République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

THÈSE

Présentée à la Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité Analyse Fonctionnelle

Par

SAMIA GHALIA

Thème

Etude d'une classe de problèmes aux limites régis par des inclusions différentielles

Soutenue publiquement le Samedi 03/02/2024 à la bibliothèque centrale

Devant le jury composé de

Président :	Imene Touil	MCA	Université de Jijel
Directeur de thèse :	Doria Affane	Professeur	Université de Jijel
Examinateurs :	Assia Guezane-Lakoud	Professeur	Université d'Annaba
	Farida Belhannache	MCA	Université de Jijel
	Sabrina Lounis	MCA	Université de Jijel

Promotion **2023/2024**

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour dépasser toutes les difficultés et terminer cette thèse.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à ma directrice de thèse Madame **Doria Affane**, Professeur à l'université de Jijel, pour ses grands efforts tout au long de ces quatre années, la confiance et l'autonomie qu'elle m'a accordées et pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente.
J'aimerais aussi la remercier pour son appui scientifique, me guidant, corrigeant mes erreurs et ne m'abandonnant pas même lorsqu'elle était fatiguée ou malade.
Finalement, je témoigne que je n'aurais jamais pu réaliser cette thèse sans son soutien.

Merci Merci Merci

Je voudrais adresser mes remerciements à Madame **Imene Touil**, MCA à l'université de Jijel, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Je remercie ensuite l'ensemble des membres du jury : Madame **Assia Guezane-Lakoud**, Professeur à l'université de d'Annaba, Madame **Farida Belhannache**, MCA à l'université de Jijel et Madame **Sabrina Lounis**, MCA à l'université de Jijel, qui ont accepté d'étudier cette thèse et donner leurs précieuses remarques.

Je remercie le directeur du Laboratoire : Prof. **Mustapha Fateh Yarou** et tous mes enseignants du département de mathématiques.

J'aimerais bien exprimer toute ma gratitude, mes remerciements à mes parents, mes frères et mes collègues du laboratoire de recherche.

Table des matières

Introduction générale

Malgré la grande importance accordée par les mathématiciens à l'étude de l'existence de solutions pour les équations différentielles et malgré leur longue histoire et les résultats impressionnants de ces recherches, la nécessité requise par une variété de modèles mathématiques d'être plus réalistes a attiré l'attention de nombreux chercheurs pour traiter les équations différentielles itératives, qui sont un type spécial des équations à retard dépendant de l'état. Ils ont fait l'objet d'une étude approfondie et intensive, ce qui a conduit à l'obtention de nombreux résultats sur la régularité, l'équivariance, l'analyticité, la monotonie, la convexité ainsi que les solutions numériques.
En [50], A. Pelczar a introduit une équation différentielle itérative

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t), u^{[2]}(t)), \text{ où } u^{[2]}(t) = u(u(t)), \tag{1}$$

en utilisant la méthode des approximations successives de Picard. Ensuite, E. Eder [34] a appliqué le principe de contraction pour établir l'existence et l'unicité de solution du problème itérative $\dot{u}(t) = u^{[2]}(t)$. En utilisant le même principe, M. Fečkan [35] a montré l'existence de la solution locale pour l'équation autonome $\dot{u}(t) = f(u^{[2]}(t));\ u(0) = 0$. En [24], A. Buică a appliqué la technique des opérateurs non expansifs pour étudier l'équation non autonome $\dot{u}(t) = f(t, u^{[2]}(t)),\ u(T_0) = u_0$. Sous des hypothèses plus faibles que celles obtenues dans [24], V. Berinde dans [19] a prouvé le théorème d'existence du même problème ainsi que le théorème de convergence pour approximer ces solutions. Plus tard, M. Lauran dans [43] et [44] a étudié d'existence de solutions pour l'équations différentielles itératives avec argument déviant $\dot{u}(t) = f(t, u(t), u^{[2]}(t), u(\alpha t))$ et $\dot{u}(t) = f(t, u(t), u(\alpha_1 u(t)), u(\alpha_2 u(t)))$ avec $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$. Dans [64], les auteurs ont considéré le problème itérative général

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\dot{u}(t)=f(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t)),\ \text{p.p. } t\in I;\\ u(0)=u_0,\end{cases}$$

où $I=[0,T]$, $u^{[i]}(t)=u(u^{[i-1]}(t))$, $i=1,\cdots,n$ indique le i-ème itérée de u et $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ est une application continue bornée. Ils ont prouvé l'existence de solutions en utilisant le théorème du point fixe de Schauder. Dans [65], les auteurs ont utilisé le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour démontrer l'existence d'une solution positive du $(\mathcal{I})$. Nous référons également à [10, 19, 36, 37, 40, 53, 58, 61, 62, 63] et leurs références concernant ces équations.

Dans l'étude de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles, l'utilisation de la convexité sur la multi-application est largement connue, c'est la propriété requise pour passer à une limite faible le long d'une suite, qu'il s'agisse d'une suite de minimisations ou d'une suite d'approximations successives, en préservant les propriétés nécessaires. En raison de sa généralité, cette approche ne fournit pas toujours les meilleurs résultats, puisqu'elle ne tient pas compte d'éventuelles informations supplémentaires. Dans [59, 60], T. Wazewski a prouvé que $u(\cdot)$ est une solution de l'équation contingente si et seulement si $u(\cdot)$ est absolument continue et satisfait

$$\begin{cases}\dot{u}(t)\in F(t,u(t)),\ t\in I;\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{2}$$

où F une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes convexes. Après, J.P. Aubin et A. Cellina [17] ont étudié l'existence de solutions (locales ou globales) du problème (2) dans deux cas : lorsque F est semi-continue inférieurement (ou semi-continue supérieurement) à valeurs compactes convexes et lorsque F est continue (ou absolument continue) à valeurs compactes. Ensuite, ils ont trouvé la relation entre l'ensemble des solutions au problème autonome

$$\begin{cases}\dot{u}(t)\in F(u(t)),\ t\in I;\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{3}$$

et le problème relaxé

$$\begin{cases}\dot{u}(t)\in \overline{\text{co}}(F(u(t))),\ t\in I;\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{4}$$

où F est une multi-application Lipschitzienne à valeurs compactes. Dans [49], N.S. Papageorgiou a prouvé un résultat d'existence et quelques propriétés topologiques de l'ensemble admissible du (2) où $F(\cdot,\cdot)$ est une multi-application à valeurs bornées, mesurable sur I et semi-continue supérieurement sur l'espace de Banach H.
Les résultats des [17, 49] ont été étendus de plusieurs manières par de nombreux chercheurs par exemple, les auteurs dans [30] ont remplacé la convexité par une condition plus faible appelée la presque convexité des ensembles, ce concept a été utilisé avec succès dans les processus de rafle du premier-ordre (voir [3, 4, 6, 9]) et les inclusions différentielles du second-ordre (voir [7, 14, 15]).

Les inclusions différentielles régies par des opérateurs maximaux monotones jouent un rôle important dans l'étude de divers processus dynamiques décrits par des équations à droite discontinue ou multivaluée. Dans [22], H. Brézis a utilisé la méthode de régularisation Yosida pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution Lipschitzienne pour le problème d'évolution

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t), \text{ p.p. } t \in [0,+\infty[; \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{5}$$

où $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ est un opérateur maximal monotone défini sur un espace de Hilbert H. Plus tard, les auteurs dans [18] ont utilisé la même méthode pour étudier le problème perturbé

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + f(t), \text{ p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{6}$$

où f une application intégrable. Ce travail a été généralisé en remplaçant la perturbation univoque par une perturbation multivoque F. Les auteurs dans [16] ont prouvé, en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan, l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in Au(t) + F(t,u(t)), \text{ p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{7}$$

où F est une multi-application mesurable par rapport à la variable de temps et semi-continue supérieurement par rapport à la variable d'espace. Plus tard, A. Cellina et M.V. Marchi dans [29] ont appliqué le théorème de sélection continue pour établir l'existence

de solutions du problème (7) avec une perturbation continue à valeurs compactes vérifiant une condition de croissance linéaire. Dans [31], les auteurs ont utilisé la même méthode de [29] (principe du point fixe) et le théorème de sélection de Fryszkowski pour démontrer un résultat d'existence du (7), où F est une multi-application mesurable et semi-continue inférieurement par rapport à la deuxième variable. Nous référons également à [1, 17, 21, 47, 48] et leurs références pour d'autres théorèmes concernant de telles classes de problèmes.
Passons maintenant aux inclusions différentielles régies par des opérateurs maximaux monotones dépendant du temps. J.C. Peralba dans [51] a étudié le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t), \text{ p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A), \end{cases} \tag{8}$$

avec $A(t) = \partial\varphi_t(\cdot)$ le sous différentiel d'une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement et la fonction duale de $\varphi_t(\cdot)$ est contrôlée par une fonction absolument continue. J.J. Moreau [46] a étudié le problème (8) avec $A(t) = N_{C(t)}$ le cône normal à $C(t)$, où C est une multi-application à valeurs convexes fermées. Ensuite, les auteurs de [41] ont généralisé ces résultats dans un espace de Hilbert H, en établissant l'existence et l'unicité de solution pour le problème (8) où $t \mapsto A(t)$ est à variation bornée or absolument continue. En [52], les auteurs ont étudié le problème

$$\begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t)), \text{ p.p. } t \in I; \\ u(0) = u_0 \in D(A(0)), \end{cases} \tag{9}$$

où $f : I \times H \to H$ est une application Lipschitzienne sur un espace de Hilbert H, vérifiant une condition de croissance linéaire. Récemment, B. K. Le [45] et E. Vilches [56] ont prouvé l'existence et l'unicité de solution pour le problème d'évolution (9) et ils ont appliqué le résultat théorique pour étudier le processus de la rafle dépendant de l'état et les systèmes dynamiques.

Une continuation aux travaux cités ci-dessus, nous étudions une nouvelle classe des inclusions différentielles appelées "les inclusions différentielles itératives". Nous référons également à [5, 8, 11, 12, 13, 20] et leurs références concernant ces problèmes.
Après quelques notations et préliminaires, dans le deuxième chapitre qui est un objet d'une publication dans le journal "Mathematica Slovaca", on considère un nouveau

problème, qui est l'inclusion différentielle itérative du premier ordre suivante :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

où $F : [T_0, T]^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes convexes. Il convient de mentionner que notre résultat généralise les études du problème (2) où $n = 1$. Nous étudions l'existence de solutions en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani et nous donnons quelques propriétés topologiques de l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$ pour résoudre le problème de temps optimal en s'inspirant d'un travail de N. Papageorgiou dans [49]. Ensuite, nous utilisons le résultat de convexité et la méthode de relaxation donnée par A. Cellina et A. Ornelas [30] pour démontrer l'existence de solutions du problème autonome

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

sous une hypothèse plus faible sur la semi continuité supérieurement et la presque convexité des valeurs de F (nous mentionnons que F est supposé indépendant du temps pour des raisons purement techniques). Finalement, comme application des résultats précédents, nous considérons le problème de temps optimal

$$(\mathcal{PP}) \begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), \nu(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T], \\ \nu(t) \in U(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \forall t \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

contrôlé par les paramètres $U(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))$, où $U : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une multi-application à valeurs compactes et semi-continue supérieurement.

Dans le troisième chapitre qui est un objet des publications dans les journals "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2" et " Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications", nous étudions, en utilisant le principe du point fixe, l'existence de $\mathcal{C}([0, T])$-solution du problème $(\mathcal{I})$, sous des hypothèses plus faibles que celles obtenues dans [64]. Puis, on généralise le problème (9) pour obtenir une inclusion différentielle itérative gouvernée par un opérateur maximal monotone :

$$(\mathcal{II}_{\mathcal{A}}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une perturbation itérative univoque. Nous utilisons le résultat d'existence du problème $(\mathcal{I})$ et les approximations Yosida pour montrer l'existence de solution et le théorème de composition pour l'unicité. Comme cas particulier du problème $(\mathcal{II}_A)$, nous étudions l'inclusion différentielle itérative avec argument devient :

$$(\mathcal{II}_\alpha) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u^{[n]}(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), u^{[n]}(\alpha t)), \\ \text{ p.p. } \; t \in [0,T], \; \alpha \in (0,1); \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Ces résultats nous permettent d'étendre à la propriété de relaxation de type Bolza un problème de contrôle optimal associé à de telles équations où les contrôles sont des mesures de Young.

Cette thèse est composée de trois chapitres. Dans le premier, nous rappelons certains résultats de base et les outils qui nous seront utiles pour la démonstration de nos résultats d'existence.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_\mathcal{F})$ et nous donnons les propriétés topologiques de l'ensemble admissible. Ensuite, on applique ces résultats au problème de temps optimal.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solution des problèmes $(\mathcal{I})$, $(\mathcal{II}_\mathcal{A})$ et $(\mathcal{II}_\alpha)$. Comme application, nous présentons un problème de contrôle optimal de type Bolza régie par $(\mathcal{II}_\mathcal{A})$, où les contrôles sont des mesures de Young.

CHAPITRE 1

Notations et Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et résultats de base qui nous seront utiles pour la démonstration des théorèmes d'existence étudiés à travers cette thèse. Nous commençons par donner quelques notations utilisées au cours de cette thèse.

1.1 Notations

Dans ce qui suit on considère $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension finie n. Chaque élément de $\mathbb{R}^n$ est écrit sous la forme $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ muni de la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. $\overline{\mathbf{B}}$ est la boule unité fermée de $\mathbb{R}$.

Pour $[T_0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, on note par :

• $\mathcal{C}([T_0, T])$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $u : [T_0, T] \to [T_0, T]$ muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \in [T_0, T]} |u(t)|$.

• $L^p_{\mathbb{R}}([T_0, T])$ pour $1 \leq p < +\infty$ (resp. $p = +\infty$) l'espace des applications intégrables (resp. essentiellement bornées) définies sur $[T_0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|u\|_{L^p_{\mathbb{R}}} = \left(\int_{T_0}^{t} |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ (resp. $\|u\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} = \inf\{c \geq 0 : |u(t)| \leq c, \text{ p.p. sur } [T_0, T]\}$).

• $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ la topologie faible définie sur $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

• $\sigma(L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ la topologie faible* définie sur $L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

• $\limsup_{r \to \infty} u_r$ la limite supérieure de (u_r).

Pour S un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note par :

• $\mathrm{co}(S)$ l'enveloppe convexe de S.

• $\overline{\mathrm{co}}(S)$ l'enveloppe convexe fermé de S.

• Fr(S) la frontière de S.

• $\mathcal{X}_S$ la fonction caractéristique de S, définie par

$$\mathcal{X}_S(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in S; \\ 0 & \text{si } z \notin S. \end{cases}$$

• $\mathbf{1}_S$ la fonction indicatrice de S, définie par

$$\mathbf{1}_S(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in S; \\ +\infty & \text{si } z \notin S. \end{cases}$$

• $d_S(z)$ la distance entre le point $z \in \mathbb{R}$ et l'ensemble S, définie par

$$d_S(z) = \inf_{y \in S} |z - y|.$$

• δ_z la masse de Dirac définie par

$$\delta_z = \begin{cases} 0 & \text{si } z \neq 0; \\ +\infty & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Soit Z un espace métrique compact, on note par :

• $\mathcal{B}(Z)$ la tribu Borélienne sur Z.

• $\mathcal{C}'(Z)$ le dual de $\mathcal{C}(Z)$ muni de la topologie $\sigma(L^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}, L^1_{\mathcal{C}(Z)})$

• $\mathcal{M}^1_+(Z)$ l'ensemble de toutes les mesures positives de probabilité sur Z, qui est une partie convexe compacte de $\mathcal{C}'(Z)$.

Soit $\mathit{\Gamma} : [T_0, T] \rightrightarrows Z$ une multi-application Lebesgue-mesurable à valeurs compactes. On note par :

• $S_{\mathit{\Gamma}}$ l'ensemble de toutes les sélections Lebesgue-mesurable de $\mathit{\Gamma}$ défini par

$$S_{\mathit{\Gamma}} = \{\xi : [T_0, T] \to Z : \xi \text{ Lebesgue-mesurable et } \xi(t) \in \mathit{\Gamma}(t) \text{ p.p. } t \in [T_0, T]\}.$$

• S_Σ l'ensemble de toutes les sélections Lebesgue-mesurable de Σ défini par

$$S_\Sigma = \{\nu : [T_0, T] \to \mathcal{M}^1_+(Z) : \nu \text{ Lebesgue-mesurable et } \nu(t) \in \Sigma(t) \text{ p.p. } t \in [T_0, T]\},$$

où, pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\Sigma(t) = \{\vartheta \in \mathcal{M}^1_+(Z) : \vartheta(\mathit{\Gamma}(t)) = 1\}.$$

1.2 Quelques notions d'analyse convexe

1.2.1 La convexité

Pour plus de détails sur cette sous section, on réfère à [28].

Définition 1.1 (Ensemble convexe).
Soient E un espace vectoriel et S un sous ensemble de E. On dit que S est convexe s'il contient tout segment dont les extrémités sont dans S, i.e.,

$$\forall x, y \in S,\ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in S.$$

Autrement dit, pour tous $x, y \in S$, le segment de droite

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0,1\} \subset S.$$

Définition 1.2. *On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble Δ_n défini par*

$$\Delta_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_i \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.3 (Combinaison convexe).
Soient E un espace vectoriel et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \Delta_n$.

Proposition 1.4. *Soient E un espace vectoriel et $S \subset E$. Alors, S est convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Définition 1.5 (Enveloppe convexe).
• *Soient E un espace vectoriel et $S \subset E$. On appelle enveloppe convexe de S qu'on note* $\mathrm{co}(S)$*, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contiennent S, c'est en fait le plus petit convexe de E qui contient S.*
• *Si E est un espace vectoriel topologique, on appelle enveloppe convexe fermée de S qu'on note $\overline{\mathrm{co}}(S)$ le plus petit convexe fermé de E qui contient S.*

Lemme 1.6. *[33] Soient S un sous-ensemble compact dans un espace de Banach séparable E et $(u_r)_{r\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble des suites contenu dans S. Alors*

$$\overline{\mathrm{co}}\,(\limsup_{r\to\infty} u_r) = \bigcap_{N>0} \overline{\mathrm{co}}\,\Big(\bigcup_{r\geq N} u_r\Big).$$

Définition 1.7. *Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est propre si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) \neq -\infty$ et il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq +\infty$. On appelle domaine effectif de f l'ensemble*

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in E,\ f(x) < +\infty\}.$$

Alors, $f : E \to]-\infty, +\infty]$ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

Définition 1.8 (Fonction convexe)**.**
Soient E un espace vectoriel et $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}(f),\ \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1.2.2 La presque convexité

La presque convexité est une propriété topologique des ensembles et il y a plusieurs manières de définir l'ensemble presque convexe et nous avons utilisé dans notre travail la suivante :

Définition 1.9. *[30]*
L'ensemble $\mathcal{Q}$ d'un espace vectoriel est dit presque convexe si pour tout $q \in \mathrm{co}(\mathcal{Q})$, il existe deux constantes α_1 et α_2, $0 \leq \alpha_1 \leq 1 \leq \alpha_2$, telles que

$$\alpha_1 q \in \mathcal{Q} \ \text{ et } \ \alpha_2 q \in \mathcal{Q}.$$

Remarque.

1) *Si l'ensemble $\mathcal{Q}$ est presque convexe et $0 \in \mathrm{co}(\mathcal{Q})$, alors $\mathcal{Q}$ contient l'origine* 0, *car pour tous constantes α_1 et α_2 nous avons*

$$\alpha_1 \cdot 0 = 0 \in \mathcal{Q} \ \text{ et } \ \alpha_2 \cdot 0 = 0 \in \mathcal{Q}.$$

2) *Tout ensemble convexe est presque convexe.*

Exemples 1.10. *Les ensembles suivants sont presque convexes :*
1) *L'ensemble $\mathcal{K} = \partial \mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q} = \left\{ \{-\frac{x}{|x|}\},\ x \in \mathbb{R}^* \right\}$ est un convexe qui ne contient pas l'origine.*
2) *L'ensemble* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\} \cup \{(0,0)\}$.

1.3 Quelques notions de mesurabilité

Définition 1.11. *Soit X un ensemble non vide, Σ une famille de sous ensembles de X. Alors Σ est dite une tribu sur X si*

1) $\emptyset \in \Sigma$,

2) $A \in \Sigma \Rightarrow X \setminus A \in \Sigma$,

3) $A_r \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{r \in \mathbb{N}} A_r \in \Sigma$.

Le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable, et les éléments de Σ sont appelés ensembles mesurables.

Définition 1.12. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, alors l'application $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ est une mesure sur X si*

1) $\nu(\emptyset) = 0$,

2) $\nu(\bigcup\limits_{r \in \mathbb{N}} A_r) = \sum\limits_{r \in \mathbb{N}} \nu(A_r)$ *pour toute suite dénombrable d'éléments de Σ deux à deux disjoints.*

Le triplé (X, Σ, ν) est appelé espace mesuré.

• *Si $\nu(A) \geq 0$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure positive et on note $\nu \geq 0$, ou l'espace (X, Σ, ν) est positive.*

• *Si $\nu(A) < \infty$, pour tout $A \in \Sigma$, on dit que ν est une mesure finie ou que l'espace (X, Σ, ν) est fini.*

• *Si X est un espace topologique, la mesure $\nu : \mathcal{B}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne. On dit que ν est une mesure de probabilité si $\nu(X) = 1$.*

Définition 1.13. *Soient (X, Σ, ν) un espace mesuré avec $\nu \geq 0$ et Z un sous ensemble de X, on dit que Z est ν-négligeable ou négligeable (s'il n'y a pas de confusion), s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\nu(A) = 0$.*
On dit qu'une propriété sur X est vraie ν-presque partout (ν.p.p.), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est ν-négligeable.

Théorème 1.14 (Théorème de Lyapunov)**.** *[39] Soit (T, Σ) un espace mesurable et ν une mesure sur Σ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose ν sans atomes. Alors $\{\nu(A) : A \in \Sigma\}$ est convexe.*

Définition 1.15. *Soit (X, Σ) un espace mesurable et Z un espace métrique. On dit que la fonction $f : X \to Z$ est Σ-étagée (resp. dénombrablement Σ-étagée) si f est $(\Sigma, \mathcal{B}(Z))$-mesurable et $f(X)$ fini (resp. dénombrable).*

Lemme 1.16. *Sous les notations de la définition 1.15, nous avons les caractérisations suivantes :*

1) f est Bochner mesurable,

2) il existe une suite de fonctions Σ-étagée définies sur X à valeurs dans Z convergeant simplement vers f.

