REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel

Thèse

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse

Présentée par

Yacine Halim

Étude du comportement des solutions de certaines classes d'équations aux différences

Soutenue le 12 mars 2016 devant le jury composé de :

Mr. T. Zerzaihi	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Président
Mr. N. Touafek	Prof	U. Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel	Rapporteur
Mr. A. Gasmi	Prof	U. Mohamed Boudiaf, M'sila	Examinateur
Mme. F. Z. Nouri	Prof	U. Mokhtar Badji, Annaba	Examinatrice
Mr. A. Salmi	MCA	U. Mokhtar Badji, Annaba	Examinateur
Mr. M. S. Abdelouahab	MCA	C. U. Abdelhafid Boussouf, Mila	Examinateur

À ma famille, passée, présent et future

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont premièrement à Allah le tout Puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnés pour terminer cette thèse.

Je voudrais après, remercier Mr. Nouressadat Touafek , mon directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui et je ne peux qu'admirer son talent. Je lui suis infiniment reconnaissante, non seulement parce qu'il a accepté de me prendre en thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible et en venant me chercher très souvent pour que l'on discute, ce qui m'a énormément encouragé. Je le remercie aussi d'avoir lu très sérieusement beaucoup de versions préliminaires de ces travaux.

Je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont manifesté leur intérêt pour ce travail, qui ont pris de leur temps pour lire ces pages, le temps d'une remarque ou d'un commentaire, le temps de m'écouter. À ce titre, je remercie particulièrement Mr. Tahar Zerzaihi, Mr. Abdelkader Gasmi, Mme. Fatma Zohra Nouri, Mr. Abdelouahab Salmi et Mr. Mohamed-salah Abdelouahab membres du jury.

Je remercie avec une profonde sympathie ceux qui m'ont accueilli à l'université Paul Sabatier a Toulouse, particulièrement Mr. Jacques Sauloy, et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de leur part.

Mais je ne saurai jamais comment remercier mes parents, pour leur soutien indéfectible.

RÉSUMÉ

Le but de cette thèse est l'étude du comportement des solutions d'une variété d'équations et systèmes d'équations aux différences.

Deux équations de type max et deux systèmes dont les solutions sont en relation avec la suite de Fibonacci feront l'objet du premier chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité des solutions de trois équations aux différences rationnelles quotient des polynômes homogènes à deux indéterminés.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons la forme fermée des solutions, nous étudions la stabilité des points d'équilibres et la périodicité d'une équation et deux systèmes de type Ricatti d'ordre supérieur.

Mots-clés : Équations aux différences, Systèmes d'équations aux différences, Stabilité, Périodicité, Suite de Fibonacci.

ABSTRACT

The aim this of thesis is to study the behavior of some difference equations and systems of difference equations.

Two equations of Max-type and two systems with solutions associated to Fibonacci sequence will be the subject of the first chapter.

The second chapter is devoted to the stability of the solutions of three rational difference equations defined as the quotient of two dimensional homogenous polynomials.

Finally, in the last chapter, we give the closed forme of the solutions, we study the stability of the equilibrium points and the periodicity of a difference equations and two systems of higher-order of Ricatti-type.

Keywords : Difference equation, Systems of difference equations, Stability, periodicity, Fibonacci sequence.

ملخـص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة سلوك الحلول لمجموعة من معادلات الفروق و جمل معادلات الفروق.

معادلتي فروق من الصنف أعظمي وجملتي معادلات فروق مع حلول ذات علاقة بمتتالية فيبوناتشي هي موضوع الفصل الأول.

نقوم في الفصل الثاني بدراسة الاستقرار لثلاث معادلات فروق معرفة كحاصل قسمة كثيري حدود متجانسين بمتغيرين .

في الفصل الثالث، نعطي الشكل الصريح للحلول، ندرس استقرار نقاط التوازن والدورية لمعادلة فروق وجملتي معادلات فروق من صنف ريكاتي ذات رتب عليا.

الكلمات الأساسية: معادلات الفروق، جمل معادلات الفروق، الاستقرار، الدورية، أعداد فيبوناتشي.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement des solutions de certains équations aux différences et systèmes d'équations aux différences. Les équations aux différences sont à la base de l'analyse appliquée depuis L. Euler (1707-1783), P. L. Tchebycheff (1821-1894) et A. A. Markov (1856-1922).

Récemment, une grande attention a été accordé aux équations aux différences par des chercheurs de diverses disciplines. Il est possible que cela soit dû à l'avènement des ordinateurs, où les équations différentielles sont résolues en utilisant leurs formulations approximatives en termes d'équations aux différences. En utilisant un ordinateur, on peut facilement expérimenter avec des équations aux différences et découvrir que ces équations possèdent des propriétés fascinantes, avec beaucoup de structure et de régularité. Bien sûr, toutes les observations et les prédictions informatiques doivent également être prouvées analytiquement.

Les équations aux différences apparaissent comme des phénomènes décrivant naturellement une évolution observée, la plupart des mesures de l'évolution des variables temporelles étant discrètes et, pour cela, ces équations revêtent une importance particulière dans les modèles mathématiques, décrivant des situations de vie réelle, que ce soit dans la théorie des probabilités, les problèmes de files d'attente, les problèmes statistiques, les séries temporelles stochastiques, l'analyse combinatoire, la théorie des nombres, la géométrie, les réseaux électriques, les quanta de rayonnement, la génétique en biologie, etc.

Plus important encore, les équations aux différences apparaissent également dans l'étude des méthodes de discrétisation des équations différentielles. Plusieurs résultats de la théorie des équations aux différences ont été obtenus comme des analogues discrets plus ou moins naturels de résultats correspondants d'équations différentielles. Cela est particulièrement vrai dans le cas de la théorie de la stabilité de Lyapunov.

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques définitions et résultats connus qui seront utiles dans notre travail.

Définition 0.0.1 *Une équation aux différences linéaire d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = g(n), n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1}$$

avec $g(n)$, $p_i(n)$, $i = 1, ..., k$ sont des fonctions réelles et

$$p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0,\ \mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \ldots, n_0 \; entier\; positif\}.$$

Remarque 0.0.1 *En générale on associe k conditions initiales avec l'équation* (1)

$$y_{n_0} = c_1,\ y_{n_0+1} = c_2, ...,\ y_{n_0+k-1} = c_k \tag{2}$$

avec, c_i, $i = 1, \ldots, k$ sont des constantes réelles où complexes.

Définition 0.0.2 *Une solution de l'équation aux différences* (1) *est une suite $\{U_n\}_{n \geq n_0}$ d'éléments de corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui satisfait la relation* (1)*.*

Corollaire 0.0.1 *Avec les conditions initiales* (2)*, on a une et une seul solution de l'équation* (1).

Définition 0.0.3 *Si $g(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$, l'équation* (1) *est dite homogène et elle prend la forme*

$$y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)y_n = 0, n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3}$$

Lemme 0.0.1 *L'ensemble S des solutions de l'équation* (3) *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension k.*

Soit maintenant l'équation aux différences linéaire homogène d'ordre k a coefficients constants

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = 0, n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{4}$$

avec $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k$ et $a_k \neq 0$.

Théorème 0.0.1 *L'équation aux différences* (4) *a des solutions de la forme $y_n = \lambda^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ si λ est racine du polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k. \tag{5}$$

Définition 0.0.4 *le polynôme $P(\lambda)$ s'appelle le polynôme caractéristique associé à l'équation aux différences* (4).

Remarque 0.0.2

1. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont racines distinctes de $P(\lambda)$, alors $\left\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\right\}$ est une base de l'espace S.*
2. *Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r (r < k)$ sont racines de $P(\lambda)$, avec leurs multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_r$ avec $\sum_{i=1}^{r} m_i = k$, alors $\left\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, n\lambda_2^n, \ldots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \ldots, \lambda_r^n, n\lambda_r^n, \ldots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\right\}$ est une base de l'espace S.*

On donne maintenant deux exemples d'équations aux différences linéaires, qui seront ultérieurement utilisées pour exprimer les solutions de certains equations et systèmes d'équations aux différences.

Définition 0.0.5 *La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}_{n\geq 0}$*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ n \geq 0 \\ F_0 = 0, \ F_1 = 1 \end{cases} \tag{6}$$

La solution de l'équation (6) est donnée par la formule suivante

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{7}$$

dite formule de Binet, avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nous avons les identités suivantes pour les nombres de Fibonacci :

i) ***L'identité de Cassini*** : Pour $n > 0$, on a

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{8}$$

ii) ***L'identité d'Ocagne*** : Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r. \tag{9}$$

iii) ***L'identité de Johnson*** : Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tels que $k + l = m + n$,

$$F_kF_l - F_mF_n = (-1)^r(F_{k-r}F_{l-r} - F_{m-r}F_{n-r}). \tag{10}$$

En 1965, Horadam [28] a présenté une certaine généralisation de la suite de Fibonacci, il définit la suite récurrente linéaire de deuxième ordre $\{W_n(a, b; p, q)\}_{n\geq 0}$, ou simplement $\{ W_n\}_{n\geq 0}$, par

$$\begin{cases} W_{n+2} = pW_{n+1} + qW_n, \ n \geq 0 \\ W_0 = a, W_1 = b \end{cases} \tag{11}$$

où a, b et p, q sont des nombres réels avec $n \geq 0$. La formule de Binet pour les nombres d'Horadam est donnée par

$$W_n = \frac{A\Phi_+^n - B\Phi_-^n}{\Phi_+ - \Phi_-}$$

où $A = b - a\Phi_-$, $B = b - a\Phi_+$, avec, $\Phi_\pm$ est la racine de l'équation caractéristique

$$\Phi_\pm = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Il est claire que, $\Phi_+ + \Phi_- = p$, $\Phi_+ - \Phi_- = \sqrt{p^2 + 4q}$ et $\Phi_+\Phi_- = -q$. En plus on a la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+r}}{W_n} = \Phi_+^r,$$

où $r \in \mathbb{Z}$. Nous avons les identités suivantes pour les nombres d'Horadam :

i) ***L'identité de Cassini*** : Pour $n > 0$, on a

$$W_{n-1}W_{n+1} - W_n^2 = -(-q)^{n-1}. \tag{12}$$

ii) ***L'identité d'Ocagne*** : Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{n+r}W_{n+1} - W_{n+r+1}W_n = (-1)^n q^n W_r. \tag{13}$$

iii) ***L'identité de Johnson*** : Pour k, l, m, n et $r \in \mathbb{N}$ tel que $k + l = m + n$,

$$W_k W_l - W_m W_n = (-q)^r (W_{k-r}W_{l-r} - W_{m-r}W_{n-r}). \tag{14}$$

Lemme 0.0.2 [40] *On a*

i) *Pour* $n > k + 1$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \mathbb{N}_{n_0}$, *on a*

$$W_n = W_{k+1}W_{n-k} + qW_k W_{n-(k+1)}. \tag{15}$$

ii) *Pour* $n > 0$, $\Phi_+^n = \Phi_+ W_n + W_{n-1}$ *et* $\Phi_-^n = \Phi_- W_n + W_{n-1}$.

Dans la suite, on s'intéresse aux équations aux différences non linéaires. Soit G une partie de $\mathbb{R}$ et soit

$$F : G^{k+1} \longrightarrow G$$

une fonction continue.

Définition 0.0.6 *Une équation aux différences d'ordre* $(k + 1)$

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \ n = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

avec les valeurs initiales $x_0, \ x_{-1}, ..., \ x_{-k} \in G$, *est dite non linéaire s'il n'est pas de la forme* (1).

