Puisque $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la valeur absolue p-adique $|.|_p$, on le complète et on obtient un espace complet que l'on note $\mathbb{Q}_p$ et qui s'appelle le corps des nombres p-adiques.

On rappelle le procédé de complétion (qui est valable pour un espace métrique quelconque). Soit E l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ (pour la valeur absolue $|.|_p$). On définit sur E une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ de la façon suivante ; si $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ sont deux éléments de E, on a $u\mathcal{R}v$ si et seulement si $|u_n - v_n|_p$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

On montre alors que sur l'espace quotient $\mathbb{Q}_p = E/\mathcal{R}$, on peut prolonger la distance sur E, et que cet espace métrique quotient est un espace complet, qui contient $\mathbb{Q}$ comme sous espace dense.

Nous indiquons comment prolonger la valeur absolue définie sur $\mathbb{Q}$ à tout $\mathbb{Q}_p$.

Soit x un élément de $\mathbb{Q}_p$ et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$. La suite $(|x_n|_p)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$ car

$$||x_n|_p - |x_m|_p| \leq |x_n - x_m|_p,$$

donc elle converge vers une limite ℓ dans $\mathbb{R}_+$. Cette limite est appelée la valeur absolue p-adique de x, c'est une valeur absolue ultramétrique, et on a

$$|x|_p = \lim_{n\to+\infty} |x_n|_p.$$

On peut également étendre la valuation p-adique au $\mathbb{Q}_p$, $v_p(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_p(x_n)$.

Remarque 2.3.12 *L'ensemble des valeurs de l'application* $|.|_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+$ *est le même ensemble de valeurs de l'application* $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+$*, et il est donné par* $\{p^n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$*. Par contre la valeur absolue usuelle définie sur* $\mathbb{R}$*, parcourt tout l'ensemble des nombres réels positifs* $\mathbb{R}_+$*.*

2.3.3 L'anneau des entiers p-adiques

Le corps $\mathbb{Q}_p$ s'appelle le corps des nombres p-adiques. Une partie intéressante de ce corps est l'ensemble des éléments de valeur absolue p-adique inférieure ou égale à 1. Donc on a la définition suivante.

Définition 2.3.13 *On définit l'anneau des entiers p-adiques et on note $\mathbb{Z}_p$, comme étant la boule unité de $\mathbb{Q}_p$, i.e.*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}.$$

Proposition 2.3.14 *[2]*

L'anneau des entiers p-adiques est un anneau intègre, i.e., pour tout $x, y \in \mathbb{Z}_p$ tel que $xy = 0$, on a $x = 0$ ou $y = 0$.

Preuve.

Soient $x, y \in \mathbb{Z}_p$ et supposons $x \neq 0$, $y \neq 0$. Nous avons

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) \neq +\infty, \text{ donc } xy \neq 0.$$

■

Remarque 2.3.15 *Nous avons déjà vu que l'anneau des entiers p-adiques est intègre. Cela nous permet de définir le corps des nombres p-adiques comme le corps de fractions de $\mathbb{Z}_p$ (c'est à dire que tout élément de $\mathbb{Q}_p$ est un quotient de deux éléments de $\mathbb{Z}_p$).*

$$\mathbb{Q}_p = Frac(\mathbb{Z}_p) = \left\{\frac{x}{y},\, x, y \in \mathbb{Z}_p \; et \; y \neq 0\right\}.$$

2.4 Propriétés de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ et du corps $\mathbb{Q}_p$

Cette section est consacrée aux propriétés importantes de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ et du corps $\mathbb{Q}_p$. Nous y étudions le développement de Hensel d'un nombre p-adique qui est une notation sous forme de série. Nous discutons aussi quelques propriétés topologiques de nos deux ensembles.

2.4.1 Développement de Hensel

Il existe une manière conventionnelle de représenter un entier p-adique ou un nombre p-adique. En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il est possible de représenter x en base p. On a

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i, \text{ avec } a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}.$$

L'idée étant de généraliser cette approche pour représenter un nombre p-adique en passant de la somme finie à une somme infinie. Ainsi, on peut énoncer la proposition suivante

Proposition 2.4.1 *[7]*

Tout élément de $\mathbb{Z}_p$ admet un unique développement sous la forme,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n,$$

avec $a_n \in \{0, ..., p-1\}$ pour tout n. Ce développement s'appelle le développement de Hensel de x.

Remarque 2.4.2 *On peut utiliser le développement de Hensel pour donner une autre définition de l'ensemble des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$; Ce sont les nombres p-adiques dont le développement de Hensel ne contient que des puissances positives de p, c'est à dire*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p,\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^n\}.$$

On a un résultat similaire pour les nombres rationneles p-adiques.

Proposition 2.4.3 *[7]*

Tout $x \in \mathbb{Q}_p$ admet un unique développement de Hensel

$$x = \sum_{n \geq -n_0} a_n p^n \text{ avec } a_n \in \{0, 1, ..., p-1\},\, n_0 \in \mathbb{Z}.$$

Si $a_{n_0} \neq 0$, alors on a, $-n_0 = v_p(x)$.

Remarque 2.4.4 *On peut représenter un entier p-adique par une suite infinie de chiffres en base p à gauche du point (i.e. $x = ...a_2a_1a_0.$), tandis que les autres éléments de $\mathbb{Q}_p$, eux auront un nombre fini de chiffres à droite du point.*

2.4.2 Propriétés topologiques

Nous énonçons et démontrons dans cette section quelques propriétés topologiques importantes de $\mathbb{Z}_p$ et de $\mathbb{Q}_p$. Nous commençons avec des propriétés qui est aussi vrai pour les corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.

Soit r un réel strictement positif, et a un nombre p-adique. On note $D^+(a,r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p,\ |x-a|_p \leq r\}$ et on appelle disque fermé. On note $D^-(a,r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q}_p,\ |x-a|_p < r\}$ et on appelle disque ouvert et $C(a,r) = D^+(a,r)\backslash D^-(a,r)$ le cercle de centre a et rayon r. La notation $D(a,r)$ désignera l'un ou l'autre de ces deux disques.

Proposition 2.4.5 *[7], [27]*

Soient $a, b \in \mathbb{Q}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+$. Alors

(i) Si $b \in D(a,r)$, alors $D(b,r) = D(a,r)$. Autrement dit, tout point d'un disque est un centre de ce disque.

(ii) Tout disque de l'espace topologique $\mathbb{Q}_p$ est à la fois ouvert et fermé.

(iii) Soient $D(a,r)$ et $D(b,s)$ deux disques, alors ils sont disjoints, ou l'un est inclus dans l'autre.

Preuve.

(i) Si $b \in D(a,r)$, on a par définition $|b-a|_p < r$. Prenant $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x-a|_p < r$, on a par l'inégalité ultramétrique,

$$|x-b|_p < \max\{|x-a|_p, |b-a|_p\} < r,$$

de telle sorte que $x \in D(b,r)$, et donc on a montré que $D(a,r) \subset D(b,r)$. En changeant simplement les rôles de a et b, on montre que $D(b,r) \subset D(a,r)$, d'où l'égalité.

(ii) Soit $a \in \mathbb{Q}_p$ et considérons $D^-(a,r)$, $r > 0$ le disque ouvert centré en a et de rayon r. Par définition, c'est un ouvert de $\mathbb{Q}_p$. Il reste donc à montrer qu'il est aussi fermé dans le cas non-archimédien. Alors, prenons un point x sur la frontière de $D^-(a,r)$, ce qui signifie que tout disque ouvert centré en x doit contenir des points qui sont dans $D^-(a,r)$. Choisissons un rayon $s < r$. Maintenant, puisque x est un point de la frontière de $D^-(a,r)$, $D^-(a,r) \cap D^-(x,s) \neq \emptyset$, il existe un élément $y \in D^-(a,r) \cap D^-(x,s)$. Cela signifie que $|y-a|_p < r$ et $|y-x|_p < s < r$. Appliquant l'inégalité ultramétrique, nous obtenons

$$|x-a|_p < \max\{|x-y|_p, |y-a|_p\} < \max\{s,r\} < r,$$

d'où $x \in D^-(a,r)$. Cela montre que tout point sur la frontière de $D^-(a,r)$ appartient à $D^-(a,r)$, ce qui veut dire que $D^-(a,r)$ est un ensemble fermé.

(iii) Nous pouvons supposer que $r < s$. Si l'intersection n'est pas vide, il existe $c \in D(a,r) \cap D(b,s)$. En suite, nous avons, à partir de (i), que

$$D(a,r) = D(c,r) \text{ et } D(b,s) = D(c,s).$$

Par conséquent,

$$D(a,r) = D(c,r) \subset D(c,s) = D(b,s).$$

■

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a des propriétés topologiques intéressantes.

Proposition 2.4.6 *[7]*

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques est un ensemble compact, et $\mathbb{Z}$ (de même $\mathbb{N}$) est dense dans $\mathbb{Z}_p$.

Preuve. Soit $\{x_k\}_k$ une suite dans $\mathbb{Z}_p$, le développement de Hensel de chaque terme est écrit comme suit

$$x_k = ...a_2^k a_1^k a_0^k = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^k p^i,$$

tels que

$$a_i^k \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}, \forall i \geq 0.$$

On peut trouver un $b_0 \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ et une sous suite $\{x_{0k}\}_k$ de $\{x_k\}_k$ telles que le dernier chiffre de x_{0k} est b_0. De la même façon, il existe un $b_1 \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ et une sous suite $\{x_{1k}\}_k$ de $\{x_{0k}\}_k$ telles que les deux derniers chiffres de x_{1k} est $b_1 b_0$. On continue cette procédure, on va obtenir des nombres $b_0, b_1, b_2, ...$ avec une suite de suites

$$\begin{array}{l} x_{00}, x_{01}, x_{02}, ..., x_{0s}, ... \\ x_{10}, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1s}, ... \\ x_{20}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2s}, ... \\ \vdots \\ x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{ns}, ... \\ \vdots \end{array}$$

telle que toute suite est une sous suite de la suite précédente, et chaque élément de la n^{me} rangée termine par $b_n ... b_2 b_1 b_0$. Pour tout $j = 0, 1, ...$ nous avons

$$x_{jj} \in \{x_{j-1j}, x_{j-1j+1}, ...\},$$

par conséquence la suite diagonal $x_{00}, x_{11}, x_{22}, ..., x_{ss}, ...$ est toujours une sous suite de la suite original, et de plus elle est évidement converge vers "$...b_3 b_2 b_1 b_0$".

Pour la densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$, soit $x = ...a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \in \mathbb{Z}_p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$x_n = ...000a_na_{n-1}...a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i.$$

Alors $x_n \in \mathbb{Z}$ et $|x - x_n|_p \leq p^{-n}$, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans $\mathbb{Z}_p$. ∎

Le corps $\mathbb{Q}_p$ possède la propriété suivante.

Théorème 2.4.7 *$\mathbb{Q}_p$ est localement compact.*

Preuve. Le fait que $\mathbb{Q}_p$ soit localement compact est une conséquence directe de la compacité de $\mathbb{Z}_p$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, on a $D(x, 1) = \{x + y;\ y \in \mathbb{Z}_p\}$ est un voisinage compact de x. ∎

2.5 Le corps $\mathbb{C}_p$ des nombres complexes p-adiques

Définition 2.5.1 *On dit qu'un corps ultramétrique $\mathbb{K}$ est algébriquement clôs si chaque polynôme $P(x)$ dans $\mathbb{K}[x]$ admet des racines dans $\mathbb{K}$. Autrement dit, chacun de ces polynômes se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[x]$.*

Le corps $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement clôs pour tout p premier, (considérer par exemple l'équation $x^2 - p = 0 \in \mathbb{Q}_p[x]$, puis on trouve que $v_p(x) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$, donc cette équation n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}_p$ (i.e. $\sqrt{\pm p} \notin \mathbb{Q}_p$)).

Pour faire convenablement de l'analyse, il est donc logique de considéré une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, que l'on note $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ et qui n'est pas complète (le corps $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ est constitué de toutes les racines des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$), donc nous avons besoin de compléter pour former un plus grand corps complet, algébriquement clôs noté $\mathbb{C}_p$. On montre que l'on peut prolonger la valeur absolue à ce corps, qui possède donc aussi une valeur absolue ultramétrique, que l'on note toujours $|.|_p$. Le corps $\mathbb{C}_p$ possède les propriétés suivantes

Proposition 2.5.2 *[2]*

(i) $\mathbb{C}_p$ algébriquement clôs.

(ii) $\mathbb{C}_p$ *n'est pas localement compact.*

(iii) L'ensemble des valeurs p-adiques de $\mathbb{C}_p$ *est l'ensemble de puissances rationnelles de p, c'est à dire,* $|\mathbb{C}_p| = \{p^y,\ y \in \mathbb{Q}\}$.

(iv) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p \subset \widetilde{\mathbb{Q}}_p \subset \mathbb{C}_p$.

2.6 Éléments de l'analyse p-adique

Dans cette section, nous étudions les propriétés élémentaires des nombres p-adiques qui concernent la convergence des suites et des séries définies dans $\mathbb{Q}_p$.

2.6.1 Suites et séries p-adiques

Notons que $(\mathbb{Q}_p, |.|_p)$ est un espace complet, c'est à dire, toute suite de Cauchy est covergente. On va donner un résultat qui caractérisais les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 2.6.1 *[34]*
Soit $(a_n)_n$ *une suite dans* $\mathbb{Q}_p$. *On a,* $(a_n)_n$ *est une suite de Cauchy si et seulement si,*

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Preuve. Si $(a_n)_n$ est de Cauchy, alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0,\ \forall m \geq 0,$$

d'où quand $m = 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0.$$

Inversement, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+m} - a_n|_p &= |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - ... + a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p \\ &\leq \max\{|a_n - a_{n+1}|_p, |a_{n+1} - a_{n+2}|_p, ..., |a_{n+m-1} - a_{n+m}|_p\}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} |a_{n+m} - a_n|_p = 0,$$

d'où $(a_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$. ∎

Remarque 2.6.2 *$(a_n)_n$ est convergente dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $|a_{n+1} - a_n|_p \longrightarrow 0$, quand $n \to +\infty$.*

Proposition 2.6.3 *[34]*

Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{Q}_p$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ dans $\mathbb{Q}_p$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p = 0,$$

ou bien, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$; $|a_n|_p = |a_{N_0}|_p$, pour $n \geq N_0$ (la suite $(|a_n|_p)_{n\geq 0}$ est stationnaire à partir d'un rang N_0).

Preuve. Soit $n, m \in \mathbb{N},\ n > m$, on a

$$||a_n|_p - |a_m|_p| < |a_n - a_m|_p \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

donc $(|a_n|_p)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet, donc $(|a_n|_p)_n$ est convergente.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|_p = \ell > 0$.

Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $|a_n|_p > \frac{\ell}{2}$.

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m > N_2$ on a $|a_m - a_n|_p < \frac{\ell}{2}$. D'où, pour $n, m > \max(N_1, N_2) = N_0$, on a

$$|a_m|_p = |a_m - a_n + a_n|_p \leq \max\{|a_m - a_n|_p, |a_n|_p\} = |a_n|_p.$$

Si $n = N_0$, on aura $|a_m|_p \leq |a_{N_0}|_p$, pour $m \geq N_0$.

De même

$$|a_n|_p \leq \max\{|a_n - a_m|_p, |a_m|_p\} = |a_m|_p.$$

Alors $|a_{N_0}|_p \leq |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$, d'où $|a_{N_0}|_p = |a_m|_p$, pour $m \geq N_0$. ∎

Maintenant, soit la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ et $a_k \in \mathbb{Q}_p$. On sait que la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 2.6.4 *[34]*

Soit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ une série dans $\mathbb{Q}_p$ ($a_k \in \mathbb{Q}_p$). Alors $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dans ce cas,

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p.$$

Preuve. la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si et seulemet si la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ converge dans $\mathbb{Q}_p$, donc S_n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}_p$, d'où

$$|S_n - S_{n-1}|_p \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Mais $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc (a_n) tend vers zéro dans $\mathbb{Q}_p$.

Maintenant, supposons que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, on a le résultat. Sinon, D'après la Proposition 2.6.3, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq N_0$, on a

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=1}^{N_0} a_n|_p. \tag{2.1}$$

D'autre part, on a

$$\max_{1\leq n\leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|_p\}. \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), on a

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n|_p = |\sum_{n=1}^{N_0} a_n|_p \leq \max_{1\leq n\leq N_0} \{|a_n|_p\} \leq \max_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|_p\}.$$

■

Exemple 2.6.5 *1) La série de terme général p^n converge trivialement dans $\mathbb{Q}_p$, par définition de la valeur absolue p-adique. Sa somme vaut $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{1}{1-p}$. En effet, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p},$$

d'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} p^{n+1} = 0$ *au sens de la valeur absolue p-adique, d'où*

$$\sum_{n\geq 0} p^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} p^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{1}{1-p}.$$

À noter que pour $p = 2$*, on retrouve*

$$-1 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = ...11111.$$

2) Le fait que $v_p(n!) = \frac{n-S_p(n)}{p-1}$*, où* $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de* n *en base* p*. Il en résulte que* $v_p(n!)$ *tend vers l'infini, et* $\lim\limits_{n\to+\infty} |n!|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^{-v_p(n!)} = 0$*, donc la série de terme général* $n!$ *converge, i.e. la somme* $\sum\limits_{n\geq 0} n!$ *existe dans* $\mathbb{Q}_p$*.*

3) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{p^n}$ *diverge dans* $\mathbb{Q}_p$*, car* $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{1}{p^n}|_p = \lim\limits_{n\to+\infty} p^n \neq 0$*.*

2.7 Fonctions analytiques d'un corps ultramétrique

On note $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clôs, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|.|$.