1.4 Mesures de Young

Pour plus de détails sur les mesures de Young on peut se référer à [26, 54, 55].

Définition 1.17. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique, $\mathcal{B}(Y)$ la tribu Borélienne sur Y et $f : X \to Y$. On dit que f est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{B}(Y)$, $f^{-1}(A) \in \Sigma$.*

Définition 1.18. *Soit (S, Σ, η) un espace mesuré et $u : S \to Z$ une application mesurable. Alors la mesure de Young associée à u est l'image ν de η par l'application $\theta : S \to S \times Z$ définie par*

$$\theta(x) = (x, u(x)),$$

i.e., $\nu = \eta \circ \theta^{-1}$. Si $\varphi : S \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable telle que φ est positive ou ν-intégrable alors

$$\int_{S\times Z} \varphi \, d\nu = \int_S \varphi(\theta(x))\mathrm{d}\eta(x) = \int_S \varphi(x, u(x))\mathrm{d}\eta(x).$$

La mesure de Young ν est l'unique mesure sur $S \times Z$ portée par le graphe de u, telle que

$$\nu(A \times Z) = \eta(A), \; \forall A \in \Sigma.$$

Définition 1.19. *Soient (S, Σ, η) un espace mesuré complet, η une mesure finie positive et Z un espace métrique complet séparable. On note par $\mathcal{Y}(S, \eta, Z)$ l'ensemble des mesures de Young, i.e., l'ensemble de toutes les mesures positives sur $(S \times Z, \Sigma \otimes \mathcal{B}(Z))$ dont les projections sur S égalent η.*

Définition 1.20. *Soit $\mathcal{M}^1_+(Z)$ l'ensemble de toutes les mesures positives de probabilité sur $(Z, \mathcal{B}(Z))$. On note par $\mathcal{Y}_{\text{dis}}(S, \eta, Z)$ l'ensemble de toutes les applications $\mu : S \to \mathcal{M}^1_+(Z)$ qui sont Lebesgue mesurables au sens suivant, pour tout $B \in \mathcal{B}(Z)$, la fonction $s \mapsto \mu_s(B)$ est mesurable.*

Proposition 1.21.

1) *Si ν est une mesure de Young correspondante à l'élément $\mu \in \mathcal{Y}_{\text{dis}}(S, \eta, Z)$, alors, pour toute fonction $\varphi : S \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Z)$-mesurable et positive (resp. $\nu-$intgrable), la fonction $s \mapsto \int_Z \varphi(s, z)\mu_s(dz)$ est η-mesurable (resp. $\eta-$ intgrable) et l'on a*

$$\int_{S\times Z} \varphi \, d\nu = \int_S \left(\int_Z \varphi(s, z)\mu_s(dz) \right) \eta(ds).$$

2) *Si ν est la mesure de Young associée à $\mu \in \mathcal{Y}_{\text{dis}}(S, \eta, Z)$, on ne fera pas de différence entre ν et μ, i.e., pour tout $s \in S$, on écrira ν_s au lieu de μ_s.*

3) *Toute fonction mesurable $u : S \to Z$ définit une mesure de Young sur $S \times Z$ dite mesure de Young associée à $u(\cdot)$. C'est la mesure de Young correspondante à l'élément μ de $\mathcal{Y}_{\text{dis}}(S, \eta, Z)$, définie par $\mu_s := \delta_{u(s)}$, où $\delta_{u(s)}$ est la masse de Dirac au point $u(s)$, $s \in S$.*

Intégrande de Carathéodory.

Définition 1.22. *On appelle intégrande toute fonction $\psi : S \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ qui est $\Sigma \otimes \mathcal{B}(Z)$-mesurable. Un intégrande est dit de Carathéodory si pour tout $s \in S$, la fonction $\psi(s, \cdot)$ est continue et prend des valeurs finies sur Z.*
L'espace des intégrandes de Carathéodory définis sur $S \times Z$ est noté $\mathcal{G}_c(S, \eta, Z)$.

Définition 1.23. *Supposons que $\mathcal{Y}(S, \eta, Z)$ soit muni de la topologie la plus faible rendant les applications $\nu \mapsto \int_{S\times Z} \psi \, d\nu$ continues, où ψ parcourt l'espace $\mathcal{G}_c(S, \eta, Z)$. Cette topologie est appelée topologie de la convergence étroite où topologie Narrow et notée $\sigma(\mathcal{Y}(S, \eta, Z), \mathcal{G}_c(S, \eta, Z))$.*

Définition 1.24. *Un intégrande $\psi : S \times Z \to \overline{\mathbb{R}}$ est dit L^1-borné s'il existe une fonction positive $\vartheta \in L^1_{\mathbb{R}}(S, \eta)$, telle que $|\psi(s, z)| \leq \vartheta(s)$ pour tout $(s, z) \in S \times Z$.*

Définition 1.25. *Une suite $(\nu^r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}(S, \eta, Z)$ converge vers ν, si pour tout intégrande* *de Carathéodory ψ on ait*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{S\times Z}\psi\, d\nu^r = \int_{S\times Z}\psi\, d\nu.$$

Définition 1.26. *On dit que la suite $(\mu^r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Y}_{\mathrm{dis}}(S,\eta,Z)$ converge vers μ si la suite des mesures de Young correspondantes converge dans $\mathcal{Y}(S,\eta,Z)$, i.e., pour tout intégrande de Carathéodory L^1-borné ψ on ait*

$$\lim_{r\to\infty}\int_S\left(\int_Z \psi(s,z)\mu_s^r(dz)\right)\eta(ds) = \int_S\left(\int_Z \psi(s,z)\mu_s(dz)\right)\eta(ds).$$

Définition 1.27. *Un espace de probabilité complet est un espace de probabilité dans lequel tous les ensembles négligeables (événements de probabilité nulle) sont pris en compte.*
Soit (S,Σ,η) un espace de probabilité, on dit que (S,Σ,η) est complet si pour tout ensemble A, tel que $\eta(A)=0$, alors tout sous-ensemble B de A est également dans Σ.

Définition 1.28. *Espace Polonais est un espace séparable et métrisable par une métrique complète.*

Théorème 1.29. *[26]*
Soient (S,Σ,η) un espace de probabilité complet, Z un espace Polonais, E un espace de Banach séparable et (u^r) une suite d'applications définies sur S à valeurs dans E qui sont $\Sigma\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurables, convergeant ponctuellement vers une application $\Sigma\otimes\mathcal{B}(E)$-mesurable u^∞. Soient (ζ^r) une suite d'applications définies sur S à valeurs dans Z qui sont $\Sigma\otimes\mathcal{B}(Z)$-mesurables, narrow convergeante vers une mesure de Young $\zeta^\infty\in\mathcal{Y}(S,\eta,Z)$ et $J: S\times E\times Z\to\mathbb{R}$ un intégrande de Carathéodory, telle que $(J(\cdot,u^n(\cdot),\zeta^r(\cdot)))$ est uniformément intégrable. Alors, nous avons

$$\lim_{r\to\infty}\int_S J(\omega,u^r(\omega),\zeta^r(\omega))\eta(d\omega) = \int_S\left(\int_Z J(\omega,u^\infty(\omega),z)\zeta_\omega^\infty(dz)\right)\eta(d\omega).$$

Théorème 1.30. *[26]*
Sous les hypothèses du Théorème 1.29, soit $J: S\times E\times Z\to\mathbb{R}$ un intégrande de Carathéodory L^1-borné, telle qu'il existe une fonction intégrable positive $\varphi\in L^1_{\mathbb{R}}(S,\Omega,\eta)$ satisfaisant $|J(\omega,x,z)|\le\varphi(\omega)$ pour tout $(\omega,x,z)\in S\times E\times Z$. Alors

$$\lim_{r\to\infty}\int_S\left(\int_Z J(\omega,u^r(\omega),z)\nu_\omega^r(dz)\right)\eta(d\omega) = \int_S\left(\int_Z J(\omega,u^\infty(\omega),z)\nu_\omega^\infty(dz)\right)\eta(d\omega).$$

Définition 1.31. *Soit (S, Σ, η) un espace de probabilité, (u_r) une suite de variables aléatoires sur cet espace et u une autre variable aléatoire sur ce même espace. On dit que (u_r) converge en probabilité vers u si :*

$$\varepsilon > 0, \lim_{r \to +\infty} \eta(|u_r - u| > \varepsilon) = 0.$$

Proposition 1.32. *[26]*
Soient Z et E deux espaces Polonais, $(\mu^r) \in \mathcal{Y}(S, \eta, Z)$ et $(\nu^r) \in \mathcal{Y}(S, \eta, E)$ deux suites convergeant en probabilité vers $\mu^\infty \in \mathcal{Y}(S, \eta, Z)$ et $\nu^\infty \in \mathcal{Y}(S, \eta, E)$ respectivement. Alors, $(\nu^r \otimes \mu^r)$ converge vers $\nu^\infty \otimes \mu^\infty$ en probabilité.

1.5 Quelques résultats de compacité

Définition 1.33. *Soient (Ω, Σ) un espace mesurable, X et Y deux espaces topologiques. On dit que $f : \Omega \times X \to Y$ est une fonction de Carathéodory si elle est Lebesgue mesurable sur Ω et continue sur X.*

Théorème 1.34 (Théorème de Scorza-Dragoni)**.** *[25]*
Soient Ω un espace métrique compact et (Ω, Σ, ν) un espace mesuré positif de Radon. Soient X un espace métrique séparable complet et $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $I_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $\nu(\Omega \backslash I_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de f à $I_\varepsilon \times X$ est continue.

Théorème 1.35 (Kakutani)**.** *[23]*
Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si

$$\overline{\mathbf{B}}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\},$$

est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$, où E' le dual topologique de E.

Théorème 1.36 (Théorème d'Eberlein-Šmulien)**.** *[33]*
Soit S un sous ensemble faiblement fermé d'un espace de Banach E. Alors les éléments suivants sont équivalents :

(i) *S est faiblement compact.*

(ii) *S est faiblement séquentiellement compact.*

1.6 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.37 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue). *[23]*
Soient (Ω, Σ, μ) un espace mesuré fini, $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- *$(f_r)_r$ converge simplement vers f p.p.*
- *il existe une fonction intégrable g, telle que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $|f_r(x)| \leq g(x)$.*

Alors, f est intégrable et $\int_\Omega |f - f_r| d\mu \to 0$.

Théorème 1.38 (Théorème d'Ascoli-Arzelà). *[17]*
Soient Ω un espace métrique compact, Y un espace métrique complet et H un sous ensemble de $\mathcal{C}(\Omega, Y)$. Alors, H est relativement compact si et seulement si H est équi-continu et $H(x)$ est relativement compact, avec $H(x) = \{f(x)\}_{f\in H}$.

Théorème 1.39 (Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà). *[17]*
Soient Ω un sous espace métrique compact de $\mathbb{R}$, E un espace de dimension finie et $(x_r(\cdot))_r$ une suite de fonctions absolument continues définies sur Ω à valeurs dans E, satisfaisant les conditions suivantes :

(i) *$\forall t \in \Omega$, $(x_r(t))$ est un sous ensemble relativement compact dans E,*

(ii) *il existe une fonction positive $c(\cdot) \in L^1(\Omega)$, telle que*

$$\|\dot{x}_r(t)\| \leq c(t), \text{ p.p. } t \in \Omega.$$

Alors, il existe une sous suite de $(x_r(\cdot))_r$ qui converge vers une fonction absolument continue $x(\cdot)$ au sens suivant

1) *$(x_r(\cdot))$ converge uniformément vers $x(\cdot)$ sur les sous ensembles compacts de Ω,*

2) *$(\dot{x}_r(\cdot))$ converge faiblement vers $\dot{x}(\cdot)$ dans $L^1(\Omega, E)$.*

Théorème 1.40 (Lemme de Mazur). *[33]*
Soient E un espace de Banach et (x_r) une suite d'éléments de E convergent faiblement vers $x \in E$, alors il existe une suite de combinaisons convexes de (x_r) notée (y_r) convergeant fortement vers x.

1.7 Multi-applications

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multi-applications et leurs sélections. Les résultats suivants ont été pris des références [17, 27, 28, 32, 33].
Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, X et Y sont deux espaces topologiques.

1.7.1 Généralités sur les multi-applications

Définition 1.41. *Une multi-application F définie sur X à valeurs dans Y est une fonction qui à chaque élément x de X, associe un sous ensemble $F(x)$ de Y, on note $F : X \rightrightarrows Y$.*

Définition 1.42. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application.*

1) *On appelle domaine de F, l'ensemble* $\mathrm{dom}(F) = \{x \in X : \ F(x) \neq \emptyset\}$.
2) *On appelle image de F, l'ensemble* $\mathrm{Im}(F) = \{y \in Y : \ \exists x \in X; \ y \in F(x)\}$.
3) *On appelle image d'une partie S de X par F l'ensemble* $F(S) := \bigcup\limits_{x \in S} F(x)$.
4) *On appelle image réciproque d'une partie non vide V de Y par F l'ensemble*
$$F^{-1}(V) := \{x \in X \ F(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$
5) *On appelle image réciproque étroite de $V \subset Y$ par F l'ensemble*
$$F_{+}^{-1}(V) := \{x \in X : \ F(x) \subset V\}.$$
6) *Le graphe de F est le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\}.$$
7) *L'inverse de F est $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$, telle que $x \in F^{-1}(y)$ si et seulement si $y \in F(x)$.*

1.7.2 Semi-continuité et mesurabilité

Définition 1.43 (Semi-continuité supérieure)**.**
On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est semi-continue supérieurement (s.c.s) en un point $x_0 \in X$ si

et seulement si pour tout ouvert V de Y telle que $F(x_0) \subseteq V$, il existe un voisinage U de x_0 dans X telle que $F(x) \subseteq V$, $\forall x \in U$.
F est s.c.s, si et seulement si elle est s.c.s en tout point x de X.

Théorème 1.44. *[28] On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est s.c.s si et seulement si pour tout ouvert $V \subset Y$, $F_+^{-1}(V)$ est un ouvert de X.*

Théorème 1.45. *[17] Si $F : X \rightrightarrows Y$ est s.c.s à valeurs fermées, alors $gph(F)$ est fermé.*

Corollaire 1.46. *[17] Soient Y un espace compact et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides. Si $gph(F)$ est fermé, alors F est s.c.s.*

Lemme 1.47. *[33] Si $F : X \rightrightarrows Y$ est une multi-application s.c.s à valeurs compactes, alors pour tout $x_0 \in X$, nous avons*

$$\limsup_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Définition 1.48. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique. On dit que $F : X \rightrightarrows Y$ est Σ-mesurable ou simplement mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) \in \Sigma.$$

Proposition 1.49. *[28] Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs convexes compactes. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) *F est mesurable.*

2) *Pour tout $y \in Y$, la fonction $t \mapsto d(y, F(t))$ est mesurable.*

Proposition 1.50. *Soient Y un espace de Banach de dimension finie et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs compactes.*

1) *Si F est semi-continue supérieurement, alors $\mathrm{co}(F)$ est semi-continue supérieurement.*

2) *Si F est compacte, alors $\overline{co}(F)$ est compact.*

3) *Si X est un espace mesurable, F est mesurable, alors $\mathrm{co}(F)$ est mesurable.*

Théorème 1.51 (Théorème de fermeture). *[28]*
Soit F une multi-application définie sur $[T_0, T] \times X$ à valeurs compactes convexes non vides dans un espace de Banach séparable E, telle que pour tout $t \in [T_0, T]$, $F(t, \cdot)$ est s.c.s et pour tout $x \in X$, $F(\cdot, x)$ est Lebesgue mesurable. Soient $(x_r), x$ définies de $[T_0, T]$ à valeurs dans X et $(y_r), y$ des applications intégrables définies sur $[T_0, T]$ à valeurs dans E.
Nous supposons les hypothèses suivantes :

(i) $\lim_{r\to\infty} x_r(t) = x(t)$, p.p. *sur* $[T_0, T]$;

(ii) (y_r) *converge faiblement vers* y;

(iii) $y_r(t) \in F(t, x_r(t))$, p.p. *sur* $[T_0, T]$.

Alors, $y(t) \in F(t, x(t))$, p.p. *sur* $[T_0, T]$.

Lemme 1.52. *[26] Soient Z un espace métrique compact et $\Gamma : [T_0, T] \rightrightarrows Z$ une multi-application Lebesgue-mesurable à valeurs non vides convexes compactes. Alors, la multi-application $\Sigma : [T_0, T] \rightrightarrows \mathcal{M}_+^1(Z)$ est mesurable à valeurs compactes et l'ensemble S_Σ est $\sigma(L^\infty_{C(Z)'}, L^1_{C(Z)})$ compact.*

1.7.3 Sélection

Définition 1.53. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : X \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \ \forall x \in X.$$

Théorème 1.54 (Théorème d'existence de sélections mesurables). *[28]*
Soient X un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées. Alors, F admet au moins une sélection mesurable.

1.8 Théorèmes du point fixe

Théorème 1.55 (Théorème du point fixe de Schauder). *[42]*
Soit X un espace de Banach, $S \subset X$ un sous ensemble non vide convexe fermé et

$f : S \to S$ une application continue. Si $f(S)$ est relativement compact, alors f admet un point fixe, i.e., il existe $x \in S$, tel que $f(x) = x$.

Théorème 1.56. *[Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan][17]*
Soient S un sous-ensemble convexe compact d'un espace de Banach X et $F : S \rightrightarrows S$ une multifonction convexe à valeurs compactes, semi-continue supérieurement sur S. Alors, F admet un point fixe, i.e., il existe $x \in S$, tel que $x \in F(x)$.

1.9 Opérateurs maximaux monotones dans un espace réel

Cette section est consacrée à la définition et les propriétés des opérateurs maximaux monotones. Les résultats suivants ont été pris des références [17, 22, 23, 57].

Définition 1.57. *Soit E un espace de dimension finie. On dit que l'opérateur $A(t) : E \rightrightarrows E$ $(t \in [T_0, T])$ est monotone, si pour tous $t \in [T_0, T]$, $\lambda > 0$ et pour tous $x_1,\ x_2 \in D(A(t))$, $y_1 \in A(t)x_1$ et $y_2 \in A(t)x_2$, nous avons*

$$\|x_1 - x_2\|_E \leq \|(x_1 - x_2) + \lambda(y_1 - y_2)\|_E,$$

où $D(A(t)) = \{x \in E : \ A(t)x \neq \emptyset\}$ est le domaine de $A(t)$.

Remarque. *Nos études dans cette thèse a été faite sur un espace réel et donc nous allons définir les opérateurs maximaux monotones dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.58. *L'opérateur $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ $(t \in [T_0, T])$ est monotone si et seulement si*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A(t)) : \ (A(t)x_1 - A(t)x_2)(x_1 - x_2) \geq 0,$$

Définition 1.59.
Si $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ $(t \in [T_0, T])$ est monotone et $\mathcal{R}(I + \lambda A(t)) = \mathbb{R}$, on dit que $A(t)$ est maximal monotone où $\mathcal{R}(I + \lambda A(t))$ est le rang de $(I + \lambda A(t))$.

Définition 1.60. *Soit $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ $(t \in [T_0, T])$ un opérateur et $\lambda > 0$, alors*

1) *l'opérateur* $J_\lambda(t) : D(J_\lambda(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *défini par*

$$J_\lambda(t) = (I + \lambda A(t))^{-1},$$

où $D(J_\lambda(t)) = \mathcal{R}(I + \lambda A(t))$, *est appelé la résolvante de* $A(t)$;

2) *l'opérateur* $A_\lambda(t) : D(A_\lambda(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *défini par*

$$A_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda(t)),$$

$D(A_\lambda(t)) = \mathcal{R}(I + \lambda A(t))$, *est appelé l'approximation de Yosida de* $A(t)$.

Proposition 1.61. *[22] Soit* $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ $(t \in [0, T])$ *un opérateur maximal monotone et* $\lambda > 0$. *Alors*

1) $A_\lambda(t)$ *est univoque, maximal monotone et Lipschitzienne de rapport* $\frac{1}{\lambda}$ *sur* $\mathbb{R}$;

2) $A_\lambda(t)x \in AJ_\lambda(t)x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

3) $\dfrac{1}{\lambda}|J_\lambda A(t)x - x| = |A_\lambda(t)x| \leq |A(t)x|_0$, *pour tout* $x \in D(A(t))$, *où* $|A(t)x|_0 = \inf\{|y|;\ y \in A(t)x\}$.

Définition 1.62. *un espace uniformément convexe est un espace vectoriel muni d'une norme dont les boules sont bien arrondies.*

Théorème 1.63. *[57] Soit* E *un espace de Banach qui a son dual topologique uniformément convexe. Alors le graphe de tout opérateur maximal monotone* $A : E \rightrightarrows E$ *est fortement-faiblement séquentiellement fermé.*

Comme exemple des opérateurs maximaux monotones on donne :

Sous-différentielle d'une fonction convexe.

Définition 1.64. *Soient* E *un espace vectoriel normé,* E' *son dual topologique,* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$. *On appelle sous différentiel de* f *au point* x_0, *qu'on note par* $\partial f(x_0)$, *l'ensemble défini par*

$$\partial f(x_0) = \{x' \in E' : \langle x', x - x_0\rangle \leq f(x) - f(x_0),\ \forall x \in E\}.$$

Définition 1.65 (Semi-continuité inférieure)**.**

On dit que $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *est semi-continue inférieurement (s.c.i) au point* $x_0 \in E$ *si et*

seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $h < f(x_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que $h < f(x)$ pour tout $x \in V$.
f est s.c.i sur E, si et seulement si elle est s.c.i en tout point de E.

Théorème 1.66.
Le sous différentiel d'une application $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ convexe propre s.c.i est maximal monotone.