Définition 0.0.7 (Point d'équilibre)

Un point $\overline{x} \in G$ *est dit point d'équilibre pour l'équation* (16) *si*

$$\overline{x} = F(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}).$$

Définition 0.0.8 (Stabilité)

i) *Le point d'équilibre $\overline{x}$ est dit localement stable (où stable) si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour chaque $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots x_0 \in G$ avec*

$$|x_{-k} - \overline{x}| + |x_{-k+1} - \overline{x}| + \ldots + |x_0 - \overline{x}| < \delta,$$

on ait

$$|x_n - \overline{x}| < \epsilon, \forall n \geq -k.$$

ii) *Le point d'équilibre $\overline{x}$ est dit localement asymptotiquement stable si $\overline{x}$ est localement stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour chaque $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots x_0 \in G$ avec*

$$|x_{-k} - \overline{x}| + |x_{-k+1} - \overline{x}| + \ldots + |x_0 - \overline{x}| < \gamma,$$

on ait

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}.$$

iii) *Le point d'équilibre $\overline{x}$ est dit globalement attractif si pour chaque $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots x_0 \in G$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}.$$

iv) *Le point d'équilibre $\overline{x}$ est dit globalement asymptotiquement stable si $\overline{x}$ est localement stable et globalement attractif.*

v) *Le point d'équilibre $\overline{x}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Définition 0.0.9 (Périodicité)

Une solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ de l'équation (16) *est dite éventuellement périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $n_0 \geq -k$, tel que*

$$x_{n+p} = x_n \text{ pour chaque } n \geq n_0.$$

Si $n_0 = -k$, la solution $\{x_n\}_{n=-k}^{+\infty}$ est dite périodique.

Supposons en plus que F (dans (16)) est une fonction différentiable au voisinage du point d'équilibre $\overline{x}$.

Définition 0.0.10 *On appelle équation aux différences linéaire associée à l'équation* (16) *l'équation*

$$y_{n+1} = p_0 y_n + p_1 y_{n-1} + ... + p_k y_{n-k}, \tag{17}$$

avec

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}),\ i = 0, 1, ..., k,$$

et

$$p(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k + ... - p_k.$$

son polynôme caractéristique associé.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour la stabilité locale asymptotique de l'équation (16).

Théorème 0.0.2 (Stabilité par linéarisation, [32])

1. *Si toutes les racines du polynôme caractéristique sont dans le disque unité ouvert* $|\lambda| < 1$, *alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (16) *est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une racine du polynôme caractéristique a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (16) *est instable.*

Théorème 0.0.3 (Théorème de Rouché, [4]) *Soient* $f(z)$, $g(z)$ *deux fonctions holomorphes dans un ouvert* Ω *du plan complexe* $\mathbb{C}$, *et soit* K *un compact contenu dans* Ω. *Si on a*

$$\left|g(z)\right| < \left|f(z)\right|,\ \forall\, z \in \partial K,$$

alors le nombre de zéros de $f(z) + g(z)$ *dans* K *est égal au nombre de zéros de* $f(z)$ *dans* K.

On donne maintenant quelque théorèmes de convergence ([22]) pour les équations aux différences d'ordre 2, utile pour la démonstration de nos résultats.

Théorème 0.0.4 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0, 1, ... \tag{18}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a,b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) *$g(x,y)$ est croissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et décroissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,*

2) *Si (m,M) est une solution du système*

$$m = g(m,M),\ M = g(M,m)$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (18) *admet un seul point d'équilibre $\overline{x}$ et toute solution de l'équation* (18) *converge vers $\overline{x}$.*

Théorème 0.0.5 *Considérons l'équation aux différences définie par*

$$x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1}),\ n = 0,1,... \tag{19}$$

avec

$$g : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]\ , a,b \in \mathbb{R}.$$

Supposons que g est une fonction continue telle que

1) *$g(x,y)$ est décroissante par rapport à $x \in [a,b]$ pour chaque $y \in [a,b]$ et $g(x,y)$ et croissante par rapport à $y \in [a,b]$ pour chaque $x \in [a,b]$,*

2) *Si (m,M) est une solution du système*

$$m = g(M,m),\ M = g(m,M)$$

donc $m = M$.

Alors l'équation (19) *admet un seul point d'équilibre $\overline{x}$ et toute solution de l'équation* (19) *converge vers $\overline{x}$.*

Théorème 0.0.6 *Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et soit*

$$F : I \times I \longrightarrow I$$

une fonction $F(u,v)$, décroissante par rapport à u et croissante par rapport à v. Alors pour chaque solution $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de l'équation

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}),\ n = 0.1, \ldots,$$

les sous-suites $\{x_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{x_{2n+1}\}_{n=-1}^{\infty}$ des termes paires sont

i) *Soit les deux décroissantes.*

ii) *Soit les deux croissantes.*

ii) *L'un d'eux est croissante et l'autre est décroissante.*

Les résultats suivants [15, 39] donnent l'ordre de convergence pour les solutions d'un système d'équations aux différences.
Soit le système d'équations aux différences

$$X_{n+1} = (A + B_n)\, X_n,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{20}$$

où X_n est un vecteur, $A \in C^{m\times m}$ est une matrice constante, et $B : Z^+ \to C^{m\times m}$ est une matrice fonctionnelle satisfaisant

$$\|B_n\| \to 0 \tag{21}$$

quand $n \to \infty$.

Théorème 0.0.7 (Première Théorème de Perron) *Supposons que la condition (21) est vérifier. Si X_n est une solution de (20), alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand, où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\|X_{n+1}\|}{\|X_n\|} \tag{22}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

Théorème 0.0.8 (Deuxième Théorème de Perron) *Supposons que la condition (21) est vérifier. Si X_n est une solution de (20), alors soit $X_n = 0$ pour chaque n assez grand où*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} (\|X_n\|)^{1/n} \tag{23}$$

existe et est égale au module de l'une des valeurs propres de la matrice A.

En plus de l'introduction, la thèse est structuré en trois chapitres :
Dans la première partie du chapitre 1, nous étudions la périodicité et la forme des solutions des équations aux différences de type max suivantes

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{x_{n-1}}\right\},\ n = 0, 1, \ldots,$$

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}^2}\right\},\ n = 0, 1, \ldots,$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls, voir [52].
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous exprimons les solutions des systèmes d'équations aux différences suivantes

$$x_{n+1} = \frac{y_n(x_{n-2} + y_{n-3})}{y_{n-3} + x_{n-2} - y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-2})}{2x_{n-1} + y_{n-2}},\ n = 0, 1, \ldots,$$

$$x_{n+1} = \frac{(y_{n-3} - x_{n-2})y_n}{y_{n-3} - x_{n-2} + y_n}, y_{n+1} = \frac{(y_{n-2} - x_{n-1})x_{n-1}}{y_{n-2}},\ n = 0, 1, \ldots,$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls, en fonction des nombres de Fibonacci, voir [25].

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude de la stabilité globale ainsi que la périodicité des solutions de trois cas particulières de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_j x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + \sum_{j=1}^{k-1} B_j x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k}, k = 3, 4, \ldots; n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

où les paramètres $a,\ c,\ A,\ C, b_j, B_j\ j = 1, 2, ...k - 1$ et les valeurs initiales x_0, x_{-1} sont des nombres réels strictement positifs. Bien précisément, on étudiera l'équation (24) dans les cas :

1) k=3, voir [51].

2) k=5.

3) $b_j = b, B_j = B, j = 1, 2, ...k - 1$ avec $b, B \in \mathbb{R}$, voir [26].

Le dernier chapitre est divisée en deux parties, dans la première (voir [27]) , nous donnons la forme générale des solutions et nous prouvons la stabilité du seul point d'équilibre positive pour l'équation

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\pm\beta + \gamma x_{n-k}};\ n = 0, 1, \ldots, \tag{25}$$

Notons que si on considère le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\pm\beta + \gamma y_{n-k}},\ y_{n+1} = \frac{\delta}{\pm\lambda + \mu x_{n-m}};\ n = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, x_{-k}, \ldots, x_0, y_{-k}, \ldots, y_0 \in]0, +\infty[, k, m \in \mathbb{N}$, alors la solution de l'équation (25) s'obtient de la solution du système (26) en choisissant $\alpha = \delta$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$, $k = m$, $x_{-i} = y_{-i}, i = 0, 1, \ldots, k$. Donc l'équation (25) peut être regarder comme un cas particulier du système (26), malheureusement nous n'avons pas obtenu la forme des solutions du système (26). Néanmoins le système

$$x_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp y_{n-k}},\ y_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp x_{n-k}},$$

a été complètement résolu, ce système fera l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

CHAPITRE 1

FORME DES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

1.1 Quelques équations de type max

Récemment un grand intérêt a été accordé à l'étude d'équations aux différences de type max, par exemple, dans [43], les auteurs ont obtenu les solutions de l'équation aux différences de type max suivante

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}, n = 0, 1, \ldots,$$

de même l'équation aux différences de type max suivante

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-2}, \frac{1}{x_{n-2}}\right\}, n = 0, 1, \ldots,$$

à été étudier dans [17].(Pour d'autres équations et systèmes de ce type voir [21, 30, 31]). Motivé par [17],[43], nous étudions les solutions des équations aux différences suivantes

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}, n = 0, 1, \dots,$$

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}^2}\right\}, n = 0, 1, \dots,$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls.

1.1.1 L'équation : $x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}$

Considérons l'équation aux différences de type max suivante

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}, \ n = 0, 1, \dots \tag{1.1}$$

où les valeurs initiales x_{-1} et x_0 sont des nombres réels non nuls.

Les théorèmes suivants décrites la forme des solutions de l'équation (1.1).

Théorème 1.1.1 *Supposons $x_0, x_{-1} > 0$.*

1) Si $x_0,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k}, \ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}}, \ k = 1, 2, ...$$

2) Si $x_0,\ x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}}, \ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k}, \ k = 1, 2, ...$$

3) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k}, \ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k}, \ k = 1, 2, ...$$

4) Si $x_0 \leq 1$, $x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}}, \ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}}, \ k = 1, 2, ...$$

Preuve.

1. Soient $x_0 \leq 1, x_{-1} \leq 1$, en utilisant le fait que x_{-1}^2, $x_0^2 \leq 1$ *et* $\frac{1}{x_{-1}}$, $\frac{1}{x_0} \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= \max\left\{x_{-1}^2, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}, \\ x_3 &= \max\left\{x_1^2, \frac{1}{x_1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}^2}, \\ x_5 &= \max\left\{x_3^2, \frac{1}{x_3}\right\} = \frac{1}{x_{-1}^4}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} x_2 &= \max\left\{x_0^2, \frac{1}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}, \\ x_4 &= \max\left\{x_2^2, \frac{1}{x_2}\right\} = \frac{1}{x_0^2}, \\ x_6 &= \max\left\{x_4^2, \frac{1}{x_4}\right\} = \frac{1}{x_0^4} \end{aligned}$$

Donc, par récurrence, on obtient que

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k}, \ k = 0, 1, ...,$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^k}, \ k = 1, 2, ...$$

De même, par récurrence on démontre facilement les formules donner dans 2), 3) et 4).