Définition 2.7.1 ***(série entière)***

Une série entière dans $\mathbb{K}$*, c'est une série de fonction qui s'écrit sous la forme*

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \ a_n \in \mathbb{K},$$

où x *et* a *sont des nombres de* $\mathbb{K}$*.*

Définition 2.7.2 *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière à coefficients dans* $\mathbb{K}$*. Comme en analyse archimédienne, si* $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 0$*, on pose* $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$*. Le nombre* R *est appelé le rayon de convergence de* f*. Donc, pour* $x \in \mathbb{K}$*, on a les situations suivantes,*

(i) $|x| < R$*. Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n||x|^n = 0$ *et alors la série est convergente,*

(ii) $|x| > R$. *Donc la série est divergente,*

(iii) $|x| = R$. *Donc on peut avoir ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n = 0$ *et alors la série est convergente sur la totalité du cercle* $C(0,R)$, *ou bien* $\lim_{n\to+\infty} |a_n||x|^n \neq 0$ *et alors la série est divergente dans le cercle* $C(0,R)$.

D'autre part, quand $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, *on a* $R = 0$ *et donc* f *est convergente seulement quand* $x = 0$.

Quand $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, *on dit que le rayon de convergence de* f *est égal à* $+\infty$ *et dans ce cas* f *est convergente pour tout* $x \in \mathbb{K}$. *Le disque* $D^-(0,R)$ *est appelé le disque de convergence.*

Exemple 2.7.3 (1) *Soit* $b \in \mathbb{K}$ *non nul, le disque de convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} b^n x^n = \frac{1}{1-bx}$, $x \in \mathbb{K}$ *est* $D^-(0, |b|^{-1})$.
(2) *Le disque de convergence de La série* $\ln(x+1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, *pour tout* $x \in \mathbb{K}$ *est* $D^-(0,1)$.

Définition 2.7.4 *Soit* f *une fonction définie de* $D^+(a,R)$ *dans* $\mathbb{K}$, *on dit que* f *est une fonction analytique sur* $D^+(a,R)$, *s'il existe une suite* $(a_n)_{n\geq 0}$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$, *satisfaisant* $|a_n|R^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *et pour tout* $x \in D^+(a,R)$, *on a*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n.$$

Autrement dit, on dit q'une fonction f *est analytique si elle est développable en série entière autour de chaque point de son domaine de définition.*

Définition 2.7.5 *Soit* f *une fonction définie de* $D^-(a,R)$ *dans* $\mathbb{K}$, *on dit que* f *est une fonction analytique sur* $D^-(a,R)$, *si pour tout* $0 < r < R$, *la restriction de* f *à* $D^+(a,r)$ *est une fonction analytique sur* $D^+(a,r)$.

Définition 2.7.6 ***(Fonction entière)***

Une fonction analytique dans le plan tout entier $\mathbb{K}$ *est dite entière.*

Proposition 2.7.7 *[26]*

Pour qu'une fonction $f : D^-(0,R) \to \mathbb{K}$ *soit analytique sur* $D^-(0,R)$*, il faut et il suffit qu'il existe une suite unique* $(a_n)_{n\geq 0}$*, satisfaisant* $|a_n|r^n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$*, pour tout* r*,* $0 < r < R$*, et telle que pour* $x \in D^-(0,R)$*, on a* $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$*.*

Preuve.

Supposons que f soit analytique sur $D^-(0,R)$ et montrons que $(a_n)_n$ est unique.

Soit $0 < r < r' < R$, et soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ associées à f qui est analytique sur $D^-(0,R)$, on a par la définition pour tout r, $0 < r < R$, la fonction f est analytique sur $D^+(0,r)$. Pour $r < r'$, on a $D^+(0,r) \subseteq D^+(0,r')$.

Pour tout $x \in D^+(0,r)$, on a

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

ce qui implique que $x \in D^+(0,r')$ et

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n.$$

D'où $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} b_n x^n,$ pour tout $x \in D^+(0,r)$. Donc $\sum_{n\geq 0}(a_n - b_n)x^n = 0$, d'où $a_n = b_n$, $\forall n \geq 0$. Alors on déduit l'unicité de développement en série des fonction analytique sur $D^+(0,r)$ d'où $a_n = b_n$, $\forall n \geq 0$.

L'implication inverse est trivial par la définition puisque l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses de cette proposition signifie que f est analytique sur $D^+(0,r)$, et pour tout r, $0 < r < R$, d'où f est analytique sur $D^-(0,R)$. ■

Remarque 2.7.8 *Les fonctions entières ce sont des fonctions somme d'une série entière de rayon de convergence infini.*

Exemple 2.7.9 *1) La fonction* $\exp(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ *est analytique sur* $D^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$*, elle n'est pas analytique sur le cercle, et n'est pas entière sur* $\mathbb{C}_p$*. En effet, pour tout*

$r \in]0, p^{-\frac{1}{p-1}})[$, *il existe* $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}_p$, *telle que*

$$|a_n|_p r^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p r^n = p^{v_p(n!)} \ r^n = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} \ r^n = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \ \left[p^{\frac{1}{p-1}} \ r\right]^n,$$

où, $S_p(n)$ *désigne la somme des chiffres de l'écriture de* n *en base* p.

On sait que $p^{\frac{1}{p-1}} \ r < 1$, *donc* $|a_n|_p r^n$ *tend vers zéro, l'orsque* n *tend vers l'infini. D'où* $\exp(x)$ *est analytique sur* $D^-(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$.

Si $|x|_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$, *alors*

$$|a_n|_p (p^{-\frac{1}{p-1}})^n = \left|\frac{1}{n!}\right|_p p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{\frac{n-S_p(n)}{p-1}} \ p^{-\frac{n}{p-1}} = p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}},$$

on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p (p^{-\frac{1}{p-1}})^n = \lim_{n\to+\infty} p^{-\frac{S_p(n)}{p-1}} \neq 0$ *(puisque* $S_p(n)$ *est constante). D'où la fonction* $\exp(x)$ *n'est pas convergente sur* $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$, *donc elle n'est pas analytique sur* $C(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$. *Alors* $\exp(x)$ *n'est pas entière sur* $\mathbb{C}_p$.

2) La fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} p^n x^n$ *est analytique sur* $D^-(0,1)$, *elle n'est pas analytique sur* $D^-(0,p)$. *En effet, pour* $r < 1$, *on a* $0 \leq |a_n|_p r^n \leq p^{-n}$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 0$, *d'où* f *est analytique sur* $D^-(0,1)$. *Pour* $r < p$, *on a*

$$0 \leq |a_n|_p r^n < p^{-n} p^n = p^{-n+n} = p^0 = 1.$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} |a_n|_p r^n = 1$ *et* f *n'est pas analytique sur* $D^-(0,p)$.

Notation

On note par $\mathcal{A}(D^-(a,R))$ (resp. $\mathcal{A}(D^+(a,R))$ l'ensemble des fonctions analytiques dans le disque $D^-(a,R)$ (resp. $D^+(a,R)$).

On note par $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathbb{K}) \backslash \mathbb{K}[x]$) l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{K}$ (resp. l'ensemble des fonctions entières sur $\mathbb{K}$, qui ne sont pas des polynômes, et qui s'appellent fonctions transcendantes).

Proposition 2.7.10 *[26]*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $f \in \mathcal{A}(D^-(a,R))$,

(ii) La série $f(x)$ *est convergente pour tout* $x \in D^-(a,R)$.

2.7.1 Dérivées des fonctions analytiques

Nous pouvons à présent énoncer un résultat général relatif aux fonctions analytiques.

Théorème 2.7.11 *[7]*

Si $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *est un élément de* $\mathcal{A}(D(0,R))$*, continue et dérivable sur* $D(0,R)$*, alors sa dérivée* $f' \in \mathcal{A}(D(0,R))$*, tel que*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

Plus généralement, si $R > 0$*, alors la série* f *est une fonction indéfiniment dérivable sur le disque de convergence de* f*, et on a*

$$f^{(k)}(x) = k! \sum_{n\geq k} C_n^k a_n x^{n-k}.$$

Preuve.

Soit x un élément fixé de $D^+(0,R)$, soit $h \in \mathbb{K}$ tel que $x+h \in D^+(0,R)$, on a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}).$$

On a

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{n\geq 0} a_n[(x+h)^n - x^n] \\ &= h\sum_{n\geq 1} a_n[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= h\sum_{n\geq 1} a_n \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1}. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Comme $|C_n^i| \leq 1$ (car $i \in \mathbb{Z}$), alors $C_n^i \in \mathbb{Z}_p$. On pose que $|x| \leq R$ et $|x+h| \leq |x|$, on a

$$|C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1}| \leq |x+h|^{n-i}|x|^{i-1} \leq R^{n-1}.$$

La somme à droite de la formule (2.3) est majorée en valeur absolue par $\max\limits_{n\geq 1} |a_n| R^{n-1}$ qui est fini, car $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| R^{n-1} = 0$, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h| \max_{n\geq 1} |a_n| R^{n-1} \text{ et } \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0.$$

D'où la continuité de f sur $D^+(0, R)$.

Maintenant, posons $g(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, on a $g \in \mathcal{A}(D^+(0, R))$, car pour tout $n \geq 1$, on a $|na_n|R^{n-1} \leq |a_n|R^{n-1}$. En passant à la limite, on trouve que $\lim_{n\to+\infty} |na_n|R^{n-1} = 0$, et

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) &= \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{i=1}^{n} C_n^i (x+h)^{n-i} x^{i-1} - \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + ... + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1} - nx^{n-1}] \\
&= h \text{ (somme majorée en valeur absolue par } \max_{n\geq 2} |a_n|R^{n-2}).
\end{aligned}
$$

Donc $f'(x) = g(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, et $f' \in \mathcal{A}(D^+(0, R))$.

Soient $x \in D^-(0, R)$ et r, $0 < r < R$, tel que pour $x \in D^+(0, r)$, f étant analytique sur $D^+(0, r)$, elle est continue et dérivable sur $D^+(0, r)$, et donc continue et dérivable en x, et on a $f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$, donc f est continue et dérivable sur $D^-(0, R)$, sa dérivée f' est un élément de $\mathcal{A}(D^-(0, R))$, car $f' \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$, pour r, $0 < r < R$.

Par récurrence, on montre l'égalité

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= k! \sum_{n\geq k} C_n^k a_n x^{n-k} \\
&= \sum_{n\geq k} n(n-1)(n-2)...(n-k+1) a_n x^{n-k}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Expression de f'.

Pour $k = 0$, alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

pour $k = 1$, alors

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}.$$

Expression de $f^{(k+1)}$.

Suppossons que l'égalité (2.4) est vraie pour k, et on montre qu'elle est vraie pour (k+1).

Par dérivation de l'égalité (2.4) terme à terme, on a

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' &= \left(k! \sum_{n\geq k} C_n^k a_n x^{n-k}\right)' \\
&= k! \sum_{n\geq k+1} (n-k) C_n^k a_n x^{n-k-1} \\
&= (k+1)! \sum_{n\geq k+1} (n-k) C_n^{k+1} a_n x^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

■

2.7.2 Zéros des fonctions analytiques

Dans cette partie on étudiera les zéros des fonctions analytiques sur un disque de $\mathbb{K}$.

Définition 2.7.12 *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) et soit $\gamma \in \mathbb{K}$ (resp. $\gamma \in D^-(0,R)$). Soit $r \in]0,+\infty[$ tel que $D^+(\gamma,r) \subset \mathbb{K}$ (resp. Soit $r \in]0,R[$ tel que $D^+(\gamma,r) \subset D^-(\gamma,R)$), et soit $f(x) = \sum_{n=q}^{+\infty} a_n(x-\gamma)^n$, $\forall x \in D^+(\gamma,r)$, où $a_q(\gamma) \neq 0$ et $q > 0$. On dit que dans ce cas γ est un zéro de f d'ordre de multiplicité q, et q sera appelé l'ordre de multiplicité de zéro γ.*

Proposition 2.7.13 *[7]*

Une fonction analytique non nulle sur un disque vérifie le principe de zéros isolés, c'est à dire que si b est un zéro de f, il existe un disque de centre b, de rayon assez petit, où la fonction f n'admet comme zéro que b.

Preuve.

Si b est un zéro de f, on peut écrire la fonction non nulle f sous la forme

$$f(x) = a_m(x-b)^m + a_{m+1}(x-b)^{m+1} + ...,$$

tels que $m \geq 1$ est un entier, et $a_m \neq 0$. Il résulte que si $|x-b|$ est assez petit, et non nul,

$$|f(x)| = |a_m||x-b|^m \neq 0.$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.7.14 *[26]*

Soit $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ non nulle. Pour chaque $\alpha \in D^-(0,R)$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-\alpha)^n$. De plus, si $f(\alpha) = 0$, α est un zéro isolé et il existe $q \in \mathbb{N}$ unique tel que f puisse être écrite dans $\mathcal{A}(D^-(0,R))$ sous la forme $(x-\alpha)^q g(x)$ où $g \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ et $g(\alpha) \neq 0$.

Définition 2.7.15 *Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$). On définit le module maximum de f, pour $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), par la formule*

$$|f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n.$$

L'application $r \mapsto |f|(r)$ définie une fonction réelle, croissante sur l'intervalle $[0,R[\subset \mathbb{R}$.

On a comme propriétés de la fonction $r \to |f|(r)$.

Proposition 2.7.16 *[2], [7], [26]*

Soient $0 < r < R$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, telles que $|a_n| r^n$ ait pour limite 0. La fonction

$$f \mapsto |f|(r) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n,$$

est une norme ultramétrique sur $\mathcal{A}(D^+(0,r))$. Elle est appelée la norme de Gauss. De plus on a,

$$\|f\| = \max_{x\in D^+(0,r)} |f(x)| = |f|(r).$$

Proposition 2.7.17 *[7]*

On suppose que $f \in \mathcal{A}(D^+(0,r))$, $0 < r < R$. Si f n'est pas nulle, alors

(i) La fonction $|f|(r)$ est croissante ;

(ii) Si la fonction f a un zéro b dans le disque $D^+(0,r)$, la fonction $|f|(r)$ est strictement croissante si $r > |b|$;

(iii) La fonction $|f|(r)$ est continue.

Preuve.

(i) On a déjà vu que $|f|(r)$ est la borne supérieure de $|f(x)|$ sur le disque $D^+(0,r)$, ce qui fournit le résultat immédiatement.

(ii) Soit $r_0 > |b|$. On a $|f|(r_0) = |a_s|r_0^s$, pour un $s \geq 1$, en raison de la présence d'au moins un zéro dans le disque $D^+(0,r_0)$. Comme a_s n'est pas nul, si $r > r_0$, on a $|a_s|r^s > |a_s|r_0^s$, donc

$$|f|(r) = \max_{k\geq 0} |a_k|r^k \geq |a_s|r^s > |a_s|r_0^s = |f|(r_0).$$

(iii) Fixons $\beta \in]0,r[$. Alors $|a_n|\beta^n$ tend vers 0 si $n \to +\infty$, de sorte qu'il existe N entier tel que

$$\max_{n\leq N} |a_n|\beta^n = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|\beta^n.$$

Il en résulte que si $t \in [0,\beta]$, on a aussi

$$\max_{n\leq N} |a_n|t^n = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|t^n = |f|(t).$$

Comme la fonction $t \mapsto \max\limits_{n\leq N} |a_n|t^n$ est clairement continue, on a démontré le résultat.

■

Théorème 2.7.18 *[12], [26]*

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$), pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$). On a

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$). Pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, alors $f'(x) = \sum\limits_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et

$$|f'|(r) = \max_{n\geq 1} |na_n|r^{n-1} = \frac{1}{r}\max_{n\geq 1} |na_n|r^n \leq \frac{1}{r}\max_{n\geq 0} |a_n|r^n = \frac{1}{r}|f|(r).$$

■

Lemme 2.7.19 *[7]*

Soit $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$*, un polynôme de* $\mathbb{K}[x]$.

On suppose que $|b_s|r^s = \max_{0 \le j \le s}\{|b_j|r^j\} = |Q|(r)$*. Alors le polynôme* Q *a toutes ses racines dans le disque* $D^+(0, r)$ *de* $\mathbb{K}$.

Preuve.

Montrons que le polynôme $Q(x)$ a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ dans le disque $D^+(0, r)$.