Définition 1.67. *Soient C un sous ensemble de E et $x_0 \in E$. Le sous différentiel de la fonction indicatrice à C au point x_0 est appelé cône normal, qu'on note $N_C(x_0)$ et défini par*

$$N_C(x_0) = \begin{cases} \{x' \in E' : \langle x', \gamma - x_0 \rangle \leq 0, \ \forall \gamma \in C\} & \text{si } \ x_0 \in C; \\ \emptyset & \text{si } \ x_0 \notin C. \end{cases}$$

Proposition 1.68. *Le cône normal associé à un ensemble convexe fermé non vide C, au point $x_0 \in C$, est maximal monotone.*

CHAPITRE 2

Inclusion différentielle itérative avec un second membre à valeurs convexes et presque convexes

2.1 Introduction du chapitre

Ce chapitre comporte quatre sections. Dans la première, nous donnons le théorème d'existence du problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\dot{u}(t) \in F(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T];\\ u(T_0) = u_0,\end{cases}$$

où $F : [T_0, T]^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une multi-application à valeurs compactes, Lebesgue-mesurable sur $[T_0, T]$, semi-continue supérieurement sur $[T_0, T]^n$ et vérifiant

$$F(t, x) \subset \eta(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}, \text{ avec } \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n}.$$

Dans la deuxième section, nous montrons les propriétés topologiques (la compacité et la semi-continuité supérieure) de l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$, qui joue un rôle important dans la théorie du contrôle, de nombreux problèmes d'optimisation, de dynamique, de procédures de planification en économie mathématique et la théorie des jeux peuvent être énoncés et résolus en termes d'ensemble admissible.

Dans la troisième section, nous étudions le problème autonome

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})\begin{cases}\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T];\\ u(T_0) = u_0,\end{cases}$$

où F est à valeurs presque convexes, i.e., on remplace la convexité par une condition plus faible.

Dans la quatrième section, comme application des résultats précédents, nous considérons le problème de temps optimal

$$(\mathcal{PP})\begin{cases}\dot{u}(t) = f(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), \nu(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],\\ \nu(t) \in U(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \forall t \in [T_0, T];\\ u(T_0) = u_0,\end{cases}$$

contrôlé par les paramètres $U(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))$, où $U : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, sous l'hypothèse de presque convexité sur les ensembles

$$F\big(u(t), \cdots, u^{[n]}(t)\big) = \{f\big(u(t), \cdots, u^{[n]}(t), \nu(t)\big)\}_{\nu(t) \in U(u(t), \cdots, u^{[n]}(t))}.$$

Les solutions du problème de contrôle $(\mathcal{PP})$ sont des solutions du $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$, dans lequel les contrôles n'apparaissent pas explicitement, on dit que F est paramétré par des éléments de U. L'équivalence entre un système de contrôle et l'inclusion différentielle correspondante est l'idée centrale utilisée pour prouver l'existence d'une solution au problème du temps minimum pour $(\mathcal{PP})$.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication dans la revue de classe A : "Mathematica Slovaca" [38].

2.2 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle itérative avec un second membre convexe

Dans cette section, nous présentons un résultat d'existence du problème $(\mathcal{P})$ où F est une multi-application à valeurs compactes convexes.

Théorème 2.1. *Soit* $F : [T_0, T]^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *une multi-application à valeurs compactes convexes, Lebesgue-mesurable sur* $[T_0, T]$ *et semi-continue supérieurement sur* $[T_0, T]^n$. *Supposons qu'il existe une fonction positive* $\eta \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, *telle que* $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n}$ *et*

$$F(t, x) \subset \eta(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}, \ \forall (t, x) \in [T_0, T]^{n+1}.$$

Alors, le problème $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution absolument continue* u, *telle que* $\dot{u} \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

Démonstration.

a) Supposons que $F(t, x) \subset \eta(t)\overline{\mathbf{B}}$, pour tout $(t, x) \in [T_0, T]^{n+1}$ et montrons que le problème $(\mathcal{P})$ admet une solution.

Etape 1. Considérons les ensembles convexes suivants :

$$\mathbf{S} = \{f \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]) : |f(t)| \leq \eta(t), \text{ p.p. } t \in [T_0, T]\},$$

et

$$\mathbf{X} = \big\{u_f \ : [T_0, T] \to [T_0, T] \ : u_f = u_0 + \int_{T_0}^t f(s)ds, \ \forall t \in [T_0, T], f \in \mathbf{S}\big\}.$$

Montrons que $\mathbf{S}$ est un sous ensemble $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ compact de $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$. Soit (f_r) une suite de $\mathbf{S}$, alors elle est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T])$. On peut supposer par extraction d'une suite, que (f_r) converge $\sigma(L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ vers $f \in L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]) \subset L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$. Par conséquent, pour tout $y(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ nous avons

$$\lim_{r \to \infty} \langle f_r(\cdot), y(\cdot)\rangle = \langle f(\cdot), y(\cdot)\rangle.$$

Soit $z(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]) \subset L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, alors

$$\lim_{r \to \infty} \langle f_r(\cdot), z(\cdot)\rangle = \langle f(\cdot), z(\cdot)\rangle.$$

Ce qui montre que $(f_r(\cdot))_{r\in\mathbb{N}}$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ vers $f(\cdot)$ avec $|f(t)| \leq \eta(t)$ p.p sur $[T_0, T]$. Puisque $\mathbf{S}$ est convexe et fortement fermé dans $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, donc il est faiblement fermé dans $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

D'où, $\mathbf{S}$ est un sous ensemble $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ compact de $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

Montrons maintenant que $\mathbf{X}$ est compact dans $(\mathcal{C}([T_0, T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$. Pour tout $u_f \in \mathbf{X}$ et tout $t, \tau \in [T_0, T]$, nous avons

$$|u_f(t) - u_f(\tau)| = \Big| \int_{T_0}^t f(s)ds - \int_{T_0}^\tau f(s)ds\Big| \leq \int_\tau^t |f(s)|ds \leq \int_\tau^t \eta(s)ds.$$

Comme $\eta \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, on obtient l'équicontinuité de l'ensemble $\{u_f : u_f \in \mathbf{X}\}$.
D'autre part, pour tout $u_f \in \mathbf{X}$ et tout $t \in [T_0, T]$, nous avons

$$|u_f(t)| \leq |u_0| + \int_{T_0}^{t} |f(s)|ds \leq |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}.$$

Alors, l'ensemble $\{u_f(t) : u_f \in \mathbf{X}\}$ est relativement compact dans $[T_0, T]$. En appliquant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on conclut que $\mathbf{X}$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}([T_0, T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

Montrons que $\mathbf{X}$ est fermé dans $(\mathcal{C}([T_0, T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$. Fixons une suite (u_{f_r}) de $\mathbf{X}$ convergeant vers $u \in \mathcal{C}([T_0, T])$. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$u_{f_r}(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} f_r(s)ds, \ \forall t \in [T_0, T],$$

et $f_r \in \mathbf{S}$. Comme $\mathbf{S}$ est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$-compact, par extraction d'une sous suite on peut conclure que (f_r) converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ vers $f \in \mathbf{S}$. Supposons que pour tout $t \in [T_0, T]$

$$u_f = u_0 + \int_{T_0}^{t} f(s)ds,$$

on obtient pour tout $z(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T])$ et tout $t \in [T_0, T]$

$$\lim_{r \to \infty} \langle f_r(\cdot), z(\cdot) \rangle = \langle f(\cdot), z(\cdot) \rangle.$$

Donc

$$\lim_{r \to \infty} \int_{T_0}^{t} \langle f_r(s), z(s) \rangle ds = \int_{T_0}^{t} \langle f(s), z(s) \rangle ds.$$

En particulier, pour $z(\cdot) = \mathcal{X}_{[T_0,T]}(\cdot)e_j$, où $\mathcal{X}_{[T_0,T]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique de $[T_0, T]$ et (e_j) une base de $\mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{r \to \infty} \int_{T_0}^{t} \langle f_r(s), \mathcal{X}_{[T_0,T]}(s)e_j \rangle ds = \int_{T_0}^{t} \langle f(s), \mathcal{X}_{[T_0,T]}(s)e_j \rangle ds,$$

qui est équivalent à

$$\langle \lim_{r \to \infty} \int_{T_0}^{t} f_r(s)ds, e_j \rangle = \langle \int_{T_0}^{t} f(s)ds, e_j \rangle,$$

ce qui montre que

$$\lim_{r \to \infty} u_{f_r}(t) = \lim_{r \to \infty} \left(u_0 + \int_{T_0}^{t} f_r(s)ds \right) = u_0 + \int_{T_0}^{t} f(s)ds = u_f(t).$$

Par conséquent, la suite (u_{f_r}) converge vers $u = u_f$ dans $\mathcal{C}([T_0, T])$. D'où la compacité de $\mathbf{X}$ dans $(\mathcal{C}([T_0, T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

Etape 2. Remarquons que l'application $u : [T_0, T] \to [T_0, T]$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $u = u_f \in \mathbf{X}$ et $f(t) \in F(t, u_f(t), u_f^{[2]}(t), \cdots, u_f^{[n]}(t))$, p.p. $t \in [T_0, T]$.

Montrons que pour toute application Lebesgue-mesurable $v = (v^1, v^2, \cdots, v^n) : [T_0, T]^n \to [T_0, T]$, il existe une sélection Lebesgue-mesurable $s \in \mathbf{S}$, telle que $s(t) \in F(t, v(t))$ p.p.

En effet, soit $v = (v^1, v^2, \cdots, v^n) : [T_0, T]^n \to [T_0, T]$ une application mesurable, alors, d'après le Lemme 1.16, il existe une suite de fonctions étagées $(v_r) = (v_r^1, v_r^2, \cdots, v_r^n)$, telle que (v_r) converge ponctuellement vers v. Notons que la multi-application $F(\cdot, v(\cdot))$ est Lebesgue-mesurable. Soit (s_r) une sélection Lebesgue-mesurable de $F(\cdot, v_r(\cdot))$, telle que

$$s_r(t) \in F(t, v_r(t)) \subset \eta(t)\overline{\mathbf{B}}, \ \forall t \in [T_0, T].$$

Comme $(s_r) \subset \mathbf{S}$ et $\mathbf{S}$ est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$-compact, il existe une sous-suite, toujours noté (s'_r), qui converge faiblement vers $s \in \mathbf{S}$ (par le Théorème 1.36 d'Eberlein-Šmulien).

Nous pouvons invoquer ici le fait que $\mathbf{S}$ est un ensemble faiblement compact dans l'espace de Banach $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

D'après le Théorème 1.40 (théorème de Mazur) à (s'_r), il existe une suite (z_r) avec $z_r \in co\{s'_p : p \geq r\}$, telle que (z_r) converge presque partout vers s. Alors,

$$\begin{aligned} s(t) &\in \bigcap_{k \geq 0} \overline{\{z_r(t) : r \geq k\}}, \text{ p.p. } \ t \in [T_0, T] \\ &\subset \bigcap_{k \geq 0} \overline{co}\{s'_r(t) : r \geq k\}. \end{aligned}$$

L'estimation $s'_r(t) \in F(t, v_r(t))$ et le Lemme 1.6, nous donnent

$$\begin{aligned} s(t) &\in \bigcap_{k \geq 0} \overline{co}(\bigcup_{r \geq k} F(t, v_r(t))) \\ &= \overline{co}(\limsup_{r \to \infty} F(t, v_r(t))). \end{aligned} \tag{2.1}$$

De plus, F est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes et $(v_r(\cdot))$ converge ponctuellement vers $v(\cdot)$, alors d'après le Lemme 1.47, on a

$$\limsup_{r \to \infty} F(t, v_r(t)) = F(t, v(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T]. \tag{2.2}$$

Donc, par (2.1) et (2.2) on obtient

$$s(t) \in \overline{co}(F(t, v(t))) = F(t, v(t)).$$

Etape 3. Considérons la multi-application $\Psi : \mathbf{S} \rightrightarrows \mathbf{S}$ définie par

$$\Psi(f) = \{g \in \mathbf{S} \ : g(t) \in F(t, u_f^n(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T]\},$$

où $u_f^n = (u_f, u_f^{[2]}, \cdots, u_f^{[n]})$ et $u_f \in \mathbf{X}$.

Cette considérations nous conduisent à l'application du théorème de Kakutani-ky Fan sur $\Psi(\cdot)$. Montrons que $\Psi(f)$ est convexe. Soit $f \in \mathbf{S},\ g_1, g_2 \in \Psi(f)$ et $\lambda \in [0,1]$, par la définition de $\Psi(f)$ nous avons

$$g_1(t) \in F(t, u_f^n(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

et

$$g_2(t) \in F(t, u_f^n(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T].$$

Comme $F(t, u_f^n(t))$ est convexe, on aura

$$\lambda g_1(t) + (1-\lambda) g_2(t) \in F(t, u_f^n(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

donc

$$(\lambda g_1 + (1-\lambda) g_2)(t) \in \Psi(f),$$

d'où la convexité de $\Psi(f)$.

Montrons maintenant pour tout $f \in \mathbf{S},\ \Psi(f)$ est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$-compact. Soit $f \in \mathbf{S}$ et (g_r) une suite d'éléments de $\Psi(f_r)$, i.e.

$$g_r(t) \in F(t, u_{f_r}^n(t)), \text{p.p.}$$

convergeant $\sigma(L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]), L^\infty_{\mathbb{R}}([T_0, T]))$ vers g. Lorsque (u_{f_r}) converge vers u_f, alors $(u_{f_r}^n) = (u_{f_r}, u_{f_r}^{[2]}, \cdots, u_{f_r}^{[n]})$ converge vers $u_f^n = (u_f, u_f^{[2]}, \cdots, u_f^{[n]})$. Donc nous pouvons utiliser le Théorème 1.51 et nous obtenons

$$g(t) \in F(t, u_f^n(t)), \text{ p.p.}$$

Par conséquent, $g \in \Psi(f)$ et donc $\Psi(f)$ est faiblement fermé dans $\mathbf{S}$. Finalement la compacité faible de $\mathbf{S}$ implique celle de $\Psi(f)$.

Pour montrer la semi-continuité supérieure de Ψ, il suffit de montrer que le graphe de Ψ défini par

$$\mathrm{gph}(\Psi) = \{(f,g) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S} : g \in \Psi(f)\},$$

est séquentiellement faiblement fermé dans $\mathbf{S} \times \mathbf{S}$.

Soit (f_r, g_r) une suite d'éléments du graphe de Ψ, i.e., $(f_r, g_r) \subset \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ avec $g_r \in \Psi(f_r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$ et telle que (f_r, g_r) converge vers $(f,g) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}$. Par ce qui a précédé les suites $(u^n_{f_r})$ convergent ponctuellement vers u^n_f.

D'autre part, on peut supposer que (g_r) converge faiblement vers $g \in \mathbf{S}$. Comme

$$g_r(t) \in F(t, u^n_{f_r}(t)), \text{ p.p.}$$

en répétant les arguments donnés à l'étape 2, nous obtenons que

$$g(t) \in F(t, u^n_f(t)), \text{ p.p.}$$

Alors, le graphe de Ψ est faiblement fermé dans $\mathbf{S}\times\mathbf{S}$. D'où la semi-continuité supérieure faible de Ψ.

Par le Théorème 1.56 (Kakutani-Ky Fan), on obtient l'existence d'un point fixe $f \in \mathbf{S}$, telle que $f \in \Psi(f)$ et donc

$$f(t) \in F(t, u^n_f(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T].$$

Pour tout $t \in [T_0, T]$, nous avons

$$u_f(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} f(s)ds, \text{ p.p.}$$

Alors

$$\dot{u}_f(t) = f(t) \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T]).$$

Donc

$$\dot{u}_f(t) \in F(t, u^n_f(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

avec $u_f(T_0) = u_0$, i.e., l'application u_f est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P})$.

b) Supposons que $F(t,x) \subset \eta(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}$, pour tout $(t,x) \in [T_0, T]^{n+1}$.

Si $u : [T_0, T] \to [T_0, T]$ est une solution absolument continue du $(\mathcal{P})$, alors, il existe une application mesurable $f : [T_0, T] \to \mathbb{R}$, telle que

$$f(t) \in F(t, u_f(t), u^{[2]}_f(t), \cdots, u^{[n]}_f(t)), \text{ p.p. } t \in [T_0, T],$$

et

$$u(t) = u_f(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} f(s)ds, \ \forall t \in [T_0, T].$$

Par conséquent, pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u_0| + \int_{T_0}^{t} \eta(s)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} |u^{[i]}(s)|\Big)ds \\ &\leq |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + n\|u\|_{\mathcal{C}}\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{|u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1 - n\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}} = \rho. \tag{2.3}$$

Par la relation (2.3) et la définition de $\|u\|_{\mathcal{C}}$, on aura pour tout $t \in [T_0, T]$

$$|u^{[i]}(t)| \leq \rho, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.4}$$

Considérons l'application $\varphi_\rho : [T_0, T] \to [T_0, T]$ donnée par

$$\varphi_\rho(z) = \begin{cases} z & \text{if } \ |z| \leq \rho; \\ \frac{\rho z}{|z|} & \text{if } \ |z| > \rho, \end{cases}$$

et la multi-application $F_0 : [T_0, T]^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$F_0(t, x) = F(t, \varphi_\rho(x_1), \varphi_\rho(x_2), \cdots, \varphi_\rho(x_n)),$$

alors, F_0 hérite toutes les propriétés de F. Montrons que pour tout $t \in [T_0, T]$ fixé, $F_0(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement sur $[T_0, T]^n$.

Considérons l'application continue $f_0 : [T_0, T]^n \to [T_0, T]^n$ définie par :

$$f_0(x) = (\varphi_\rho(x_1), \varphi_\rho(x_2), \cdots, \varphi_\rho(x_n)).$$

Soit V un ouvert de $[T_0, T]^n$, on a

$$F_0^{-1}(V) = (F \circ f_0)^{-1}(V) = f_0^{-1}(F^{-1}(V)),$$

la semi-continuité supérieure de F sur $[T_0, T]^n$ et la continuité de f_0 nous donnent $F_0^{-1}(V)$ est ouvert sur $[T_0, T]^n$. Donc, F_0 est semi-continue supérieurement sur $[T_0, T]^n$. D'autre par, pour tout $(t, x) \in [T_0, T]^{n+1}$

$$\begin{aligned} F_0(t, x) &= F(t, \varphi_\rho(x_1), \varphi_\rho(x_2), \cdots, \varphi_\rho(x_n)) \\ &\subset \eta(t)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} |\varphi_\rho(x_i)|\Big)\overline{\mathbf{B}} \\ &\subset \eta(t)(1 + n\rho)\overline{\mathbf{B}} = \beta(t)\overline{\mathbf{B}}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $\beta(t) = \eta(t)(1 + n\rho)$ et donc $\beta \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$.

Par la partie a), le problème

$$(\mathcal{P}_0)\begin{cases} -\dot{u}(t) \in F_0(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution absolument continue.

Montrons maintenant que u est une solution du problème $(\mathcal{P}_0)$ si et seulement si u est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

• Si u est une solution du problème $(\mathcal{P}_0)$, alors il existe une application mesurable $\tilde{f}(t) \in F_0(t, u(t), \cdots, u^{[n]}(t))$, telle que

$$u(t) = u_0 + \int_{T_0}^{t} \tilde{f}(s)ds,$$

et

$$|\tilde{f}(t)| \leq \beta(t) = \eta(t)(1 + n\rho).$$

Alors

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |u_0| + \int_{T_0}^{t} \eta(s)(1 + n\rho)ds \\ &= |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}(1 + n\rho) \\ &= |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\Big(1 + n\frac{|u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1 - n\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}\Big) \\ &= \frac{|u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1 - n\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}} = \rho. \end{aligned}$$

Donc, $|u^{[i]}(t)| \leq \rho$ $(i = 1, \cdots, n)$, i.e.,

$$\varphi_\rho(u^{[i]}(t)) = u^{[i]}(t),$$

Par conséquent

$$F_0(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)) = F(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)).$$

D'où, u est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

• Supposons que u est une solution du problème $(\mathcal{P})$. Par la relation (2.4), nous avons

$$F(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)) = F_0(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)).$$

Donc, u est une solution du problème $(\mathcal{P}_0)$. □

Exemple 2.2. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{P}_1)\begin{cases}\dot{u}(t) \in \frac{1}{8}\Big((tu(t))^2 + (u^{[2]}(t))^2\Big) + [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}], \text{ p.p. } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}];\\ u(0) = 0.\end{cases}$$

Soit $F(t, x_1, x_2) = \frac{1}{8}\big((tx_1)^2 + x_2^2\big) + [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ *une multi-application à valeurs compactes convexes, Lebesgue-mesurable sur* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *et semi-continue supérieurement sur* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Pour tout $y \in F(t, x_1, x_2)$, *nous avons*

$$|y| \leq \frac{1}{8}\Big(|t^2||x_1^2| + |x_2^2|\Big) + \frac{1}{4} = \frac{t^2}{32} + \frac{9}{32} = \eta(t).$$

Donc

$$|y| \leq \eta(t)(1 + |x_1| + |x_2|).$$

D'où

$$F(t, x_1, x_2) \subset \eta(t)(1 + |x_1| + |x_2|)\overline{\mathbf{B}}, \text{ avec } \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{2}.$$

Les hypothèses du Théorème 2.1 sont satisfaites, alors le problème $(\mathcal{P}_1)$ *admet une solution absolument continue* u, *telle que* $\dot{u} \in L^1_{\mathbb{R}}([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$.

2.3 Propriétés topologiques de l'ensemble admissible

Définition 2.3 (L'ensemble admissible)**.** *[49]*

L'ensemble admissible d'un problème au temps $\bar{t} \in [T_0, T]$ *est défini par*

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}) = \{u(\bar{t}) : u(\cdot) \in \Upsilon_{\bar{t}}(u_0)\},$$

où $\Upsilon_{\bar{t}}(u_0)$ *est l'ensemble des trajectoires du problème considéré sur l'intervalle* $[T_0, \bar{t}]$.