■

Théorème 1.1.2 *Supposons $x_0, x_{-1} < 0$.*

1) Si $x_0,\ x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}}\ ,\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

2) Si $x_0,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_1 = x_{-1}^2,\ x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

et

$$x_2 = x_0^2,\ x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}},\ k = 2, 3, ...$$

3) Si $x_0 \geq -1,\ x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_2 = x_0^2,\ x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}},\ k = 2, 3, ...$$

4) Si $x_0 \leq -1,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_1 = x_{-1}^2,\ x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

Théorème 1.1.3 *Supposons $x_0 > 0, x_{-1} < 0$.*

1) Si $x_0 \leq 1,\ x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}}\ ,\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

2) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_1 = x_{-1}^2,\ x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k}\ ,\ k = 1, 2, ...$$

3) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

4) Si $x_0 \leq 1,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_1 = x_{-1}^2,\ x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

et

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}},\ k = 1, 2, ...$$

Théorème 1.1.4 *Supposons $x_0 < 0, x_{-1} > 0$.*

1) Si $x_0 \leq -1,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

2) Si $x_0 \geq -1,\ x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_2 = x_0^2,\ x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}},\ k = 2, 3, ...$$

3) Si $x_0 \geq -1,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^{2^k},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_2 = x_0^2,\ x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^{2^{k-1}},\ k = 2, 3, ...$$

4) Si $x_0 \leq -1,\ x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = (x_{-1})^{2^{k+1}},\ k = 0, 1, ...$$

et

$$x_{2k} = (x_0)^{2^k},\ k = 1, 2, ...$$

1.1.2 L'équation : $x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}^2}\right\}$

Considérons l'équation aux différences de type max suivante

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}^2}\right\},\ n = 0, 1, ..., \tag{1.2}$$

où les valeurs initiales x_{-1} et x_0 sont des nombres réels non nuls. Dans chaque cas, on en déduit que les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

Les théorèmes suivants décrites la forme des solutions de l'équation (1.2).

Théorème 1.1.5 *Supposons $x_0, x_{-1} > 0$.*

1) Si $x_0,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

2) Si $x_0,\ x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = x_{-1},\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = x_0,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq -1$, et les solutions sont périodiques de période deux.

3) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = x_0,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

4) Si $x_0 \leq 1,\ x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = x_{-1},\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2, \; k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

Preuve.

1. Soient $x_0 \leq 1, x_{-1} \leq 1$, en utilisant le fait que $x_{-1}^2,\; x_0^2 \leq 1$ *et* $\dfrac{1}{x_{-1}},\; \frac{1}{x_0} \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1 &= \max\left\{x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}^2}\right\} = \frac{1}{x_{-1}^2}, \\ x_2 &= \max\left\{x_0, \frac{1}{x_0^2}\right\} = \frac{1}{x_0^2}, \\ x_3 &= \max\left\{x_1, \frac{1}{x_1^2}\right\} = \frac{1}{x_{-1}^2}, \\ x_4 &= \max\left\{x_2, \frac{1}{x_2^2}\right\} = \frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Par recurrence, on obtient que

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2, \; k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2, \; k = 1, 2, ...$$

donc

$$x_{n+2} = x_n \text{ pour } n \geq 1,$$

et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

De même, par récurrence on démontre facilement les cas 2), 3) et 4)

■

Théorème 1.1.6 *Supposons $x_0, x_{-1} < 0$.*

1) Si $x_0,\; x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_1 = \frac{1}{x_{-1}^2},\; x_{2k+1} = x_{-1}^4,\; k = 1, 2, ...$$

$$x_2 = \frac{1}{x_0^2},\ x_{2k} = x_0^4,\ k = 2, 3, ...,$$

donc $x_{n+2} = x_n$ *for* $n \geq 3$, *et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.*

2) Si $x_0,\ x_{-1} \geq -1$. *Alors*

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, 2, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ *pour* $n \geq 1$, *et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.*

3) Si $x_0 \geq -1,\ x_{-1} \leq -1$. *Alors*

$$x_1 = \frac{1}{x_{-1}^2},\ x_{2k+1} = (x_{-1})^4,\ k = 1, 2, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ *pour* $n \geq 2$, *et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.*

4) Si $x_0 \leq -1,\ x_{-1} \geq -1$. *Alors*

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_2 = \frac{1}{x_0^2},\ x_{2k} = (x_0)^4,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ *pour* $n \geq 3$, *et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.*

Théorème 1.1.7 *Supposons* $x_0 > 0, x_{-1} < 0$.

1) Si $x_0 \leq 1,\ x_{-1} \leq -1$. *Alors*

$$x_1 = \frac{1}{x_{-1}^2},\ x_{2k+1} = (x_{-1})^4,\ k = 1, 2, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ *pour* $n \geq 2$, *et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.*

2) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = x_0,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 0$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

3) Si $x_0 \geq 1,\ x_{-1} \leq -1$. Alors

$$x_1 = \frac{1}{x_{-1}^2},\ x_{2k+1} = (x_{-1})^4,\ k = 1, 2, ...$$

et

$$x_{2k} = x_0,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 2$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

4) Si $x_0 \leq 1,\ x_{-1} \geq -1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

Théorème 1.1.8 *Supposons $x_0 < 0, x_{-1} > 0$.*

1) Si $x_0 \leq -1,\ x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_2 = \frac{1}{x_0^2},\ x_{2k} = (x_0)^4,\ k = 2, 3, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 3$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

2) Si $x_0 \geq -1$, $x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = x_{-1},\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

3) Si $x_0 \geq -1$, $x_{-1} \leq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = \left(\frac{1}{x_{-1}}\right)^2,\ k = 0, 1, ...$$

$$x_{2k} = \left(\frac{1}{x_0}\right)^2,\ k = 1, 2, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 1$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

4) Si $x_0 \leq -1$, $x_{-1} \geq 1$. Alors

$$x_{2k+1} = x_{-1},\ k = 0, 1, ...$$

$$x_2 = \frac{1}{x_0^2},\ x_{2k} = (x_0)^4,\ k = 2, 3, ...$$

donc $x_{n+2} = x_n$ pour $n \geq 3$, et les solutions sont éventuellement périodiques de période deux.

1.2 Quelques systèmes d'équations rationnelles

Dans la classe d'équations aux différences non linéaires, les équations rationnelles est le type d'équations le plus étudier, voir [2, 5, 10, 11, 13, 18, 19, 37, 38].

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions des deux systèmes d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{y_n(x_{n-2} + y_{n-3})}{y_{n-3} + x_{n-2} - y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-2})}{2x_{n-1} + y_{n-2}}, n = 0, 1, \ldots,$$

$$x_{n+1} = \frac{(y_{n-3} - x_{n-2})y_n}{y_{n-3} - x_{n-2} + y_n}, y_{n+1} = \frac{(y_{n-2} - x_{n-1})x_{n-1}}{y_{n-2}}, n = 0, 1, \ldots,$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls.

1.2.1 Le système $x_{n+1} = \frac{y_n(x_{n-2}+y_{n-3})}{y_{n-3}+x_{n-2}-y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1}+y_{n-2})}{2x_{n-1}+y_{n-2}}$

Soit le système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{y_n(x_{n-2} + y_{n-3})}{y_{n-3} + x_{n-2} - y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n-1}(x_{n-1} + y_{n-2})}{2x_{n-1} + y_{n-2}} \tag{1.3}$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls avec $\frac{y_{-3}+x_{-2}}{y_0} \notin \left\{1, \frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$ et $\frac{y_{-2}}{x_{-1}}, \frac{y_{-1}}{x_0} \notin \left\{\frac{F_{2n+3}}{F_{2n+2}}, n = 1, 2, ...\right\}$, où $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

Lemme 1.2.1 *Soit* $\left\{x_n\right\}_{n\geq -2}, \left\{y_n\right\}_{n\geq -3}$ *une solution de* (1.3). *Alors pour* $n \geq -1$ *on a*

$$x_{n+3} = x_n,$$

c'est à dire $\left\{x_n\right\}_{n\geq -2}$ *est éventuellement périodique.*

Preuve.

$$\begin{aligned} x_{n+3} &= x_{(n+2)+1} = \frac{y_{n+2}(x_n + y_{n-1})}{y_{n-1} + x_n - y_{n+2}} \\ &= \frac{\left(\dfrac{x_n(y_{n-1} + x_n)}{2x_n + y_{n-1}}\right)(x_n + y_{n-1})}{y_{n-1} + x_n - \left(\dfrac{x_n(y_{n-1} + x_n)}{2x_n + y_{n-1}}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{x_n(y_{n-1} + x_n)^2}{2x_n + y_{n-1}}}{\dfrac{(y_{n-1} + x_n)^2}{2x_n + y_{n-1}}} = x_n. \end{aligned}$$

Donc on a

$$x_{n+3} = x_n, \; n \geq -1.$$

■

Remarque 1.2.1 *Si* $x_{-2} = y_0 - \frac{y_{-3}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4y_0^2 + y_{-3}^2}$, *alors* $x_1 = x_{-2}$, *c'est à dire*

$$x_{n+3} = x_n,\ n \geq -2.$$

et $\left\{x_n\right\}_{n\geq -2}$ *est périodique de période trois.*

Le théorème suivant décrit la forme des solutions de système (1.3).

Théorème 1.2.1 *Soit* $\{x_n\}_{n\geq-2}$, $\{y_n\}_{n\geq-3}$ *une solution de* (1.3). *Donc pour* $n = 0, 1, ...,$

$$\begin{aligned}
x_{3n} &= x_0, & y_{3n} &= y_0\left(\frac{y_{-3}+x_{-2}}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+1}-y_0F_{2n-1}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+2}-y_0F_{2n}}\right),\\
x_{3n+1} &= \frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}, & y_{3n+1} &= x_{-1}\left(\frac{x_{-1}F_{2n+2}+y_{-2}F_{2n+1}}{x_{-1}F_{2n+3}+y_{-2}F_{2n+2}}\right),\\
x_{3n+2} &= x_{-1}, & y_{3n+2} &= x_0\left(\frac{x_0F_{2n+2}+y_{-1}F_{2n+1}}{x_0F_{2n+3}+y_{-1}F_{2n+2}}\right),
\end{aligned}$$

où $F_{-1} = 1$.

Preuve. De (1.3), on a

$$x_1 = \frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0},\ y_1 = \frac{x_{-1}(x_{-1}+y_{-2})}{2x_{n-1}+y_{n-2}}.$$

Donc,

$$x_2 = \frac{y_1(x_{-1}+y_{-2})}{y_{-2}+x_{-1}-y_1} = \frac{\frac{x_{-1}(x_{-1}+y_{-2})}{2x_{n-1}+y_{n-2}}(x_{-1}+y_{-2})}{y_{-2}+x_{-1}-\frac{x_{-1}(x_{-1}+y_{-2})}{2x_{n-1}+y_{n-2}}} = x_{-1}\left(\frac{\frac{(x_{-1}+y_{-2})^2}{2x_{n-1}+y_{n-2}}}{\frac{(x_{-1}+y_{-2})^2}{2x_{n-1}+y_{n-2}}}\right) = x_{-1}.$$

D'après le lemme (1.2.1), on obtient $x_3 = x_0$, $x_4 = \frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}$, $x_5 = x_{-1}$ et la suite se répète, c'est à dire

$$x_{3n} = x_0,\ x_{3n+1} = \frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0},\ x_{3n+2} = x_{-1}.$$

Maintenant, nous prouvons la formules de $\{y_n\}_{n\geq-3}$. On a

$$y_2 = x_0\left(\frac{x_0+y_{-1}}{2x_0+y_{-1}}\right),$$

donc le résultat est vérifié pour $n = 0$. Supposons que $n > 0$ et que le résultat est vérifié pour $n - 1$, c'est à dire

$$
\begin{aligned}
y_{3n-3} &= y_0\left(\frac{y_{-3}+x_{-2}}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right),\\
y_{3n-2} &= x_{-1}\left(\frac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right),\\
y_{3n-1} &= x_0\left(\frac{x_0F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_0F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right).
\end{aligned}
$$