On factorise $Q(x)$,

$$Q(x) = b_s(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_s),$$

où $b_s \neq 0$, et les α_i sont dans $\mathbb{K}$, et pas forcément distincts. D'où

$$|x - \alpha_i|(r) = \max\{|x|, |\alpha_i|\} = \max\{r, |\alpha_i|\},$$

et on a

$$|Q|(r) = |b_s|r^s = |b_s| \prod_{i=1}^{s} \max\{r, |\alpha_i|\}.$$

Alors $\prod_{i=1}^{s} \max\{r, |\alpha_i|\} = r^s$, et comme $\max\{r, |\alpha_i|\} \ge r$, pour tout i, donc $\max\{r, |\alpha_i|\} = r$ et $|\alpha_i| \le r$, pour tout i. On a donc bien montré que toutes les racines de Q sont dans le disque $D^+(0, r)$. ∎

Théorème 2.7.20 *[7]*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ *et soit* s *un indice tel que l'on ait* $|a_s|r^s = |f|(r)$*, et* $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ *pour* $j > s$*. Il existe alors un couple* (Q, H)*,* Q *étant un polynôme de* $\mathbb{K}[x]$*,* $Q(x) = b_0 + ... + b_s x^s$*, avec* $|b_s|r^s = |Q|(r) = |f|(r)$*, et* $H(x)$ *une série entière appartenant à* $\mathcal{A}(D^+(0, r))$*, telle que* $|H - 1|(r) < 1$*, vérifiant* $f(x) = Q(x)H(x)$.

Théorème 2.7.21 *[7]*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^+(0, r))$ *et soit* s *un indice tel que l'on ait* $|a_s|r^s = |f|(r)$ *et* $|a_j|r^j < |a_s|r^s$ *pour* $j > s$*. Alors* *(i) Si $s \geq 1$, la fonction f a exactement s zéros dans le disque $D^+(0,r)$, compte tenu des multiplicités ;*

(ii) La fonction f n'a aucun zéro dans le disque $D^+(0,r)$ si et seulement si $s = 0$, et sa valeur absolue y est alors constante dans ce disque.

Preuve.

On va utiliser le Théorème 2.7.20. On a donc $f = QH$, avec les propriétés indiquées.
(i) Comme $|H-1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$, pour tout $x \in D^+(0,1)$, donc $H(x)$ ne s'annule pas. Comme le polynôme Q qui intervient dans la factorisation a toutes ses racines dans le disque $D^+(0,r)$. D'après le Lemme 2.7.19, f a exactement s zéros compte tenu des multiplicités dans ce disque.
(ii) Si f n'a aucun zéro dans le disque, on doit avoir $s = 0$ par (i).
Si $s = 0$, le polynôme Q qui intervient dans la décomposition $f = QH$ est un polynôme de degré 0, donc une constante c, non nulle puisque f est non nulle. Comme $|H-1|(r) < 1$, on a $|H(x)| = 1$ pour tout $x \in D^+(0,1)$, et par suite $|f(x)| = |c|$. ■

Théorème 2.7.22 *[26]*
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$. Alors f a un nombre fini de zéros dans $D^-(0,R)$ si et seulement si il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $|a_q|R^q \geq \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$.
De plus, si $t \in \mathbb{N}$ est le plus petit de tous les entiers q tel que $|a_q|R^q \geq \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$, alors f a exactement t zéro dans le disque $D^-(0,R)$.

Preuve.

Supposons que $t \in \mathbb{N}$ est le plus petit de tous les entiers q tel que $|a_q|R^q \geq \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|R^n$. Alors

$$|a_n|R^n < |a_t|R^t, \forall n < t.$$

Donc, pour chaque $n < t$, il existe $r_0(n) \in]0, R[$ tel que

$$|a_t|r^t > |a_n|r^n, \ \forall r \in]r_0(n), R[.$$

Posons $r_0 = \max\limits_{n<t} r_0(n)$. Alors, pour tout $r \in]r_0, R[$, on a $|a_t|r^t > |a_n|r^n$ si $n < t$. D'autre part, pour $r \in]0, R[$, on a $|a_n|r^n < |a_t|r^t$ si $n \geq t+1$ parce que $|a_t|R^t \leq |a_n|R^n$ et $n > t$. Par conséquent, on en déduit que pour tout $r \in]r_0, R[$, le nombre de zéros de f dans le disque $D^-(0, R)$ est égale à t, en prenant en compte les multiplicités.

■

Corollaire 2.7.23 *[26]*

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ non constante. Alors f admet au moins un zéro dans $\mathbb{K}$. De plus, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K}) \backslash \mathbb{K}[x]$, alors f a une infinité de zéros dans $\mathbb{K}$.

Lemme 2.7.24 *Si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ n'a aucun zéros dans $\mathbb{K}$. Alors f est une constante.*

Proposition 2.7.25 *[7]*

Soit $f(x)$ une fonction entière (donc une série entière de rayon de convergence infini), que l'on suppose non polynômiale. Alors l'ensemble des zéros non nuls de f forme une suite infinie, que l'on range par ordre de module croissant et que l'on note a_n. La suite $|a_n|$ tend vers l'infini, et on peut écrire f sous la forme d'un produit infini

$$f(x) = cx^k \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - \frac{x}{a_n}),$$

où c est une constante, et $k \in \mathbb{N}$ l'ordre de multiplicité de $x = 0$ comme zéro de f.

Preuve.

On montre tout d'abord que f a une infinité de zéro formant une suite de limite l'infini. Dans tout disque fermé, f a un nombre fini de zéro. On peut donc les ranger comme indiqué dans la proposition. Montrons que si la suite a_n est finie, alors f est un polynôme. Soit R assez grand, de manière que tous les zéros de f

soient dans le disque fermé de centre zéro, rayon R. On peut écrire $f = P_R H_R$, où P_R est un polynôme, de la forme $x^k \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{x}{a_n})$, où N est indépendant de R, puisque f n'a pas d'autres zéros. Donc $P_R = R$ est constant, et il en est de même de la fonction H_R de sorte qu'il existe une fonction H, entière, sans zéros dans $\mathbb{K}$, telle que $f = PH$. D'après le Lemme 2.7.24, une fonction entière sans zéros est constante ; or si $H = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n x^n$, $|h_0| = \max\{|h_n|R^n\}$, pour tout R. On en déduit que $|h_n|R^n \leq |h_0|$ pour tout R, et donc $h_n = 0$ si $n > 0$.

Considérons maintenant le produit infini

$$F(x) = x^k \prod_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{x}{a_n}).$$

Nous allons montrer qu'il est convergent, dans tout disque fermé de centre zéro, rayon r et définit donc une fonction analytique entière. Pour cela, on considère la suite des polynômes

$$P_n(x) = x^k \prod_{k=0}^{n}(1 - \frac{x}{a_k}),$$

et nous allons montrer que cette suite est de Cauchy dans $\mathcal{A}(D^+(0,r))$. Il nous suffit de montrer que, si on note $\|.\|$ la norme dans cet espace, on a $\|P_{n+1} - P_n\|$ tend vers 0.

On a en utilisant la multiplicativité de la norme

$$\begin{aligned}
\|P_{n+1} - P_n\| &= \|x^k\| \prod_{k=0}^{n} \|1 - \frac{x}{a_k}\| \| - \frac{x}{a_{n+1}}\| \\
&= \frac{r^{k+1}}{|a_{n+1}|} \prod_{k=0}^{n}(\max\{1, \frac{r}{|a_k|}\}).
\end{aligned}$$

Comme la suite $|a_n|$ tend vers l'infini, le produit fini (dans $\mathbb{R}$) $\prod_{k=0}^{n}(\max\{1, \frac{r}{|a_k|}\})$ converge vers une quantité que l'on appelle M, et qui est un majorant de cette suite.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{r^{k+1}}{|a_n|} < \varepsilon$. On a donc finalement si $n \geq N$, $\|P_{n+1} - P_n\| \leq M_\varepsilon$, ce qui démontre le résultat.

On montre en utilisant la factorisation prouvée auparavant dans un disque de centre zéro, rayon R, que $g = \frac{f}{F}$ est entière, sans zéros dans $\mathbb{K}$, et ceci termine la démonstration. $\blacksquare$

2.8 Fonctions méromorphes d'un corps ultramétrique

Définition 2.8.1 *On dit q'une fonction f est méromorphe sur $\mathbb{K}$ (resp. sur $D(0, R)$) si elle est analytique sur $\mathbb{K}$ (resp. sur $D(0, R)$) sauf aux points de singularités isolées qui sont des pôles.*

Remarque 2.8.2 *Le quotient de deux fonctions entières est une fonction méromorphe. C'est à dire, si la fonction f est méromorphe dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D(0, R)$), alors on peut écrire $f = \frac{g}{h}$ tel que $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}(D(0, R))$) sans zéros communs.*

Notation

On note par $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}(D(0, R))$) le corps des fonctions méromorphe dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $D(0, R)$), c'est à dire le corps de fractions de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. de $\mathcal{A}(D(0, R))$). La valeur absolue $|.|(r)$ définie sur $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. sur $\mathcal{A}(D^-(0, R))$) quand $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), s'étend d'une manière naturelle à $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. à $\mathcal{M}(D^-(0, R))$) en posant $|f|(r) = \frac{|g|(r)}{|h|(r)}$ quand $f = \frac{g}{h}$ et $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$).

Le Théorème qu'on énonce ci-dessous est une généralisation du Théorème 2.7.18

Théorème 2.8.3 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D(0, R))$). Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a*

$$|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r).$$

Preuve.

Posons $f = \frac{g}{h}$ où $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $g, h \in \mathcal{A}(D(0, R))$). Pour $r \in]0, +\infty[$ (resp.

$r \in]0, R[$), on a

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} = \frac{|g'h - gh'|(r)}{|gh|(r)},$$

mais évidemment $|g'h - gh'|(r) \leq \max\{|g'h|(r), |gh'|(r)\}$, ce qui entraîne que

$$\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \max\left\{\frac{|g'|(r)}{|g|(r)}, \frac{|h'|(r)}{|h|(r)}\right\}.$$

Alors d'après le Théorème 2.7.18, on a $\frac{|g'|(r)}{|g|(r)} \leq \frac{1}{r}$ et $\frac{|h'|(r)}{|h|(r)} \leq \frac{1}{r}$, ce qui achève la démonstration. ■

Lemme 2.8.4 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéros ni pôles dans $\mathbb{K}$. Alors f est une constante.*

Proposition 2.8.5 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une fonction méromorphe non constante. Alors f prend toutes les valeurs de $\mathbb{K}$, sauf au plus un.*

Preuve.

Supposons que f ne prendre que deux valeurs distincts $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On note $f = \frac{g}{h}$, où g et h sont deux fonctions entières sans zéros communs, de sorte que la fonction méromorphe $H = \frac{g-\alpha h}{g-\beta h}$ n'a pas de zéros et de pôles. Par conséquent, d'après le Lemme 2.8.4, H est égal à une constante $\gamma \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$ et nous avons donc $f = \frac{\alpha-\beta\gamma}{1-\gamma}$, qui est une contradiction. ■

2.9 Polygône de valuation

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés de polygône de valuation qui détermine la distribution des zéros des fonctions entières (aussi des polynômes).

Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ une fonction non nulle de $\mathcal{A}(D^-(0, R))$ et soit $0 < r < R$, et regardons la fonction $r \mapsto |f|(r)$, pour $r \in [0, +\infty[$. Pour simplifier, supposons que $a_0 \neq 0$, alors pour $|x|$ assez petit, on aura $|f(x)| = |a_0|$, de sorte que $|f|(r) = |a_0| =$

constante, pour r assez petit. Soit r_1 la première valeur de r et s_1 la plus grande valeur de k telle que $|a_k|r_1^k = |a_0|$, alors f a exactement s_1 zéros sur le cercle $|x| = r_1$, et aucun dans le disque ouvert de centre 0, rayon r_1. On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \geq r_1$ et assez proche de r_1. En général, on s'arrête quand il existe une valeur $k > s_1$ et un $r > r_1$ tels que $|a_k|r^k = |a_{s_1}|r^{s_1}$; soit r_2 la première valeur de r telle qu'il en soit ainsi, et s_2 le plus grand des entiers $k > s_1$ tels que $|a_k|r_2^k = |a_{s_1}|r_2^{s_1}$. Alors, sur le cercle $|x| = r_2$, f a $s_2 - s_1$ zéros, et aucun dans la couronne ouverte de centre 0 et de rayon r_1, r_2. On a $|f|(r) = |a_{s_1}|r^{s_1}$, pour $r \in [r_1, r_2]$. Et ainsi de suite, on trouve des cercles où se trouvent les zéros de f, de rayons r_k (suite fini ou infinie), le nombre des zéros sur ces cercles est $s_k - s_{k-1}$, et en plus, on a le fait que la fonction $|f|(r)$ est continue et monomiale par morceaux, c'est à dire que sur $[r_k, r_{k+1}]$, il existe une constante c_k et un entier s_k tels que $|f|(r) = c_k r^{s_k}$. Les rayons r_k s'appellent les rayons exceptionnels pour la série entière f.

On fabrique maintenant une fonction Φ_f définie par

$$\begin{aligned} \Phi_f : I =]-\infty, \log R[\quad &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ \log r \quad &\mapsto \quad \Phi_f(\log r) = \log |f|(r) = \max_{n \geq 0}\{\log |a_n| + n \log r\}. \end{aligned}$$

Notation On note $\nu^+(f, r)$ (resp. $\nu^-(f, r)$) le plus grand (resp. le plus petit) entier j tel que

$$\log |a_j| + j \log r = \Phi_f(\log r) = \max_{n \geq 0}\{\log |a_n| + n \log r\}.$$

C'est à dire que, $|a_j|r^j = \max_{n \geq 0} |a_n|r^n$.

Théorème 2.9.1 *[26]*

La fonction Φ_f vérifient les propriétés suivantes

(i) C'est une fonction convexe, croissante, continue et affine par morceau ;

(ii) Si f a un zéro dans $D^-(0, r)$, la fonction Φ_f est strictement croissante pour

$\log r > \log |b|$;

(iii) La fonction Φ_f est dérivable à gauche et à droite en chaque point $\log r \in I$. Sa dérivée à gauche en $\log r$ est égale à $\nu^+(f,r)$ et sa dérivée à droite en $\log r$ est égale à $\nu^-(f,r)$;

(iv) Le nombre de zéros de f dans le cercle $C(0,r)$, en prenant en compte les multiplicités, est égale à $\nu^+(f,r) - \nu^-(f,r)$, où $\nu^+(f,r)$ (resp. $\nu^-(f,r)$) est le nombre des zéros de f dans le disque $D^+(0,r)$ (resp. $D^-(0,r)$).

Remarque 2.9.2 *La représentation de la fonction Φ_f est connue en analyse ultramétrique comme "polygone de valuation".*

Exemple 2.9.3 *(Polygône de valuation des polynômes)*

(1) Soient $r, s \in]0,+\infty[$ tel que $r < s$, et soit $P(x) = a_2x^2 + a_1x + ... + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ où $a_0 \neq 0$.

Supposons $|a_0| = |a_1|r > |a_2|r^2$, on a $|P|(r) = |a_0| = |a_1|r$, donc $\nu^+(P,r) = 1$ et $\nu^-(P,r) = 0$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,r)$. Supposons maintenant $|a_1|s = |a_2|s^2 > |a_0|$. Alors $\nu^+(P,s) = 2$ et $\nu^-(P,s) = 1$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,s)$. D'autre part, $\nu^+(P,\rho) = \nu^-(P,\rho) = 1$, $\forall \rho \in]r,s[$ et $\nu^+(P,\rho) = \nu^-(P,\rho) = 2$, $\forall \rho > s$.

(2) Soit p un nombre premier et soit $P(x) = 2p^2 + p^4 + (p+p^5)x + (p^2+p^3)x^2$.

Pour $r = \frac{1}{p}$. On a $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^2}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^4}$, donc $\nu^+(P,r) = 1$ et $\nu^-(P,r) = 0$. Par conséquent, le polynôme P admet un zéro dans le cercle $C(0,\frac{1}{p})$.

Pour $r = \frac{1}{p^2}$. On a $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p^3}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^6}$, donc $\nu^+(P,r) = \nu^-(P,r) = 0$. Donc P n'a aucun zéro dans le cercle $C(0,\frac{1}{p^2})$.

Pour $r = 1$. On a $|a_0| = \frac{1}{p^2}$, $|a_1|r = \frac{1}{p}$ et $|a_2|r^2 = \frac{1}{p^2}$, donc P n'a aucun zéro dans le cercle $C(0,1)$.

Interprétation géométrique Soit $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_nx^n$ une fonction non nulle de

$\mathcal{A}(D^+(0,r))$ et soit $0 < r < R$. Pour chaque n nous construisons le graphe $\gamma_n(\log r)$ qui décrit $\log|a_n| + n\log r$ comme fonction de $\log r$. Soit $\gamma_n(r,f)$ le bord de l'intersection des demi-plans situés sous les droites $\gamma_n(\log r)$ de la pente n. Alors dans chaque segment $[\log r_k, \log r_{k+1}]$, $0 < \log r_k < \log r_{k+1} < R$, il existe un nombre fini de $\gamma_n(\log r)$ qui interviennent dans $\gamma_n(r,f)$. On déduit que $\gamma_n(r,f)$ est une ligne polygônale qui s'appelle le polygône de valuation de la fonction $f(x)$. Nous appellons le point $\log r > 0$ où $\gamma_n(r,f)$ un sommet des points critiques de $f(x)$. Chaque segement fini $[\log r_k, \log r_{k+1}]$ ne contient qu'un nombre fini de points critiques de $f(x)$.