On définit $\mathcal{Z} : \mathfrak{A}_{u_0} \to [T_0, T]$ *l'application de temps minimal par*

$$\mathcal{Z}(\gamma) = \inf\{t \in [T_0, T] \ : \gamma \in \mathfrak{A}_{u_0}(t)\}.$$

Théorème 2.4. *Soit* $F : [T_0, T]^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *une multi-application à valeurs compactes convexes, Lebesgue-mesurable sur* $[T_0, T]$ *et semi-continue supérieurement sur* $[T_0, T]^n$. *Supposons qu'il existe une fonction positive* $\eta \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, T])$, *telle que* $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n}$ *et*

$$F(t, x) \subset \eta(t)(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}, \ \forall (t, x) \in [T_0, T]^{n+1}.$$

Alors,

1) *pour $\bar{t} \in [T_0, T]$ fixé, l'ensemble admissible $\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$ est compact ;*

2) *la multi-application $\bar{t} \mapsto \mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration.

1) Pour montrer que l'ensemble admissible $\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$ est compact il suffit de prouvé que l'ensemble des trajectoires $\Upsilon_{\bar{t}}(u_0)$ est compact pour tout $\bar{t} \in [T_0, T]$.

D'après le Théorème 2.1, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution sur $[T_0, T]$, donc pour tout $\bar{t} \in [T_0, T]$, l'ensemble $\Upsilon_{\bar{t}}(u_0) \neq \emptyset$.

Soit $(u_r)_r$ une suite des éléments de $\Upsilon_{\bar{t}}(u_0)$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, u_r est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P})$, vérifie

$$|\dot{u}_r(t)| \leq \beta(t), \ \text{p.p. } t \in [T_0, \bar{t}], \tag{2.6}$$

et

$$|u_r(t)| \leq |u_0| + \int_{T_0}^{t} |\dot{u}_r(s)| ds = |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}(1 + n\rho) = \rho. \tag{2.7}$$

Alors, $(u_r(t))_r$ est relativement compact dans $[T_0, T]$. De plus, pour tout $t, \tau \in [T_0, \bar{t}]$

$$|u_r(t) - u_r(\tau)| \leq \int_{\tau}^{t} |\dot{u}_r(s)| ds \leq \int_{\tau}^{t} \beta(s) ds,$$

comme $\beta \in L^1_{\mathbb{R}}([T_0, \bar{t}])$, on obtient l'équicontinuité de $(u_r(\cdot))_r$. D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, $(u_r(\cdot))_r$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([T_0, \bar{t}])$, alors le Théorème 1.39 donne l'existence d'une sous-suite de $(u_r(\cdot))_r$ converge uniformément vers une application $u(\cdot)$ sur $[T_0, \bar{t}]$ et $(\dot{u}_r(\cdot))_r$ converge dans $L^1_{\mathbb{R}}([T_0, \bar{t}])$ vers $\dot{u}(\cdot)$, telle que

$$u(t) = \lim_{r \to \infty} u_r(t) = u_0 + \lim_{r \to \infty} \int_{T_0}^{t} |\dot{u}_r(s)| ds = u_0 + \int_{T_0}^{t} |\dot{u}(s)| ds.$$

Pour le reste de la preuve on peut suivre la démonstration du Théorème 2.1 pour obtenir

$$\dot{u}(t) \in F(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [T_0, \bar{t}].$$

2) Nous montrons maintenant que $\mathfrak{A}_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement.

Soit $\bar{t} \in [T_0, T]$ et V un voisinage ouvert de $\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$, il existe V_0 un voisinage ouvert de T_0, où

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}) + V_0 \subseteq V.$$

D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, il existe $\delta > 0$ tel que si $|\bar{t} - \bar{t}'| < \delta$, alors $u(\bar{t}') - u(\bar{t}) \in V_0$ pour tout $u(\cdot) \in \Upsilon(u_0)$.

Comme $u(\bar{t}) \in \mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$, nous avons

$$u(\bar{t}') \in u(\bar{t}) + V_0 \subset V, \ \forall u(\cdot) \in \Upsilon(u_0),$$

alors

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}') \subset V, \ \forall \bar{t}' \in \mathbf{B}(\bar{t}, \delta),$$

par conséquent, $\mathfrak{A}_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement. □

2.4 Inclusion différentielle itérative avec un second membre presque convexe

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ et la relation entre l'ensemble admissible des problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ et

$$(\mathcal{P}_{\text{co}}) \begin{cases} \dot{u}(\bar{t}) \in \text{co}(F(u(\bar{t}), u^{[2]}(\bar{t}), \cdots, u^{[n]}(\bar{t}))), \ \text{p.p.}\ \bar{t} \in [T_0, T]; \\ u(T_0) = u_0. \end{cases}$$

où $F : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ est une multi-application à valeurs compactes presque convexes.

Théorème 2.5. *Soit* $F : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ *une multi-application à valeurs compactes presque convexes, telle que :*

(i) *la multi-application* $\text{co}(F(\cdot))$ *est semi-continue supérieurement sur* $[T_0, T]^n$*;*

(ii) *il existe une constante positive* η*, telle que* $\eta < \frac{1}{n(T-T_0)}$ *et*

$$\text{co}(F(x)) \subset \eta(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$ *:*

1) *le problème* $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ *admet une solution absolument continue ;*

2) *pour tout* $\bar{t} \in [T_0, T]$*, l'ensemble admissible de* $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ *à* $\bar{t}$*,* $\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$*, coïncide avec* $\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t})$ *l'ensemble admissible en* $\bar{t}$ *du problème* $(\mathcal{P}_{\text{co}})$*.*

Pour la démonstration de notre théorème, nous avons besoin de la proposition suivante où on étudie la relation entre la solution du problème relaxé et non relaxé.

Proposition 2.6. *Sous les hypothèses du Théorème 2.5, soit x une solution absolument continue du $(\mathcal{P}_{\text{co}})$. Supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définies sur $[T_0, T]$ satisfaisant $0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$ et*

$(\mathcal{H})$ *pour tout $t \in [T_0, T]$, nous avons*

$$\lambda_1(t)\dot{x}(t) \in F(x(t), x^{[2]}(t), \cdots, x^{[n]}(t)),$$

et

$$\lambda_2(t)\dot{x}(t) \in F(x(t), x^{[2]}(t), \cdots, x^{[n]}(t)).$$

Alors, il existe une application $t(\cdot)$ non décroissante, absolument continue définie de l'intervalle $[T_0, T]$ dans lui-même, telle que l'application $\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$. De plus, $\tilde{x}(T_0) = x(T_0)$ et $\tilde{x}(T) = x(T)$.

Démonstration.

Etape 1. Considérons l'intervalle $[a, b] \subset [T_0, T]$, supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définies sur $[a, b]$, telles que

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t), \ \forall t \in [a, b],$$

vérifiant l'hypothèse $(\mathcal{H})$, et que la fonction $\lambda_1(t) > 0$ p.p. Montrons qu'il existe deux sous ensembles mesurables de $[a, b]$, admettent $\mathcal{X}_1(\cdot)$ et $\mathcal{X}_2(\cdot)$ comme fonctions caractéristiques, où $\mathcal{X}_1(\cdot) + \mathcal{X}_2(\cdot) = \mathcal{X}_{[a,b]}(\cdot)$, et il existe une fonction absolument continue $s(\cdot)$ définie de $[a, b]$ dans lui même, avec $s(a) - s(b) = a - b$ et

$$\dot{s}(\tau) = \mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}.$$

En effet. On pose

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \ \lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 1, \\ \frac{\lambda_2(\tau)-1}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

comme $-1 \leq -\lambda_1(\tau)$ donc $0 \leq \lambda_2(\tau) - 1 \leq \lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)$, d'où

$$0 \leq \frac{\lambda_2(\tau) - 1}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)} = \psi(\tau) \leq 1.$$

De plus l'égalité suivante est toujours vérifiée

$$1 = \psi(\tau) + (1 - \psi(\tau)) = \psi(\tau)\lambda_1(\tau) + (1 - \psi(\tau))\lambda_2(\tau).$$

Car : si $\lambda_1(\tau) = \lambda_2(\tau) = 1$

$$\psi(\tau)\lambda_1(\tau) + (1 - \psi(\tau))\lambda_2(\tau) = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2}) = 1.$$

Sinon,

$$\psi(\tau)\lambda_1(\tau) + (1 - \psi(\tau))\lambda_2(\tau) = \frac{\lambda_2(\tau) - 1}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)}\lambda_1(\tau) + (1 - \frac{\lambda_2(\tau) - 1}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)})\lambda_2(\tau)$$

$$= \frac{\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)} + \frac{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau)}{\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)} = 1.$$

Particulièrement nous avons

$$\int_a^b 1 d\tau = \int_a^b (\psi(\tau) + (1 - \psi(\tau)))\, d\tau = \int_a^b \left(\frac{\psi(\tau)\lambda_1(\tau)}{\lambda_1(\tau)} + \frac{(1 - \psi(\tau))\lambda_2(\tau)}{\lambda_2(\tau)} \right) d\tau.$$

On veut appliquer le théorème de Lyapunov (Théorème 1.14) pour garantir l'existence de deux sous ensembles mesurables de fonctions caractéristiques $\mathcal{X}_1(\cdot)$ et $\mathcal{X}_2(\cdot)$, telles que

$$\mathcal{X}_1(\cdot) + \mathcal{X}_2(\cdot) = \mathcal{X}_{[a,b]}(\cdot),$$

et

$$\int_a^b 1 d\tau = \left(\mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)} \right) d\tau.$$

Mais la fonction $\frac{1}{\lambda_1(\tau)}$ n'est pas nécessairement intégrable, donc on considère la suite des ensembles disjoints définies par

$$E^n = \left\{ \tau \in [a, b] : n < \frac{1}{\lambda_1(\tau)} < n + 1 \right\},$$

on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n = [a, b].$$

En appliquant le théorème de Lyapunov (Théorème 1.14) à chaque E^n, on déduit l'existence de deux suites des sous ensembles mesurables (E_1^n), (E_2^n) ayant des fonctions caractéristiques $(\mathcal{X}_1^n(\cdot))$ et $(\mathcal{X}_2^n(\cdot))$, telles que

$$\int_{E^n} 1 d\tau = \int_{E^n} \left(\mathcal{X}_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)} \right) d\tau.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{n=0}^{k} \left(\mathcal{X}_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)} \right),$$

est positive et la suite des fonctions $(\varphi_k(\cdot))$ est croissante simplement convergente vers la fonction

$$\varphi(\tau) = \mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}.$$

D'autre part, on considère la suite des ensembles (υ_k) où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\upsilon^k = \bigcup_{n=0}^{k} E^n$, il est clair que cette suite est strictement croissante et converge vers l'intervalle $[a, b]$, donc

$$\int_a^b 1d\tau = \int_{\bigcup_k \upsilon^k} 1d\tau = \int_{\bigcup_n E^n} 1d\tau,$$

et

$$\int_{\bigcup_k \upsilon^k} 1d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\upsilon^k} 1d\tau,$$

Comme les ensembles (E^n), sont disjoints on obtient

$$\int_a^b 1d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\upsilon^k} 1d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^k E^n} 1d\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} 1d\tau.$$

Alors,

$$\int_a^b 1d\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \left(\mathcal{X}_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\right) d\tau$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \sum_{n=0}^{k} \left(\mathcal{X}_1^n(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^n(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\right) d\tau = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{E^n} \varphi_k(\tau)d\tau$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_{n=0}^k E^n} \varphi_k(\tau)d\tau = \lim_{k\to\infty} \int_{\bigcup_n E^n} \varphi_k(\tau)d\tau = \int_{\bigcup_n E^n} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\tau)d\tau$$

$$= \int_{\bigcup_n E^n} \varphi(\tau)d\tau = \int_a^b \varphi(\tau)d\tau.$$

On conclue que

$$\int_a^b 1d\tau = \int_a^b \left(\mathcal{X}_1(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\right) d\tau.$$

On considère

$$\dot{s}(\tau) = \varphi(\tau),$$

alors

$$\int_a^b \dot{s}(\tau)d\tau = b - a.$$

Étape 2.

1) Considérons l'ensemble

$$C = \{\tau \in [T_0, T] : 0 \in F(x(\tau), x^{[2]}(\tau), \cdots, x^{[n]}(\tau))\}.$$

Soit (τ_r) une suite dans C convergeant vers τ.

Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $0 \in F(x(\tau_r), \cdots, x^{[n]}(\tau_r))$. Comme $x^{[i]}(\cdot)$ $(i = 1, \cdots, n)$ est continue et F est semi-continue supérieurement à valeurs compactes, on en déduit que $0 \in F(x(\tau), x^{[2]}(\tau), \cdots, x^{[n]}(\tau))$, i.e., C est fermé.

2) Supposons que C est un ensemble vide. Dans ce cas $\lambda_1(\tau) > 0$, donc on peut appliquer l'étape 1 sur l'intervalle $[T_0, T]$. Soit $s(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega)d\omega$, s est croissante de plus $s(T_0) = T_0$ et $s(T) = T$. Soit $t : [T_0, T] \to [T_0, T]$ son inverse, alors $t(T_0) = T_0$, $t(T) = T$ et nous avons $\frac{d}{d\tau}s(t(\tau)) = \dot{s}(t(\tau))\dot{t}(\tau) = 1$. Alors,

$$\dot{t}(\tau) = \frac{1}{\dot{s}(t(\tau))} = \big(\lambda_1(t(\tau))\mathcal{X}_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\mathcal{X}_2(t(\tau))\big).$$

Considérons l'application $\tilde{x}$: $[T_0, T] \to [T_0, T]$ définie par $\tilde{x}^{[i]}(\tau) = x^{[i]}(t(\tau))$, $i = 1, 2, \cdots, n$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &= \dot{t}(\tau)\dot{x}(t(\tau)) = \frac{1}{\dot{s}(t(\tau))}\dot{x}(t(\tau)) \\ &= \big(\lambda_1(t(\tau))\mathcal{X}_1(t(\tau)) + \lambda_2(t(\tau))\mathcal{X}_2(t(\tau))\big)\dot{x}(t(\tau)).\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $(\mathcal{H})$, nous obtenons

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) \in F\big(x(t(\tau)), x^{[2]}(t(\tau)), \cdots, x^{[n]}(t(\tau))\big) = F\big(\tilde{x}(\tau), \tilde{x}^{[2]}(\tau), \cdots, \tilde{x}^{[n]}(\tau)\big).$$

3) Maintenant on suppose C non vide. Soit $c = \sup\{\tau : \tau \in C\}$, il existe une suite (τ_r) dans C, telle que $\lim_{r\to\infty} \tau_r = c$. Comme C est fermé, nous obtenons $c \in C$.

Le complémentaire de C est relativement ouvert à $[T_0, T]$, donc il constitue d'une famille d'intervalles ouverts au plus dénombrables de la forme $]a_i, b_i[$, avec la possibilité que deux intervalles sont de la forme $[a_{i_i}, b_{i_i}[$ où $a_{i_i} = T_0$ et $]a_{i_f}, b_{i_f}]$ où $a_{i_f} = c$. Pour tout i, appliquons l'étape 1 sur chaque intervalle $]a_i, b_i[$, donc il existe deux sous ensembles A_1^i et A_2^i de $]a_i, b_i[$ leurs fonctions caractéristiques sont $\mathcal{X}_1^i(\cdot), \mathcal{X}_2^i(\cdot)$ respectivement, telles que $\mathcal{X}_1^i(\cdot) + \mathcal{X}_2^i(\cdot) = \mathcal{X}_{]a_i,b_i[}(\cdot)$. Posons

$$\dot{s}(\tau) = \mathcal{X}_1^i(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^i(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)},$$

on obtient

$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega)d\omega = (b_i - a_i).$$

4) Pour tout $\tau \in [T_0, c]$, on considère

$$\dot{s}(\tau) = \mathcal{X}_c(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)} + \sum_i \left(\mathcal{X}_1^i(\tau)\frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathcal{X}_2^i(\tau)\frac{1}{\lambda_2(\tau)}\right),$$

où la somme est prise pour tous les intervalles inclus dans $[T_0, c]$. Donc

$$\int_{T_0}^{c} \dot{s}(\omega)d\omega = k \leq c - T_0,$$

puisque $\lambda_2(\tau) \geq 1$ et $\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega)d\omega = (b_i - a_i)$.

Posons $s(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega)d\omega$, on obtient que $s(\cdot)$ est une application inversible de $[T_0, c]$ à valeurs dans $[T_0, k]$.

5) On définit $t\ : [T_0, k] \to [T_0, c]$ comme la fonction inverse de $s(\cdot)$, et on la prolonge de la manière suivante :

$$\tilde{t}(\tau) = \begin{cases} t(\tau) & \text{si } \tau \in [T_0, k]; \\ c & \text{si } \tau \in]k, c]. \end{cases}$$

Montrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ sur l'intervalle $[T_0, c]$ et satisfait $\tilde{x}(c) = x(c)$.

Observant que pour $\tau \in [T_0, k]$, $\tilde{t}(\tau) = t(\tau)$ est inversible et

$$\dot{t}(\tau) = \mathcal{X}_c(t(\tau))\lambda_2(t(\tau)) + \sum_i \left(\mathcal{X}_1^i(t(\tau))\lambda_1(t(\tau)) + \mathcal{X}_2^i(t(\tau))\lambda_2(t(\tau))\right).$$

Comme $\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = \dot{t}(\tau)\dot{x}(t(\tau))$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &= \dot{x}(t(\tau))\Big(\mathcal{X}_c(t(\tau))\lambda_2(t(\tau)) + \sum_i \left(\mathcal{X}_1^i(t(\tau))\lambda_1(t(\tau)) + \mathcal{X}_2^i(t(\tau))\lambda_2(t(\tau))\right)\Big) \\ &\in F\big(x(t(\tau)), x^{[2]}(t(\tau)), \cdots, x^{[n]}(t(\tau))\big) \\ &= F\big(\tilde{x}(\tau), \tilde{x}^{[2]}(\tau), \cdots, \tilde{x}^{[n]}(\tau)\big). \end{aligned}$$

Pour $\tau \in]k, c]$, $\tilde{t}(\tau) = c$ et $\dot{\tilde{t}}(\tau) = 0$, alors

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{t}(\tau)) = x(c),\ \forall \tau \in]k, c],$$

donc, $\tilde{x}(\cdot)$ est constant sur $]k, c]$, et nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 &\in F(x(c), x^{[2]}(c), \cdots, x^{[n]}(c)) \\ &= F(\tilde{x}(\tau), \tilde{x}^{[2]}(\tau), \cdots, \tilde{x}^{[n]}(\tau)),\ \forall \tau \in]k, c]. \end{aligned}$$

6) Il reste à définir la solution sur $]c, T]$. Nous avons $\lambda_1(\tau) > 0$, on peut alors répéter les arguments de l'étape 1 et la partie **2)**, pour obtenir une solution du problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ sur $]c, T]$. $\square$

Présentons maintenant la démonstration du Théorème 2.5.

Démonstration.

1) Par le Théorème 2.1, le problème $(\mathcal{P}_{co})$ admet une solution absolument continue. Montrons qu'il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définies sur $[T_0, T]$ et satisfaisant $0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$, telles que pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\lambda_1(t)\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)),$$

et

$$\lambda_2(t)\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)).$$

Comme F est à valeurs presque convexes, pour tout $t \in [T_0, T]$, il existe deux ensembles non vides $\Lambda_1(t)$ et $\Lambda_2(t)$, telles que

$$\Lambda_1(t) = \{\lambda_1 \in [0, 1] \ : \ \lambda_1\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\},$$

et

$$\Lambda_2(t) = \{\lambda_2 \in [1, \infty[: \lambda_2\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\}.$$

Considérons le graphe de $\Lambda_1(\cdot)$ défini par

$$\mathrm{gph}(\Lambda_1) = \{(t, \lambda_1) \in [T_0, T] \times [0, 1] : \lambda_1\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\},$$

alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{gph}(\Lambda_1) &= \{(t, \lambda_1) \in [T_0, T] \times [0, 1] : d\big(\lambda_1\dot{u}(t), F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\big) = 0\} \\ &= \psi^{-1}(\{0\}) \cap ([T_0, T] \times [0, 1]),\end{aligned}$$

d'après le Théorème 1.49, l'application $\psi : (t, \lambda_1) \mapsto d(\lambda_1\dot{u}(t), F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)))$ est mesurable. Alors, $\psi^{-1}(\{0\})$ est mesurable. Le graphe de Λ_1 est l'intersection de l'ensemble mesurable $[T_0, T] \times [0, 1]$ et l'application $\psi^{-1}(\{0\})$, donc il est mesurable, par conséquent la multi-application $\Lambda_1(\cdot)$ est mesurable borné. Nous concluons qu'il existe $\lambda_1(\cdot)$ une sélection mesurable de $\Lambda_1(\cdot)$ satisfaisant $0 \leq \lambda_1(t) \leq 1$ et

$$\lambda_1(t)\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \forall t \in [T_0, T].$$

De la même façon, on prouve l'existence de $\lambda_2(\cdot)$ sélection mesurable de $\Lambda_2(\cdot)$.
Nous avons aussi, le graphe de $\Lambda_2(\cdot)$ défini par

$$\mathrm{gph}(\Lambda_2) = \{(t, \lambda_2) \in [T_0, T] \times [1, \infty[: \lambda_2\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\},$$

alors,

$$\mathrm{gph}(\Lambda_2) = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap ([T_0, T] \times [0, +\infty[),$$

est mesurable, implique que $\Lambda_2(\cdot)$ est mesurable.
De plus, $F(\cdot)$ est à valeurs bornées, alors $\Lambda_2(\cdot)$ est aussi borné, donc il admet une sélection mesurable $\lambda_2(\cdot)$ vérifiant $\lambda_2(t) \geq 1$ et

$$\lambda_2(t)\dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \forall t \in [T_0, T].$$

En utilisant la Proposition 2.6, on conclut que le problème $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ admet une solution absolument continue $\tilde{u}(\cdot)$, telle que $u(T) = \tilde{u}(T)$.
2) Toute solution $\tilde{u}(\cdot)$ de $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ satisfait l'inclusion suivante

$$\dot{\tilde{u}}(\bar{t}) \in F(\tilde{u}(\bar{t}), \tilde{u}^{[2]}(\bar{t}), \cdots, \tilde{u}^{[n]}(\bar{t})) \subset \mathrm{co}\big(F(\tilde{u}(\bar{t}), \tilde{u}^{[2]}(\bar{t}), \cdots, \tilde{u}^{[n]}(\bar{t}))\big), \text{ p.p. } \bar{t} \in [T_0, T].$$