Maintenant, il découle de système (1.3) que

$$
\begin{aligned}
y_{3n} &= \frac{x_{3n-2}(x_{3n-2}+y_{3n-3})}{2x_{3n-2}+y_{3n-3}}\\
&= \frac{\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left[\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)+y_0\left(\frac{y_{-3}+x_{-2}}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right)\right]}{\left[2\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)+y_0\left(\frac{y_{-3}+x_{-2}}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right)\right]}\\
&= \frac{\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left[1+\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right)\right]}{\left[2+\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right)\right]}\\
&= \frac{\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}{\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}\\
&= \frac{\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}{\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}+(y_{-3}+x_{-2})F_{2n-1}-y_0F_{2n-3}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}\\
&= \frac{\left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+1}-y_0F_{2n-1}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}{\left[\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+2}-y_0F_{2n}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n}-y_0F_{2n-2}}\right]}.
\end{aligned}
$$

Donc, on a

$$
y_{3n} = \left(\frac{y_0(x_{-2}+y_{-3})}{y_{-3}+x_{-2}-y_0}\right)\left(\frac{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+1}-y_0F_{2n-1}}{(y_{-3}+x_{-2})F_{2n+2}-y_0F_{2n}}\right).
$$

Aussi, il découle de système (1.3) que

$$\begin{aligned}
y_{3n+1} &= \frac{x_{3n-1}\left(x_{3n-1}+y_{3n-2}\right)}{2x_{3n-1}+y_{3n-2}}\\
&= \frac{x_{-1}\left(x_{-1}+x_{-1}\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)\right)}{2x_{-1}+x_{-1}\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)} = \frac{x_{-1}\left(1+\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)\right)}{2+\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)}\\
&= \frac{x_{-1}\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}+x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)}{\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}+x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}+x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n-1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)}\\
&= \frac{x_{-1}\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n+2}+y_{-2}F_{2n+1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)}{\left(\dfrac{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}+x_{-1}F_{2n+2}+y_{-2}F_{2n+1}}{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n}}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$y_{3n+1} = x_{-1}\left(\frac{x_{-1}F_{2n+2}+y_{-2}F_{2n+1}}{x_{-1}F_{2n+3}+y_{-2}F_{2n+2}}\right).$$

De même, il découle de système (1.3) que

$$\begin{aligned}
y_{3n+2} &= \frac{x_{3n}\left(x_{3n}+y_{3n-1}\right)}{2x_{3n}+y_{3n-1}}\\
&= \frac{x_{0}\left(x_{0}+x_{-1}\left(\dfrac{x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)\right)}{2x_{0}+x_{0}\left(\dfrac{x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)} = \frac{x_{0}\left(1+\left(\dfrac{x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)\right)}{2+\left(\dfrac{x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)}\\
&= \frac{x_{0}\left(\dfrac{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}+x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)}{\left(\dfrac{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}+x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}+x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n-1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)}\\
&= \frac{x_{0}\left(\dfrac{x_{0}F_{2n+2}+y_{-1}F_{2n+1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)}{\left(\dfrac{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}+x_{0}F_{2n+2}+y_{-1}F_{2n+1}}{x_{0}F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n}}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$y_{3n+2} = x_0 \left(\frac{x_0 F_{2n+2} + y_{-1} F_{2n+1}}{x_0 F_{2n+3} + y_{-1} F_{2n+2}} \right).$$

La preuve est terminée. ■

1.2.2 Le système $x_{n+1} = \frac{(y_{n-3}-x_{n-2})y_n}{y_{n-3}-x_{n-2}+y_n}$, $y_{n+1} = \frac{(y_{n-2}-x_{n-1})x_{n-1}}{y_{n-2}}$

Considérons le système d'équation aux différences suivant

$$x_{n+1} = \frac{(y_{n-3} - x_{n-2})y_n}{y_{n-3} - x_{n-2} + y_n}, \, y_{n+1} = \frac{(y_{n-2} - x_{n-1})x_{n-1}}{y_{n-2}} \tag{1.4}$$

où les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls avec $\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{y_{-2}}{x_{-1}} \notin \left\{ -\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}, -\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ... \right\}$ et $\frac{y_{-2}-y_{-3}}{y_0} \notin \left\{ \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}, \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}, n = 1, 2, ... \right\}$, où $\{F_n\}_{n \geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

Le théorème suivant décrit la forme des solutions de système (1.4).

Théorème 1.2.2 *Soit* $\{x_n\}_{n \geq -2}$, $\{y_n\}_{n \geq -3}$ *une solution du système* (1.4). *Alors pour* $n = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned}
x_{6n} &= \frac{x_0^2 (y_{-1} - x_0) y_{-1}}{(x_0 F_{2n-2} + y_{-1} F_{2n-1}) (x_0 F_{2n-1} + y_{-1} F_{2n}) (x_0 F_{2n} + y_{-1} F_{2n+1})}, \\
x_{6n+1} &= -\frac{((x_{-2} - y_{-3}) y_0)^2}{(x_{-2} F_{2n} - y_0 F_{2n-1} - y_{-3} F_{2n}) (x_{-2} F_{2n+1} - y_0 F_{2n} - y_{-3} F_{2n+1})} \\
&\times \frac{1}{(x_{-2} F_{2n+2} - y_0 F_{2n+1} - y_{-3} F_{2n+2})}, \\
x_{6n+2} &= \frac{x_{-1}^2 (y_{-2} - x_{-1}) y_{-2}}{(x_{-1} F_{2n-1} + y_{-2} F_{2n}) (x_{-1} F_{2n} + y_{-2} F_{2n+1}) (x_{-1} F_{2n+1} + y_{-2} F_{2n+2})}, \\
x_{6n+3} &= \frac{x_0^2 (y_{-1} - x_0) y_{-1}}{(x_0 F_{2n-1} + y_{-1} F_{2n}) (x_0 F_{2n} + y_{-1} F_{2n+1}) (x_0 F_{2n+1} + y_{-1} F_{2n+2})}, \\
x_{6n+4} &= -\frac{((x_{-2} - y_{-3}) y_0)^2}{(x_{-2} F_{2n+1} - y_0 F_{2n} - y_{-3} F_{2n+1}) (x_{-2} F_{2n+2} - y_0 F_{2n+1} - y_{-3} F_{2n+2})} \\
&\times \frac{1}{(x_{-2} F_{2n+3} - y_0 F_{2n+2} - y_{-3} F_{2n+3})}, \\
x_{6n+5} &= \frac{x_{-1}^2 (y_{-2} - x_{-1}) y_{-2}}{(x_{-1} F_{2n} + y_{-2} F_{2n+1}) (x_{-1} F_{2n+1} + y_{-2} F_{2n+2}) (x_{-1} F_{2n+2} + y_{-2} F_{2n+3})},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_{6n} &= \frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2},\\
y_{6n+1} &= \frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2},\\
y_{6n+2} &= \frac{x_0^2\left(y_{-1}-x_0\right)y_{-1}}{\left(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_0F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)^2},\\
y_{6n+3} &= \frac{\left(y_0\left(x_{-2}-y_{-3}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)\left(y_{-3}F_{2n+2}+y_0F_{2n+1}-x_{-2}F_{2n+2}\right)^2},\\
y_{6n+4} &= \frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)\left(x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n+2}\right)^2},\\
y_{6n+5} &= \frac{x_0^2\left(y_{-1}-x_0\right)y_{-1}}{\left(x_0F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)\left(x_0F_{2n+1}+y_{-1}F_{2n+2}\right)^2},
\end{aligned}
$$

où $F_{-2}=-1$, $F_{-1}=1$.

Preuve. On a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{((x_{-2}-y_{-3})y_0)^2}{y_0(x_{-2}-y_{-3})(x_{-2}-y_0-y_{-3})}, & y_1 &= \frac{x_{-1}(y_{-2}-x_{-1})}{y_{-2}},\\
x_2 &= \frac{x_{-1}(y_{-2}-x_{-1})}{x_{-1}+y_{-2}}, & y_2 &= \frac{x_0(y_{-1}-x_0)}{y_{-1}},\\
x_3 &= \frac{x_0(y_{-1}-x_0)}{x_0+y_{-1}}, & y_3 &= \frac{(y_0(x_{-2}-y_{-3}))^2}{(y_{-3}-x_{-2})(y_{-3}+y_0-x_{-2})^2},\\
x_4 &= \frac{(y_0(y_{-3}-x_{-2}))^2}{(x_{-2}-y_{-3})(x_{-2}-y_0-y_{-3})(2x_{-2}-y_0-2y_{-3})}, & y_4 &= \frac{x_{-1}(y_{-2}-x_{-1})}{(x_{-1}+y_{-2})^2},\\
x_5 &= \frac{x_{-1}^2(y_{-2}-x_{-1})}{(x_{-1}+y_{-2})(x_{-1}+2y_{-2})}, & y_5 &= \frac{x_0^2(y_{-1}+x_0)}{(x_0+y_{-1})},
\end{aligned}
$$

donc le résultat est vérifié pour $n=0$. Supposons que $n>0$ et que que le résultat est vérifié pour $n-1$, c'est à dire

$$
\begin{aligned}
x_{6n-6} &= \frac{x_0^2\left(y_{-1}-x_0\right)y_{-1}}{\left(x_0F_{2n-4}+y_{-1}F_{2n-3}\right)\left(x_0F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)},\\
x_{6n-5} &= -\frac{\left(\left(x_{-2}-y_{-3}\right)y_0\right)^2}{\left(x_{-2}F_{2n-2}-y_0F_{2n-3}-y_{-3}F_{2n-2}\right)\left(x_{-2}F_{2n-1}-y_0F_{2n-2}-y_{-3}F_{2n-1}\right)}\\
&\times \frac{1}{\left(x_{-2}F_{2n}-y_0F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n}\right)},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
x_{6n-4} &= \frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-3}+y_{-2}F_{2n-2}\right)\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)},\\
x_{6n-3} &= \frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)},\\
x_{6n-2} &= -\frac{\left(\left(x_{-2}-y_{-3}\right)y_{0}\right)^{2}}{\left(x_{-2}F_{2n-1}-y_{0}F_{2n-2}-y_{-3}F_{2n-1}\right)\left(x_{-2}F_{2n}-y_{0}F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n}\right)}\\
&\times \frac{1}{\left(x_{-2}F_{2n+1}-y_{0}F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}\right)},\\
x_{6n-1} &= \frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)},\\
y_{6n-6} &= \frac{\left(y_{0}\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^{2}}{\left(y_{-3}F_{2n-2}+y_{0}F_{2n-3}-x_{-2}F_{2n-2}\right)\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_{0}F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)^{2}},\\
y_{6n-5} &= \frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-3}+y_{-2}F_{2n-2}\right)\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)^{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{6n-4} &= \frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)^{2}},\\
y_{6n-3} &= \frac{\left(y_{0}\left(x_{-2}-y_{-3}\right)\right)^{2}}{\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_{0}F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)\left(y_{-3}F_{2n}+y_{0}F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^{2}},\\
y_{6n-2} &= \frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^{2}},\\
y_{6n-1} &= \frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}.
\end{aligned}$$

Maintenant il découle du système (1.4) que

$$\begin{aligned}
x_{6n} &= \frac{(y_{6n-4}-x_{6n-3})y_{6n-1}}{y_{6n-4}-x_{6n-3}+y_{6n-1}}\\
&= \frac{\left(\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)}-\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}\right)\left(\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)^{2}\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}\right)}{\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)}\left[\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)}-\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}\right]+\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}}\\
&= \frac{\left(\frac{x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}-x_{0}F_{2n-2}-y_{-1}F_{2n-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}\right)\left(\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)^{2}\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}\right)}{\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}\right)\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)}\left[\frac{x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}-x_{0}F_{2n-2}-y_{-1}F_{2n-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}\right]+\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_0F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right)\left(\frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2})(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})^2(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^2}\right)}{\frac{1}{(x_0F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2})(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})}\left[\frac{x_0F_{2n-3}+y_{-1}F_{2n-2}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right]+\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})^3(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^3}\right)}{\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})}\left[\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right]+\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})^3(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^3}\right)}{\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\left[\frac{1}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})}+\frac{1}{(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})^2(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})^2}\right)}{\left[\frac{x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}+x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right]} = \frac{\left(\frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})}\right)}{[x_0F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}]}.$$