CHAPITRE 3

Théorie de Nevanlinna sur un corps ultramétrique

Sommaire

Parmi les méthodes utilisées dans les problèmes de distribution de valeurs, la théorie de Nevanlinna ultramétrique, qui joue un rôle majeur dans ce domaine. Cette théorie a été introduite en 1989 par A. Boutabaa ([12],[13]). Elle s'applique non seulement à des fonctions méromorphes dans tout le corps $\mathbb{K}$, mais aussi, en 2001, A. Boutabaa et A. Escassut ont appliqué cette théorie aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert contenu dans $\mathbb{K}$, en tenant compte du problème de Lazard. Dans ce chapitre, on s'intéresse de cette théorie.

Notation À partir d'ici et tout au long de ce travail, on notera $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clôs, complet par rapport à une valeur absolue ultramétrique $|.|$.

3.1 Formule de Jensen

Dans cette section, on s'intéresse de la version ultramétrique de la formule de Jensen qu'on utilise pour obtenir le premier théorème fondamental de Nevanlinna.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$) et $\alpha \in D^-(0,r)$, on note

$$z(r,f) = \sum_{|\alpha|=r} \max(0, \omega_\alpha(f)) \text{ et } p(r,f) = -\sum_{|\alpha|=r} \min(0, \omega_\alpha(f)) = z(r, \frac{1}{f}).$$

C'est à dire que, $z(r,f)$ (resp. $p(r,f)$) est le nombre de zéros (resp. pôles) de f sur le cercle $|x| = r$, comptés avec leurs multiplicités, où $\omega_\alpha(f)$ est l'entier relatif i_α de $\mathbb{Z}$, tel que $f(x) = \sum\limits_{i \geq i_\alpha} a_i(x-\alpha)^i$ avec $a_{i_\alpha} \neq 0$.

Théorème 3.1.1 *[12],[13]*

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0, pour $r \in]0,R[$, on a

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha|\leq r} \left\{ z(r,f) - z(r,\frac{1}{f}) \right\} \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Preuve.

La démonstration de cette formule est une conséquence des propriétés de polygône de valuation.

Soit $f \in \mathcal{A}(D^{-}(0,R))$ telle que $f(0) \neq 0$. Le polygône de valuation de f donne pour $r \in]0, R[$

$$\log|f|(r) = \log|f(0)| + \sum_{|\alpha| \leq r} z(r,f) \log\frac{r}{|\alpha|}. \tag{3.1}$$

Pour montrer l'égalité (3.1), soient $0 < r_1 < r_2 < ... < r_k < ... < r$ et $0 = n_0 < n_1 < ... < n_k < ... < n$.

On pose, $\log|f|(r) = \max\limits_{n \geq 0}\{\log|a_n| + n\log r\}$.

Le cas où r_1 plus proche de zéro, f n'a pas de zéros à valeur absolue entre 0 et r_1, on a

$$\log|f|(r_1) = \log|f(0)| = \log|a_0| + n_0 \log r_1.$$

Le cas où $0 < r_1 < r_2$, on a

$$\log|f|(r_2) = \log|a_{n_1}| + n_1 \log r_2.$$

$$\vdots$$

Le cas où $r_{k-1} < r_k$, on a

$$\log|f|(r_k) = \log|a_{n_{k-1}}| + n_{k-1} \log r_k.$$

Le cas où $r_k < r$, on a

$$\log|f|(r) = \log|a_{n_k}| + n_k \log r.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= [\log|f|(r)-\log|f|(r_k)]+[\log|f|(r_k)-\log|f|(r_{k-1})]+...+[\log|f|(r_2)-\log|f|(r_1)]\\
&+ \log|f|(r_1)\\
&= [\log|a_{n_k}|+n_k\log r-\log|a_{n_k}|-n_k\log r_k]+[\log|a_{n_{k-1}}|+n_{k-1}\log r_k-\log|a_{n_{k-1}}|\\
&- n_{k-1}\log r_{k-1}]+...+[\log|a_{n_1}|+n_1\log r_2-\log|a_{n_1}|-n_1\log r_1]+\log|f(0)|\\
&= n_k\log\frac{r}{r_k}+n_{k-1}\log\frac{r_k}{r_{k-1}}+...+n_1\log\frac{r_2}{r_1}+\log|f(0)|\\
&= n_k\log\frac{r}{r_k}+n_{k-1}\left(\log\frac{r}{r_{k-1}}-\log\frac{r}{r_k}\right)+...+n_1\left(\log\frac{r}{r_1}-\log\frac{r}{r_2}\right)+\log|f(0)|\\
&= (n_k-n_{k-1})\log\frac{r}{r_k}+(n_{k-1}-n_{k-2})\log\frac{r}{r_{k-1}}+...+(n_2-n_1)\log\frac{r}{r_2}\\
&+ (n_1-n_0)\log\frac{r}{r_1}+\log|f|(0)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(n_i-n_{i-1})\log\frac{r}{r_i}+\log|f(0)|.
\end{aligned}$$

Où (n_i-n_{i-1}) le nombre des zéros de f dans le cercle $|x|=r_i$, donc

$$\log|f|(r)=\log|f(0)|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|}.$$

Soit maintenant $f\in\mathcal{M}(D^-(0,R))$ telle que $f(0)\neq 0,\infty$. On pose $f=\frac{g}{h}$ telle que $g,h\in\mathcal{A}(D^-(0,R))$. Soit α (resp. β) un zéro de g (resp. de h), on a

$$\begin{aligned}
\log|f|(r) &= \log|\frac{g}{h}|(r)\\
&= \log|g|(r)-\log|h|(r)\\
&= \log|g(0)|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(r,g)\log\frac{r}{|\alpha|}-\log|h(0)|-\sum_{0<|\beta|\le r}z(r,h)\log\frac{r}{|\beta|}\\
&= \log\left|\frac{g(0)}{h(0)}\right|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|}-\sum_{0<|\beta|\le r}z(r,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|}\\
&= \log|f(0)|+\sum_{0<|\alpha|\le r}z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|}-\sum_{0<|\beta|\le r}z(r,\frac{1}{f})\log\frac{r}{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\log|f|(r)=\sum_{0<|\alpha|\le r}\left\{z(r,f)-z(r,\frac{1}{f})\right\}\log\frac{r}{|\alpha|}.$$

$\blacksquare$

3.2 Fonction de Nevanlinna

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$. Pour tout $r \in]0,R[$, notons par $Z(r,f)$ la fonction de comptage des zéros de f dans le disque $D^-(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités.

$$Z(r,f) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ \omega_\alpha(f)>0}} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

On a aussi,

$$\overline{Z}(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha|},$$

la fonction de comptage des zéros de f dans le disque $D^-(0,r)$ sans prendre en compte les multiplicités.

De la même manière, notons par $N(r,f)$ la fonction de comptage des pôles de f dans le disque $D^-(0,r)$, comptés avec leurs multiplicités, on pose

$$N(r,f) = -\sum_{\substack{|\alpha|\leq r \\ \omega_\alpha(f)<0}} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|} = Z(r, \frac{1}{f}).$$

Et

$$\overline{N}(r,f) = \overline{Z}(r, \frac{1}{f}).$$

Pour $x > 0$, on pose $\log^+ x = \max(0, \log x)$, telle que $x > 0$ et log est une fonction logarithmique réelle. On définit pour $r \in]0,R[$,

$$m(r,f) = \log^+ |f|(r) = \max(0, \log |f|(r)),$$

la fonction de compensation.

En fin, on définit la fonction de Nevanlinna (appelée aussi la fonction caractéristique de f), quand f n'a ni zéro ni pôle en 0, par

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Remarque 3.2.1 *Remarquons que les fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ ne changent pas à une constante près, si on change l'origine. Par conséquent, si une fonction f*

admet un zéro ou un pôle en 0, on peut réaliser un changement d'origine pour redéfinir les fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$.

Tout au long de ce chapitre, on supposera que la fonction f intervenant dans les fonctions $m(r,f)$, $N(r,f)$ et $T(r,f)$ n'a pas de zéro en 0, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$, et n'a ni zéro ni pôle en 0, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$.

Par les notations précédentes, on peut reécrire Théorème 3.1.1 sous forme,

Théorème 3.2.2 *[19]*

Soit $R > 0$, et soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp.$f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors

$$\log|f|(r) = Z(r,f) - N(r,f) + \log|f(0)|, \tag{3.2}$$

pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$).

Corollaire 3.2.3 *[12],[13]*

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors, pour tout $r \in]0,R[$, on a

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1).$$

Preuve.

D'après le Théorème 3.2.2, nous avons

$$\log|f(0)| = N(r,f) - Z(r,f) + \log|f|(r).$$

Puisque $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$, for $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\log|f(0)| &= N(r,f) - Z(r,f) + \log^+|f|(r) - \log^+|\frac{1}{f}|(r) \\
&= N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) + m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) \\
&= N(r,f) + m(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) - m(r,\frac{1}{f}) \\
&= T(r,f) - T(r,\frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

On a aussi

Proposition 3.2.4 *[13]*

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), nous avons

i) $N(r, f + g) \leq N(r, f) + N(r, g)$,

ii)$N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g)$.

Preuve.

Les inégalités i) et ii) sont vérifiés puisque l'ordre de multiplicité de pôles de $f + g$ (ou fg) au point x est au plus égal à la somme d'ordre de multiplicité de pôles de f et g au point x. D'où

$$Z(r, \frac{1}{f+g}) \leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}),$$
$$Z(r, \frac{1}{fg}) \leq Z(r, \frac{1}{f}) + Z(r, \frac{1}{g}).$$

■

Théorème 3.2.5 *[13]*

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f, g \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$) et $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

i) $m(r, f + g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\}$,

ii) $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$,

iii) $m(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g)$,

iv) $m(r, af) = m(r, f) + O(1)$.

Preuve.

Puisque $|.|(r)$ est une valeur absolue ultramétrique et grâce à la croissance de la fonction logarithmique on enduit sans difficulté $i)$, $iii)$ et $iv)$.

Si $|f|(r) > |a|$, pour r assez grand (resp. assez proche de R), on a

$$|f - a|(r) = \max\{|f|(r), |a|\} = |f|(r),$$

d'où

$$m(r, f - a) = m(r, f).$$

Alors que, si $|f|(r) \leq |a|$, on a

$$|f - a|(r) \leq \max\{|f|(r), |a|\} \leq |a|,$$

ce qui entraine

$$|m(r, f - a) - m(r, f)| \leq \max\{m(r, f - a), m(r, f)\} \leq \log^+ |a|,$$

et ainsi $m(r, f - a) = m(r, f) + O(1)$, d'où *ii*). ∎

On donne une autre définition de la fonction caractéristique de Nevanlinna.

Théorème 3.2.6 *[28]*

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, r))$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = \max\{Z(r, f) + \log |f(0)|, N(r, f)\}.$$

Corollaire 3.2.7 *[28]*

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0, R)$ non nulle. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$), on a

$$T(r, f) = Z(r, f) + O(1).$$

De plus, il existe $\rho \in]0, +\infty[$ (resp. $\rho \in]0, R[$) tel que pour $b \neq f(0)$, on a pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

$$Z(r, f) = Z(r, f - b).$$

Théorème 3.2.8 *[13]*

Soient $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ non identiquement nulle et n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors pour tout $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$)

i) $T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

ii) $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$,

De plus, si $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ *(resp.* $f, g \in \mathcal{A}(D^-(0, R))$*), on a*

iii) $T(r, f+g) \leq \max\{T(r, f), T(r, g)\} + O(1)$,

Preuve.

$i)$ Puisque

$$m(r, f+g) \leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + O(1),$$

et

$$N(r, f+g) \leq N(r, f) + N(r, g) + O(1),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} m(r, f+g) + N(r, f+g) &\leq \max\{m(r, f), m(r, g)\} + N(r, f) + N(r, g) + O(1), \\ &\leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1). \end{aligned}$$

D'où $T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

$ii)$ De même, on déduit que

$$m(r, fg) + N(r, fg) \leq m(r, f) + m(r, g) + N(r, f) + N(r, g) + O(1).$$

D'où $T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1)$.

$iii)$ Puisque $N(r, f) = N(r, g) = 0$, l'inégalité est immédiate. ■

Proposition 3.2.9 *[13]*

Soient $f \in \mathcal{M}(D^-(0, R))$ *et* $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ *tels que* $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq a$ *et* $f(0) \neq \infty$.

Pour $r \in]0, R[$ *on a*

i) $T(r, af) = T(r, f) + O(1)$

ii) $T(r, f-a) = T(r, f) + O(1)$.

Preuve.

Puisque

$$N(r,f) = N(r,af) = N(r,f-a),$$

$$m(r,f-a) = m(r,f) + O(1), \quad \text{et } m(r,af) = m(r,f) + O(1),$$

alors

$$T(r,af) = T(r,f) + O(1),$$

et

$$T(r,f-a) = T(r,f) + O(1).$$

■

3.2.1 Ordre de croissance d'une fonction méromorphe

Définition 3.2.10 *On appelle ordre de croissance d'une fonction méromorphe $f(x)$ et on note $\rho(f)$ la quantité définie par*

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$, on a

$$\rho(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(\log |f|(r))}{\log r}.$$

Théorème 3.2.11 *[11]*

Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Si $c\,(|f|(r))^\alpha \geq |g|(r)$, avec α et $c > 0$, pour r assez grand, on a

(i) $\rho(f) \geq \rho(g)$,

(ii)$\rho(f+g) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$,

(iii) $\rho(fg) \leq \max(\rho(f), \rho(g))$.

Corollaire 3.2.12 *[11]*

Soient $f, g \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Alors $\rho(f^n) = \rho(f)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\rho(f) > \rho(g)$, on a $\rho(f+g) = \rho(f)$.

Pour plus de détailes sur l'ordre de croissance voir [11].

3.3 Premier Théorème Fondamental de Nevanlinna

Théorème 3.3.1 *[13]*

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) et $a \in \mathbb{K}$ tels que $f(0) \neq 0$, $f(0) \neq \infty$ et $f(0) \neq a$. Pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), on a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) + O(1). \tag{3.3}$$

Preuve. La démonstration est facile, elle découle du Corollaire 3.2.3 et la propriété $ii)$ du Proposition 3.2.9. ∎

Notation

Soit ϕ, φ et ψ trois fonctions réelles définies dans un intervalle $I =]0,+\infty[$ (resp. I=]0,R[) et soit $r \in I$. S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\phi(r) \leq \psi(r) + c\,\varphi(r)$, on écrira simplement $\phi(r) \leq \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $|\phi(r) - \psi(r)|$ est bornée par une fonction de la forme $c\,\varphi(r)$, on écrira $\phi(r) = \psi(r) + O(\varphi(r))$. Si $\lim\limits_{r\to+\infty} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$ (resp. $\lim\limits_{r\to R} |\phi(r) - \psi(r)| = 0$), on écrira $\phi(r) = \psi(r) + o(\varphi(r))$.

Exemple 3.3.2 *1) Soit $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$. Alors $Z(r,P) = \deg P \log r + O(1)$, pour tout $r \in]0,+\infty[$. En effet, soit $\{\gamma_1, ..., \gamma_t\}$ l'ensemble des zéros de P où $t \leq q$, et soient $s_1, ..., s_t$ les ordres de multiplicité respectifs. Supposons $A = \max\limits_{1\leq j\leq t} |\gamma_j|$. Si $r \in]0,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} Z(r,P) &= \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{|\gamma_j|} = \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{r}{A} + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma_j|} \\ &= \sum_{j=1}^{t} s_j (\log r - \log A) + \sum_{j=1}^{t} s_j \log \frac{A}{|\gamma_j|}. \end{aligned}$$

Mais $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j = q$ et $\sum\limits_{j=1}^{t} s_j (\log \frac{A}{|\gamma_j|} - \log A) = O(1)$. Par conséquent

$$Z(r,P) = q \log r + O(1) = \deg P + O(1).$$

2) Soient $P(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ et $Q(x) = \sum\limits_{n=1}^{q} b_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ deux polynômes premiers entre eux. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(x)$. Alors

$$T(r,F) = \deg F \log r + O(1), \text{ pour } r \text{ assez grand dans }]0,+\infty[.$$

En effet, soit $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ *et soit* $\{\beta_j\}_{j\in J}$ *l'ensemble de zéros de* P *et* Q *respectivement. Supposons* $B = \sup_{i,j}\{|\gamma_i|, |\beta_j|\}$. *D'après l'exemple précédent, pour* $r \in]B, +\infty[$, *on a*

$$Z(r, P) = \deg P \log r + O(1) \text{ et } Z(r, Q) = \deg Q \log r + O(1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} T(r, f) &= \max\{Z(r, P) + \log|P(0)|, Z(r, Q)\} \\ &= \max\{\deg P, \deg Q\} \log r + O(1), \end{aligned}$$

où, par définition, $\max\{\deg P, \deg Q\} = \deg F$.

Proposition 3.3.3 *[13]*

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *n'ayant ni zéro ni pôle en 0. On a les équivalences suivantes,*

i) f *est une constante* $\Leftrightarrow T(r, f) = o(\log r)$, $r \to +\infty$,

ii) $f \in \mathbb{K}(x) \Leftrightarrow T(r, f) = O(\log r)$, $r \to +\infty$,

iii) f *est non constante* $\Leftrightarrow$ *il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et* $A > 0$ *tels que*

$$T(r, f) \geq \log r + c, \text{ pour } r > A.$$

Preuve.

i) Si $f = a \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$, on a $T(r, f) = \log^+ |f|(r) = o(\log r)$, pour tout $r > 0$.