Alors, toute solution $\tilde{u}(\cdot)$ du $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ est une solution du $(\mathcal{P}_{\mathrm{co}})$, donc pour tout $\bar{t} \in [T_0, T]$ et $\tilde{u}(\bar{t}) \in \mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$, on a $\tilde{u}(\bar{t}) \in \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t})$. D'où,

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}) \subset \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t}), \ \forall \bar{t} \in [T_0, T]. \tag{2.8}$$

Inversement, soit $u(\bar{t}) \in \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t})$, d'après la définition de l'ensemble admissible, $u(\cdot)$ est une solution absolument continue du $(\mathcal{P}_{\mathrm{co}})$ sur $[T_0, \bar{t}]$. Par la Proposition 2.6, il existe une solution $\tilde{u}(\cdot)$ du $(\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ coïncide avec $u(\cdot)$ sur les bornes de tous les intervalles compacts, alors sur $[T_0, \bar{t}]$, on a $\tilde{u}(\bar{t}) = u(\bar{t})$, donc $u(\bar{t}) \in \mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t})$ et par conséquent

$$\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t}) \subset \mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}), \ \forall \bar{t} \in [T_0, T]. \tag{2.9}$$

Par les relations (2.8) et (2.9), on obtient

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\bar{t}) = \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\bar{t}), \ \forall \bar{t} \in [T_0, T].$$

□

Exemple 2.7. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{P}_2) \begin{cases} \dot{u}(t) \in F(u^{[2]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [-1, 1]; \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

avec $F : [-1,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *est une multi-application à valeur compactes presque convexes, définie par* $F(x) = \frac{1}{3}G(x)$ *où*

$$G(x) = \begin{cases} \{-\frac{x}{|x|}\} & \text{si } \ x \in [-1,1] \setminus 0; \\ \mathrm{Fr}(\mathbf{B}(0,1)) & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Pour montrer que F *est semi continue supérieurement sur* $[-1,1]$, *il suffit de prouvé que* G *est semi continue supérieurement sur* $[-1,1]$.
G *est semi continue supérieurement sur* $[-1,1] \Leftrightarrow$ *pour tout* V *un ouvert de* $\mathbb{R}$, $G_+^{-1}(V)$ *est un ouvert de* $[-1,1]$.

$$\begin{aligned} G_+^{-1}(V) &= \{x \in [-1,1] : G(x) \subset V\} \\ &= \{x \in]0,1] : -1 \in V\} \cup \{x \in [-1,0[: 1 \in V\} \cup \{x = 0 : \mathrm{Fr}(\mathbf{B}(0,1)) \subset V\}. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Fr}(\mathbf{B}(0,1)) \subset V$ *nous avons* $G_+^{-1}(V) = [-1,1]$ *est un ouvert de* $[-1,1]$.
Si $-1 \in V$ *et* $1 \notin V$ *nous avons* $G_+^{-1}(V) =]0,1]$ *est un ouvert de* $[-1,1]$.
Si $-1 \notin V$ *et* $1 \in V$ *nous avons* $G_+^{-1}(V) = [-1,0[$ *est un ouvert de* $[-1,1]$.
Si $-1 \notin V$ *et* $1 \notin V$ *nous avons* $G_+^{-1}(V) = \emptyset$ *est un ouvert de* $[-1,1]$.
Donc, la semi-continuité supérieure de F *nous donne* $\mathrm{co}(F)$ *est semi continue supérieurement sur* $[-1,1]$.
Pour tout $y \in F(x)$, *nous avons*

$$|y| \leq \frac{1}{3}|G(x)| \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}(1+|x|).$$

Alors,

$$F(x) \subset \eta(1+|x|)\overline{\mathbf{B}}, \text{ avec } \eta = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$\mathrm{co}(F(x)) \subset \eta(1+|x|)\mathrm{co}(\overline{\mathbf{B}}) = \eta(1+|x|)\overline{\mathbf{B}}.$$

Les hypothèses du Théorème 2.5 sont satisfaites, alors

1) *le problème* $(\mathcal{P}_2)$ *admet une solution absolument continue ;*

2) *pour tout* $t \in [-1,1]$, *l'ensemble admissible de* $(\mathcal{P}_2)$ *à* t, $\mathfrak{A}_0(t)$, *coïncide avec* $\mathfrak{A}_0^{co}(t)$ *l'ensemble admissible à* t *du problème*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in \mathrm{co}\big(F(u^{[2]}(t))\big), \text{ p.p. } t \in [-1,1]; \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

2.5 Application au problème de temps optimal

Soient $U : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, telle que $0 \in U(x)$ pour tout $x \in [T_0, T]^n$ et $f : [T_0, T]^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application satisfaisant les hypothèses suivantes :

($\mathcal{H}_1^f$) pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y)$ est continue sur $[T_0, T]^n$;

($\mathcal{H}_2^f$) il existe une constante positive η, telle que $\eta < \frac{1}{n(T-T_0)}$ et

$$|f(x,y)| \leq \eta(1 + \|x\|), \ \forall (x,y) \in [T_0, T]^n \times \mathbb{R};$$

($\mathcal{H}_3^f$) pour tout $x \in [T_0, T]^n, \ f(x, 0) = 0$;

($\mathcal{H}_4^f$) la multi-application $F : [T_0, T]^n \rightrightarrows \mathbb{R}$ est à valeurs compactes presque convexes, telle que

$$F\big(u(t), \cdots, u^{[n]}(t)\big) = \{f\big(u(t), \cdots, u^{[n]}(t), \nu(t)\big)\}_{\nu(t) \in U(u(t), \cdots, u^{[n]}(t))}.$$

Théorème 2.8. *Soient u_0, u_1 deux points dans $[T_0, T]$, et pour tout $\tilde{t} \in [T_0, T]$, $u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$. Alors,*

1) *le problème d'atteindre u_1 de u_0 pendant un temps minimum admet une solution ;*

2) *pour tout $\tilde{t} \in [T_0, T]$*

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) = \{u \in [T_0, T] \ : \mathcal{Z}(u) \leq \tilde{t}\ \}.$$

Démonstration. 1) Par les hypothèses sur f et U, nous concluons que $\mathrm{co}(F)$ est semi-continue supérieurement et

$$\mathrm{co}(F(x)) \subset \eta(1 + \|x\|)\overline{\mathbf{B}}, \ \forall x \in [T_0, T]^n.$$

D'après le Théorème 2.5, le problème $(\mathcal{PP})$ admet une solution absolument continue. Considérons l'ensemble

$$\Gamma = \{t \in [T_0, \tilde{t}\,] \ : u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(t)\}.$$

Par hypothèse $\Gamma \neq \emptyset$. Comme Γ est non vide, il admet une borne inférieure notée $\tau = \inf \Gamma$. Par les propriétés de la borne inférieure, il existe une suite décroissante (τ_r) de Γ converge vers τ et pour tout $r \in \mathbb{N}$, $u_r(\cdot)$ est une solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [T_0, \tau_r]; \\ u(T_0) = u_0, \end{cases}$$

telle que $u_1 = u_r(\tau_r)$. Puisque

$$F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)) \subset \mathrm{co}\big(F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\big),$$

$u_r(\cdot)$ est aussi une solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in \mathrm{co}\left(F(u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))\right), \text{ p.p. } t \in [T_0, \tau_r]; \\ u(T_0) = u_0. \end{cases}$$

On définit la suite $(w_r(\cdot))$ par $w_r(t) = u_r(t)$ pour tout $t \in [T_0, \tau]$. Donc

$$(w_r(t)) \subset \mathfrak{A}_{u_0}(t) = \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(t).$$

Par la compacité de $\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\cdot)$, nous pouvons extraire une sous-suite $(w_r(\cdot))$ converge vers $w(\cdot) \in \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\cdot)$. D'autre part nous avons

$$u_1 = u_r(\tau_r) \in \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tau_r),$$

comme la multi-application $\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes, on obtient

$$\limsup_{r\to\infty} \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tau_r) = \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tau),$$

donc $u_1 \in \mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tau)$. Par l'équivalence entre $\mathfrak{A}^{co}_{u_0}(\tau)$ et $\mathfrak{A}_{u_0}(\tau)$ obtenue dans la partie 2) du Théorème 2.5,

$$u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tau).$$

Par conséquent l'application $w(\cdot)$ satisfait

$$w(\tau) = u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tau).$$

Donc, $u(\cdot)$ est la solution du problème $(\mathcal{PP})$ qui atteint u_1 dans le temps minimal et τ est la valeur du temps minimal.

2) Soit $u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$, alors il existe une application $u(\cdot)$ solution du problème $(\mathcal{PP})$, telle que $u_1 = u(\tilde{t})$. On définit l'application

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [T_0, \tilde{t}]; \\ u_1 & \text{si } t \in [\tilde{t}, T]. \end{cases}$$

Pour $t \in [T_0, \tilde{t}]$, nous avons

$$\dot{\tilde{u}}(t) \in F(\tilde{u}(t), \tilde{u}^{[2]}(t), \cdots, \tilde{u}^{[n]}(t)), \text{ p.p.} \tag{2.10}$$

Pour $t \in [\tilde{t}, T]$, $\dot{\tilde{u}}(t) = 0$, par hypothèse $(\mathcal{H}_3^f)$ on obtient

$$\dot{\tilde{u}}(t) = 0 \in F(\tilde{u}(t), \tilde{u}^{[2]}(t), \cdots, \tilde{u}^{[n]}(t)), \text{ p.p.} \tag{2.11}$$

Par les relations (2.10) et (2.11), on conclut que $\tilde{u}(\cdot)$ est une solution du $(\mathcal{PP})$. D'autre part, pour tout $\tilde{t} < t$, $\tilde{u}(t) = u_1 \in \mathfrak{A}_{u_0}(t)$, donc

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) \subseteq \mathfrak{A}_{u_0}(t). \tag{2.12}$$

Soit $z \in \{u \in [T_0, T] \ : \mathcal{Z}(u) \leq \tilde{t}\ \}$. D'après la relation (2.12), on obtient

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\mathcal{Z}(u)) \subseteq \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}),$$

alors $z \in \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t})$. D'où,

$$\{u \in [T_0, T] : \mathcal{Z}(u) \leq \tilde{t}\ \} \subseteq \mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}). \tag{2.13}$$

De plus, la définition de l'ensemble admissible nous donne

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) \subseteq \{u \in [T_0, T] : \mathcal{Z}(u) \leq \tilde{t}\ \}. \tag{2.14}$$

Par les relations (2.13) et (2.14), nous concluons que

$$\mathfrak{A}_{u_0}(\tilde{t}) = \{u \in [T_0, T] \ : \mathcal{Z}(u) \leq \tilde{t}\ \}.$$

$\square$

CHAPITRE 3

Problème de contrôle régi par une inclusion différentielle itérative

3.1 Introduction du chapitre

Ce chapitre comporte quatre sections. Dans la première, nous présentons un théorème d'existence du problème

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\dot{u}(t) = f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [0, T];\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

où $f : [0, T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une application de Carathéodory, telle que

$$|f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))| \le m(t), \tag{3.1}$$

nous utilisons le théorème du point fixe de Schauder [42] et les idées données dans la démonstration des équations du second-ordre dans [2] pour étudier l'existence de solutions.

Dans la deuxième section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution du problème

$$(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})\begin{cases}-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [0, T];\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

où $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ est un opérateur maximal monotone dépendant du temps et $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une perturbation itérative.
Dans la troisième section, comme cas particulier du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_A)$, nous donnons un résultat d'existence du problème

$$(\mathcal{I}\mathcal{I}_\alpha) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u^{[n]}(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), u^{[n]}(\alpha t)), \\ \text{ p.p. } \ t \in [0,T], \ \alpha \in (0,1); \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans la quatrième section, comme application du résultats obtenus dans la deuxième section, nous présentons un problème de type Bolza ; nous étudions le lien entre le problème dit original

$$(P_{\mathcal{O}}) : \inf_{\xi \in S_\Gamma} \int_0^t J\left(t, u_\xi(t), u_\xi^{[2]}(t), \cdots, u_\xi^{[n]}(t), \xi(t)\right) dt,$$

où u_ξ est la solution unique de l'inclusion

$$(D_{\mathcal{O}}) \begin{cases} -\dot{u}_\xi(t) \in A(t)u_\xi(t) + f(t, u_\xi(t), u_\xi^{[2]}(t), \cdots, u_\xi^{[n]}(t), \xi(t)), \ \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ u_\xi(0) = u_0, \end{cases}$$

et le problème relaxé

$$(P_{\mathcal{R}}) : \inf_{\nu \in S_\Sigma} \int_0^t \left[\int_Z J\left(t, u_\nu(t), u_\nu^{[2]}(t), \cdots, u_\nu^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz) \right] dt,$$

où u_ν est la solution unique de l'inclusion

$$(D_{\mathcal{R}}) \begin{cases} -\dot{u}_\nu(t) \in A(t)u_\nu(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t, u_\nu(t), u_\nu^{[2]}(t), \cdots, u_\nu^{[n]}(t), z)\nu_t(dz), \ \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ u_\nu(0) = u_0. \end{cases}$$

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de publications dans la revue de classe B : Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 [37] et la revue de classe C : Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications [10].

3.2 Résultat d'existence pour une équation différentielle itérative du premier ordre

Dans cette section, nous présentons un théorème d'existence pour l'équation différentielle itérative $(\mathcal{I})$ et nous appliquons ce théorème à deux exemples numériques.

Théorème 3.1. *Supposons que*

(i) $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ *une application de Carathéodory ;*

(ii) *il existe une fonction non négative* $m \in L^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que*

$$|f(t,x)| \leq m(t), \ \forall (t,x) \in [0,T]^{n+1}.$$

Alors le problème $(\mathcal{I})$ *admet une solution* $u \in \mathcal{C}([0,T])$, *vérifie :*

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq |u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Soit S est un sous ensemble convexe fermé de $\mathcal{C}([0,T])$ défini par

$$S = \{h \in \mathcal{C}([0,T]) : \ \|h\|_{\mathcal{C}} \leq m_1\},$$

tel que $m_1 = |u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$. Supposons que pour tout $h \in S$, le problème

$$(\mathcal{I}_{f_h}) \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, h(t), h^{[2]}(t), \cdots, h^{[n]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une solution $u_h \in \mathcal{C}([0,T])$ définie par

$$u_h(t) = u_0 + \int_0^t f(s, h(s), h^{[2]}(s), \cdots, h^{[n]}(s))ds.$$

Considérons l'opérateur intégral $P : S \to \mathcal{C}([0,T])$ défini par $P(h) = u_h$.

Montrons que $u_h \in S$. Nous avons pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} |u_h(t)| &\leq |u_0| + \int_0^t |f(s, h(s), h^{[2]}(s), \cdots, h^{[n]}(s))|ds \\ &= |u_0| + \int_0^t m(s)ds = |u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}} = m_1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|u_h\|_{\mathcal{C}} \leq m_1. \tag{3.3}$$

Soit (h_r) convergeant vers h dans S. Alors pour tout $(i = 2, 3, \cdots, n)$, $(h_r^{[i]})$ converge vers $h^{[i]}$ et on a

$$\lim_{r \to +\infty} |u_{h_r}(t) - u_h(t)| \leq \lim_{r \to +\infty} \int_0^t \big|f(s, h_r(s), \cdots, h_r^{[n]}(s)) - f(s, h(s), \cdots, h^{[n]}(s))\big|ds.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^n$, on conclut que $\big(|f(\cdot, h_r(\cdot)\cdots, h_r^{[n]}(\cdot)) - f(\cdot, h(\cdot), \cdots, h^{[n]}(\cdot))|\big)_r$ converge vers 0 quand $r \to +\infty$.

Nous avons aussi, pour tout $t \in [0, T]$

$$|f(t, h_r(t), h_r^{[2]}(t), \cdots, h_r^{[n]}(t))| \leq m(t),$$

avec $m \in L^1_{\mathbb{R}}([0, T])$, le théorème de convergence dominée nous donne

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^t \big|f(s, h_r(s), \cdots, h_r^{[n]}(s)) - f(s, h(s), \cdots, h^{[n]}(s))\big| ds = 0,$$

et on obtient

$$\|P(h_r) - P(h)\|_{\mathcal{C}} = \|u_{h_r} - u_h\|_{\mathcal{C}} \to 0 \;\text{ quand } r \to +\infty,$$

d'où la continuité de P.

Nous avons, pour tout $h \in S$ et tout $t \in [0, T]$, $|\dot{u}_h(t)| \leq m(t)$. D'après la relation (3.3), $\{u_h(t),\ h \in S\}$ est relativement compact dans $[0, T]$.

D'autre part, pour tout $t, \tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |u_h(t) - u_h(\tau)| &= \Big| \int_0^t f(s, h(s), h^{[2]}(s), \cdots, h^{[n]}(s))ds - \int_0^\tau f(s, h(s), h^{[2]}(s), \cdots, h^{[n]}(s))ds \Big| \\ &\leq \int_\tau^t |f(s, h(s), h^{[2]}(s), \cdots, h^{[n]}(s))| ds \leq \int_\tau^t m(s)ds. \end{aligned}$$

Comme $m \in L^1_{\mathbb{R}}([0, T])$, on obtient l'équicontinuité de l'ensemble $\{u_h,\ h \in S\}$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli on conclut

$$P(S) = \{u_h,\ h \in S\}$$

est relativement compact dans $\mathcal{C}([0, T])$. D'après le Théorème 1.55 (théorème du point fixe de Schauder), nous concluons que P admet un point fixe qui est en fait la solution du problème considéré. □

Exemple 3.2. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{I}_1) \begin{cases} \dot{u}(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{5}u(t) + t^2(u^{[2]}(t) + u^{[3]}(t)), \text{ p.p. } t \in [0, 3]; \\ u(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit $f(t, x, y, z) = \frac{t}{4} + \frac{1}{5}x + t^2(y + z)$ *une application de Carathéodory, i.e., f est Lebesgue mesurable sur* $[0, 3]$ *et continue sur* $[0, 3] \times [0, 3] \times [0, 3]$.

Pour tout $(t, x, y, z) \in [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 3]$, *nous avons*

$$|f(t, x, y, z)| \leq \frac{t}{4} + \frac{3}{5} + 6t^2 = m(t).$$

Les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites, donc $(\mathcal{I}_1)$ *admet une solution* $u \in \mathcal{C}([0,3])$.

Exemple 3.3. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{I}_2)\begin{cases}\dot{u}(t) = 2t\cos(u(t)) + \sin(u^{[2]}(t)), \text{ p.p. } t \in [0,\pi];\\ u(0) = u_0.\end{cases}$$

Soit $f(t,x,y) = 2t\cos x + \sin y$ *une application de Carathéodory, i.e.,* f *Lebesgue mesurable sur* $[0,\pi]$ *et continue sur* $[0,\pi]\times[0,\pi]$.
Pour tout $(t,x,y) \in [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$, *nous avons*

$$|f(t,x,y)| = |2t\cos x + \sin y| \leq 2t|\cos x| + |\sin y| \leq 2t + 1 = m(t).$$

Les hypothèses du Théorème 3.1 sont satisfaites, donc $(\mathcal{I}_2)$ *admet une solution* $u \in \mathcal{C}([0,\pi])$.

3.3 Inclusions différentielles itératives gouvernées par des opérateurs maximaux monotones

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité de solution du problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$. Ensuite, nous appliquons nos résultats à deux exemples numériques.

Théorème 3.4. *Soient* $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *un opérateur maximal monotone et* $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ *une application de Carathéodory, telle que* $[0,T] \subset D(A(t))$. *Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

- $(\mathcal{H}_1)$ *pour tout* $y \in [0,T]$ *et tout* $\lambda > 0$, $t \mapsto J_\lambda A(t)y$ *est Lebesgue mesurable et il existe* $\bar{g} \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que* $t \mapsto J_\lambda A(t)\bar{g}(t)$ *appartient à* $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$;
- $(\mathcal{H}_2)$ *il existe une fonction positive* $\eta \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que* $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n+1}$ *et*

$$|A(t)y| + |f(t,x)| \leq \eta(t)(1 + \|x\| + |y|),\ \forall (t,x,y) \in [0,T]^{n+2},$$

  où $|A(t)y| = \sup\{|q| : q \in A(t)y\}$.

Alors le problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$ *admet une solution* $u \in \mathcal{C}([0,T])$, *vérifie :*

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{|u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}} = \rho. \tag{3.4}$$

Pour la démonstration de notre théorème on a besoin du résultat suivant :

Théorème 3.5. *Soient $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ un opérateur maximal monotone et $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ une application de Carathéodory, telle que $[0,T] \subset D(A(t))$. Supposons que $(\mathcal{H}_1)$ est vérifié et*

$(\mathcal{H}_m)$ il existe une fonction positive $m \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que

$$|A(t)y|_0 + |f(t,x)| \leq m(t),\ \forall (t,x,y) \in [0,T]^{n+2}.$$

Alors, le problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$ admet une solution $u \in \mathcal{C}([0,T])$.