Donc, on a

$$x_{6n} = \frac{x_0^2(y_{-1}-x_0)y_{-1}}{(x_0F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1})(x_0F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n})(x_0F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1})}.$$

Aussi, il découle du système (1.4) que

$$\begin{aligned}
y_{6n} &= \frac{(y_{6n-3}-x_{6n-2})x_{6n-2}}{y_{6n-3}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n})}+\frac{1}{(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1})}\right)}{\left(\frac{1}{(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n})}\right)} \\
&\times -\frac{((x_{-2}-y_{-3})y_0)^2}{(x_{-2}F_{2n-1}-y_0F_{2n-2}-y_{-3}F_{2n-1})(x_{-2}F_{2n}-y_0F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n})} \\
&\times \frac{1}{(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1})} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}+y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}}{(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n})(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1})}\right)}{\left(\frac{1}{(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n})}\right)} \\
&\times \left(-\frac{((x_{-2}-y_{-3})y_0)^2}{(x_{-2}F_{2n-1}-y_0F_{2n-2}-y_{-3}F_{2n-1})(x_{-2}F_{2n}-y_0F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n})}\right) \\
&\times \frac{1}{(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1})} \\
&= -\frac{((x_{-2}-y_{-3})y_0)^2}{(x_{-2}F_{2n}-y_0F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n})(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1})^2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y_{6n} = \frac{\left(y_0\left(y_{-3} - x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n} + y_0F_{2n-1} - x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1} + y_0F_{2n} - x_{-2}F_{2n+1}\right)^2}.$$

De même

$$\begin{aligned} x_{6n+1} &= \frac{(y_{6n-3} - x_{6n-2})y_{6n}}{y_{6n-3} - x_{6n-2} + y_{6n}} \\ &= \frac{G_1(x_{-2}, y_0, y_{-3})}{H_1(x_{-2}, y_0, y_{-3})}. \end{aligned}$$

Avec

- $G_1(x_{-2}, y_0, y_{-3}) = \frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^3\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_0F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)}$
$\times\left(\frac{y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}+x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}}{\left(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}\right)}\right)$,
- $H_1(x_{-2}, y_0, y_{-3}) = \frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_0F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)}\left(\frac{y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}+x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^2\left(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}\right)}\right)+$
$+\frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2}$.

Alors on obtient

$$x_{6n+1} = \frac{G_2(x_{-2}, y_0, y_{-3})}{H_2(x_{-2}, y_0, y_{-3})}.$$

Avec

- $G_2(x_{-2}, y_0, y_{-3}) = \frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^3\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_0F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)}$
$\times\left(\frac{x_{-2}F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n-1}-y_0F_{2n-2}}{\left(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}\right)}\right)$,
- $H_2(x_{-2}, y_0, y_{-3}) = \frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n-1}+y_0F_{2n-2}-x_{-2}F_{2n-1}\right)}\left(\frac{x_{-2}F_{2n-1}-y_{-3}F_{2n-1}-y_0F_{2n-2}}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^?\left(x_{-2}F_{2n+1}-y_0F_{2n}-y_{-3}F_{2n+1}\right)}\right)+$
$+\frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2}$.

Donc on a

$$\begin{aligned} x_{6n+1} &= \frac{\frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^3\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^3}}{\frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(-x_{-2}F_{2n+1}+y_0F_{2n}+y_{-3}F_{2n+1}\right)}\left(\frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)}+\frac{1}{\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)} \\ &= \frac{\frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)^2\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)^2}}{\left(\frac{y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}+y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)} = -\frac{\frac{\left(y_0\left(y_{-3}-x_{-2}\right)\right)^2}{\left(y_{-3}F_{2n}+y_0F_{2n-1}-x_{-2}F_{2n}\right)\left(y_{-3}F_{2n+1}+y_0F_{2n}-x_{-2}F_{2n+1}\right)}}{\left(x_{-2}F_{2n+2}-y_0F_{2n+1}-y_{-3}F_{2n+2}\right)}. \end{aligned}$$

D'où

$$x_{6n+1} = -\frac{\left(\left(x_{-2} - y_{-3}\right) y_0\right)^2}{\left(x_{-2}F_{2n} - y_0F_{2n-1} - y_{-3}F_{2n}\right)\left(x_{-2}F_{2n+1} - y_0F_{2n} - y_{-3}F_{2n+1}\right)\left(x_{-2}F_{2n+2} - y_0F_{2n+1} - y_{-3}F_{2n+2}\right)}.$$

De même

$$\begin{aligned}
y_{6n+1} &= \frac{(y_{6n-2} - x_{6n-1})x_{6n-1}}{y_{6n-2}} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^2} - \frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)}{\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^2}} \\
&\times \frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)} - \frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}-x_{-1}F_{2n-1}-y_{-2}F_{2n}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Donc on a

$$y_{6n+1} = \frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2}.$$

De même

$$\begin{aligned}
x_{6n+2} &= \frac{\left(\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)} - \frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^2\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}\left(\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)} - \frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right) + \frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2}} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}-x_{-1}F_{2n-1}-y_{-2}F_{2n}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^2\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^2\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}\left(\frac{x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}-x_{-1}F_{2n-1}-y_{-2}F_{2n}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right) + \frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^{2}\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{2}}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}\right)\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}\left(\frac{x_{-1}F_{2n-2}+y_{-2}F_{2n-1}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)+\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{2}}}$$

$$= \frac{\frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^{3}\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{3}}}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}\left(\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right)+\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^{3}\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{3}}\right)}{\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\left[\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)}+\frac{1}{\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)^{2}\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)^{2}}\right)}{\left[\frac{x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n+2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)}\right]}.$$

Donc, on a

$$x_{6n+2} = \frac{x_{-1}^{2}\left(y_{-2}-x_{-1}\right)y_{-2}}{\left(x_{-1}F_{2n-1}+y_{-2}F_{2n}\right)\left(x_{-1}F_{2n}+y_{-2}F_{2n+1}\right)\left(x_{-1}F_{2n+1}+y_{-2}F_{2n+2}\right)}.$$

De même

$$\begin{aligned}
y_{6n+2} &= \frac{(y_{6n-1}-x_{6n})x_{6n}}{y_{6n-1}} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}-\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}\right)}{\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)^{2}}} \\
&\times \frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}-\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}}{\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}} \\
&= \frac{\left(\frac{x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}-x_{0}F_{2n-1}-y_{-1}F_{2n}}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-2}+y_{-1}F_{2n-1}\right)\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}}{\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}\right)\frac{x_{0}^{2}\left(y_{-1}-x_{0}\right)y_{-1}}{\left(x_{0}F_{2n-1}+y_{-1}F_{2n}\right)\left(x_{0}F_{2n}+y_{-1}F_{2n+1}\right)}.
\end{aligned}$$

Alors on a

$$y_{6n+2} = \frac{x_0^2 \left(y_{-1} - x_0\right) y_{-1}}{\left(x_0 F_{2n-1} + y_{-1} F_{2n}\right) \left(x_0 F_{2n} + y_{-1} F_{2n+1}\right)^2}.$$

D'une manière analogue on démontre les autres formules. ■

CHAPITRE 2

SUR LA STABILITÉ GLOBALE DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES D'ORDRE DEUX

2.1 Introduction

Notre objectif dans ce chapitre est l'étude de la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences suivante

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k + \sum_{j=1}^{k-1} b_j x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + \sum_{j=1}^{k-1} B_j x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k}, \quad k = 3, 4, \ldots; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

où les paramètres a, c, A, C, b_j, B_j $j = 1, 2, ...k-1$ et les valeurs initiales x_0, x_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.

Plus précisément nous étudions l'équation aux différences (2.1) dans les trois cas particuliers : $k = 3, k = 5$ et $b_j = b, B_j = B, j = 1, 2, ...k-1$ avec $b, B \in \mathbb{R}$.

2.2 Première équation

Dans cette section nous étudions la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^3 + bx_nx_{n-1}^2 + cx_n^2x_{n-1} + dx_{n-1}^3}{Ax_n^3 + Bx_nx_{n-1}^2 + Cx_n^2x_{n-1} + Dx_{n-1}^3},\ n = 0, 1, ..., \tag{2.2}$$

où les paramètres a, b, c, d, A, B, C, D et les valeurs initiales x_0, x_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.
Considérons la fonction $f :]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[$ définie par

$$f(x, y) = \frac{ax^3 + bxy^2 + cx^2y + dy^3}{Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3}.$$

2.2.1 Périodicité des solutions

Dans le théorème suivant, on étudiera la périodicité des solutions positifs de l'équation (2.2).

Théorème 2.2.1 *Soient*

$$\begin{aligned}
q_1 &= (B + D)a + Dc - Ad,\\
q_2 &= (B + C + D)a + (-A + D)b + (B + D)c - (A + C)d,\\
q_3 &= (A + B + C + D)a + (-A + B - C + D)b + (-A + B + C + D)c\\
&\quad +(-A - C - B + D)d.
\end{aligned}$$

Supposons que $q_1,\ q_2,\ q_3 \geq 0$. Alors l'équation (2.2) *n'a aucune solution périodique de période deux.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux nombres réels distincts α et β strictement positifs, tel que

$$\ldots,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha,\ \beta, \ldots$$

soit solution périodique de période deux de l'équation (2.2). Donc, on a

$$\alpha = f(\beta, \alpha),\ \beta = f(\alpha, \beta).$$

Alors, on a

$$\beta f(\beta, \alpha) - \alpha f(\alpha, \beta) = 0,$$

ce qui donne

$$(\beta - \alpha)\frac{aD(\alpha^6 + \beta^6) + q_1\alpha\beta(\alpha^4 + \beta^4) + q_2\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) + q_3\alpha^3\beta^3}{(A\beta^3 + B\beta\alpha^2 + C\beta^2\alpha + D\alpha^3)(A\alpha^3 + B\alpha\beta^2 + C\alpha^2\beta + D\beta^3)} = 0.$$

Comme

$$\frac{aD(\alpha^6 + \beta^6) + q_1\alpha\beta(\alpha^4 + \beta^4) + q_2\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) + q_3\alpha^3\beta^3}{(A\beta^3 + B\beta\alpha^2 + C\beta^2\alpha + D\alpha^3)(A\alpha^3 + B\alpha\beta^2 + C\alpha^2\beta + D\beta^3)} > 0.$$

On obtient $\beta = \alpha$, qui est une contradiction. ■

2.2.2 Stabilité locale et globale des points d'équilibres

Notons d'abord que l'équation (2.2) admet dans $]0, +\infty[$ un seul point d'équilibre, et il est donné par

$$\overline{x} = \frac{a + b + c + d}{A + B + C + D}.$$

Dans la suite nous avons besoin des nombres réels suivants :

$$r_1 = aB - bA, r_2 = aC - cA, r_3 = aD - dA, r_4 = cB - bC, r_5 = bD - dB, r_6 = cD - dC.$$

le lemme suivant est consacré à l'étude de la monotonie de la fonction f.

Lemme 2.2.1

1. *Supposons que*
   - $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,

- $\dfrac{d}{D} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
- $3r_3 + r_4 \geq 0$.