En effet, pour tout $r > 0$

$$T(r, f) = \max\{0, \log|f|(r)\} = \max\{0, \log|a|\} = \begin{cases} \log|a| & \text{si} \quad \log|a| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \log|a| \leq 0. \end{cases}$$

D'où, $\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = 0$, i.e.

$$T(r, f) = \log^+ |f|(r) = o(\log r).$$

Pour la réciproque, on distingue deux cas

1) f n'a aucun pôle, car si x en était un on aurait

$$T(r, f) \geq N(r, f) \geq \sum_{|\alpha|\leq r} \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \log \frac{r}{|\alpha|},$$

d'où pour $r > 0$, on a

$$\frac{-T(r,f)}{\log r} \leq \frac{-\log r + \log|\alpha|}{\log r} = \frac{\log|\alpha|}{\log r} - 1.$$

En passant à la limite, on a $0 \leq -1$, ce qui est absurde. D'où f n'a aucun pôle.

D'autre part, on sait que $T(r, \frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1) = o(\log r)$.

2) f n'a aucun zéro, car si x était un on aurait

$$T(r,\frac{1}{f}) \geq N(r,\frac{1}{f}) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(r,\frac{1}{f}) \log\frac{r}{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|} \geq \sum_{|\alpha|\leq r} \log\frac{r}{|\alpha|} \geq \log\frac{r}{|\alpha|}.$$

D'où pour $r > 0$,

$$\frac{-T(r,\frac{1}{f})}{\log r} \leq \frac{-\log r + \log|\alpha|}{\log r} = \frac{\log|\alpha|}{\log r} - 1.$$

En passant à la limite, on a $0 \leq -1$, ce qui est absurde. D'où f n'a aucun zéro.

Donc f est une constante.

ii) Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x), Q(x) \in \mathbb{K}[x]$ sont tels que $P(0) \neq 0$ et $Q(0) \neq 0$. Soit $k = \deg P(x)$ et $l = \deg Q(x)$, on a au voisinage de $+\infty$

$$\log|P|(r) = k\log r + O(1),$$

$$\log|Q|(r) = l\log r + O(1).$$

D'où

$$\log|f|(r) = \log|P|(r) - \log|Q|(r) = (k-l)\log r + O(1).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} m(r,f) = \log^+|f|(r) &= \max\{0, (k-l)\log r\} + O(1) \\ &= \begin{cases} O(1), & \text{si} \quad (k-l)\log r < 0 \\ (k-l)\log r + O(1), & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} O(1), & \text{si} \quad k < l \\ (k-l)\log r + O(1), & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$N(r,f) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(r,f)\log\frac{r}{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,Q)\log\frac{r}{|\alpha|} = l\log\frac{r}{|\alpha|} = l\log r + O(1).$$

D'où

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \begin{cases} l\log r + O(1), & \text{si} \quad k < l \\ k\log r + O(1), & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e. $T(r,f) = O(\log r)$.

Réciproquement, si $T(r,f) = O(\log r)$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq \frac{T(r,f)}{\log r} \leq \alpha$, pour r tend vers l'infini. Soit $n(r) = \sum\limits_{|\alpha|\leq r} p(r,f)$. On a pour $r > 0$,

$$\begin{aligned} N(r^2,f) = \sum_{|\alpha|\leq r^2} p(r^2,f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \quad &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(r,f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(r,f)\{2\log r - \log|\alpha|\} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} p(r,f)\log r = n(r)\log r. \end{aligned}$$

D'où $T(r^2,f) \geq N(r^2,f) \geq n(r)\log r$, et

$$\alpha \geq \frac{T(r^2,f)}{2\log r} \geq \frac{N(r^2,f)}{2\log r} \geq \frac{n(r)\log r}{2\log r} = \frac{n(r)}{2}.$$

On trouve que

$$2\alpha \geq \frac{2T(r^2,f)}{2\log r} \geq n(r).$$

Comme $n(r)$ est une fonction croissante de r, $n(r)$ a une limite quand $r \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{r\to+\infty} n(r) \leq 2\alpha < +\infty$. Donc f n'a qu'un nombre fini de pôles dans $\mathbb{K}$.

D'autre part, on a $T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1)$, il existe $\beta > 0$ tel que $0 \leq \frac{T(r,\frac{1}{f})}{\log r} \leq \beta$, pour r tend vers l'infini. Soit $m(r) = \sum\limits_{|\alpha|\leq r} z(r,f)$. On a pour $r > 0$

$$\begin{aligned} N(r^2,\frac{1}{f}) = \sum_{|\alpha|\leq r^2} z(r^2,f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \quad &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,f)\log\frac{r^2}{|\alpha|} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,f)\{2\log r - \log|\alpha|\} \\ &\geq \quad \sum_{|\alpha|\leq r} z(r,f)\log r = m(r)\log r. \end{aligned}$$

Et

$$2\beta \geq \frac{2T(r^2, f)}{2\log r} \geq m(r).$$

Comme $m(r)$ est une fonction croissante de r, $m(r)$ a une limite quand $r \to +\infty$ et on a $\lim\limits_{r\to+\infty} m(r) \leq 2\beta < +\infty$. Donc f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{K}$. D'où $f \in \mathbb{K}(x)$.

iii) Si f est non constante, f admet au moins un zéro ou un pôle. Vu la relation du Corollaire 3.2.3 et quitte à considérer $\frac{1}{f}$, on peut supposer que f a un pôle $a \neq 0$, d'où

$$T(r, f) \geq N(r, f) = \sum_{|\alpha|\leq r} p(r, f) \log \frac{r}{|\alpha|} \geq \log \frac{r}{|a|} = \log r - \log |a|.$$

La réciproque est évidente, car s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $A > 0$, $T(r, f) \geq \log r + c$ pour $r > A$, on a

$$\begin{aligned} T(r, f) &\geq \log r + c, \\ \frac{T(r, f)}{\log r} &\geq 1 + \frac{c}{\log r}. \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{r\to+\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} \neq 0$, d'où $T(r, f) \neq o(\log r)$. D'aprés $i)$, la fonction f est non constante. ∎

Corollaire 3.3.4 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ n'ayant ni zéro ni pôle en 0. Alors $f \notin \mathbb{K}(x)$ si et seulement si*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty.$$

Preuve.

Supposons d'abord $f \in \mathbb{K}(x)$. Donc d'après l'exemple précédent, $T(r, f) = \deg f \log r + O(1)$, pour r assez grand. Par conséquent

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \deg f.$$

Supposons maintenant que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})\backslash\mathbb{K}(x)$, alors, f admet ou bien une infinie de zéros ou bien une infinité de pôles et on a donc, $T(r, f) > \lambda \log r$ pour tout $\lambda > 0$ et pour $r \in]0, +\infty[$. Par conséquent

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = +\infty.$$

Lemme 3.3.5 *[26]*

Soit $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$, telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g, h \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$ telles que $f = \frac{g}{h}$ vérifiant pour $r \in]0, R[$,

$$Z(r,g) \leq Z(r,f) + \varepsilon \text{ et } Z(r,h) \leq N(r,f) + \varepsilon.$$

Corollaire 3.3.6 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$), telle que $f(0) \neq 0, \infty$. Il existe $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) telles que $f = \frac{g}{h}$ vérifiant pour $r \in]0, +\infty[$ (resp. $r \in]0, R[$),*

$$\max\{T(r,g), T(r,h)\} \leq T(r,f) + O(1),$$

En vue de démontrer d'autres résultats.

Proposition 3.3.7 *[13]*

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{D}^-(0,R))$) telle que $f^{(k)} (k \in \mathbb{N})$ n'a ni zéro ni pôle en 0. Alors

i) $N(r, f^{(k)}) = N(r,f) + k\overline{N}(r,f)$,

ii) $Z(r, f^{(k)}) \leq Z(r,f) + k\overline{N}(r,f) - \log r + O(1)$,

iii) $T(r, f^{(k)}) \leq T(r,f) + k\overline{N}(r,f) \leq (k+1)T(r,f)$.

Nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.3.8 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$), $f = \frac{g}{h}$ où $g, h \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{A}(D^-(0,R))$) n'ont pas de zéro commun. Posons $H_0 = g$ et $H_k = hH'_{k-1} - kh'H_{k-1}$ pour $k \geq 1$. on a*

i) $f^{(k)} = \frac{H_k}{h^{k+1}}$,

ii) Tout zéro d'ordre m $(m \geq 1)$ de h est un zéro d'ordre $k(m-1)$ de H_k et un pôle d'ordre $m+k$ de $f^{(k)}$.

Lemme 3.3.9 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{M}(D^-(0,R))$) telle que $f(0) \neq 0$ et $f(0) \neq \infty$. On a pour $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$),*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = 0.$$

Preuve.

D'aprés le Théorème 2.8.3, On a pour tout $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), $\frac{|f'|(r)}{|f|(r)} \leq \frac{1}{r}$.

Par conséquent, on a

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \log^+ \left|\frac{f'}{f}\right|(r) = \max\left\{0, \log\left|\frac{f'}{f}\right|(r)\right\} = 0.$$

Preuve de la Proposition 3.3.7 Soit $x_1, x_2, ..., x_q$ les pôles de f dans le disque $|x| \leq r$, et supposons que chaque x_i est d'ordre m_i, $i \in \{1,...,q\}$. Donc d'après le Lemme 3.3.8, les pôles de $f^{(k)}$ dans le disque $|x| \leq r$ sont $x_1, x_2, ..., x_q$ et leurs ordres sont respectivement $m_1 + k, m_2 + k, ..., m_q + k$. D'où

$$\begin{aligned} N(r, f^{(k)}) &= (m_1 + k)(\log r - \log|x_1|) + (m_2 + k)(\log r - \log|x_2|) + ... + (m_q + k)(\log r - \log|x_q|) \\ &= m_1(\log r - \log|x_1|) + m_2(\log r - \log|x_2|) + ... + m_q(\log r - \log|x_q|) \\ &+ k\{(\log r - \log|x_1|) + (\log r - \log|x_2|) + ... + (\log r - \log|x_q|)\} \\ &= N(r, f) + k\overline{N}(r, f). \end{aligned}$$

La relation $i)$ est donc démontrée.

Pour la relation $ii)$, soit $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$). Par le Théorème 3.2.2, on a

$$Z(r, f') - N(r, f') + \log|f'(0)| = \log|f'|(r), \tag{3.4}$$

$$Z(r, f) - N(r, f) + \log|f(0)| = \log|f|(r). \tag{3.5}$$

Mais d'aprés le Théorème 2.7.18, on a $|f'|(r) \leq \frac{1}{r}|f|(r)$ et donc, en considérant la croissance de la fonction logarithmique, on obtient

$$\log|f'|(r) \leq \log|f|(r) - \log r.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} Z(r,f') &= \log|f'|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| \\ &\leq \log|f|(r) + N(r,f') - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) + \log|f(0)| - \log|f'(0)| - \log r \\ &\leq Z(r,f) + N(r,f') - N(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

Mais, d'après la première inégalité i), on a

$$\begin{aligned} N(r,f') - N(r,f) &= \overline{N}(r,f), \\ Z(r,f') &\leq Z(r,f) + \overline{N}(r,f) - \log r + O(1). \end{aligned}$$

La généralisation de cette inégalité est obtenue par récurrence. Supposons que l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \leq n$. Alors

$$Z(r,f^{(n+1)}) = Z(r,(f^{(n)})') \leq Z(r,f^{(n)}) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1).$$

Et donc

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + n\overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,f^{(n)}) - \log r + O(1).$$

Puisque $\overline{N}(r,f^{(n)}) = \overline{N}(r,f)$, on a

$$Z(r,f^{(n+1)}) \leq Z(r,f) + (n+1)\overline{N}(r,f) - \log r + O(1).$$

Pour montrer la troisième inégalité, on a

$$\begin{aligned} T(r,f^{(k)}) &= N(r,f^{(k)}) + m(r,f^{(k)}) \\ &= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m(r,f^{(k)}) \\ &= N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}} \cdots \frac{f'}{f} f\right) \\ &\leq N(r,f) + k\overline{N}(r,f) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k-1)}}\right) + \ldots + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m(r,f) \\ &= T(r,f) + k\overline{N}(r,f). \end{aligned}$$

Puisque $\overline{N}(r,f) \leq N(r,f) \leq T(r,f)$, pour $r \in]0,+\infty[$ (resp. $r \in]0,R[$), on a

$$T(r,f^{(k)}) \leq (k+1)T(r,f).$$

■

3.4 Deuxième Théorème Fondamental de Nevanlinna

Le deuxième théorème fondamental de Nevanlinna est l'un des théorèmes les plus utilisés dans la théorie de distribution de valeurs.

Notation Pour tout nombre fini $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f(0) \neq a$. On note $m(r,a), N(r,a)$ et $T(r,a)$ au lieu de $m(r,\frac{1}{f-a})$, $N(r,\frac{1}{f-a})$ et $T(r,\frac{1}{f-a})$ respectivement. On note aussi $m(r,\infty)$ et $N(r,\infty)$ au lieu de $m(r,f)$ et $N(r,f)$.

Théorème 3.4.1 ***(Inégalité Fondamentale)****[12],[13]*

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, f non constante. Soient $a_1,...,a_q$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $\delta \in \mathbb{R}$ tels que $|a_i - a_j| \geq \delta$ pour $1 \leq i \neq j \leq q$. On suppose que $f(0) \neq 0,\infty$ et $f(0) \neq a_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq q$. Alors

$$m(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \leq 2T(r,f) - N_1(r,f) + S(r,f), \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned} N_1(r,f) &= N(r,\infty) + N(r,\frac{1}{f'}) - \overline{N}(r,f), \\ S(r,f) &= m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m\left(r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right) + q\log^+\left(\frac{1}{\delta}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Preuve.

Soit $g(x) = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f-a_i}$. Montrons que, pour $r \in]0,+\infty[$,

$$m(r,g) \geq \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+\frac{1}{\delta}. \tag{3.7}$$

Pour ça distinguons deux cas;

1) Si $|f - a_j|(r) < \delta$, pour un certain j. Alors on a pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\log |g|(r) &= \log \left| \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{f - a_i} \right| (r) \\
&\leq \log \max_{1 \leq i \leq q} \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) = \log \left| \frac{1}{f - a_j} \right| (r).
\end{aligned}$$

Et on a aussi que, pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) &= \max \left\{ 0, \log \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) \right\}, \\
&= \begin{cases} \log \left| \frac{1}{f-a_i} \right| (r) \leq \log \frac{1}{\delta} & \text{si} \quad \log \frac{1}{\delta} > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) \leq \log^+ \frac{1}{\delta}.$$

Il suit que,

$$\begin{aligned}
\log^+ |g|(r) &= \log^+ \left| \frac{1}{f - a_j} \right| (r) \\
&= \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) - \sum_{i=1, i \neq j}^{q} \log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) \\
&\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) - \sum_{i=1, i \neq j}^{q} \log^+ \frac{1}{\delta} \\
&= \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) - (q-1) \log^+ \frac{1}{\delta} \\
&\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) - q \log^+ \frac{1}{\delta}.
\end{aligned}$$

Alors

$$m(r, g) \geq \sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) - q \log^+ \frac{1}{\delta}.$$

2) Si $|f - a_i|(r) \geq \delta$, pour $i \in \{1, ..., q\}$. on a

$$\log^+ \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) = \max \left\{ 0, \log \left| \frac{1}{f - a_i} \right| (r) \right\} \leq \max \left\{ 0, \log \frac{1}{\delta} \right\} = \log^+ \frac{1}{\delta}.$$

Pour tout $i \in \{1, ..., q\}$, on a

$$\begin{aligned}
\log^+ |g|(r) \geq 0 \Leftrightarrow \log^+ |g|(r) &\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left|\frac{1}{f-a_i}\right|(r) - \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left|\frac{1}{f-a_i}\right|(r) \\
&\geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left|\frac{1}{f-a_i}\right|(r) - \sum_{i=1}^{q} \log^+ \frac{1}{\delta} \\
&= \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left|\frac{1}{f-a_i}\right|(r) - q \log^+ \frac{1}{\delta}.
\end{aligned}$$

D'où

$$m(r,g) = \log^+ |g|(r) \geq \sum_{i=1}^{q} \log^+ \left|\frac{1}{f-a_i}\right|(r) - q\log^+ \frac{1}{\delta} = \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) - q\log^+ \frac{1}{\delta}.$$

La relation (3.7) est donc démontrée.