Démonstration. Soit (λ_r) une suite décroissante dans $]0,1[$, telle que $\lambda_r \to 0$ quand $r \to \infty$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, considérons l'application

$$g_r(t,x,y) = A_{\lambda_r}(t)y + f(t,x),\ \forall (t,x,y) \in [0,T]^{n+2}.$$

D'après la propriété 3) de la Proposition 1.61 et l'hypothèse $(\mathcal{H}_m)$, nous avons pour tout $(t,x,y) \in [0,T]^{n+2}$

$$\begin{aligned} |g_r(t,x,y)| &\leq |A_{\lambda_r}(t)y| + |f(t,x)| \\ &\leq |A(t)y|_0 + |f(t,x)| \leq m(t). \end{aligned}$$

L'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et la propriété 1) de la Proposition 1.61 impliquent que l'application $(t,y) \mapsto A_{\lambda_r}(t)y$ est de Carathéodory. En utilisant le Théorème 3.1 nous obtenons pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'existence d'une solution u_r pour l'équation différentielle itérative

$$(\mathcal{I}_{g_r}) \begin{cases} \dot{u}_r(t) = g_r(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t)),\ p.p.\ t \in [0,T]; \\ u_r(0) = u_0, \end{cases}$$

avec

$$u_r(t) = u_0 + \int_0^t g_r(s, u_r(s), u_r^{[2]}(s), \cdots, u_r^{[n]}(s))ds.$$

Comme $|u_r(t)| \leq |u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$, nous concluons que $u_r(t)$ est relativement compacte dans $[0,T]$. De plus, on a pour tout $t, \tau \in [0,T]$

$$\begin{aligned} |u_r(t) - u_r(\tau)| &\leq \int_\tau^t |g_r(s, u_r(s), u_r^{[2]}(s), \cdots, u_r^{[n]}(s))|ds \\ &\leq \int_\tau^t m(s)ds, \end{aligned}$$

alors $(u_r(\cdot))$ est équicontinue. Le théorème d'Arzelà-Ascoli nous donne $(u_r(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T])$. Par extraction d'une sous suite on peut supposer que pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, $(u_r^{[i]}(\cdot))$ converge vers $u^{[i]}(\cdot)$ dans $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.
D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $r \in \mathbb{N}$, nous avons

$$|\dot{u}_r(t)| \leq |g_r(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t))| \leq m(t).$$

avec $m \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, alors $\dot{u}_r \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$.
Comme $\frac{|\dot{u}_r(t)|}{m(t)} \leq 1$ et $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$ est réflexif,

$$\overline{\mathbf{B}}_{L^2} = \{h \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T]) : \|h\|_{L^2} \leq 1\},$$

est compacte pour la topologie $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T]))$ (voir le Théorème 1.35).
Ainsi, on peut extraire de $(\dot{u}_r(\cdot))$ une sous suite qu'on note aussi $(\dot{u}_r(\cdot))$ convergeant $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T]))$ vers une application $\omega(\cdot)$, vérifiant

$$|\omega(t)| \leq m(t), \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Nous avons aussi

$$\lim_{r\to+\infty} u_r(t) = u_0 + \int_0^t \lim_{r\to\infty} \dot{u}_r(s)ds = u_0 + \int_0^t \omega(s)ds,$$

donc $\dot{u}(t) = \omega(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. On conclut que $(\dot{u}_r(\cdot))$ converge $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T]))$ vers $\dot{u}(\cdot)$.
D'autre part, par les hypothèses sur f nous avons $(f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot)))_r$ converge vers $f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot))$ et

$$|f(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t))| \leq m(t), \ \forall t \in [0,T].$$

D'après le théorème de Lebesgue, on obtient

$$|f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t))| \leq m(t),$$

et $(f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot)))_r$ converge vers $f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot))$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, donc cette convergence est vraie pour la topologie faible.
Par la propriété 2) de la Proposition 1.61 on a pour p.p. $t \in [0,T]$,

$$-\dot{u}_r(t) - f(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t)) = A_{\lambda_r}(t)u_r(t) \in A(t)J_{\lambda_r}A(t)u_r(t). \tag{3.5}$$

D'autre part, nous avons pour p.p. $t \in [0,T]$

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u(t)| \leq |J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u_r(t)| + |u_r(t) - u(t)|. \tag{3.6}$$

En utilisant la propriété 3) de la Proposition 1.61 et l'hypothèse $(\mathcal{H}_m)$, on obtient

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u_r(t)| = \lambda_r|A_{\lambda_r}(t)u_r(t)| \leq \lambda_r|A(t)u_r(t)|_0 \leq \lambda_r m(t). \tag{3.7}$$

Nous avons $\lambda_r m(t) \to 0$ quand $r \to \infty$. Par la relation (3.7), on voit que

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u_r(t)| \to 0 \text{ quand } r \to \infty,$$

donc

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u(t)| \to 0 \text{ quand } r \to \infty.$$

Les relations (3.5), (3.6) et (3.7) nous donnent

$$\begin{aligned}|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u(t)| &\leq |J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u_r(t)| + |u_r(t) - u(t)|\\ &\leq \lambda_r m(t) + \|u_r - u\|_{\mathcal{C}}\\ &\leq \lambda_r m(t) + 2(|u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}).\end{aligned}$$

Or, $\lambda_r < 1$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ nous obtenons pour p.p. $t \in [0,T]$,

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r(t) - u(t)| < m(t) + 2(|u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}).$$

avec $m \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, en utilisant le théorème de Lebesgue on conclut que $J_{\lambda_r}A(t)u_r(\cdot)$ converge vers $u(\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. Considérons l'opérateur

$$\mathcal{A} : L^2_{\mathbb{R}}([0,T]) \rightrightarrows L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$$

défini par

$$z \in \mathcal{A}y \Leftrightarrow z(t) \in A(t)y(t) \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est monotone. Soit $u_1 \in D(\mathcal{A}),\ v_1 \in \mathcal{A}u_1$ et $u_2 \in D(\mathcal{A}),\ v_2 \in \mathcal{A}u_2$. Alors pour tout $t \in [0,T]$ et tout $\lambda > 0,\ u_1(t),\ u_2(t) \in D(A(t))$ et

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}} &= \int_0^t \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 dt\\ &\leq \int_0^t \|u_1(t) - u_2(t) + \lambda(v_1(t) - v_2(t))\|^2 dt\\ &= \|(u_1 - u_2) + \lambda(v_1 - v_2)\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est maximal monotone, i.e., pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathcal{R}(I_{L^2_{\mathbb{R}}} + \lambda\mathcal{A}) = L^2_{\mathbb{R}}([0,T]).$$

Soit $g \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, il existe $\bar{g} \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que l'application

$$\bar{h} : t \mapsto (I + \lambda A(t))^{-1}\bar{g}(t),$$

appartient à $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. Considérons l'application

$$h : t \mapsto (I + \lambda A(t))^{-1}g(t),$$

nous avons

$$\|h\|_{L^2_{\mathbb{R}}} \leq \|h - \bar{h}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \|\bar{h}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} \leq \|g - \bar{g}\|_{L^2_{\mathbb{R}}} + \|\bar{h}\|_{L^2_{\mathbb{R}}},$$

Comme g, $\bar{g}$ et $\bar{h}$ sont des applications de $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, on déduit que h est Lebesgue mesurable et appartient à $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} h(t) = (I + \lambda A(t))^{-1}g(t), \text{ p.p} &\Leftrightarrow g(t) \in h(t) + \lambda A(t)h(t), \text{ p.p} \\ &\Leftrightarrow g \in h + \lambda\mathcal{A}h \\ &\Leftrightarrow h \in (I_{L^2_{\mathbb{R}}} + \lambda\mathcal{A})^{-1}g, \end{aligned}$$

i.e., pour tout $g \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, il existe $h \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que

$$h \in (I_{L^2_{\mathbb{R}}} + \lambda\mathcal{A})^{-1}g,$$

d'où

$$\mathcal{R}(I_{L^2_{\mathbb{R}}} + \lambda\mathcal{A}) = L^2_{\mathbb{R}}([0,T]).$$

Donc, $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$.

D'après le Théorème 1.63, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé. Comme $(\dot{u}_r(\cdot) + f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot)))_r$ converge $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T]))$ vers $\dot{u}(\cdot)+f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot))$ et $(J_{\lambda_r}A(\cdot)u_r(\cdot))_r$ converge vers $u(\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, de (3.5) on déduit que

$$-\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t)), \text{ p.p. } t \in [0,T].$$

□

On donne maintenant la démonstration du Théorème 3.4.

Démonstration. Etape 1. Si u est une solution absolument continue du $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$, on obtient pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |u_0| + \int_0^t |\dot{u}(s)| ds \\
&\leq |u_0| + \int_0^t |A(s)u(s)| + |f(t, u(s), u^{[2]}(s), \cdots, u^{[n]}(s))| ds \\
&\leq |u_0| + \int_0^t \eta(s)\Big(1 + |u(s)| + \sum_{i=1}^{n} |u^{[i]}(s)|\Big) |ds \\
&\leq |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + (n+1)\|u\|_{\mathcal{C}} \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}},
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq |u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} + (n+1)\|u\|_{\mathcal{C}} \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}.$$

Donc,

$$\|u\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{|u_0| + \|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1 - (n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}} = \rho. \tag{3.8}$$

Par la relation (3.8) et la définition de $\|u\|_{\mathcal{C}}$, nous aurons pour tout $t \in [0,T]$

$$|u^{[i]}(t)| \leq \rho \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{3.9}$$

Etape 2. Considérons l'application $\Phi_\rho : [0,T] \to [0,T]$ donnée par

$$\Phi_\rho(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq \rho; \\ \frac{\rho z}{|z|} & \text{si } |z| > \rho. \end{cases}$$

Considérons l'opérateur maximal monotone $M(t) : D(M(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ défini par

$$M(t)y = A(t)\Phi_\rho(y),$$

et l'application de Carathéodory $h : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(t, \Phi_\rho(x_1), \Phi_\rho(x_2), \cdots, \Phi_\rho(x_n)).$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
|F(t)y| + |h(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)| &= |A(t)\Phi_\rho(y)| + |f(t, \Phi_\rho(x_1), \Phi_\rho(x_2), \cdots, \Phi_\rho(x_n))| \\
&\leq \eta(t)\Big(1 + \sum_{i=1}^{n} |\Phi_\rho(x_i)| + |\Phi_\rho(y)|\Big) \\
&\leq \eta(t)(1 + (n+1)\rho) = \beta(t).
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3.5, on conclut que le problème

$$(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}_0})\begin{cases}-\dot{u}(t)\in M(t)u(t)+h(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t)),\ \text{p.p. } t\in[0,T];\\ u(0)=u_0,\end{cases}$$

admet une $\mathcal{C}([0,T])$-solution.

Montrons maintenant que u est la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}_0})$ si et seulement si u est la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$.

- Si u est une solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}_0})$ alors $|\dot{u}(t)|\leq\beta(t)$, et pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}|u(t)|&\leq|u_0|+\int_0^t|\dot{u}(s)|ds\\&\leq|u_0|+\int_0^t\beta(s)ds\\&=|u_0|+\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}(1+(n+1)\rho)\\&=|u_0|+\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\left(1+(n+1)\frac{|u_0|+\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}\right)\\&=\frac{|u_0|+\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}=\rho.\end{aligned}$$

  Alors, $|u^{[i]}(t)|\leq\rho$ $(i=1,\cdots,n)$, i.e., $\Phi_\rho(u^{[i]}(t))=u^{[i]}(t)$, donc

$$h(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t))=f(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t)),$$

  et $M(t)u(t)=A(t)u(t)$.

- Supposons maintenant que u est une solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$. Par la relation (3.9), nous avons pour tout $t\in[0,T]$

$$f(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t))=h(t,u(t),u^{[2]}(t),\cdots,u^{[n]}(t))$$

  et $A(t)u(t)=M(t)u(t)$. D'où, u est une solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}_0})$.

$\square$

Pour démontrer l'unicité de la solution du problème $(\mathcal{I}\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$, nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 3.6 (Théorème de composition). *[62]*

Soit

$$\Upsilon_{\mathcal{M}}=\{u\in\mathcal{C}([0,T]):|u(t)-u(s)|\leq\mathcal{M}|t-s|,\ \forall t,s\in[0,T]\},$$

où $\mathcal{M} < 1$. *Si* $\varphi, \psi \in \Upsilon_{\mathcal{M}}$, *alors*

$$\|\varphi^{[i]} - \psi^{[i]}\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}} \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.10}$$

Démonstration. Nous utilisons la démonstration par récurrence.

L'inégalité (3.10) est vraie pour $i = 1$. Supposons que l'inégalité (3.10) est vraie pour $i = n$, i.e.,

$$\|\varphi^{[n]} - \psi^{[n]}\|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1-\mathcal{M}^n}{1-\mathcal{M}} \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}}, \tag{3.11}$$

et montrons qu'elle est vraie pour $i = n+1$. Nous avons pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\|\varphi^{[n+1]} - \psi^{[n+1]}\|_{\mathcal{C}} &= \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(\varphi^{[n]}(t)) + \varphi(\psi^{[n]}(t)) - \varphi(\psi^{[n]}(t)) + \psi(\psi^{[n]}(t))| \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(\varphi^{[n]}(t)) + \varphi(\psi^{[n]}(t))| + \sup_{t\in[0,T]} |\varphi(\psi^{[n]}(t)) + \psi(\psi^{[n]}(t))| \\
&\leq \mathcal{M}\|\varphi^{[n]} - \psi^{[n]}\|_{\mathcal{C}} + \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Par la relation (3.11) on obtient

$$\|\varphi^{[n+1]} - \psi^{[n+1]}\|_{\mathcal{C}} \leq \left(\mathcal{M}\Big(\frac{1-\mathcal{M}^n}{1-\mathcal{M}}\Big) + 1\right) \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}} = \frac{1-\mathcal{M}^{n+1}}{1-\mathcal{M}} \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}}.$$

Donc l'inégalité (3.10) est vraie pour $i \in \mathbb{N}^*$. □

Théorème 3.7. *Soient* $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *un opérateur maximal monotone vérifiant l'hypothèse* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $f : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$, $[0,T] \subset D(A(t))$ *est une application Lebesgue-mesurable sur* $[0,T]$. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifies :*

$(\mathcal{H}_2')$ *il existe une fonction positive* $\eta \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telle que* $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n+1}$, $\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} < \frac{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1+(n+1)|u_0|}$ *et*

$$|A(t)y| + |f(t,x)| \leq \eta(t)(1 + \|x\| + |y|), \ \forall (t,x,y) \in [0,T]^{n+2};$$

$(\mathcal{H}_3)$ *il existe "n" fonctions positives* $k_1, \cdots, k_n \in L^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, *telles que* $\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}} < \frac{1}{2}$, $\mathcal{M} = (1+(n+1)\rho)\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}$ *et*

$$|f(t,x) - f(t,x')| \leq \sum_{i=1}^n k_i(t)|x_i - x_i'|, \ \forall (t,x),(t,x') \in [0,T]^{n+1}.$$

Alors, le problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$ *admet une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0,T])$.

Démonstration. Supposons que u est une solution du problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$. L'hypothèse $(\mathcal{H}_2')$ et l'inégalité (3.8) nous donnent pour tout $\tau \leq t$

$$\begin{aligned}
|u(t)-u(\tau)| &\leq \int_\tau^t \big(|A(s)u(s)| + |f(s,u(s),u^{[2]}(s),\cdots,u^{[n]}(s))|\big)ds \\
&\leq \int_\tau^t \eta(s)\Big(1+|u(s)|+\sum_{i=1}^n |u^{[i]}(s)|\Big)ds \\
&\leq \big(1+(n+1)\rho\big)\int_\tau^t \eta(s)ds \\
&\leq \big(1+(n+1)\rho\big)\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}|t-\tau|.
\end{aligned}$$

Alors

$$|u(t)-u(\tau)| \leq \mathcal{M}|t-\tau|,$$

avec $\mathcal{M} = \big(1+(n+1)\rho\big)\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}$, en utilisant $(\mathcal{H}_2')$ nous obtenons que $\mathcal{M} < 1$.
Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$. Par la monotonicité de l'opérateur $A(t)$, nous avons pour p.p. $t \in [0,T]$

$$\Big(-\dot u_1(t)+\dot u_2(t) - f(t,u_1(t),\cdots,u_1^{[n]}(t)) + f(t,u_2(t),\cdots,u_2^{[n]}(t))\Big)\left(u_1(t)-u_2(t)\right) \geq 0,$$

d'où

$$\left(\dot u_1(t)-\dot u_2(t)\right)\left(u_1(t)-u_2(t)\right) \leq \Big(-f(t,u_1(t),\cdots,u_1^{[n]}(t))+f(t,u_2(t),\cdots,u_2^{[n]}(t))\Big)\left(u_1(t)-u_2(t)\right),$$

et

$$\frac{d}{dt}(|u_1(t)-u_2(t)|^2) \leq 2\big|f(t,u_1(t),\cdots,u_1^{[n]}(t)) - f(t,u_2(t),\cdots,u_2^{[n]}(t))\big|\ |u_1(t)-u_2(t)|,$$

utilisons la condition de Lipschitz sur f, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left(|u_1(t)-u_2(t)|^2\right) \leq 2\sum_{i=1}^n k_i(t)|u_1^{[i]}(t)-u_2^{[i]}(t)||u_1(t)-u_2(t)|.$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à t, on obtient

$$|u_1(t)-u_2(t)|^2 \leq 2\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n k_i(s)|u_1^{[i]}(s)-u_2^{[i]}(s)|\right)|u_1(s)-u_2(s)|ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$

$$|u_1(t)-u_2(t)|^2 \leq \left(2\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\|u_1^{[i]}-u_2^{[i]}\|_{\mathcal{C}}\right)\|u_1-u_2\|_{\mathcal{C}}.$$

D'après le Théorème 3.6, nous avons

$$\|u_1-u_2\|_{\mathcal{C}}^2 \le \left(2\sum_{i=1}^{n}\|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}}\right)\|u_1-u_2\|_{\mathcal{C}}^2.$$

Comme $2\sum_{i=1}^{n}\|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}}\frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}}<1$, $|u_1(t)-u_2(t)|\le 0$ pour tout $t\in[0,T]$.

D où $u_1=u_2$. □

Exemple 3.8. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})\begin{cases}-\dot u(t)\in A(t)u(t)+\frac{1}{8}u(t)+\frac{t}{16}(u^{[2]}(t)+u^{[3]}(t)), \text{ p.p. } t\in[0,\frac14];\\ u(0)=0,\end{cases}$$

où

$$A(t)x_1=\begin{cases}x_1-\frac{t}{4} & \text{si } x_1<0;\\ x_1+\frac{t}{4} & \text{si } x_1>0;\\ [-\frac{t}{4},\frac{t}{4}] & \text{si } x_1=0,\end{cases}$$

est un opérateur maximal monotone. Soit $f(t,x_1,x_2,x_3)=\frac18 x_1+\frac{t}{16}(x_2+x_3)$ *une application mesurable sur* $[0,\frac14]$. *Montrons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_1),(\mathcal{H}_2')$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *sont satisfaites.*

$(\mathcal{H}_1)$ *Pour tout* $\lambda>0$, *nous avons*

$$J_\lambda A(t)x_1=\begin{cases}0 & \text{si } x_1\in[-\frac{\lambda t}{4},\frac{\lambda t}{4}];\\ \frac{1}{4(1+\lambda)}(4x_1-\lambda t) & \text{si } x_1>\frac{\lambda t}{4};\\ \frac{1}{4(1+\lambda)}(4x_1+\lambda t) & \text{si } x_1<-\frac{\lambda t}{4}.\end{cases}$$

Donc, $t\mapsto J_\lambda A(t)x_1$ *est Lebesgue mesurable et il existe* $\bar g\in L^2_{\mathbb{R}}([0,\frac14])$, *telle que* $t\mapsto J_\lambda A(t)\bar g(t)$ *appartient à* $L^2_{\mathbb{R}}([0,\frac14])$.

$(\mathcal{H}_2')$ *Pour tout* $(t,x_1,x_2,x_3)\in[0,\frac14]\times[0,\frac14]\times[0,\frac14]\times[0,\frac14]$, *nous avons*

$$\big|A(t)x_1\big|+|f(t,x_1,x_2,x_3)|\le\eta(t)=\frac{11+t}{32},$$

avec $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}<\frac14$ *et* $\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}<1-4\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$. *Donc,*

$$\big|A(t)x_1\big|+|f(t,x_1,x_2,x_3)|\le\eta(t)(1+2|x_1|+|x_2|+|x_3|).$$

($\mathcal{H}_3$) *Pour tout* $(t,x_1,x_2,x_3),(t,y_1,y_2,y_3) \in [0,\frac{1}{4}] \times [0,\frac{1}{4}] \times [0,\frac{1}{4}] \times [0,\frac{1}{4}]$, *nous avons*

$$|f(t,x_1,x_2,x_3) - f(t,y_1,y_2,y_3)| \leq \frac{1}{8}|x_1-y_1| + \frac{t}{16}|x_2-y_2| + \frac{t}{16}|x_3-y_3|,$$

avec $\sum_{i=1}^{3} \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}} < \frac{1}{2}$ *où* $k_1(t) = \frac{1}{8},\ k_2(t) = k_3(t) = \frac{t}{16}$ *et* $\mathcal{M} = \frac{90}{167}$.

Les hypothèses du Théorème 3.7 sont satisfaites, alors $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$ *admet une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0,\frac{1}{4}])$.

Exemple 3.9. *Considérons le problème*

$$(\mathcal{II}_{\mathcal{B}}) \begin{cases} -\dot{u}(t) \in A(t)u(t) + \frac{t}{32}u(t) + \frac{1}{64}(u^{[2]}(t)), \ \text{p.p. } t \in [0,\frac{1}{8}]; \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

où

$$A(t)x_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 & \text{si } \ |x_1| \leq 2t; \\ t\,\text{sign}(x_1) & \text{si } \ |x_1| > 2t, \end{cases}$$

est un opérateur maximal monotone. Soit $f(t,x_1,x_2) = \frac{t}{32}x_1 + \frac{1}{64}x_2$ *une application mesurable sur* $[0,\frac{1}{8}]$. *Montrons que les hypothèses* $(\mathcal{H}_1),(\mathcal{H}'_2)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$ *sont satisfaites.*

($\mathcal{H}_1$) *Pour tout* $\lambda > 0$, *nous avons*

$$J_\lambda A(t)x_1 = \begin{cases} \frac{2x_1}{2+\lambda} & \text{si } \ x_1 \in [-t(2+\lambda), t(2+\lambda)]; \\ x_1 - \lambda t & \text{si } \ x_1 > t(2+\lambda); \\ x_1 + \lambda t & \text{si } \ x_1 < -t(2+\lambda). \end{cases}$$

Donc, $t \mapsto J_\lambda A(t)x_1$ *est Lebesgue mesurable et il existe* $\bar{g} \in L^2_{\mathbb{R}}([0,\frac{1}{8}])$, *telle que* $t \mapsto J_\lambda A(t)\bar{g}(t)$ *appartient à* $L^2_{\mathbb{R}}([0,\frac{1}{8}])$.