Alors, f est décroissante par rapport à x pour chaque y et croissante par rapport à y pour chaque x.

2. *Supposons que*
   - $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
   - $\dfrac{d}{D} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
   - $3r_3 + r_4 \leq 0$.

   Alors, f est croissante par rapport à x pour chaque y et décroissante par rapport à y pour chaque x.

Preuve.

1. On a $3r_3 + r_4 \geq 0$, de plus $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ et $\dfrac{d}{D} \leq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ implique que

$$r_1, r_2, r_5, r_6 \geq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_2x^4y + 2r_1x^3y^2 + (3r_3 + r_4)x^2y^3 + 2r_6xy^4 + r_5y^5}{(Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-r_2x^5 - 2r_1x^4y - (3r_3 + r_4)x^3y^2 - 2r_6x^2y^3 - r_5xy^4}{(Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3)^2}.$$

2. On a $3r_3 + r_4 \leq 0$, de plus $\dfrac{a}{A} \leq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ et $\dfrac{d}{D} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ implique que

$$r_1, r_2, r_5, r_6 \leq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_2x^4y + 2r_1x^3y^2 + (3r_3 + r_4)x^2y^3 + 2r_6xy^4 + r_5y^5}{(Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-r_2x^5 - 2r_1x^4y - (3r_3 + r_4)x^3y^2 - 2r_6x^2y^3 - r_5xy^4}{(Ax^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dy^3)^2}.$$

■

Dans le théorème suivant nous prouvons que les solutions de l'équation aux différences (2.2) sont bornées.

Théorème 2.2.2 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.2).

1. *Supposons que*
   - $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
   - $\dfrac{d}{D} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$.

   Alors, pour $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*
$$\frac{d}{D} \leq x_n \leq \frac{a}{A}.$$
2. *Supposons que*
   - $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
   - $\dfrac{d}{D} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$.

   Alors, pour $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*
$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{d}{D}.$$

Preuve.

1. On a
$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_2 x_n^2 x_{n-1} - r_1 x_n x_{n-1}^2 - r_3 x_{n-1}^3}{A(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^2 + Cx_n^2 x_{n-1} + Dx_{n-1}^3)},$$
$$x_{n+1} - \frac{d}{D} = \frac{r_3 x_n^3 + r_6 x_n^2 x_{n-1} + r_5 x_n x_{n-1}^2}{D(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^2 + Cx_n^2 x_{n-1} + Dx_{n-1}^3)}.$$
   Maintenant, en utilisant le fait que $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ et $\dfrac{d}{D} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$, on obtient
$$r_1, r_2, r_3, r_5, r_6 \geq 0.$$
   Alors,
$$\frac{d}{D} \leq x_n \leq \frac{a}{A}, \quad n \geq 1.$$

2. On a

$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_2 x_n^2 x_{n-1} - r_1 x_n x_{n-1}^2 - r_3 x_{n-1}^3}{A(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^2 + Cx_n^2 x_{n-1} + Dx_{n-1}^3)},$$

$$x_{n+1} - \frac{d}{D} = \frac{r_3 x_n^3 + r_6 x_n^2 x_{n-1} + r_5 x_n x_{n-1}^2}{D(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^2 + Cx_n^2 x_{n-1} + Dx_{n-1}^3)}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\frac{a}{A} \leq \min\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$ et $\frac{d}{D} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$, on obtient

$$r_1, r_2, r_3, r_5, r_6 \leq 0.$$

Alors

$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{d}{D}, \quad n \geq 1.$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D}$ de l'équation (2.2) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.3 *Supposons que*

$$\frac{2|2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6|}{(a+b+c+d)(A+B+C+D)} < 1.$$

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D}$ de l'équation (2.2) *est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation aux différences linéaire associée de l'équation (2.2) autour du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D}$ est donnée par

$$x_{n+1} = px_n + qx_{n-1},$$

avec

$$p = \frac{(2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6)}{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}, \ q = -\frac{(2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6)}{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0.$$

Soient h et g deux fonctions définies par

$$h(\lambda) = \lambda^2,\ g(\lambda) = p\lambda + q.$$

On a

$$|g(\lambda)| \leq |p| + |q| = \frac{2|2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6|}{(a+b+c+d)(A+B+C+D)} < 1 = |h(\lambda)|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, touts les zéros de $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le Théorème (0.0.2), $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable. ∎

La stabilité asymptotique globale de l'équation (2.2), sera l'objet des deux résultats suivants.

Théorème 2.2.4 *Soient*

$$\begin{aligned}
p_1 &= -Da + Ab + (A+C)d,\\
p_2 &= -(B+D)a + (A+C)b + (A-D)c + (A+B+C)d,\\
p_3 &= (A-B-C-D)a + (A+B+C-D)b + (A-B+C-D)c\\
&\quad +(A+B+C+D)d.
\end{aligned}$$

Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
- $\dfrac{d}{D} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
- $3r_3 + r_4 \geq 0$,
- $\dfrac{2(2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6)}{(a+b+c+d)(A+B+C+D)} < 1$,
- $p_1,\ p_2,\ p_3 \geq 0$.

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D}$ *de l'équation* (2.2) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation (2.2). D'après le Théorème (2.2.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Soit

$$m = \lim_{n\to+\infty} inf x_n$$

et

$$M = \lim_{n\to+\infty} sup x_n.$$

Pour prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x},$$

il suffit de montrer que $m = M$.

Soit $\epsilon \in]0, m[$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n \geq n_0$ on obtient

$$m - \epsilon \leq x_n \leq M + \epsilon.$$

D'après la première partie du Lemme (2.2.1), on obtient pour tous $n \geq n_0 + 1$

$$x_{n+1} \geq \frac{a(m-\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + c(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + d(M+\epsilon)^3}{A(m-\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + C(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + D(M+\varepsilon)^3},$$

$$x_{n+1} \leq \frac{a(M+\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + c(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + d(m-\epsilon)^3}{A(M+\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + C(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + D(m-\epsilon)^3}.$$

Ce qui implique

$$m \geq \frac{a(m-\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + c(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + d(M+\epsilon)^3}{A(m-\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + C(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + D(M+\varepsilon)^3},$$

$$M \leq \frac{a(M+\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + c(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + d(m-\epsilon)^3}{A(M+\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + C(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + D(m-\epsilon)^3},$$

et donc

$$m \geq \frac{am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3},$$

$$M \leq \frac{aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3}.$$

Ainsi

$$mM \geq \frac{M(am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3)}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3},$$

$$mM \leq \frac{m(aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3)}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3}.$$

D'où

$$\frac{M(am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3)}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3} - \frac{m(aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3)}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3} \leq 0,$$

qui et donc

$$(M - m)\frac{dA(m^6 + M^6) + p_1 mM(m^4 + M^4) + p_2 m^2M^2(m^2 + M^2) + p_3 m^3M^3}{(Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3)(AM^3 + BmM^2 + Cm^2M + Dm^3)} \leq 0.$$

Comme

$$\frac{dA(m^6 + M^6) + p_1 mM(m^4 + M^4) + p_2 m^2M^2(m^2 + M^2) + p_3 m^3M^3}{(Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3)(AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3)} > 0,$$

On obtient

$$M \leq m.$$

Alors,

$$m = M = \overline{x}.$$

■

Théorème 2.2.5 *Soient*

$$\begin{aligned}
q_1 &= (B + D)a + Dc - Ad, \\
q_2 &= (B + C + D)a + (-A + D)b + (B + D)c - (A + C)d, \\
q_3 &= (A + B + C + D)a + (-A + B - C + D)b + (-A + B + C + D)c \\
&\quad +(-A - C - B + D)d.
\end{aligned}$$

Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
- $\dfrac{d}{D} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$,
- $3r_3 + r_4 \leq 0$,
- $\dfrac{-2(2r_1 + r_2 + 3r_3 + r_4 + r_5 + 2r_6)}{(a + b + c + d)(A + B + C + D)} < 1$,

- $q_1, q_2, q_3 \geq 0$.

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D}$ *de l'équation* (2.2) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation (2.2). D'après le Théorème (2.2.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Soit

$$m = \lim_{n\to+\infty} inf x_n$$

et

$$M = \lim_{n\to+\infty} sup x_n.$$

Pour prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x},$$

il suffit de montrer que $m = M$.

Soit $\epsilon \in]0, m[$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $n \geq n_0$ on obtient

$$m - \epsilon \leq x_n \leq M + \epsilon.$$

D'après la deuxième partie du lemme (2.2.1) ; on obtient pour tous $n \geq n_0 + 1$

$$x_{n+1} \leq \frac{a(m-\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + c(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + d(M+\epsilon)^3}{A(m-\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + C(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + D(M+\varepsilon)^3},$$

$$x_{n+1} \geq \frac{a(M+\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + c(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + d(m-\epsilon)^3}{A(M+\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + C(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + D(m-\epsilon)^3}.$$

Ce qui implique

$$M \geq \frac{a(m-\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + c(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + d(M+\epsilon)^3}{A(m-\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + C(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + D(M+\varepsilon)^3},$$

$$m \leq \frac{a(M+\epsilon)^3 + b(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + c(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + d(m-\epsilon)^3}{A(M+\epsilon)^3 + B(m-\epsilon)^2(M+\epsilon) + C(m-\epsilon)(M+\epsilon)^2 + D(m-\epsilon)^3}.$$

et donc

$$M \geq \frac{am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3},$$

$$m \leq \frac{aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3}.$$

Ainsi

$$mM \geq \frac{m(am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3)}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3},$$

$$mM \leq \frac{M(aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3)}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3}.$$

D'où

$$\frac{m(am^3 + bmM^2 + cm^2M + dM^3)}{Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3} - \frac{M(aM^3 + bm^2M + cmM^2 + dm^3)}{AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3} \leq 0,$$

qui et donc

$$(M-m)\frac{dA(m^6+M^6) + q_1 mM(m^4+M^4) + q_2 m^2M^2(m^2+M^2) + q_3 m^3M^3}{(Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3)(AM^3 + BmM^2 + Cm^2M + Dm^3)} \leq 0.$$

Comme

$$\frac{dA(m^6+M^6) + q_1 mM(m^4+M^4) + q_2 m^2M^2(m^2+M^2) + q_3 m^3M^3}{(Am^3 + BmM^2 + Cm^2M + DM^3)(AM^3 + Bm^2M + CmM^2 + Dm^3)} > 0,$$

On obtient

$$M \leq m.$$

Alors,

$$m = M = \overline{x}.$$

■

2.2.3 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons les exemples numériques suivants :

Exemple 2.2.1 *Si on prend* $(a, b, c, d, A, B, C, D) = (1, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, 2, 2, \frac{3}{2})$*, l'équation* (2.2) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + \frac{3}{2}x_n x_{n-1}^2 + x_n^2 x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-1}^3}{x_n^3 + 2x_n x_{n-1}^2 + 2x_n^2 x_{n-1} + \frac{3}{2}x_{n-1}^3}. \tag{2.3}$$

On a $\overline{x} = 0.615$*. Toutes les conditions du Théorème* (2.2.4) *sont satisfaites et* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$*. (voir fig.*(2.1)*)*