D'autre part, on a pour tout $r \in]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
m(r,g) &= m(r, \frac{1}{f}\frac{f}{f'}f'g) \\
&\leq m(r,\frac{1}{f}) + m(r,\frac{f}{f'}) + m(r,f'g) \\
&= \left\{T(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) + O(1)\right\} + \left\{m(r,\frac{f'}{f}) + N(r,\frac{f'}{f}) - N(r,\frac{f}{f'}) + O(1)\right\} + m(r,f'g).
\end{aligned}$$

Ceci avec la relation (3.7) nous donne

$$m(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) \leq m(r,g) + m(r,\infty) + q\log^+ \frac{1}{\delta},$$

et donc

$$\begin{aligned}
m(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq m(r,\infty) + T(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{f'}{f}) - N(r,\frac{f}{f'}) + m(r,\frac{f'}{f}) \\
&+ m(r,f'g) + O(1) + N(r,f) - N(r,f) + q\log^+ \frac{1}{\delta} \\
&\leq 2T(r,f) - N(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{f'}{f}) - N(r,\frac{f}{f'}) - N(r,f) + m(r,\frac{f'}{f}) \\
&+ m(r,f'g) + O(1) + q\log^+ \frac{1}{\delta}.
\end{aligned}$$

Le résultat demandé découle alors du fait que

$$N(r,\frac{f'}{f}) - N(r,\frac{f}{f'}) = N(r,\frac{1}{f}) - N(r,f) + N(r,f') - N(r,\frac{1}{f'}).$$

Démontrons cette identité. Il est clair que les pôles de $\frac{f'}{f}$ sont des pôles simples : ce sont les zéros et les pôles de f comptés sans multiplicité. D'où

$$N(r,\frac{f'}{f}) = \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}).$$

D'autre part, les pôles de $\frac{f}{f'}$, sont les zéros de f' qui sont pas des zéros multiples de f, d'où

$$N(r,\frac{f}{f'}) = N(r,\frac{1}{f'}) - \left\{N(r,\frac{1}{f}) - \overline{N}(r,\frac{1}{f})\right\}.$$

Donc

$$N(r,\frac{f'}{f}) - N(r,\frac{f}{f'}) = \overline{N}(r,f) + N(r,\frac{1}{f}) - N(r,\frac{1}{f'}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} m(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq 2T(r,f) - \left\{N(r,f) + N(r,\frac{1}{f'}) - \overline{N}(r,f)\right\} + m\left(r,\frac{f'}{f}\right) \\ &+ m\left(r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right) + q\log^{+}\frac{1}{\delta} + O(1). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité fondamentale. ∎

Remarque 3.4.2 *La quantité S(r,f) du Théorème 3.4.1 vérifie*

$$S(r,f) = O(1), \ \ \textit{quand} \ \ r \to +\infty.$$

En effet, pour tout $r \in]0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} S(r,f) &= m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m\left(r,\sum_{i=1}^{q}\frac{f'}{f-a_i}\right) + q\log^{+}\left(\frac{1}{\delta}\right) + O(1) \\ &= m(r,\frac{f'}{f}) + m(r,\frac{F'}{F}) + O(1), \end{aligned}$$

où, $F(x) = \prod_{i=1}^{q}(f-a_i)$. En utilisant le Lemme 3.3.9, $m(r,\frac{F'}{F}) = m(r,\frac{f'}{f}) = 0$, quand $r \to +\infty$, alors

$$S(r,f) = O(1) \ \ \textit{quand} \ \ r \to +\infty.$$

Nous terminons cette section en démontrant le deuxième théorème fondamental. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante telle que $f(0) \neq 0$ et $f(0) \neq \infty$. Posons $m(r,\infty) = m(r,f)$, $N(r,\infty) = N(r,f)$ et pour $a \in \mathbb{K}$ tel que $f(0) \neq a$, on a $m(r,a) = m(r,\frac{1}{f-a})$, $N(r,a) = N(r,\frac{1}{f-a})$. Avec ces notations, la relation (3.3) devient

$$m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1).$$

Posons

$$\begin{aligned}
\delta(a) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r,a)}{T(r,f)} = 1 - \limsup_{r\to+\infty} \frac{N(r,a)}{T(r,f)} = \lim_{r\to+\infty} \left\{ \inf_{r\leq R} \frac{m(r,a)}{T(r,f)} \right\}, \\
\Theta(a) &= 1 - \limsup_{r\to+\infty} \frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)} = 1 - \lim_{r\to+\infty} \left\{ \sup_{r\leq R} \frac{\overline{N}(r,a)}{T(r,f)} \right\}, \\
\theta(a) &= \liminf_{r\to+\infty} \frac{N(r,a) - \overline{N}(r,a)}{T(r,f)} = \lim_{r\to+\infty} \left\{ \inf_{r\leq R} \frac{N(r,a) - \overline{N}(r,a)}{T(r,f)} \right\}.
\end{aligned}$$

La quantité $\delta(a)$ est appelée le défaut de a. $\theta(a)$ est appelée l'indice de multiplicité de a.

Théorème 3.4.3 *(Deuxième théorème fondamental de Nevanlinna)[13]*
Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ non constante. Alors l'ensemble des valeurs $a \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ pour les quelles $\Theta(a) > 0$ est au plus dénombrable et on a

$$\sum_a (\delta(a) + \theta(a)) \leq \sum_a \Theta(a) \leq 2.$$

Preuve.

En ajoutant $N(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i)$ aux deux membres de l'inégalité (3.6) du Théorème 3.4.1, on a pour tout $r \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
N(r,\infty) + m(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + \sum_{i=1}^{q} m(r,a_i) &\leq N(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + 2T(r,f) \\
&- N_1(r,f) + S(r,f) \\
T(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} T(r,a_i) &\leq N(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + 2T(r,f) \\
&- N_1(r,f) + S(r,f) \\
(q+1)T(r,f) + O(1) &\leq N(r,\infty) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) + 2T(r,f) \\
&- N_1(r,f) + S(r,f) \\
(q-1)T(r,f) + O(1) &\leq \overline{N}(r,f) + \sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) - N(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f).
\end{aligned}$$

Remarquant que tout zéro de $f - a_i$ d'ordre m est un zéro de f' d'ordre $m-1$, on déduit que

$$\sum_{i=1}^{q} N(r,a_i) - N(r,\frac{1}{f'}) = \sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i) - N_0(r,\frac{1}{f'}),$$

où $N_0(r,\frac{1}{f'})$ est obtenu à partir de $N(r,\frac{1}{f'})$ en omettant les termes correspondant aux zéros de f' qui sont des zéros de $f - a_i$, pour $i = 1, 2, ..., q$. Il suit que

$$(q-1)T(r,f) + O(1) \leq \overline{N}(r,f) + \sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i) - N_0(r,\frac{1}{f'}) + S(r,f),$$

et donc

$$(q-1)T(r,f) + O(1) \leq \overline{N}(r,f) + \sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i) + S(r,f).$$

Sachant, d'après la remarque au Théorème 3.4.1, que $S(r,f) = O(1)$ quand $r \to +\infty$, on a

$$(q-1)T(r,f) \leq \overline{N}(r,f) + \sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r,a_i) + O(1).$$

En divisant par $T(r,f)$ et passant à la limite, on obtient

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\overline{N}(r,\infty)}{T(r,f)} + \sum_{i=1}^{q} \limsup_{r\to+\infty} \frac{\overline{N}(r,a_i)}{T(r,f)} \geq q-1.$$

D'où

$$\begin{aligned} 1 - \Theta(\infty) + \sum_{i=1}^{q}(1 - \Theta(a_i)) &\geq q - 1, \\ \Theta(\infty) + \sum_{i=1}^{q} \Theta(a_i) \leq 2. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\Theta(a) > \frac{1}{N}$ pour au plus $2N - 1$ valeurs finies distinctes a. Si l'ensemble des valeurs a telles que $\Theta(a) > 0$ est fini, le théorème est démontré, sinon les valeurs a pour lesquelles $\Theta(a) > 0$ peuvent être rangées en une suite $a_1, a_2, ..., a_{i_1}, a_{i_1+1}, , ..., a_{i_n}, ...$
de sorte que la suite des $\Theta(a_i)$ soit décroissante et que pour $j \leq i_n$, on ait $\Theta(a_j) \geq \frac{1}{n}$. En posant $a_0 = \infty$, on déduit, pour la suite $(a_i)_{i\geq 0}$, que $\sum\limits_{i=0}^{q} \Theta(a_i) \leq 2$ pour tout q. D'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Theta(a_i) \leq 2.$$

■

Remarque 3.4.4 *L'inégalité çi-dessus est la meilleure possible. En effet on montre que pour tout* ε, $0 < \varepsilon < 2$, *il existe une fonction* $f_\varepsilon \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ *pour laquelle* $\sum\limits_a \Theta(a) > \varepsilon$. *Car pour* $0 < \varepsilon < 2$, *il existe* $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\varepsilon < 1 + \frac{n-1}{n}$ *et si l'on considère alors la fonction* $f_\varepsilon(x) = (x-1)^n$, *on a au voisinage de* $+\infty$,

$$m(r, \infty) = m(r, f) = n \log r, \quad N(r, \infty) = \overline{N}(r, \infty) = N(r, f) = 0.$$

D'où

$$T(r, f) = n \log r, \quad \Theta(\infty) = 1 \ \ et \ \ \Theta(0) = \frac{n-1}{n}.$$

Il en résulte que

$$\sum_a \Theta(a) \geq \Theta(0) + \Theta(\infty) = 1 + \frac{n-1}{n} > \varepsilon.$$

CHAPITRE 4

La croissance des solutions des équations aux differences dans un corps ultramétrique

Sommaire

Le but de ce chapitre est d'étudier la croissance des solutions méromorphes dans un corps ultramétrique algébriquement clôs $\mathbb{K}$, de certaines équations fonctionnelles linéaires aux q-différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telle que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$.

Récemment, de nombreux articles (voir par exemple [4],[5], [10], [20]) axés sur ces équations, et de nombreux résultats significatifs ont été obtenus à propos de la croissance de leurs solutions. Dans ce chapitre, nous allons étendre certains de ces résultats.

Nous faisons également une étude similaire des équations aux différences de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x+i) = h(x),$$

où $h(x), g_0(x), ..., g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des fonctions méromorphes telle que $g_0(x)g_s(x) \neq 0$.

4.1 Équations aux q-différences

Soit $\mathbb{K}$ un corps ultramétrique complet et algébriquement clôs. Dans [10], N. Boudjrida, A. Boutabaa et S. Medjerab ont étudié l'équation

$$(E) \quad \sum_{i=0}^{s} A_i(x)f(q^i x) = B(x),$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $B(x), A_0(x), ..., A_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des éléments de $\mathbb{K}(x)$, tel que $A_0(x)A_s(x) \neq 0$. Ils ont obtenu le résultat suivant

Théorème 4.1.1 *[10]*

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (E), alors

$$T(r, f) = O((\log r)^2), \ r \to +\infty.$$

Observons que l'équation (E) ci-dessus présente des coefficients $B, A_0, ..., A_s$ satisfaisant $T(r, A_i) = O(\log r)$, $T(r, B) = O(\log r)$, et si f est une solution de l'équation (E), alors

$$T(r, f) = O((\log r)^2), \; r \to +\infty.$$

Ceci soulève une question à propos de l'ordre de croissance des solutions méromorphes f de l'équation (E), si $A_0(x), \; ... \; A_s(x), B(x)$ sont remplacés par des fonctions méromorphes. Dans cette section, notre but est de généraliser le Théorème 4.1.1, de la façon suivante ;

Nous considérons l'équation aux q-différence de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = h(x), \tag{4.1}$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $h(x), \; g_0(x), \; ..., \; g_s(x) \; (s \geq 1)$ sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$. Notons par $T(r)$ la fonction,

$$T(r) = \max\{T(r, h); \; T(r, g_0); \cdots; \; T(r, g_s)\}, \; \text{pour tout } r > 0.$$

Alors, nous avons

Théorème 4.1.2 *Si $f \in \mathcal{M}(K)$ est une solution de l'équation (4.1), alors nous avons*

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \; \textit{quand } r \to +\infty.$$

Pour la démonstration du Théorème 4.1.2 on a besoin des résultats suivants.

Remarque 4.1.3 *La première observation dans l'équation (4.1) est que nous pouvons prendre $h(x) = 0$ sans perte de généralité. En effet, supposons que $h(x) \neq 0$ et $f(x)$ est une solution méromorphe de l'équation (4.1). Alors, il est facile de voir que $f(x)$ est une solution de l'équation non triviale de la forme*

$$h(x) \sum_{i=0}^{s} g_i(qx)f(q^{i+1}x) - h(qx) \sum_{i=0}^{s} g_i(x)f(q^i x) = 0.$$

Nous pouvons également supposer que $g_0(x), ..., g_s(x)$ sont des fonctions entières. Alors, dans toute la suite, on suppose que l'équation (4.1) est de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(q^i x) = 0, \tag{4.2}$$

où $q \in \mathbb{K}$, $0 < |q| < 1$ et $g_0(x)$, ..., $g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des éléments de $\mathcal{A}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$.

Dans ce qui suit, on note σ_q la fonction définie pour tous $x \in \mathbb{K}$ par, $\sigma_q(x) = qx$. Ensuite, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_q^k = \sigma_q \circ \cdots \circ \sigma_q$ est obtenu en appliquant k fois la fonction σ_q. Nous convenons que $\sigma_q^0 = Id$, où Id est la fonction identité dans $\mathbb{K}$. Certaines propriétés de ces opérateurs sont résumés dans le lemme suivant.

Lemme 4.1.4 *[10]*

Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

(1) $|f \circ \sigma_q^n|(r) = |f|(|q|^n r)$,

(2) $m(r, f \circ \sigma_q^n) = m(|q|^n r, f)$,

(3) $N(r, f \circ \sigma_q^n) = N(|q|^n r, f)$,

(4) $T(r, f \circ \sigma_q^n) = T(|q|^n r, f)$.

Proposition 4.1.5 *Soit f une solution méromorphe dans $\mathbb{K}$ de l'équation (4.2). Alors, si α est un pôle de f, $\alpha \neq 0$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et un zéro θ de g_0 différent de zéro tels que $\alpha = q^{-m}\theta$ et $\omega_\theta(g_0) + \omega_\alpha(f) \geq 0$.*

Preuve.

Soit $\alpha \neq 0$ un pôle de f. Si $\omega_\alpha(g_0) + \omega_\alpha(f) \geq 0$, on a le résultat, car il suffit de prendre $\theta = \alpha$.

Supposons que $\omega_\alpha(g_0) + \omega_\alpha(f) < 0$. Cela signifie que, α est un pôle de $g_0(x)f(x)$, alors il existe au moins un indice $i_1 \in \{1, ..., s\}$ tel que $g_{i_1}(\alpha)f(q^{i_1}\alpha) = \infty$, et en particulier $\alpha_1 = q^{i_1}\alpha$ est un pôle de f. Si $\omega_{\alpha_1}(g_0)+\omega_{\alpha_1}(f) < 0$, de la même manière, on trouve un indice $i_2 \in \{1, ..., s\}$ tel que $\alpha_2 = q^{i_2}\alpha_1 = q^{i_1+i_2}\alpha$ est un pôle de f, etc... Comme nous ne pouvons pas avoir une suite de pôles de f avec modules strictement décroissante, le processus ci-dessus doit arrêter à un certain rang, et cela complète la preuve de notre assertion. ■

Preuve de Théorèm 4.1.2

Comme indiqué dans la Remarque 4.1.3, tout le problème est ramené au cas de l'équation (4.2). Alors, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (4.1). On peut aussi supposer que f n'a pas de pôle à l'origine.

Estimation de $N(r, f)$.

Si la fonction entière $g_0(x)$ n'a pas de zéro différent de 0, par la Proposition 4.1.5, la fonction f est entière, donc $N(r, f) = 0$. Supposons alors que $g_0(x)$ admet au moins un zéro différent de 0 et soit $r_0 = \min\{|x|/\ x \in \mathbb{K}\backslash\{0\} \text{ et } g_0(x) = 0\}$.

Pour tout $r > 0$, nous avons

$$N(r, f) = -\sum_{0<|\alpha|\leq r, f(\alpha)=\infty} \omega_\alpha(f) \log \frac{r}{|\alpha|}.$$

Mais ; par la Proposition 4.1.5, tout pôle α de f dans $D^+(0, r) \setminus \{0\}$ est de la forme $\alpha = q^{-n}\beta$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in D^+(0, r) \setminus \{0\}$ tel que $g_0(\beta) = 0$. Ceci implique que

$$0 \leq n \leq \left[\frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r}\right],$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t.

Par conséquent,

$$N(r, f) \leq \left(\left[\frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1\right) \sum_{0<|\beta|\leq r, g_0(\beta)=0} \omega_\beta(g_0) \log \frac{r}{|\beta|},$$

i.e,

$$N(r, f) \leq \left(\left[\frac{1}{\log |q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1\right) N(\frac{1}{g_0}, r).$$

Par hypothèse, on a $N(\frac{1}{g_0}, r) \leq T(r, g_0) + O(1) \leq T(r) + O(1), r \to +\infty$. Nous voyons aussi que

$$\left[\frac{1}{\log|q|} \log \frac{r_0}{r}\right] + 1 = O(\log r),\ r \to +\infty.$$

Il en résulte que

$$N(r, f) = O(T(r) \log r),\ r \to +\infty. \tag{4.3}$$

Estimation de $\log|f|(r)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que f n'a ni zéro ni pôle à l'origine. Alors, il existe $\epsilon > 0$ telle que f n'a ni zéros ni pôles dans $D^+(0, \epsilon)$, donc $|f|(t)$ est constante pour $0 \leq t \leq \epsilon$.