($\mathcal{H}'_2$) *Pour tout* $(t,x_1,x_2) \in [0,\frac{1}{8}] \times [0,\frac{1}{8}] \times [0,\frac{1}{8}]$, *nous avons*

$$\big|A(t)x_1\big| + |f(t,x_1,x_2)| \leq \eta(t) = \frac{2t+65}{512},$$

avec $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{3}$ *et* $\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} < 1 - 3\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$. *Donc,*

$$\big|A(t)x_1\big| + |f(t,x_1,x_2)| \leq \eta(t)(1+2|x_1|+|x_2|).$$

($\mathcal{H}_3$) *Pour tout* $(t,x_1,x_2),(t,y_1,y_2) \in [0,\frac{1}{8}] \times [0,\frac{1}{8}] \times [0,\frac{1}{8}]$, *nous avons*

$$|f(t,x_1,x_2) - f(t,y_1,y_2)| \leq \frac{t}{32}|x_1-y_1| + \frac{1}{64}|x_2-y_2|,$$

avec $\sum_{i=1}^{2} \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}} < \frac{1}{2}$ *où* $k_1(t) = \frac{t}{32},\ k_2(t) = \frac{1}{64}$ *et* $\mathcal{M} = \frac{4175}{31205}$.

Les hypothèses du Théorème 3.7 sont satisfaites, alors $(\mathcal{II}_{\mathcal{B}})$ *admet une unique solution* $u \in \mathcal{C}([0,\frac{1}{8}])$.

3.4 Résultat d'existence pour une inclusion différentielle itérative avec argument déviant

Dans cette section, nous donnons un théorème d'existence du problème

$$(\mathcal{II}_\alpha)\begin{cases}-\dot{u}(t) \in A(t)u^{[n]}(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), u^{[n]}(\alpha t)),\\ \text{p.p. } \ t \in [0, T], \ \alpha \in (0, 1);\\ u(0) = u_0,\end{cases}$$

qui est un cas particulier du problème $(\mathcal{II}_A)$.

Théorème 3.10. *Soient $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ un opérateur maximal monotone et $f : [0, T]^{n+2} \to \mathbb{R}$ une application de Carathéodory, telle que $[0, T] \subset D(A(t))$. Supposons que $(\mathcal{H}_1)$ est vérifié et*

$(\mathcal{H}'_m)$ il existe une fonction positive $m \in L^\infty_\mathbb{R}([0, T])$, telle que $\|m\|_{L^\infty_\mathbb{R}} < 1$ et

$$|A(t)y|_0 + |f(t, x)| \leq m(t), \ \forall (t, x, y) \in [0, T]^{n+3}.$$

Alors, le problème $(\mathcal{II}_\alpha)$ admet une solution $u \in \mathcal{C}([0, T])$.

Démonstration. Soit (λ_r) une suite décroissante dans $]0, 1[$, telle que $\lambda_r \to 0$ quand $r \to \infty$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, considérons l'application

$$g_r(t, x, y) = A_{\lambda_r}(t)y + f(t, x), \ \forall (t, x, y) \in [0, T]^{n+3}.$$

Par la propriété 3) de la Proposition 1.61 et l'hypothèse $(\mathcal{H}'_m)$, nous avons pour tout $(t, x, y) \in [0, T]^{n+3}$

$$|g_r(t, x, y)| \leq m(t).$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ et la propriété 1) dans la Proposition 1.61, l'application $(t, y) \mapsto A_{\lambda_r}(t)y$ est de Carathéodory. En utilisant le Théorème 3.1 nous obtenons pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'existence d'une solution u_r du problème

$$(\mathcal{I}_\alpha)\begin{cases}\dot{u}_r(t) = g_r(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t), u_r^{[n]}(\alpha t)),\\ \text{p.p. } \ t \in [0, T], \ \alpha \in (0, 1);\\ u_r(0) = u_0,\end{cases}$$

avec

$$u_r(t) = u_0 + \int_0^t g_r(s, u_r(s), u_r^{[2]}(s), \cdots, u_r^{[n]}(s), u_r^{[n]}(\alpha s))ds.$$

En appliquant les arguments de la démonstration du Théorème 3.5, on conclut que $(u_r(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T])$.

Puisque $(\dot{u}_r)$ est bornée dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, elle converge faiblement vers un élément v de $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, ce qui implique que $\int_0^t \dot{u}_r(s)ds$ converge vers $\int_0^t v(s)ds$ pour tout $t \leq T$.

Comme $(u_r(\cdot))$ est une suite d'applications absolument continues, nous avons l'égalité suivante

$$\lim_{r\to\infty}(u_r(t) - u_r(0)) = \lim_{r\to\infty}\int_0^t \dot{u}_r(s)ds = \int_0^t v(s)ds,$$

implique

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

alors $u(\cdot)$ est absolument continue, et donc $\dot{u}(\cdot) = v(\cdot)$, p.p. Nous concluons que la suite $(\dot{u}_r(\cdot))$ converge $\sigma\big(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T])\big)$ vers $\dot{u}(\cdot)$.

D'autre part, par les hypothèses sur f nous avons $(f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot), u_r^{[n]}(\alpha\cdot)))_r$ converge vers $f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot), u^{[n]}(\alpha\cdot))$ et

$$|f(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t), u_r^{[n]}(\alpha t))| \leq m(t),\ \forall t \in [0,T].$$

Par le théorème de Lebesgue, on conclut pour tout $t \in [0,T]$

$$|f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), u^{[n]}(\alpha t))| \leq m(t),$$

et $(f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot), u_r^{[n]}(\alpha\cdot)))_r$ converge vers $f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot), u^{[n]}(\alpha\cdot))$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, donc cette convergence est vraie pour la topologie faible.

D'après la propriété 2) de la Proposition 1.61 on a pour p.p. $t \in [0,T]$,

$$-\dot{u}_r(t) - f(t, u_r(t), u_r^{[2]}(t), \cdots, u_r^{[n]}(t), u_r^{[n]}(\alpha t)) = A_{\lambda_r}(t)u_r^{[n]}(t) \in A(t)J_{\lambda_r}A(t)u_r^{[n]}(t). \tag{3.12}$$

D'autre part, nous avons

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| \leq |J_{\lambda_r}A(t)u_r^{[n]}(t) - u_r^{[n]}(t)| + |u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)|. \tag{3.13}$$

En utilisant la propriété 3) de la Proposition 1.61 et l'hypothèse $(\mathcal{H}'_m)$, on obtient

$$|J_{\lambda_r}A(t)u_r^{[n]}(t) - u_r^{[n]}(t)| = \lambda_r|A_{\lambda_r}(t)u_r^{[n]}(t)| \leq \lambda_r|A(t)u_r^{[n]}(t)|_0 \leq \lambda_r m(t). \tag{3.14}$$

Nous avons $\lambda_r m(t) \to 0$ quand $r \to \infty$. Par la relation (3.14), on voit que

$$|J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u_r^{[n]}(t)| \to 0 \text{ quand } r \to \infty,$$

donc

$$|J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| \to 0 \text{ quand } r \to \infty.$$

Par les relations (3.12), (3.13) et (3.14), nous avons

$$\begin{aligned}|J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| &\leq |J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u_r^{[n]}(t)| + |u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| \\ &\leq |J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u_r^{[n]}(t)| + \|u_r^{[n]} - u^{[n]}\|_{\mathcal{C}}.\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 3.6, on obtient

$$\begin{aligned}|J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| &\leq \lambda_r m(t) + \frac{1 - \|m\|^n_{L^\infty_{\mathbb{R}}}}{1 - \|m\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}} \|u_r - u\|_{\mathcal{C}} \\ &\leq \lambda_r m(t) + \frac{1 - \|m\|^n_{L^\infty_{\mathbb{R}}}}{1 - \|m\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}} (\|u_r\|_{\mathcal{C}} + \|u\|_{\mathcal{C}}) \\ &\leq \lambda_r m(t) + 2\left(\frac{1 - \|m\|^n_{L^\infty_{\mathbb{R}}}}{1 - \|m\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}} (|u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}) \right).\end{aligned}$$

Or, $\lambda_r < 1$, pour tout $r \in \mathbb{N}$ nous obtenons pour p.p. $t \in [0, T]$,

$$|J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(t) - u^{[n]}(t)| < m(t) + 2\left(\frac{1 - \|m\|^n_{L^\infty_{\mathbb{R}}}}{1 - \|m\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}} (|u_0| + \|m\|_{L^1_{\mathbb{R}}}) \right),$$

avec $m \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0, T])$. D'après le théorème de Lebesgue, on conclut que $J_{\lambda_r} A(t) u_r^{[n]}(\cdot)$ converge vers $u^{[n]}(\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0, T])$. Considérons l'opérateur

$$\mathcal{A} : L^2_{\mathbb{R}}([0, T]) \rightrightarrows L^2_{\mathbb{R}}([0, T]),$$

défini par

$$v \in \mathcal{A} u^{[n]} \Leftrightarrow v(t) \in A(t) u^{[n]}(t), \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

D'après la démonstration du Théorème 3.5, $\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone dans $L^2_{\mathbb{R}}([0, T])$. D'après le Théorème 1.63, le graphe de $\mathcal{A}$ est fortement-faiblement séquentiellement fermé.

Comme $(\dot{u}_r(\cdot) + f(\cdot, u_r(\cdot), u_r^{[2]}(\cdot), \cdots, u_r^{[n]}(\cdot), u_r^{[n]}(\alpha \cdot)))_r$ converge $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0, T]), L^2_{\mathbb{R}}([0, T]))$ vers $\dot{u}(\cdot) + f(\cdot, u(\cdot), u^{[2]}(\cdot), \cdots, u^{[n]}(\cdot), u^{[n]}(\alpha \cdot))$ et $(J_{\lambda_r} A(\cdot) u_r^{[n]}(\cdot))_r$ converge vers $u^{[n]}(\cdot)$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([0, T])$, de (3.12) on déduit que

$$-\dot{u}(t) \in A(t) u^{[n]}(t) + f(t, u(t), u^{[2]}(t), \cdots, u^{[n]}(t), u^{[n]}(\alpha t)), \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

□

3.5 Un problème de contrôle optimal pour l'inclusion différentielle itérative $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$

Dans cette section nous présentons un problème de contrôle optimal de type Bolza régie par notre inclusion différentielle itérative $(\mathcal{II}_{\mathcal{A}})$, où les contrôles sont des mesures de Young.
Soient $A(t) : D(A(t)) \subset \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ un opérateur maximal monotone satisfaisant $(\mathcal{H}_1)$ et l'hypothèse

$(\mathcal{H}_A)$ il existe une fonction positive $\eta \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n+1}$, $\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} < \frac{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1+(n+1)|u_0|}$ et

$$|A(t)y| \leq \eta(t)|y|, \ \forall (t,y) \in [0,T] \times [0,T];$$

et $f : [0,T]^{n+1} \times Z \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les hypothèses suivantes :

(i) pour tout $(x,z) \in [0,T]^n \times Z$, $f(\cdot,x,z)$ est Lebesgue mesurable sur $[0,T]$;

$(\mathcal{H}''_2)$ il existe une fonction positive $\eta \in L^\infty_{\mathbb{R}}([0,T])$, telle que $\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}} < \frac{1}{n+1}$, $\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}} < \frac{1-(n+1)\|\eta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}}{1+(n+1)|u_0|}$ et

$$|f(t,x,z)| \leq \eta(t)(1+\|x\|), \ \forall (t,x,z) \in [0,T]^{n+1} \times Z;$$

$(\mathcal{H}'_3)$ il existe "n" fonctions positives $k_1, \cdots, k_n \in L^1_{\mathbb{R}}([0,T])$, telles que $\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}} < \frac{1}{2}$, $\mathcal{M} = (1+(n+1)\rho)\|\eta\|_{L^\infty_{\mathbb{R}}}$ et

$$|f(t,x,z) - f(t,\mu,z)| \leq \sum_{i=1}^n k_i(t)|x_i - \mu_i|, \ \forall (t,x,z),(t,\mu,z) \in [0,T]^{n+1} \times Z.$$

Nous visons à comparer l'ensemble des solutions pour les inclusions d'évolution suivantes :

$$(D_{\mathcal{O}}) \begin{cases} -\dot{u}_\xi(t) \in A(t)u_\xi(t) + f(t, u_\xi(t), u_\xi^{[2]}(t), \cdots, u_\xi^{[n]}(t), \xi(t)), \ \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u_\xi(0) = u_0, \end{cases}$$

où ξ appartient à l'ensemble S_Γ et

$$(D_{\mathcal{R}}) \begin{cases} -\dot{u}_\nu(t) \in A(t)u_\nu(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t, u_\nu(t), u_\nu^{[2]}(t), \cdots, u_\nu^{[n]}(t), z)\nu_t(dz), \ \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u_\nu(0) = u_0, \end{cases}$$

où ν appartient à l'ensemble S_Σ.
Pour la démonstration du Théorème 3.12 nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.11. *Soit $(\nu^r)_r$ une suite dans S_Σ, telle que $(\nu^r)_r$ converge pour la topologie narrow vers ν^∞. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le problème*

$$(\mathcal{II}_{\nu^r}) \begin{cases} -\dot{u}_{\nu^r}(t) \in A(t)u_{\nu^r}(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t, u_{\nu^r}(t), u_{\nu^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(t), z)\nu_t^r(dz), \ \ p.p.\ t \in [0,T]; \\ u_{\nu^r}(0) = u_0, \end{cases}$$

admet une unique solution $u_{\nu^r} \in \mathcal{C}([0,T])$. De plus, $(u_{\nu^r})_r$ converge uniformément vers u_{ν^∞}.

Démonstration. 1) Montrons que u_{ν^r} est une unique solution du problème $(\mathcal{II}_{\nu^r})$. Considérons l'application g_{ν^r} définie par

$$g_{\nu^r}(t,x) = \int_{\Gamma(t)} f(t,x,z)\nu_t^r(dz), \quad \forall (t,x,z) \in [0,T]^{n+1} \times Z,$$

qui hérite tous les propriétés de l'application f. En effet,

(i) Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de Scorza Dragoni, il existe un compact $I_\varepsilon \subset [0,T]$, tel que la mesure de Lebesgue de $([0,T]\backslash I_\varepsilon)$ est inférieur à ε et la restriction de f à $I_\varepsilon \times \mathbb{R}^n \times Z$ est continue, alors l'application $t \mapsto g_{\nu^r}(t,x)$ est continue sur I_ε, et donc Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$, puisque ε est arbitraire.

$(\mathcal{H}_2'')$ Pour tout $(\nu^r) \in S_\Sigma$ et tout $(t,x,z) \in [0,T]^{n+1} \times Z$, nous avons

$$\begin{aligned} |g_{\nu^r}(t,x)| &\leq \int_{\Gamma(t)} |f(t,x,z)|\nu_t^r(dz) \\ &\leq \eta(t)(1 + \|x\|) \int_{\Gamma(t)} \nu_t^r(dz) \\ &= \eta(t)(1 + \|x\|)\nu_t^r(\Gamma(t)), \end{aligned}$$

puisque $(\nu^r) \in S_\Sigma$, alors $(\nu_t^r) \in \mathcal{M}_+^1(Z)$. Donc

$$|g_{\nu^r}(t,x)| \leq \eta(t)(1 + \|x\|).$$

$(\mathcal{H}_3')$ Pour tout $(\nu^r) \in S_\Sigma$ et tout $(t,x,z), (t,\mu,z) \in [0,T]^{n+1} \times Z$, nous avons

$$\begin{aligned} |g_{\nu^r}(t,x) - g_{\nu^r}(t,\mu)| &\leq \int_{\Gamma(t)} |f(t,x,z) - f(t,\mu,z)|\nu_t^r(dz) \\ &\leq \Big(\sum_{i=1}^n k_i(t)|x_i - \mu_i|\Big) \int_{\Gamma(t)} \nu_t^r(dz) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n k_i(t)|x_i - \mu_i|\Big)\nu_t^r(\Gamma(t)), \\ &= \sum_{i=1}^n k_i(t)|x_i - \mu_i|. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 3.7, le problème $(\mathcal{II}_{\nu^r})$ admet une unique solution $u_{\nu^r} \in \mathcal{C}([0,T])$.

2) Montrons maintenant que $(u_{\nu^r})_r$ converge uniformément vers u_{ν^∞}.

Pour tout $t \in [0,T]$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\dot{u}_{\nu^r}(t)| &\leq |A(t)u_{\nu^r}(t)| + \left|g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(t), u_{\nu^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(t))\right| \\
&\leq \eta(t)\Big(1 + |u_{\nu^r}(t)| + \sum_{i=1}^{n} |u_{\nu^r}^{[i]}(t)|\Big) \\
&\leq \eta(t)\left(1 + (n+1)\rho\right) = \beta(t).
\end{aligned}$$

avec $\beta(\cdot) \in L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$. Comme $|u_{\nu^r}(t)| \leq |u_0| + \|\beta\|_{L^1_{\mathbb{R}}}$, $(u_{\nu^r}(t))_r$ est relativement compacte pour tout $t \in [0,T]$. De plus, nous avons pour tout $t, \tau \in [0,T]$,

$$|u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^r}(\tau)| \leq \int_\tau^t |\dot{u}_{\nu^r}(s)|ds \leq \int_\tau^t \beta(s)ds,$$

on obtient l'équicontinuité de $(u_{\nu^r}(\cdot))$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on conclut que $(u_{\nu^r}(\cdot))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}([0,T])$. Par extraction d'une sous suite, on peut supposer que $(u_{\nu^r}(\cdot))$ converge uniformément vers une application $u_\infty(\cdot)$.

Puisque $(\dot{u}_{\nu^r})$ est bornée dans $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, elle converge faiblement vers un élément ω de $L^2_{\mathbb{R}}([0,T])$, ce qui implique que $\int_0^t \dot{u}_{\nu^r}(s)ds$ converge vers $\int_0^t \omega(s)ds$ pour tout $t \leq T$.

Comme $(u_{\nu^r}(\cdot))$ est une suite d'applications absolument continues, nous avons l'égalité suivante

$$\lim_{r\to\infty}(u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^r}(0)) = \lim_{r\to\infty}\int_0^t \dot{u}_{\nu^r}(s)ds = \int_0^t \omega(s)ds,$$

implique

$$u_\infty(t) = u_0 + \int_0^t \omega(s)ds,$$

alors $u_\infty(\cdot)$ est absolument continue, et donc $\dot{u}_\infty(\cdot) = \omega(\cdot)$ p.p. Nous concluons que la suite $(\dot{u}_{\nu^r}(\cdot))$ converge $\sigma(L^2_{\mathbb{R}}([0,T]), L^2_{\mathbb{R}}([0,T]))$ vers $\dot{u}_\infty(\cdot)$.

Montrons que $u_\infty(\cdot) = u_{\nu^\infty}(\cdot)$. En utilisant la monotonicité de l'opérateur $A(t)$, on obtient

$$\Big(-\dot{u}_{\nu^r}(t)+\dot{u}_{\nu^\infty}(t)-g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(t), \cdot\cdot, u_{\nu^r}^{[n]}(t))+g_{\nu^\infty}(t, u_{\nu^\infty}(t), \cdot\cdot, u_{\nu^\infty}^{[n]}(t))\Big)(u_{\nu^r}(t)-u_{\nu^\infty}(t)) \geq 0,$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^\infty}(t)|^2 \\
&\leq (u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^\infty}(t))\big(g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(t), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(t)) - g_{\nu^\infty}(t, u_{\nu^\infty}(t), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(t))\big).
\end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à t, on obtient pour tout $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{2}|u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^\infty}(t)|^2$$
$$\leq \int_0^t (u_{\nu^r}(s) - u_{\nu^\infty}(s))\big(g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(s), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\big)ds.$$

Posons pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,T]$

$$L_r(t) = \int_0^t (u_{\nu^r}(s) - u_{\nu^\infty}(s))\big(g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(s), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\big)ds.$$

Alors, $L_r(t) = L_r^1(t) + L_r^2(t) + L_r^3(t)$, où

$$L_r^1(t) = \int_0^t (u_{\nu^r}(s) - u_{\nu^\infty}(s))\big(g_{\nu^r}(t, u_{\nu^r}(s), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(s)) - g_{\nu^r}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\big)ds,$$

$$L_r^2(t) = \int_0^t (u_{\nu^r}(s) - u_{\infty}(s))\big(g_{\nu^r}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\big)ds,$$

$$L_r^3(t) = \int_0^t (u_{\infty}(s) - u_{\nu^\infty}(s))\big(g_{\nu^r}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s)) - g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\big)ds.$$

La condition de Lipschitz sur g_{ν^r}, nous donne

$$|L_r^1(t)| \leq \int_0^t |u_{\nu^r}(s) - u_{\nu^\infty}(s)|\Big(\sum_{i=1}^n k_i(s)|u_{\nu^r}^{[i]}(s) - u_{\nu^\infty}^{[i]}(s)|\Big)ds.$$

D'autre part, on a l'estimation

$$|L_r^2(t)| \leq \|u_{\nu^r} - u_\infty\|_{\mathcal{C}} \int_0^t \Big|g_{\nu^r}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\Big| + \Big|g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\Big|ds$$
$$\leq 2\|u_{\nu^r} - u_\infty\|_{\mathcal{C}} \int_0^t \eta(s)\Big(1 + \sum_{i=1}^n |u_{\nu^\infty}^{[i]}(s)|\Big).$$

Donc $\lim_{r\to\infty} |L_r^2(t)| = 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

Posons maintenant pour tout $(s,z) \in [0,T] \times Z$

$$h(s,z) = (u_\infty(s) - u_{\nu^\infty}(s))\left(f(s, u_{\nu^\infty}(s), u_{\nu^\infty}^{[2]}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s), z)\right),$$

observons que

$$|h(s,z)| \leq \|u_\infty - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}\Big(\eta(s)\Big(1 + \sum_{i=1}^n |u_{\nu^\infty}^{[i]}(s)|\Big)\Big),$$

alors h est un intégrande de Carathéodory. D'autre part,

$$\int_{\Gamma(t)} h(s,z)\nu_t^\infty(dz) = (u_\infty(s) - u_{\nu^\infty}(s))\Big(\int_{\Gamma(t)} f(s, u_{\nu^\infty}(s), u_{\nu^\infty}^{[2]}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s), z)\nu_t^\infty(dz)\Big)$$
$$= (u_\infty(s) - u_{\nu^\infty}(s))\left(g_{\nu^\infty}(s, u_{\nu^\infty}(s), u_{\nu^\infty}^{[2]}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\right),$$

et

$$\int_{\Gamma(t)} h(s,z)\nu_t^r(dz) = (u_\infty(s) - u_{\nu^\infty}(s))\Big(\int_{\Gamma(t)} f(s, u_{\nu^\infty}(s), u_{\nu^\infty}^{[2]}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s), z)\nu_t^r(dz)\Big)$$
$$= (u_\infty(s) - u_{\nu^\infty}(s))\left(g_{\nu^r}(s, u_{\nu^\infty}(s), u_{\nu^\infty}^{[2]}(s), \cdots, u_{\nu^\infty}^{[n]}(s))\right),$$

donc

$$|L_r^3(t)| \leq \int_0^t \Big|\int_{\Gamma(t)} h(s,z)(\nu_t^r - \nu_t^\infty)(dz)\Big| ds.$$

Comme $(\nu^r)_r$ converge $\sigma(L^\infty_{\mathcal{C}(Z)'}, L^1_{\mathcal{C}(Z)})$ vers ν^∞, nous concluons que $\lim_{r\to\infty} |L_r^3(t)| = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Enfin on obtient

$$\frac{1}{2}|u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^\infty}(t)|^2 \leq |L_r^2(t)| + |L_r^3(t)| + \int_0^t |u_{\nu^r}(s) - u_{\nu^\infty}(s)|\Big(\sum_{i=1}^n k_i(s)|u_{\nu^r}^{[i]}(s) - u_{\nu^\infty}^{[i]}(s)|\Big)ds.$$

D'après le Théorème 3.6, on conclut que

$$\|u_{\nu^r} - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}^2 \leq 2\left(|L_r^2(t)| + |L_r^3(t)| + \|u_{\nu^r} - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}^2\Big(\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}}\Big)\right).$$

Alors,

$$\lim_{r\to\infty} \|u_{\nu^r} - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}^2 \leq \lim_{r\to\infty} \|u_{\nu^r} - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}^2 \Big(2\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}}\Big),$$

qui est équivalent à

$$\left(1 - 2\sum_{i=1}^n \|k_i\|_{L^1_{\mathbb{R}}} \frac{1-\mathcal{M}^i}{1-\mathcal{M}}\right) \lim_{r\to\infty} \|u_{\nu^r} - u_{\nu^\infty}\|_{\mathcal{C}}^2 \leq 0.$$

Donc,

$$\lim_{r\to\infty} |u_{\nu^r}(t) - u_{\nu^\infty}(t)| = 0, \ \forall t \in [0,T].$$

Comme $(u_{\nu^r})_r$ converge uniformément vers u_∞, nous obtenons $u_{\nu^\infty} = u_\infty$. □

On donne maintenant notre résultat principal dans cette section. Le Théorème 3.12 et sa démonstration présentent de nouveaux résultats dans la théorie du contrôle relaxé car il s'agit ici d'une inclusion différentielle itérative du premier ordre.