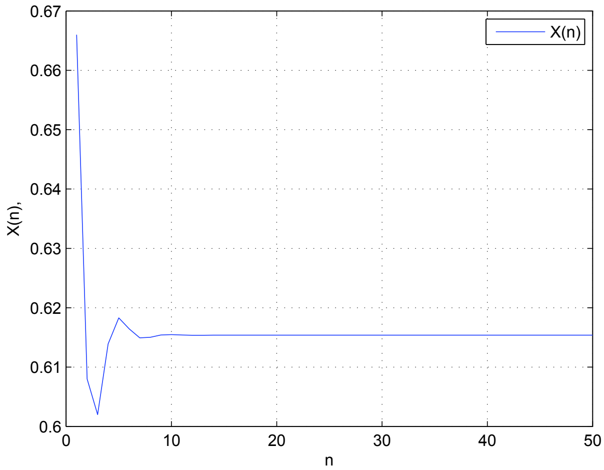

Figure 2.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.3), avec les valeurs initiales $x_{-1} = 0.5, x_0 = 0.7$

Exemple 2.2.2 *Si on prend* $(a, b, c, d, A, B, C, D) = (1, 2, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})$ *l'équation* (2.2) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2x_n x_{n-1}^2 + 2x_n^2 x_{n-1} + \frac{3}{2}x_{n-1}^3}{x_n^3 + \frac{3}{2}x_n x_{n-1}^2 + x_n^2 x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-1}^3}. \tag{2.4}$$

On a $\overline{x} = 1.625$*. Toutes les conditions du Théorème* (2.2.5) *sont satisfaites et* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$*. (voir fig.*(2.2)*)*

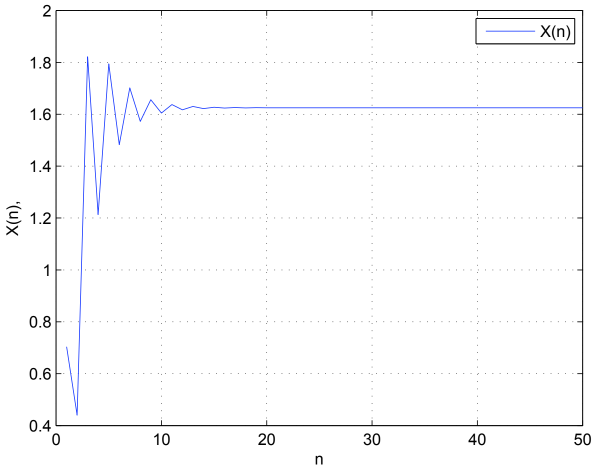

FIGURE 2.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.4), avec les valeurs initiales $x_{-1} = 1.5, x_0 = 2.7$

2.3 Deuxième équation

Dans cette section nous étudions la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^5 + bx_nx_{n-1}^4 + cx_n^2x_{n-1}^3 + dx_n^3x_{n-1}^2 + ex_n^4x_{n-1} + fx_{n-1}^5}{Ax_n^5 + Bx_nx_{n-1}^4 + Cx_n^2x_{n-1}^3 + Dx_n^3x_{n-1}^2 + Ex_n^4x_{n-1} + Fx_{n-1}^5}, \ n = 0, 1, ... \qquad (2.5)$$

où les paramètres $a, b, c, d, e, f, A, B, C, D, E, F$ et les valeurs initiales x_0, x_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.

Remarque 2.3.1 *L'équation*

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^4 + bx_nx_{n-1}^3 + cx_n^2x_{n-1}^2 + dx_n^3x_{n-1} + ex_{n-1}^4}{Ax_n^4 + Bx_nx_{n-1}^3 + Cx_n^2x_{n-1}^2 + Dx_n^3x_{n-1} + Ex_{n-1}^4}, \ n = 0, 1, ... \qquad (2.6)$$

a été étudiée par Touafek dans [49].

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[^2 \rightarrow]0, +\infty[$ définie par

$$f(x, y) = \frac{ax^5 + bxy^4 + cx^2y^3 + dx^3y^2 + ex^4y + fy^5}{Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5}.$$

2.3.1 Périodicité des solutions

Dans le théorème suivant, en étudera la périodicité des solutions positifs de l'équation (2.5).

Théorème 2.3.1 *Soient*

$$\begin{aligned}
q_1 &= (B+A)a + eF - fA,\\
q_2 &= (B+C+F)a + (B+F)e - (A+E)f - bA + dF,\\
q_3 &= (B+C+D+F)a - (A+E)b + (-A+F)c + (B+F)d + (-B+C+F)e - (A+D+E)f,\\
q_4 &= (B+C+D+E+F)a + (-A-D-E+F)b + (-A+B-E+F)c + (-A+C+F)d\\
&+ (B+C+D+F)e - (A+C+D+E)f,\\
q_5 &= (A+B+C+D+E+F)a + (-A+B-C-D-E+F)b + (-A+B+C-D-E+F)c\\
&+ (-A+B+C+D-E+F)d + (-A+B+C+D+E+F)e + (-A-B-C-D-E+f)f.
\end{aligned}$$

Supposons que $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \geq 0$. *Alors l'équation* (2.5) *n'a aucune solution périodique de période deux.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux nombres réels distincts α et β, tel que

$$\ldots, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots$$

soit solution périodique de période deux de l'équation (2.5). Donc, on a

$$\alpha = f(\beta, \alpha), \beta = f(\alpha, \beta).$$

Alors, on a

$$\beta = \frac{a\alpha^5 + b\alpha\beta^4 + c\alpha^2\beta^3 + d\alpha^3\beta^2 + e\alpha^4\beta + f\beta^5}{A\alpha^5 + B\alpha\beta^4 + C\alpha^2\beta^3 + D\alpha^3\beta^2 + E\alpha^4\beta + F\beta^5},$$

$$\alpha = \frac{a\beta^5 + b\beta\alpha^4 + c\beta^2\alpha^3 + d\beta^3\alpha^2 + e\beta^4\alpha + f\alpha^5}{A\beta^5 + B\beta\alpha^4 + C\beta^2\alpha^3 + D\beta^3\alpha^2 + E\beta^4\alpha + F\alpha^5}.$$

Donc

$$\beta\alpha = \frac{\alpha(a\alpha^5 + b\alpha\beta^4 + c\alpha^2\beta^3 + d\alpha^3\beta^2 + e\alpha^4\beta + f\beta^5)}{A\alpha^5 + B\alpha\beta^4 + C\alpha^2\beta^3 + D\alpha^3\beta^2 + E\alpha^4\beta + F\beta^5},$$

$$\beta\alpha = \frac{\beta(a\beta^5 + b\beta\alpha^4 + c\beta^2\alpha^3 + d\beta^3\alpha^2 + e\beta^4\alpha + f\alpha^5)}{A\beta^5 + B\beta\alpha^4 + C\beta^2\alpha^3 + D\beta^3\alpha^2 + E\beta^4\alpha + F\alpha^5}.$$

Alors

$$\frac{\beta(a\beta^5 + b\beta\alpha^4 + c\beta^2\alpha^3 + d\beta^3\alpha^2 + e\beta^4\alpha + f\alpha^5)}{A\beta^5 + B\beta\alpha^4 + C\beta^2\alpha^3 + D\beta^3\alpha^2 + E\beta^4\alpha + F\alpha^5}$$

$$-\frac{\alpha(a\alpha^5 + b\alpha\beta^4 + c\alpha^2\beta^3 + d\alpha^3\beta^2 + e\alpha^4\beta + f\beta^5)}{A\alpha^5 + B\alpha\beta^4 + C\alpha^2\beta^3 + D\alpha^3\beta^2 + E\alpha^4\beta + F\beta^5} = 0$$

ce qui donne

$$(\beta - \alpha)S(\alpha, \beta) = 0$$

avec

$$S(\beta, \alpha) = \frac{H(\alpha, \beta)}{G(\alpha, \beta)},$$

et

- $H(\alpha,\beta) = aF(\beta^{10}+\alpha^{10}) + q_1\alpha\beta(\beta^8+\alpha^8) + q_2\alpha^2\beta^2(\alpha^6+\beta^6) + q_3\alpha^3\beta^3(\beta^4+\alpha^4) + q_4\alpha^4\beta^4(\beta^2+\alpha^2) + q_5\alpha^5\beta^5$,
- $G(\alpha,\beta) = (A\alpha^5 + B\alpha\beta^4 + C\alpha^2\beta^3 + D\alpha^3\beta^2 + E\alpha^4\beta + F\beta^5)(A\beta^5 + B\beta\alpha^4 + C\beta^2\alpha^3 + D\beta^3\alpha^2 + E\beta^4\alpha + F\alpha^5)$.

Comme $S(\alpha, \beta) > 0$, on obtient $\beta = \alpha$. Qui est une contradiction. ■

2.3.2 Stabilité locale et globale des points d'équilibres

Notons d'abord que l'équation (2.5) admet dans $]0, +\infty[$ un seul point d'équilibre, et il donnée par

$$\overline{x} = \frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}.$$

Dans la suite nous avons besoin les numéros réels suivants : $r_1 = aB - bA$, $r_2 = aC - cA$, $r_3 = aD - dA$, $r_4 = aE - eA$, $r_5 = aF - fA$, $r_6 = cB - bC$, $r_7 = dB - bD$, $r_8 = eB - bE$, $r_9 = bF - fB$, $r_{10} = dC - cD$, $r_{11} = eC - cE$, $r_{12} = cF - fC$, $r_{13} = eD - dE$, $r_{14} = dF - fD$, $r_{15} = eF - fE$.

Le lemme suivant est consacré à l'étude de la monotonie de la fonction f.

Lemme 2.3.1

1. Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{e}{E}, \dfrac{d}{D}\right)$,
- $\dfrac{f}{F} \leq \min\left(\dfrac{c}{C}, \dfrac{b}{B}\right)$,
- $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ *et* $5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ *sont positifs.*

Alors, f est croissante par rapport à x pour chaque y et décroissante par rapport à y pour chaque x.

2. Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{e}{E}, \dfrac{d}{D}\right)$,
- $\dfrac{f}{F} \geq \max\left(\dfrac{c}{C}, \dfrac{b}{B}\right)$,
- $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ *et*$5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ *sont négatifs.*

Alors, f est décroissante par rapport à x pour chaque y et croissante par rapport à y pour chaque x.

Preuve.

1. On a $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ et $5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ sont positifs, de plus $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{e}{E}, \dfrac{d}{D}\right)$ et $\dfrac{f}{F} \leq \min\left(\dfrac{c}{C}, \dfrac{b}{B}\right)$ implique que

$$r_3,\ r_4,\ r_9,\ r_{12} \geq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_4x^8y + 2r_3x^7y^2 + (3r_2 + r_{13})x^6y^3 + (2r_{11} + 4r_1)x^5y^4 + (5r_5 + 3r_8 + r_{10})x^4y^5}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2} +$$
$$+ \frac{(2r_7 + 4r_{15})x^3y^6 + (3r_{14} + r_6)x^2y^7 + 2r_{12}xy^8 + r_9y^9}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{r_4x^9 + 2r_3x^8y^1 + (3r_2 + r_{13})x^7y^2 + (2r_{11} + 4r_1)x^6y^3 + (5r_5 + 3r_8 + r_{10})x^5y^4}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2} +$$
$$- \frac{(2r_7 + 4r_{15})x^4y^5 + (3r_{14} + r_6)x^3y^6 + 2r_{12}x^2y^7 + r_9xy^8}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2}.$$

2. On a $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ et $5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ sont négatifs, de plus $\frac{a}{A} \leq \min\left(\frac{e}{E}, \frac{d}{D}\right)$ et $\frac{f}{F} \geq \max\left(\frac{c}{C}, \frac{b}{B}\right)$ implique que

$$r_3,\ r_4,\ r_9,\ r_{12} \leq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_4 x^8 y + 2r_3 x^7 y^2 + (3r_2 + r_{13})x^6 y^3 + (2r_{11} + 4r_1)x^5 y^4 + (5r_5 + 3r_8 + r_{10})x^4 y^5}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2} +$$
$$+ \frac{(2r_7 + 4r_{15})x^3 y^6 + (3r_{14} + r_6)x^2 y^7 + 2r_{12} x y^8 + r_9 y^9}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{r_4 x^9 + 2r_3 x^8 y^1 + (3r_2 + r_{13})x^7 y^2 + (2r_{11} + 4r_1)x^6 y^3 + (5r_5 + 3r_8 + r_{10})x^5 y^4}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2} +$$
$$- \frac{(2r_7 + 4r_{15})x^4 y^5 + (3r_{14} + r_6)x^3 y^6 + 2r_{12} x^2 y^7 + r_9 x y^8}{(Ax^5 + Bxy^4 + Cx^2y^3 + Dx^3y^2 + Ex^4y + Fy^5)^2}.$$

■

Dans le théorème suivant nous prouvons que les solutions de l'équation aux différences (2.5) sont bornées.