D'après l'équation (4.1), pour tout $r > 0$, on a

$$|f|(r) \leq \max\left\{\left|\frac{g_1}{g_0}\right|(r)|f|(|q|r),\ \left|\frac{g_2}{g_0}\right|(r)|f|(|q|^2 r),\ \cdots\ \left|\frac{g_s}{g_0}\right|(r)|f|(|q|^s r)\right\}.$$

Puisque g_0 est une fonction entière non nulle, on a $|g_0|(r) \geq 1$, pour $r > 0$ assez grand. De plus, comme $g_0, \cdots, g_s \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ et $T(r, g_i) \leq T(r), \forall i$, on a pour $r > 0$ assez grand

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max\left\{|f|(|q|r),\ |f|(|q|^2 r),\ \cdots,\ |f|(|q|^s r)\right\}. \tag{4.4}$$

Prenons r assez grand pour assurer que l'entier $k = \left[\frac{\log r - \log \epsilon}{-\log|q|}\right] + 1 \geq s$, on a par (4.4),

$$|f|(r) \leq e^{T(r)} \max\left\{|f|(|q|r),\ |f|(|q|^2 r),\ \cdots,\ |f|(|q|^s r),\ \cdots,\ |f|(|q|^k r)\right\}. \tag{4.5}$$

Posons

$$\begin{cases} \mu_1 &= |f|(|q|^k r), \\ \mu_2 &= \max\{|f|(|q|^{k-1} r),\ |f|(|q|^k r)\}, \\ \vdots \\ \mu_{k-1} &= \max\{|f|(|q|^2 r), \cdots, |f|(|q|^s r), \cdots, |f|(|q|^k r)\}, \\ \mu_k &= \max\{|f|(|q| r),\ |f|(|q|^2 r), \cdots, |f|(|q|^s r), \cdots, |f|(|q|^k r)\}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Donc, (4.5) devient

$$|f|(r) \le e^{T(r)} \mu_k. \tag{4.7}$$

D'autre part, nous avons $|q|\epsilon \le |q|^k r < \epsilon$. Donc, en utilisant le fait que $|f|(t)$ est constante pour $0 \le t \le \epsilon$, on a

$$|f|(|q|^k r) = |f|(|q|^{k+1} r) = |f|(|q|^{k+2} r) = \cdots = \mu_1 = C = \text{Constante}. \tag{4.8}$$

On remplace r dans (4.5) successivement par $|q|r,\ |q|^2 r,\ \cdots,\ |q|^{k-1} r$, on obtient

$$\begin{cases} |f|(|q| r) &\le e^{T(|q| r)} \mu_{k-1}, \\ |f|(|q|^2 r) &\le e^{T(|q|^2 r)} \mu_{k-2}, \\ \vdots \\ |f|(|q|^{k-2} r) &\le e^{T(|q|^{k-2} r)} \mu_2, \\ |f|(|q|^{k-1} r) &\le e^{T(|q|^{k-1} r)} \mu_1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Il résulte de (4.6) et (4.9) que pour $r > 0$ assez grand

$$\begin{cases} \mu_1 &= C, \\ \mu_2 &\le e^{T(|q|^{k-1} r)} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{k-1} &\le e^{T(|q|^2 r)} \mu_{k-2}, \\ \mu_k &\le e^{T(|q| r)} \mu_{k-1}. \end{cases} \tag{4.10}$$

De (4.7) et (4.10), nous avons : $|f|(r) \leq e^{\sum_{i=0}^{k-1} T(|q|^i r)} C.$

Comme $T(|q|^i r) \leq T(r), \forall i = 0, \cdots k-1$, il en résulte que

$$|f|(r) \leq e^{kT(r)} C. \tag{4.11}$$

Puisque $k = O(\log r)$, quand $r \to +\infty$, il est facile de voir que

$$\log^+ |f|(r) = O(T(r) \log r), \ r \to +\infty. \tag{4.12}$$

Enfin, par les relations (4.3) et (4.12) on a

$T(r, f) = O(T(r) \log r), \ r \to +\infty.$

Ceci achève la démonstration de Théorème 4.1.2. ∎

Comme une conséquence immédiate du Théorème 4.1.2, nous avons le résultat suivant

Corollaire 4.1.6 *Soit $\kappa = \max\{\rho(h), \rho(g_0), ..., \rho(g_s)\}$ le maximum de l'ordre de croissance des coefficients $h, g_0, \cdots, g_s$ de L'équation (4.1). Alors l'ordre $\rho(f)$ de toute solution méromorphe f de l'équation (4.1) satisfait $\rho(f) \leq \kappa$.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (4.1). D'après le Théorème 4.1.2, nous avons

$$T(r, f) = O(T(r) \log r), \text{ quand } r \to +\infty.$$

i.e. Pour un certain $r_0 > 0$ et pour un certain $C > 0$, on a

$$T(r, f) \leq C\, T(r) \log r, \quad \text{pour } r \geq r_0,$$

donc, $T(r, f) \leq C \max\{T(r, h),\ T(r, g_0), ...,\ T(r, g_s)\} \log r$. Par conséquent, pour $r \geq r_0$, on a

$$\log(T(r, f)) \leq \log C + \max\{\log(T(r, h)),\ \log(T(r, g_0)), ...,\ \log((T(r, g_s))\} + \log(\log r).$$

Et donc, pour $r \geq r_0$, on a

$$\frac{\log(T(r,f))}{\log r} \leq \frac{\log C}{\log r} + \max\left\{\frac{\log(T(r,h))}{\log r}, \frac{\log(T(r,g_0))}{\log r}, ..., \frac{\log((T(r,g_s))}{\log r}\right\} + \frac{\log(\log r)}{\log r}.$$

Et par suite, puisque $\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log(\log r)}{\log r} = 0$, nous avons

$$\rho(f) \leq \max\{\rho(h), \rho(g_0), ..., \rho(g_s)\} = \kappa.$$

■

Plus particulièrement, nous avons le résultat suivant qui est encore une généralisation importante du Théorème 4.1.1.

Corollaire 4.1.7 *Si les fonctions $h, g_0, \cdots, g_s$ ci-dessus sont d'ordre zéro, alors toute solution méromorphe f de l'équation (4.1) est d'ordre zéro.*

Remarque 4.1.8 *En utilisant la théorie de Nevanlinna dans $\mathbb{C}$, la même méthode de la preuve nous permet de montrer que le Théorème 4.1.2 et ses corollaires sont vraies dans le cas complexe.*

4.2 Équations aux différences

Considérons maintenant l'équation aux différence de la forme

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x)y(x+i) = h(x), \tag{4.13}$$

où $h(x)$, $g_0(x)$, ..., $g_s(x)$ $(s \geq 1)$ sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ tels que $g_0(x)g_s(x) \not\equiv 0$. Soient $T(r) := \max\{T(r,g_0), \cdots, T(r,g_s), T(r,h)\}$ et $M(r) := \max_{0\leq i\leq s}\{|g_i|(r)\}$.

Dans ce qui suit, le but est d'étudier la croissance de la fonction méromorphe $y = f(x)$ qui est une solution de l'équation (4.13), en fonction de celle des coefficients $g_0, ..., g_s, h$.

D'abord, nous démontrons quelques lemmes .

Lemme 4.2.1 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit $\alpha, \zeta \in \mathbb{K}$. Alors ζ est un pôle de f d'ordre l si, et seulement si, $\zeta - \alpha$ est un pôle de $f(x+\alpha)$ d'ordre l.*

Preuve. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit ζ un pôle de f d'ordre l, on a alors

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-\zeta)^l}, \text{ où } g(\zeta) \neq 0.$$

D'autre part, nous avons

$$f(x+\alpha) = \frac{g(x+\alpha)}{(x+\alpha-\zeta)^l} = \frac{g(x+\alpha)}{(x-(\zeta-\alpha))^l} = \frac{h(x)}{(x-(\zeta-\alpha))^l}, \text{ où } h(x) = g(x+\alpha).$$

De plus, $h(\zeta-\alpha) = g(\zeta-\alpha+\alpha) = g(\zeta) \neq 0$. Donc, on déduit que $\zeta - \alpha$ est un pôle de $f(x+\alpha)$ d'ordre l. ∎

Dans ce qui suit, on note τ la fonction définie pour tous $x \in \mathbb{K}$ par $\tau(x) = x+1$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $\tau^k = \tau \circ \cdots \circ \tau$ est obtenu en appliquant k fois la fonction τ. Nous convenons que $\tau^0 = Id$, où Id est la fonction identité de $\mathbb{K}$.

Certaines propriétés de ces opérateurs sont résumés dans le lemme suivant.

Lemme 4.2.2 *Soient $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}$, nous avons*

(1) $|f \circ \tau^k|(r) = |f|(r)$,

(2) $m(r, f \circ \tau^k) = m(r, f)$,

(3) $N(r, f \circ \tau^k) = N(r, f) + O(1)$,

(4) $T(r, f \circ \tau^k) = T(r, f) + O(1)$,

Nous avons aussi

Lemme 4.2.3 *Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ et soit $\Delta f = f \circ \tau - f$. Pour tout $r > 0$, on a*

$$|\Delta(f)|(r) \leq \frac{|f|(r)}{r}.$$

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$ définie par $f(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$. Donc, on a

$$\Delta(f)(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k (x+1)^{n-1-k}.$$

Ainsi, pour $r > 1$, on a

$$|\Delta(f)|(r) \leq \max_{n\geq 1}\{|a_n|r^{n-1}\} \leq \frac{|f|(r)}{r}.$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, donc $f(x) = \frac{\zeta(x)}{\xi(x)}$, où $\zeta, \xi \in \mathcal{A}(\mathbb{K})$. Nous avons

$$\Delta(f)(x) = \frac{\Delta(\zeta)(x)\xi(x) - \zeta(x)\Delta(\xi)(x)}{\xi(x)\xi(x+1)}.$$

Il suit que

$$|\Delta(f)|(r) = \frac{|\Delta(\zeta)\xi - \zeta\Delta(\xi)|(r)}{|\xi|(r)|\xi(x+1)|(r)} \leq \frac{|\zeta|(r)|\xi|(r)}{r|\xi|(r)^2} = \frac{|f|(r)}{r}.$$

■

Théorème 4.2.4 *Supposons que chacune des fonctions $g_0, ..., g_s, h$ dans l'équation (4.13) a un nombre fini de pôles. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que, pour $r > 0$ assez grand on a, $|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$. Alors toute solution méromorphe f de l'équation (4.13) vérifie*

$$T(r,f) \leq T(r,h) + \min_{0\leq i\leq s} T(r,g_i) + O(\log r) \leq 2T(r) + O(\log r),\ r \to +\infty.$$

La preuve du Théorème 4.2.4 est basée sur les propositions suivantes.

Proposition 4.2.5 *Soient les fonctions $g_0, ..., g_s, h$ dans l'équation (4.13) méromorphe avec un nombre fini de pôles. Alors, si f est une solution méromorphe de cette équation, on a*

$$N(r,f) \leq \min_{0\leq i\leq s} Z(r,g_i) + O(\log r),\ r \to +\infty.$$

Preuve.

Soient $j \in \{0, ...s\}$ et α un pôle de f. Alors $\beta := \alpha - j$ est un pôle de $f \circ \tau^j$ tel que $\omega_\alpha(f) = \omega_\beta(f \circ \tau^j)$.

Nous avons

$$-\omega_\alpha(f) \leq \omega_\beta(g_j). \tag{4.14}$$

En effet, supposons que $-\omega_\alpha(f) > \omega_\beta(g_j)$. Il suit que, $\omega_\beta(g_j) + \omega_\beta(f \circ \tau^j) < 0$. Puisque on a, d'après l'équation (4.13),

$$g_j(x)(f \circ \tau^j)(x) = h(x) - \sum_{i \neq j} g_i(x)(f \circ \tau^i)(x),$$

il en résulte qu'il existe un entier $k \in \{0, \cdots, s\} \setminus \{j\}$ tel que $\omega_\beta(g_k) + \omega_\beta(f \circ \tau^k) \leq \omega_\beta(g_j) + \omega_\beta(f \circ \tau^j)$. Comme $k \neq j$, on a $\omega_\beta(f \circ \tau^k) \geq 0$ et donc $\omega_\beta(g_k) \leq \omega_\beta(g_j) + \omega_\beta(f \circ \tau^j) < 0$, ceci une contradiction car β n'est pas un pôle de g_k. De (4.14), on déduit que

$$N(r, f) \leq Z(r, g_j) + O(\log r), \; r \to +\infty \; \text{ pour tout } j = 0, \cdots, s$$

et en fin, $N(r, f) \leq \min\limits_{0 \leq j \leq s} Z(r, g_j) + O(\log r), \; r \to +\infty$.

Ceci termine la preuve de la proposition. ∎

Remarque 4.2.6 *Il résulte de la proposition ci-dessus que si l'une des fonctions g_i, $(i = 0, \cdots, s)$ est rationnelle, alors la fonction f a un nombre fini de pôles.*

Proposition 4.2.7 *Soient les fonctions $g_0, ..., g_s, h$ dans l'équation (4.13) sont méromorphe. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ tel que $|\sum\limits_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$. Alors toute solution méromorphe f de cette équation satisfait, $|f|(r) \leq \dfrac{|h|(r)}{CM(r)}$.*

Preuve.

Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (4.13). Alors on a

$$g_0(x) + \sum_{i=1}^{s} g_i(x) \frac{f(x+i)}{f(x)} = \frac{h(x)}{f(x)}. \tag{4.15}$$

En utilisant le lemme 4.2.3, nous montrons que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$. Il suite que, pour tout $i \in \{0, \cdots, s\}$, on a $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \frac{f(x+i)}{f(x)} = 1$.

Donc, par (4.15), on a

$$g_0(x) + \sum_{i=1}^{s} g_i(x)(\varepsilon_i(x) + 1) = \frac{h(x)}{f(x)},$$

où $\varepsilon_i(x)$ sont des fonctions méromorphes telle que $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon_i(x) = 0$, i.e,

$$\sum_{i=0}^{s} g_i(x) + \sum_{i=1}^{s} g_i(x)\varepsilon_i(x) = \frac{h(x)}{f(x)}.$$

Pour $r > 0$ assez grand et pour $i = 1, ..., s$, nous avons $|\varepsilon_i|(r) < C$. Il en résulte que

$$|\sum_{i=1}^{s} g_i(x)\varepsilon_i(x)|(r) < C \max_{1\leq i\leq s} |g_i|(r) \leq C \max_{0\leq i\leq s} |g_i|(r) = CM(r).$$

Par hypothèse, on a $|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r)$, on déduit que

$$\left|\frac{h}{f}\right|(r) = |\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) \geq CM(r).$$

■

Nous sommes maintenant prouver le résultat principal de cette partie.

Preuve de Théorème 4.2.4

Par la Proposition 4.2.5, nous avons

$$N(r, f) \leq \min_{0\leq i\leq s} Z(r, g_i) + O(\log r),\ \ r \to +\infty,$$

i.e,

$$N(r, f) \leq \min_{0\leq i\leq s} N(r, \frac{1}{g_i}) + O(\log r),\ \ r \to +\infty. \tag{4.16}$$

D'autre part, par la Proposition 4.2.7, pour $r > 0$, on a $|f|(r) \leq \frac{|h|(r)}{CM(r)}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \log|f|(r) &\leq \log|h|(r) - \max_{0\leq i\leq s}\{\log|g_i|(r)\} - \log C, \\ &= \log|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\left\{\log\frac{1}{|g_i|(r)}\right\} - \log C. \end{aligned}$$

Donc

$$\log^+|f|(r) \leq \log^+|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\left\{\log^+\frac{1}{|g_i|(r)}\right\} + O(1),\ \ r \to +\infty. \tag{4.17}$$

Enfin, par les relations (4.16) et (4.17), on obtient que, pour $r \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
T(r,f) = N(r,f) + \log^+|f|(r) &\leq \log^+|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\left(N\left(r, \frac{1}{g_i}\right) + \log^+\frac{1}{|g_i|(r)}\right) + O(\log r),\\
&\leq \log^+|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\left\{T(r, \frac{1}{g_i})\right\} + O(\log r),\\
&\leq \log^+|h|(r) + \min_{0\leq i\leq s}\{T(r,g_i)\} + O(\log r),\\
&\leq T(r,h) + \min_{0\leq i\leq s}\{T(r,g_i)\} + O(\log r),\\
&\leq 2T(r) + O(\log r).
\end{aligned}$$

Donc le Théorème 4.2.4 est prouvé. ■

Le résultat suivant correspond à une situation particulière où les conditions du Théorème 4.2.4 sont réalisées.