Théorème 3.12. *Soit $J : [0,T]^{n+1} \times Z \to \mathbb{R}$ un intégrande de Carathéodory vérifiant l'hypothèse*

$(\mathcal{H})$ *pour toute suite (ξ^r) dans S_Γ, la suite $\big(J(\cdot, u_{\xi^r}(\cdot), u_{\xi^r}^{[2]}(\cdot), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(\cdot), \xi^r(\cdot))\big)_r$ est uniformément intégrable.*

Considérons les problèmes de contrôle

$$(P_{\mathcal{O}}) : \inf_{\xi \in S_{\Gamma}} \int_0^t J\left(t, u_{\xi}(t), u_{\xi}^{[2]}(t), \cdots, u_{\xi}^{[n]}(t), \xi(t)\right) dt,$$

et

$$(P_{\mathcal{R}}) : \inf_{\nu \in S_{\Sigma}} \int_0^t \left[\int_Z J\left(t, u_{\nu}(t), u_{\nu}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz)\right] dt,$$

où u_{ξ} *(resp.* u_{ν}*) est la solution unique associée à* ξ *(resp.* ν*) du problème* $(D_{\mathcal{O}})$ *(resp.* $(D_{\mathcal{R}})$*). Alors, nous avons* $\inf(P_{\mathcal{O}}) = \min(P_{\mathcal{R}})$.

Démonstration. D'après le Lemme 1.52, S_{Σ} est $\sigma(L^{\infty}_{\mathcal{C}(Z)'}, L^1_{\mathcal{C}(Z)})$ compact et S_{Γ} est dense dans S_{Σ} pour cette topologie.

Soit $\nu \in S_{\Sigma}$. Il existe une suite $(\xi^r) \in S_{\Gamma}$, telle que (δ_{ξ^r}) la mesure de Young associée à (ξ^r) est narrow convergente vers ν. Par le Lemme 3.11, (u_{ξ^r}) converge uniformément vers u_{ν} où pour tout $r \in \mathbb{N}$, u_{ξ^r} est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}_{\xi^r}(t) \in A(t)u_{\xi^r}(t) + f\left(t, u_{\xi^r}(t), u_{\xi^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(t), \xi^r(t)\right), \text{ p.p. } t \in [0,T]; \\ u_{\xi^r}(0) = u_0. \end{cases}$$

En utilisant la Proposition 1.32, on conclut que le produit $(\delta_{u_{\xi^r}} \otimes \delta_{u_{\xi^r}{}^{[2]}} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_{\xi^r}{}^{[n]}} \otimes \delta_{\xi^r})$ est narrow convergeant vers $\delta_{u_{\nu}} \otimes \delta_{u_{\nu}{}^{[2]}} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_{\nu}{}^{[n]}} \otimes \nu$.

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ nous donne $(J(t, u_{\xi^r}(t), u_{\xi^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(t), \xi^r(t))_r$ est uniformément intégrable et d'après le Théorème 1.29, on a

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^t J\left(t, u_{\xi^r}(t), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(t), \xi^r(t)\right) dt = \int_0^t \left[\int_{\Gamma(t)} J\left(t, u_{\nu}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz)\right] dt,$$

d'autre part, (ξ^r) est une suite minimisant de $(P_{\mathcal{O}})$, i.e.,

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^t J\left(t, u_{\xi^r}(t), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(t), \xi^r(t)\right) dt = \inf_{\xi(\cdot) \in S_{\Gamma}} \int_0^t J\left(t, u_{\xi}(t), \cdots, u_{\xi}^{[n]}(t), \xi(t)\right) dt,$$

alors,

$$\int_0^t J\left(t, u_{\xi^r}(t), u_{\xi^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\xi^r}^{[n]}(t), \xi^r(t)\right) dt \geq \inf(P_{\mathcal{O}}), \quad \forall r \in \mathbb{N},$$

nous concluons que

$$\int_0^t \left[\int_{\Gamma(t)} J\left(t, u_{\nu}(t), u_{\nu}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz)\right] dt \geq \inf(P_{\mathcal{O}}),$$

donc,

$$\inf(P_{\mathcal{R}}) \geq \inf(P_{\mathcal{O}}),$$

la densité de S_{Γ} dans S_{Σ} pour la topologie $\sigma(L^{\infty}_{\mathcal{C}(Z)'}, L^{1}_{\mathcal{C}(Z)})$, donne

$$\inf(P_{\mathcal{R}}) \leq \inf(P_{\mathcal{O}}).$$

Par conséquent

$$\inf(P_{\mathcal{R}}) = \inf(P_{\mathcal{O}}).$$

On doit montrer que $\inf(P_{\mathcal{O}})$ est vraiment le minimum.

Comme conséquence du Lemme 3.11, $S_{\mathcal{R}} = \{u_{\nu} \ : \nu \in S_{\Sigma}\}$ l'ensemble de solutions du $(P_{\mathcal{R}})$ est compact dans $(\mathcal{C}([0,T]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$.

Comme S_{Γ} est dense dans S_{Σ} pour la topologie $\sigma(L^{\infty}_{\mathcal{C}(Z)'}, L^{1}_{\mathcal{C}(Z)})$, il suffit de montrer que l'application $\Delta \ : \nu \mapsto \int_0^t \left[\int_Z J\left(t, u_{\nu}(t), u_{\nu}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz)\right] dt$ est continue sur S_{Σ}.

Soit (ν^r) une suite dans S_{Σ} converge $\sigma(L^{\infty}_{\mathcal{C}(Z)'}, L^{1}_{\mathcal{C}(Z)})$ vers ν, d'après le Lemme 3.11, on conclut que (u_{ν^r}) converge vers u_{ν} qui est solution du problème

$$\begin{cases} -\dot{u}_{\nu}(t) \in A(t)u_{\nu}(t) + \int_{\Gamma(t)} f(t, u_{\nu}(t), u_{\nu}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z)\nu_t(dz), \ \text{p.p. } t \in [0,T]; \\ u_{\nu}(0) = u_0. \end{cases}$$

Ce qui implique que $\delta_{u_{\nu^r}} \otimes \delta_{u_{\nu^r}^{[2]}} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_{\nu^r}^{[n]}} \otimes \nu^r$ converge $\sigma(L^{\infty}_{\mathcal{C}(Z)'}, L^{1}_{\mathcal{C}(Z)})$ vers $\delta_{u_{\nu}} \otimes \delta_{u_{\nu}^{[2]}} \otimes \cdots \otimes \delta_{u_{\nu}^{[n]}} \otimes \nu$. Comme J est un intégrande de Carathéodory L^1-borné, on obtient par le Théorème 1.30 que

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} \int_0^t \left[\int_Z J\left(t, u_{\nu^r}(t), u_{\nu^r}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu^r}^{[n]}(t), z\right) \nu_t^r(dz)\right] dt \\ &= \int_0^t \left[\int_Z J\left(t, u_{\nu}(t), u_{\nu}^{[2]}(t), \cdots, u_{\nu}^{[n]}(t), z\right) \nu_t(dz)\right] dt. \end{aligned}$$

D'où, $\inf(P_{\mathcal{R}}) = \min(P_{\mathcal{R}}) = \inf(P_{\mathcal{O}})$. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié l'existence de solutions pour une nouvelle classe de problèmes aux limites régis par des inclusions différentielles et leurs applications à des problèmes de contrôle optimal.

Dans la première partie, nous avons consacré l'étude aux inclusions différentielles itératives du premier ordre avec le second membre F est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes ou presque convexes.
Nos perspectives pour cette partie, c'est d'essayer de démontrer ces résultats avec d'autres hypothèses sur le second membre par exemple la multi-application F est presque semi-continue mixte.

La deuxième partie a été consacrée aux inclusions différentielles itératives régies par des opérateurs maximaux monotones avec une perturbation univoque f, comme perspectives, c'est d'essayer de généralisation ces résultats en remplaçant la perturbation univoque f par une perturbation multivoque F.

Bibliographie

[1] S. Adly, A. Hantoute and B.T. Nguyen, *Lyapunov stability of differential inclusions with Lipschitz Cusco perturbations of maximal monotone operators*, Set-Valued Var. Anal. **28(2)**, 345–368 (2020).

[2] D. Affane, *Quelques Problèmes de Contrôle Optimal pour des inclusions différentielles,* Ph.D. thesis, MSBY University of Jijel, Algeria (2012).

[3] D. Affane, M. Aissous and M.F. Yarou, *Existence results for sweeping process with almost convex perturbation,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. **61(2)**, 119–134 (2018).

[4] D. Affane, M. Aissous and M.F. Yarou, *Almost mixed semi-continuous perturbation of Moreau's sweeping process,* Evol. Equ. Control Theory. **9(1)**, 27–38 (2020).

[5] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *A control problem governed by a second-order differential inclusion.* Appl. Anal. **88(12)**, 1677–1690 (2009).

[6] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Almost convex valued perturbation to time optimal control sweeping processes*, ESAIM : Control Optim. Calc. Var. **23(1)**, 1–12 (2017).

[7] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Second-order differential inclusions with almost convex right-hand sides*, Electron. J. Qual. Theory Dif. Equ. **2011(34)**, 1–14 (2011).

[8] D. Affane, S. Boudada and and M.F. Yarou, *Unbounded perturbation to time-dependent subdifferential operators with delay*, Electr. J. Math. Anal. Appl. **2(8)**, 209–219 (2020).

[9] D. Affane and L. Boulkemh, *Topological properties for a perturbed first order sweeping process*, Acta Univ. Sapientiae Math. **13(1)**, 1–22 (2021).

[10] D. Affane and S. Ghalia, *First-order iterative differential inclusion,* EJMAA. **10(2)**, 1–10 (2022).

[11] D. Affane and M.F. Yarou, *Unbounded perturbation for a class of variational inequalities*, Discuss. Math. Di. inclu. control optim. **37**, 83–99 (2017).

[12] D. Affane and M.F. Yarou, *Perturbed first order state dependent Moreau's sweeping process*, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. **12**, 605–615 (2021).

[13] D. Affane and M.F. Yarou, *Perturbed second-order state-dependent Moreau's sweeping process*, Math. Anal. Contemp. Appl. **4(1)**, 9–23 (2022).

[14] D. Affane and M.F. Yarou, *Second order sweeping process with almost convex perturbation*, AIP Conf. Proc. **2183(1)**, 040002 (2019).

[15] D. Affane and M.F. Yarou, *Almost convex valued perturbation to second order sweeping process*, Math. Anal. Contemp. Appl. **5(2)**, 61–72 (2023).

[16] H. Attouch and A. Damlamian, *On multivalued evolution equations in Hilbert spaces,* Israel J. Math. **12(4)**, 373–390 (1972).

[17] J.P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[18] P. Bénilan and H. Brézis, *Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert*, Ann. Inst. Fourier. **22(2)**, 311–329 (1972).

[19] V. Berinde, *Existence and approximation of solutions of some first order iterative differential equations*, Miskolc Math. Notes. **11(1)**, 13–26 (2010).

[20] N. Boudjerida, D. Affane and M.F. Yarou, *Non-convex perturbation to evolution problems involving Moreau's sweeping process*, Ann. West Univ. Timisoara-Math. Comput. Sci. **59(1)**, 151–175 (2023).

[21] A. Bressan and V. Staicu, *On nonconvex perturbations of maximal monotone differential inclusions,* Set-Valued Anal. **2(3)**, 415–437 (1994).

[22] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Elsevier (1971).

[23] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Théor. Appl. (1983).

[24] A. Buică, *Existence and continuous dependence of solutions of some functional-differential equations*, Sem. Fixed Point Theory. **3(1)**, 1–14 (1995).

[25] C. Castaing, *Une nouvelle extension du théorème de Dragoni-Scorza*, C.R.Acad. Sc. Série A, Paris, t. **271**, 396–398 (1970).

[26] C. Castaing, P.R. De Fitte and M. Valadier, *Young Measures on Topological Spaces with Applications in Control Theory and Probability Theory*, Springer Science & Business (2004).

[27] C. Castaing, T.X.D. Hā and M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process*, Set-Valued Anal. **1**, 109–139 (1993).

[28] C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin. **580** (1977).

[29] A. Cellina and M.V. Marchi, *Non-convex perturbations of maximal monotone differential inclusions* Isr. J. Math. **46(1-2)**, 1–11 (1983).

[30] A. Cellina and A. Ornelas, *Existence of solution to differential inclusion and optimal control problems in the autonomous case*, Siam J. Control Optim. **42(1)**, 260–265 (2003).

[31] G. Colombo, A. Fonda and A. Ornelas, *Lower semicontinuous perturbations of maximal monotone differential inclusions,* Isr. J. Math. **61(21)**, 211–218 (1988).

[32] K. Deimling, *Multivalued Diffrential Equations*, De Gruyter, Berlin (1992).

[33] S. Djebali, L. Górniewicz and A. Ouahab, *Solution sets for differential equations and inclusions*, In Solution Sets for Differential Equations and Inclusions. de Gruyter (2012).

[34] E. Eder, *The functional differential equation* $x'(t) = x(x(t))$, J. Diff. Equa. **54(3)**, 390–400 (1984).

[35] M. Fečkan, *On a certain type of functional differential equations*, Math. Slovaca. **43(1)**, 39–43 (1993).

[36] W. Ge and Y. Mo, *Existence of solutions to differential iterative equation*, J. Beijing Inst. Tech. **6(3)**, 192–200 (1997).

[37] S. Ghalia and D. Affane, *Control problem governed by an iterative differential inclusion*, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. **72(4)**, 2621–2642 (2023).

[38] S. Ghalia and D. Affane, *On the attainable set of iterative differential inclusions*, Math. Slovaca. **73(6)**, 1479–1498 (2023).

[39] S. Hu and N.S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis : Volume II : Applications*, Springer Science & Business Media. **500** (2013).

[40] A. Kılıçman, F.H.M. Damag, *Some solution of the fractional iterative integro-differential equations*, Malays. J. Math. Sci. **12(1)**, 121–141 (2018).

[41] M. Kunze and M.D.P. Monteiro Marques, *BV solutions to evolution problems with time-dependent domains*, Set-Valued Anal. **5(1)**, 57–72 (1997).

[42] P. Kumlin, *A note on fixed point theory*, Func. Anal. Lect. Math., Chalmers & GU, Gothenburg (2004).

[43] M. Lauran, *Existence results for some differential equations with deviating argument*, Filomat. **25(2)**, 21–31 (2011).

[44] M. Lauran, *Solution of first iterative differential equations*, Ann. Univ. Craiova Math. Comput. Sci. Ser. **40(1)**, 45–51 (2013).

[45] B.K. Le, *Well-posedness and nonsmooth Lyapunov pairs for state-dependent maximal monotone differential inclusions,* Optimization. **69(6)**, 1187–1217 (2020).

[46] J.J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differ. Equations. **26(3)**, 347–374 (1977).

[47] R. Ominetti, J. Peypouquetx and S. Sorin, *Strong asymptotic convergence of evolution equations governed by maximal monotone operators with Tikhonov regularization*, J. Diff. Equations. **245(12)**, 3753–3763 (2008).

[48] N.S. Papageorgiou and N. Shahzad, *On maximal monotone differential inclusions in* $\mathbb{R}^N$, Acta Math. Hungar. **78(3)**, 175–197 (1998).

[49] N.S. Papageorgiou, *On the attainable set of differential inclusions and control systems*, J. Math. Anal. Appl. **125(2)**, 305–322 (1987).

[50] A. Pelczar, *On some iterative differential equations I*, Zeszyty Nauk. UJ, Prace Mat. **12**, 53–56 (1968).

[51] J.C. Peralba, *Un problème d'évolution relatif à un opérateur sous différentiel dépendant du temps*, CR Acad. Sci. Paris **275**, 93–96 (1972).

[52] S. Saïdi and M.F. Yarou, *Control problems governed by time-dependent maximal monotone operators*, ESAIM : Control Optim. Calc. Var. **23(2)**, 455–473 (2017).

[53] S. Unhaley, S. Kendre, *On existence and uniqueness results for iterative fractional integrodifferential equation with deviating arguments*, Appl. Math. E-Notes. **19**, 116–127 (2019).

[54] M. Valadier, *Young measures*, Methods of nonconvex analysis. Springer, Berlin, Heidelberg. **1446**, 152–188 (1990).

[55] M. Valadier, *A course on Young mesures*, Workshop di teoria della Misura e Analisi Reale, Grado, September 19-October 2, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 26 suppl. 349–394 (1994).

[56] E. Vilches, B.T. Nguyen, Evolution inclusions governed by time-dependent maximal monotone operators with a full domain, Set-Valued Var. Anal. **28**, 569–581 (2020).

[57] I.I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied mathematics. Longman Scientific and Technical. John Wiley and Sons, Inc. New York (1987).

[58] K. Wang, *On the equation* $x'(t) = f(x(x(t)))$, Funk. Ekva. **33**, 405–425 (1990).

[59] T. Wazewski, *Systemes de commande et equations au contingent*, Bull. Acad. Pol. Sc. **9**, 151–155 (1961).

[60] T. Wazewski, *Sur une condition équivalente à l'équation au contingent*, Bull Acad. Pol. Sc. **9**, 865–867 (1961).

[61] D.Yang and W. Zhang, *Solution of equivariance for iterative differential equations*, Appl. Math. Lett. **17(7)**, 759–765 (2004).

[62] W. Zhang, *Discussion on the differentiable solutions of the iterated equation* $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i f^i(x) = F(x)$, Nonlinear Anal. **15(4)**, 387–398 (1990).

[63] P. Zhang, *Analytic solutions for iterative functional differential equations*, Electron. J. Differential Equations. **2012(180)**, 1–7 (2012).

[64] P. Zhang and X. Gong, *Existence of solutions for iterative differential equations*, Electron. J. Differential Equations. **2014**, 1–10 (2014).

[65] J. Zhou and J. Shen, *Positive solutions of iterative functional differential equations and application to mixed-type functional differential equations*, DCDS-B. **27(7)**, 3605–3624 (2022).

ملخص

في هذه الأطروحة، نهتم بدراسة التضمينات التفاضلية التكرارية من الدرجة الأولى وتطبيقاتها. في الجزء الأول، نقدم نتيجتين للوجود حيث الجانب الأيمن عبارة عن تطبيق متعدد القيم شبه مستمر من الأعلى بقيم محدبة ومحدبة تقريبًا على التوالي ونعطي بعض الخصائص الطوبولوجية للمجموعة المؤهلة. في الجزء الثاني، نبرهن وجود ووحدانية الحل لتضمين تفاضلي تكراري يحكمه عامل رتيب أقصى مع اضطراب احادي القيم يحده تطبيق قابل للتكامل. يتم تطبيق نتائج الوجود هذه على مشاكل التحكم الأمثل.

Résumé

Dans cette thèse, on s’intéresse à l’étude des inclusions différentielles itératives du premier ordre et leurs applications. Dans la première partie, on présente deux résultats d'existence avec le second membre est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes et presque convexes respectivement et nous donnons quelques propriétés topologiques de l'ensemble admissible. Dans la deuxième partie, nous montrons l'existence et l'unicité de solution pour une inclusion différentielle itérative gouvernée par un opérateur maximal monotone avec une perturbation univoque bornée par une application intégrable. Ces résultats d'existence sont appliqués aux problèmes de contrôle optimal.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the first-order iterative differential inclusions and their applications. In the first part, we present two existence results where the right-hand side is an upper semi-continuous multi-application with convex and almost convex values respectively and we give some topological properties of the attainable set. In the second part, we prove the existence and uniqueness of the solution to an iterative differential inclusion governed by a maximal monotone operator with single-valued perturbation bounded by an integrable mapping. These existence results are applied to optimal control problems.