Corollaire 4.2.8 *Soient les fonctions $g_0, ..., g_s, h$ dans l'équation (4.13) sont méromorphes avec un nombre fini de pôles. Supposons qu'il existe un integer ℓ, $0 \leq \ell \leq s$, tel que $|g_\ell|(r) > \max_{0\leq i\leq s,\, i\neq\ell}\{|g_i|(r)\}$. Alors toute solution méromorphe de l'équation (4.13) vérifié*

$$T(r,f) \leq T(r,h) + \min_{0\leq i\leq s} T(r,g_i) + O(\log r) \leq 2T(r) + O(\log r), \quad r \to +\infty.$$

Preuve. Nous avons, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned}
|\sum_{i=0}^{s} g_i - g_\ell|(r) &= |\sum_{i=0,\, i\neq\ell}^{s} g_i|(r)\\
&\leq \max_{0\leq i\leq s,\, i\neq\ell} |g_i|(r) < |g_\ell|(r).
\end{aligned}$$

Et par suite,

$$|\sum_{i=0}^{s} g_i|(r) = |g_\ell|(r) \geq \max_{0\leq i\leq s}\{|g_i|(r)\} := M(r).$$

Donc, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (4.13), d'après le Théorème 4.2.4, on a le résultat. ■

Comme conséquence immédiate, nous avons

Corollaire 4.2.9 *Sous l'hypothèse du Théorème 4.2.4, let* $\kappa = \max\{\rho(h),\ \rho(g_0), ...,\ \rho(g_s)\}$*. Alors toute solution méromorphe* f *de l'équation (4.13) satisfait* $\rho(f) \le \kappa$*.*

Preuve. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ une solution de l'équation (4.13), d'après le Théorème 4.2.4, on a,

$$T(r, f) \le 2T(r) + O(\log r), \quad r \to +\infty.$$

Et par suite, pour un certain $r_0 > 0$ et pour un certain $C > 0$, on a

$$T(r, f) \le C\, T(r) \log r, \quad \text{pour } r \ge r_0,$$

donc, $T(r, f) \le C \max\{T(r, h),\ T(r, g_0), ...,\ T(r, g_s)\} \log r$. Par conséquent, pour $r \ge r_0$, on a

$$\log(T(r, f)) \le \log C + \max\{\log(T(r, h)),\ \log(T(r, g_0)), ...,\ \log(T(r, g_s))\} + \log(\log r).$$

Et donc, pour $r \ge r_0$, on a

$$\frac{\log(T(r, f))}{\log r} \le \frac{\log C}{\log r} + \max\left\{\frac{\log(T(r, h))}{\log r}, \frac{\log(T(r, g_0))}{\log r}, ..., \frac{\log(T(r, g_s))}{\log r}\right\} + \frac{\log(\log r)}{\log r}.$$

Et par suite, puisque $\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log(\log r)}{\log r} = 0$, nous avons

$$\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_0), ..., \rho(g_s)\} = \kappa.$$

■

Plus particulièrement, nous avons

Corollaire 4.2.10 *S'il existe un entier* ℓ*,* $0 \le \ell \le s$*, tel que* $|g_\ell|(r) > \max_{0 \le i \le s,\, i \ne \ell} \{|g_i|(r)\}$*, alors pour toute solution méromorphe* f *de l'équation (4.13) nous avons,* $\rho(f) \le \max\{\rho(h), \rho(g_\ell)\}$*.*

Preuve. D'après le Corollaire 4.2.8, pour toute solution méromorphe f de l'équation (4.13), on a

$$T(r, f) \le 2T(r) + O(\log r), \quad r \to +\infty,$$

et par suite

$$\rho(f) \leq \max\{\rho(h), \rho(g_0), ..., \rho(g_s)\}.$$

D'autre part, par hypothèse, on a pour $r > 0$ assez grand, $|g_\ell|(r) > \max_{0\leq i\leq s,\, i\neq \ell}\{|g_i|(r)\}$, donc

$$\frac{\log(\log|g_\ell|(r))}{\log r} > \max_{0\leq i\leq s,\, i\neq \ell}\left\{\frac{\log(\log|g_i|(r))}{\log r}\right\}.$$

On déduit que, $\rho(g_\ell) > \max_{0\leq i\leq s,\, i\neq \ell} \rho(g_i)$. D'où $\rho(f) \leq \max\{\rho(h), \rho(g_\ell)\}$. ■

Remarque 4.2.11 *Les résultats ci-dessus sont faux dans le cas complexe. En effet, par exemple, Yik-Man Chiang et Shao-Ji Feng ([24]) prouvés que, si* $h, g_0, ..., g_s \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ *et s'il existe un entier unique* ℓ, $0 \leq \ell \leq s$, *tel que* $\rho(g_\ell) = \kappa = \max_{0\leq i\leq s}\{\rho(g_i)\}$, *alors, pour toute solution méromorphe (dans* $\mathbb{C}$*) de l'équation (4.13), nous avons* $\rho(f) \geq \kappa + 1$.

Nous énonçons maintenant quelques résultats liés à la situation où les coefficients de l'équation (4.13) sont des fonctions rationnelles, nous donnons d'abord une définition.

Définition 4.2.12 *Si* $P(x); Q(x)$ *sont des polynômes de* $K[x]$ *sans zéros communs, on appelle degré de la fonction rationnelle* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *et notons par* $\deg R(x)$ *le nombre*

$$\deg R(x) = \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}.$$

Nous avons

Corollaire 4.2.13 *Nous considérons l'équation*

$$\sum_{i=0}^{s} R_i(x)y(x+i) = R(x), \tag{4.18}$$

où $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ *sont des éléments de* $\mathbb{K}(x)$ *tel que* $R_0(x)R_s(x) \neq 0$. *Si* $\deg\left(\sum_{i=0}^{s} R_i\right) = \max_{0\leq i\leq s}\{\deg R_i\}$, *alors toute solution méromorphe* f *de cette équation est une fonction rationnelle telle que,* $\deg f(x) \leq \max_{0\leq i\leq s}\{\deg R_i(x), \deg R(x)\}$.

Preuve.

Puisque $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ sont des fonctions rationnelles, il existe $\gamma > 0$, $\gamma_i > 0$ $(i = 0, ...s)$ de telle sorte que, pour $r > 0$,

$$|\sum_{i=0}^{s} R_i|(r) = \gamma r^{\deg(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i)} \text{ et } |R_i|(r) = \gamma_i r^{\deg R_i}.$$

Posons $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le s} \gamma_i$, donc on a

$$\max_{0 \le i \le s} |R_i|(r) = \max_{0 \le i \le s}\{\gamma_i r^{\deg R_i}\} \le \lambda\, r^{\max\{\deg |R_i|\}} = \lambda\, r^{\deg(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i)} = \frac{\lambda}{\gamma} |\sum_{i=0}^{s} R_i|(r).$$

Il en résulte que

$$|\sum_{i=0}^{s} R_i|(r) \ge C \max_{0 \le i \le s} |R_i|(r), \text{ où } C = \frac{\gamma}{\lambda} > 0.$$

En utilisant le Théorème 4.2.4, nous obtenons que, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ est une solution de l'équation (4.18),

$$\begin{aligned} T(r,f) &\le 2 \max_{0 \le i \le s}\{T(r,R_i), T(r,R)\} + O(\log r) \\ &= O(\log r), \text{ quand } r \to +\infty. \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathbb{K}(x)$. D'autre part, pour r assez grand nous avons

$$T(r,f) \le 2 \max_{0 \le i \le s}\{T(r,R_i), T(r,R)\} + O(\log r).$$

Donc, $(\deg f) \log r + O(1) \le \max\limits_{0 \le i \le s}\{(\deg R_i) \log r + O(1), (\deg R) \log r + O(1)\}$.

Par conséquent, pour $r > 0$ assez grand, on a

$$\deg f(x) \le \max_{0 \le i \le s}\{\deg R_i(x), \deg R(x)\}.$$

■

Le corollaire 4.2.13 est faux dans $\mathbb{C}$. En effet, nous avons l'exemple suivant.

Exemple 4.2.14 *Dans $\mathbb{C}$, l'équation aux différence*

$$f(x) - \frac{x+1}{xe} f(x+1) = \frac{1}{x}\left(\frac{e-1}{e}\right),$$

vérifie toutes les conditions ci-dessus, mais a une solution méromorphe transcendante $g(x) = \frac{e^x+1}{x}$.

Corollaire 4.2.15 *Soit L un corps algébriquement clôs de caractéristique nulle. Considérons l'équation*

$$\sum_{i=0}^{s} R_i(x)y(x+i) = R(x), \tag{4.19}$$

où, $R(x), R_0(x), ..., R_s(x)$ *sont des fonctions rationnelles dans L tel que* $R_0(x)R_s(x) \neq 0$. *Si* $\deg\left(\sum\limits_{i=0}^{s} R_i\right) = \max\limits_{0\leq i\leq s}\{\deg R_i\}$, *alors toute solution* $f \in L(x)$ *de l'équation (4.19) satisfait*

$$\deg f(x) \leq \max_{0\leq i\leq s}\{\deg R_i(x), \deg R(x)\}.$$

Preuve. L muni de la valeur absolue triviale définie par,

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

est un corps ultramétrique complet algébriquement clôs. De plus, nous avons

$$\mathcal{A}(L) = L[x] \text{ et } \mathcal{M}(L) = L(x).$$

Nous appliquons alors le Corollaire 4.2.13, nous obtenons que

$$\deg f(x) \leq \max_{0\leq i\leq s}\{\deg R_i(x), R(x)\}.$$

■

Notation

- p un nombre premier, $p = 2, 3, 5, 7, ..., 2011, ...$
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers réels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des entiers p-adiques.
- $\mathbb{Q}_p$ l'ensemble des nombres p-adiques.
- $\mathbb{C}_p$ l'ensemble des nombres complexes p-adiques.
- $|.|_\infty$ la valeur absolue usuelle.
- $|.|_p$ la valeur absolue p-adique.
- $v_p(.)$ la valuation p-adique.
- $[x]$ la partie entière de x.
- C_n^k coefficients binomiaux (combinaison de k parmi n).
- $K[x]$ l'ensemble des polynômes a coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $K(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles a coefficients dans $\mathbb{K}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Aihara, *Introduction to p-adic Analysis*. Research reports of the Nevanlinna theory and its applications II. Nippon Institute of Technology, 1998.

[2] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*. Presses Universitaire de France (1975).

[3] A. J. Baker, *An introduction to p-adic Numbers and p-adic Analysis*. Departement of mathematics, University of Glasgow, G128QW, Scotland (2004).

[4] W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Meromorphic solutions of some functional equations*, Methods Appl. Anal., 5(3), p. 248-258 (1998).

[5] W. Bergweiler, K. Ishizaki and N. Yanagihara, *Growth of meromorphic solutions of some functional equations I*, Aequationes Mathematicae, **63** (2002), p. 140-151.

[6] W. Bergweiler and J. K. Langley, *Zeros of differences of meromorphic functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 142, p.133-147 (2007).

[7] J. P. Bézivin, *Dynamique des fractions rationnels p-adiques*. Cours DEA de Mathématiques, Université de CAEN. 23 mai 2005.

[8] J.P. Bézivin, *Sur les équations fonctionnelles aux q-différences*, Aequationes Mathematica, **43** (2-3)(1992), p. 159-176.

[9] J.P. Bézivin and A. Boutabaa, *Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences*, Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica, **43** (2)(1992), p. 125-140.

[10] N. Boudjrida, A. Boutabaa and S. Medjerab, *On some ultrametric q-difference equations*, Bulletin des sciences mathmatiques, **137** (2013), p. 177-188.

[11] K. Boussaf, A. Boutabaa and A. Escassut, *Growth of p-adic entire functions and applications.* Houston J.Math. 40,3 p 715-736, (2014).

[12] A. Boutabaa, *Application de la théorie Nevanlinna p-adique.* Collectanea Mathematica 42,1 p 75-93, (1991).

[13] A. Boutabaa, *Théorie de Nevanlinna p-adique.* Manuscripta Math.67, p. 251-269 (1990).

[14] A. Boutabaa, *Sur les courbes holomorphes p-adique.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouses Vol. V, no 1 (1996), p. 29-52.

[15] A. Boutabaa, *On some p-adic functional equations.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics (Marcel Dekker) (1997).

[16] A. Boutabaa and J. P. Bézivin, *Decomposition of p-adic meromorphic function.* Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 2, no 1 (1995) p. 51-60.

[17] A. Boutabaa and A. Escassut, *Applications of the p-adic Nevanlinna theory to functional equations.* Annales de l'Institut Fourier, T.50 (3), p 751-766 (2000).

[18] A. Boutabaa and A. Escassut, *On uniquenss of p-adic meromorphic functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 126 (9), 2557-2568(1998).

[19] A. Boutabaa and A. Escassut, *Urs and Ursim for p-adic meromorphic functions inside a disc.* Proc. of the Edinburgh Mathematical Society 44, 485-504 (2001).

[20] Z.X. Chen, *Growth and zeros of meromorphic solution of some linear difference equations*, J. Math. Anal Appl, **373** (2011), p. 235-241.

[21] B.Q. Chen, Z. X. Chen and S. Li, *Properies on solutions of some q-difference equations*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **26** (2010), no. 10, p. 1877-1886.

[22] B.Q. Chen and Z. X. Chen, *Meromorphic solutions of some q-difference equations*, Bull. Korean Math. Soc. 48 (2011), no. 6, p. 1303-1314.

[23] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl., 344 (2008), p. 373-383.

[24] YM. Chiang, SJ. Feng, *On the Nevanlinna characteristic of* $f(z+\eta)$ *and difference equations in the complex plane*, Ramanujan J, **16** (2008), p. 105-129.

[25] B. Diarra, *Analyse p-adique.* Cours DEA-Algèbre commutative FAST-Université du Mali. Décembre 1999-Mars 2000.

[26] A. Escassut, *Analytic Elements in p-adic Analysis.* Word Scientific Publishing (1995).

[27] Fernando Q. Gouvêa, *p-adic Numbers.* An Introduction, Second Edition 1997.

[28] A.O.F. Jacqueline, *Distribution de valeurs des fonctions méromorphe ultramétrique, Application de la théorie de Nevanlinna.* These de Doctorat, Université Blaise Pascal.

[29] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[30] J. Heittokangas, I. Laine, J. Rieppo and D. Yang, *Meromorphic solutions of some linear functional equations*, Aequationes Mathematicae, **60** (2000), p. 148-166.

[31] P. C. Hu and C. C. Yang, *Meromorphic function over non-Archimedean Field.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

[32] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes.* Paris, 1929.

[33] H.H. Khoai, *Sur la théorie de Nevanlinna p-adique*. Groupe de travail d'analyse ultramétrique, towe 15 (1987-1988), p. 35-40. Aequationes Math. 60 (200) p. 148-166.

[34] S. Katok, *Real and p-adic analysis*. Cours notes for Math 497 C, Mass program, Fall 2000 (2001).

[35] N. Koblitz, *P-adic Analysis and Zeta Functions*. Springer-verlag (1984).

[36] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[37] Y. Liu, *On growth of meromorphic solutions for linear difference equations with meromorphic coefficients*, Adv. Differ. Equ. 2013, Article ID 60 (2013).

[38] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis*, Combridge University Press (1984).

[39] J. P. Ramis, *About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 1 (1992), p. 53-94.

[40] A. Robert, *A course in p-adic Analysis*. Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, No. 198 (2000).

[41] L. Yang, *Value Distribution Theory and New Research*. Science Press, Beijing, 1982.

Conclusion et Perspectives

Le domaine des équations fonctionnelles a suscité l'intérêt des mathématicien p-adicien en abordant les mêmes questions que celle du cas complexe en employant les techniques de la théorie de Nevanlinna p-adique basée à son tour sur la notion de la fonction caractéristique p-adique. Par ailleurs, il reste beaucoup de problèmes ouverts dans cette direction, complexe ou bien p-adique. Par exemple, on se propose d'étudier dans des travaux futurs les équations aux différences non linéaires de la forme

$$y(x+1) = R(x, y(x)),$$

où, $R(x,w) = \frac{P(x,w)}{Q(x;w)}$, et $P(x,w) = a_p(x)w^p + ... + a_1(x)w + a_0(x)$, $Q(x,w) = b_q(x)w^q + ... + b_1(x)w + b_0(x)$, et $a_j(x)$, $b_k(x)$ sont des polynômes tels que $a_p(x)b_q(x) \neq 0$ qui a déjà été traitée dans $\mathbb{C}$, mais dans le cas p-adique on trouve des résultats différents des résultats trouvé dans $\mathbb{C}$. En suite, on s'intéresse à l'étude des équations aux différences de la forme

$$\alpha_n y(x+n) + \alpha_{n-1} y(x+n-1) + ... + \alpha_1 y(x+1) = R(y(x)),$$

où, $R(w) = \frac{P(w)}{Q(w)}$, $P(w) = a_p w^p + ... + a_0$, $Q(w) = b_q w^q + ... + b_0$ et $a_p, ..., a_0$, $b_q, ..., b_0$ sont constants tels que $\alpha_n a_p b_q \neq 0$.

RESUME

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude de la croissance des solutions méromorphes dans un corps complet ultramétrique algébriquement clos, de certaines équations fonctionnelles linéaires aux différences. On a utilisé la version ultramétrique de la théorie de Nevanlinna pour donner les caractérisations de l’ordre de croissance de ces solutions.

D’abord, nous considérons les équations aux q-différences avec des coefficients méromorphes et nous examinons les solutions de cette équation en fonction de celle des coefficients, ensuite nous faisons également une étude similaire des équations aux différences.

ABSTRACT

We focus in this thesis to the study of the growth of meromorphic solutions in a complete ultrametric algebraically closed field, of some difference functional equations. We used the ultrametric version of Nenvanlinna theory, to give some characterizations of the order of growth of these solutions

First, we consider the q-difference equation with meromorphic coefficients and we examine solutions of this equation according to that of the coefficients, next, we make a similar study for certain difference equations with meromorphic coefficients.

ملخص

نهتم في هذه الأطروحة بدراسة تزايد الحلول الميرومورفية في حقل أولترمتري تام و مغلق جبريا لبعض المعادلات الخطية الفرقية، حيث قمنا باستخدام الصيغة أولترمترية من نظرية Nevanlinna من أجل إعطاء ميزة التزايد للحلول. أولا نختار المعادلات ال

q-فرقية

التي لها معاملات ميرومورفية حيث ندرس الحلول الميرومورفية لهذه المعادلات وفقا لخصائص المعاملات. و بعد ذلك نقوم بنفس الدراسة على المعادلات الفرقية ذات المعاملات الميرومورفية.