Théorème 2.3.2 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.5).

1) *Supposons que*

- $\frac{a}{A} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}, \frac{d}{D}, \frac{e}{E}\right)$,
- $\frac{f}{F} \leq \min\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}, \frac{d}{D}, \frac{e}{E}\right)$.

Alors, pour $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*

$$\frac{f}{F} \leq x_n \leq \frac{a}{A}.$$

2) *Supposons que*

- $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$,
- $\dfrac{f}{F} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$.

Alors, pour $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*

$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{f}{F}.$$

Preuve.

1. On a
$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_4 x_n^4 x_{n-1} - r_3 x_n^3 x_{n-1}^2 - r_2 x_n^2 x_{n-1}^3 - r_1 x_n x_{n-1}^4 - r_5 x_{n-1}^5}{A(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^4 + Cx_n^2 x_{n-1}^2 + Ex_n^4 x_{n-1} + Fx_{n-1}^5)},$$
$$x_{n+1} - \frac{f}{F} = \frac{r_5 x_n^5 + r_{15} x_n^4 x_{n-1} + r_{14} x_n^3 x_{n-1}^2 + r_{12} x_n^2 x_{n-1}^3 + r_9 x_n x_{n-1}^4}{F(Ax_n^5 + Bx_n x_{n-1}^4 + Cx_n^2 x_{n-1}^3 + Dx_n^3 x_{n-1}^2 + Ex_n^4 x_{n-1} + Fx_{n-1}^5)}.$$
Maintenant, en utilisant le fait que $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$ et $\dfrac{f}{F} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$, on obtient
$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_9, r_{12}, r_{14}, r_{15} \geq 0.$$
Alors,
$$\frac{f}{F} \leq x_n \leq \frac{a}{A}, \quad n \geq 1.$$
2. On a
$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_4 x_n^4 x_{n-1} - r_3 x_n^3 x_{n-1}^2 - r_2 x_n^2 x_{n-1}^3 - r_1 x_n x_{n-1}^4 - r_5 x_{n-1}^5}{A(Ax_n^3 + Bx_n x_{n-1}^4 + Cx_n^2 x_{n-1}^2 + Ex_n^4 x_{n-1} + Fx_{n-1}^5)},$$
$$x_{n+1} - \frac{f}{F} = \frac{r_5 x_n^5 + r_{15} x_n^4 x_{n-1} + r_{14} x_n^3 x_{n-1}^2 + r_{12} x_n^2 x_{n-1}^3 + r_9 x_n x_{n-1}^4}{F(Ax_n^5 + Bx_n x_{n-1}^4 + Cx_n^2 x_{n-1}^3 + Dx_n^3 x_{n-1}^2 + Ex_n^4 x_{n-1} + Fx_{n-1}^5)}.$$
Maintenant, en utilisant le fait que $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$ et $\dfrac{f}{F} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$, on obtient
$$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_9, r_{12}, r_{14}, r_{15} \leq 0.$$
Alors
$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{f}{F}, \quad n \geq 1.$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}$ de l'équation (2.5) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.3 *Supposons que*

$$\frac{2|4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15}|}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+C+D+E+F)}<1.$$

Donc le point d'équilibre $\overline{x}=\frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}$ *de l'équation* (2.5) *est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation aux différences linéaire associée de l'équation (2.5) autour du point d'équilibre $\overline{x}=\frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}$ est donnée par

$$x_{n+1}=px_n+qx_{n-1},$$

avec

$$p=\frac{(4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15})}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+C+D+E+F)},$$

$$q=-\frac{(4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15})}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+C+D+E+F)}.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$\lambda^2-p\lambda-q=0.$$

Soient h et g deux fonctions définies par

$$h(\lambda)=\lambda^2,\ g(\lambda)=p\lambda+q.$$

On a

$$\begin{aligned}|g(\lambda)| &\leq |p|+|q|\\ &= \frac{2|4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15}|}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+C+D+E+F)}\\ &< 1=|h(\lambda)|\end{aligned}$$

$\forall\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1$. Donc, d'après le Théorème de Rouché, touts les zéros de $\lambda^2-p\lambda-q=0$ sont dans $|\lambda|<1$. D'où, d'après le Théorème (0.0.2), $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable. ∎

La stabilité asymptotique globale de l'équation (2.5), fera l'objet des deux résultats suivants.

Théorème 2.3.4 *Soient*

$$\begin{aligned}
p_1 &= bA - aF + (A+E)f,\\
p_2 &= -(B+E)a + (A+E)b + (A+D+E)f + cA - eF,\\
p_3 &= -(C+B+F)a + (A+D+E)b + (A+E)c + (A-F)d + (A+C+D+E)f - eF,\\
p_4 &= -(B+C+D+F)a + (A+C+D+E)b + (A+D+E-F)c + (A-B+E-F)d\\
&+ (A+B+C+D+E)f + (A-B+C-F)e,\\
p_5 &= (A-B-C-D-E-F)a + (A+B+C+D+E-F)b + (A-B+C+D+E-F)c\\
&+ (A-B+D-C+E-F)d + (A-B-C-D+E-F)e + (A+B+C+D+E+F)f.
\end{aligned}$$

1. Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$,
- $\dfrac{f}{F} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$,
- $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ *et* $5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ *sont positifs,*
- $\frac{2|4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15}|}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+S+D+E+F)} < 1$,
- $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \geq 0$.

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}$ *de l'équation* (2.5) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation (2.5) avec $x_{-1}, x_0 \in \left[\dfrac{f}{F}, \dfrac{a}{A}\right]$. D'après le Théorème (2.3.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

D'après la première partie du Lemme (2.3.1), f est croissante par rapport à x pour chaque y et décroissante par rapport à y pour chaque x. Supposons que (m, M) est une solution du système

$$m = f(m, M),\ M = f(M, m).$$

Ce qui implique

$$m = \frac{am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5},$$

$$M = \frac{aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5}.$$

Donc

$$mM = \frac{M(am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5)}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5},$$

$$Mm = \frac{m(aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5)}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5}.$$

Alors

$$\frac{M(am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5)}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5}$$

$$-\frac{m(aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5)}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5} = 0$$

et donc

$$(M - m)R(m, M) = 0$$

avec

$$R(m, M) = \frac{L(m, M)}{K(m, M)},$$

et

- $L(m, M) = fA(M^{10} + m^{10}) + p_1mM(M^8 + m^8) + p_2m^2M^2(m^6 + M^6) + p_3m^3M^3(M^4 + m^4) + p_4m^4M^4(M^2 + m^2) + p_5m^5M^5$,
- $K(m, M) = (Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5)(AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5)$.

Comme $R(M, m) > 0$, on obtient

$$M = m.$$

Donc , d'après le Théorème (0.0.4) $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \overline{x}$. ■

Théorème 2.3.5 *Soient*

$$\begin{aligned}
q_1 &= (B+A)a + eF - fA,\\
q_2 &= (B+C+F)a + (B+F)e - (A+E)f - bA + dF,\\
q_3 &= (B+C+D+F)a - (A+E)b + (-A+F)c + (B+F)d + (-B+C+F)e - (A+D+E)f,\\
q_4 &= (B+C+D+E+F)a + (-A-D-E+F)b + (-A+B-E+F)c + (-A+C+F)d\\
&+ (B+C+D+F)e - (A+C+D+E)f,\\
q_5 &= (A+B+C+D+E+F)a + (-A+B-C-D-E+F)b + (-A+B+C-D-E+F)c\\
&+ (-A+B+C+D-E+F)d + (-A+B+C+D+E+F)e + (-A-B-C-D-E+f)f.
\end{aligned}$$

1. Supposons que
- $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$,
- $\dfrac{f}{F} \geq \max\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}, \dfrac{d}{D}, \dfrac{e}{E}\right)$,
- $3r_2 + r_{13}, 2r_{11} + 4r_1, 2r_7 + 4r_{15}, 3r_{14} + r_6$ *et* $5r_5 + 3r_8 + r_{10}$ *sont négatifs,*
- $\frac{2|4r_1+3r_2+2r_3+r_4+5r_5+r_6+2r_7+3r_8+r_9+r_{10}+2r_{11}+2r_{12}+r_{13}+3r_{14}+4r_{15}|}{(a+b+c+d+e+f)(A+B+S+D+E+F)} < 1$,
- $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \geq 0$.

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+b+c+d+e+f}{A+B+C+D+E+F}$ *de l'équation* (2.5) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation (2.5) avec $x_{-1}, x_0 \in \left[\dfrac{a}{A}, \dfrac{f}{F}\right]$. D'après le Théorème (2.3.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

D'après la deuxième partie du Lemme (2.3.1), f est décroissante par rapport à x pour chaque y et croissante par rapport à y pour chaque x. Supposons que (m, M) est une solution du système

$$m = f(M, m), \; M = f(m, M).$$

Ce qui donne

$$M = \frac{am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5},$$

$$m = \frac{aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5}.$$

Donc

$$Mm = \frac{m(am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5)}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5},$$

$$Mm = \frac{M(aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5)}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5}.$$

Alors,

$$\frac{M(aM^5 + bMm^4 + cM^2m^3 + dM^3m^2 + eM^4m + fm^5)}{AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5}$$

$$-\frac{m(am^5 + bmM^4 + cm^2M^3 + dm^3M^2 + em^4M + fM^5)}{Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5} = 0$$

et donc

$$(M - m)S(m, M) = 0$$

avec

$$S(M, m) = \frac{H(m, M)}{G(m, M)},$$

et

- $H(m, M) = aF(M^{10} + m^{10}) + q_1mM(M^8 + m^8) + q_2m^2M^2(m^6 + M^6) + q_3m^3M^3(M^4 + m^4) + q_4m^4M^4(M^2 + m^2) + q_5m^5M^5$,
- $G(m, M) = (Am^5 + BmM^4 + Cm^2M^3 + Dm^3M^2 + Em^4M + FM^5)(AM^5 + BMm^4 + CM^2m^3 + DM^3m^2 + EM^4m + Fm^5)$.

Comme $S(m, M) > 0$, on obtient

$$M = m$$

Donc, d'après le Théorème (0.0.5) $\lim_{x\to\infty} x_n = \overline{x}$. ■

2.3.3 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons les exemples numériques suivants :

Exemple 2.3.1 *Si on prend* $(a, b, c, d, e, f, A, B, C, D, E, F) = (11, 3, 5, 1, 3, 4, 1.5, 3, 1, 1.6, 3, 2.5)$, *l'équation* (2.5) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{11x_n^5 + 3x_n x_{n-1}^4 + 5x_n^2 x_{n-1}^3 + x_n^3 x_{n-1}^2 + 3x_n^4 x_{n-1} + 4x_{n-1}^5}{1.5x_n^5 + 3x_n x_{n-1}^4 + x_n^2 x_{n-1}^3 + 1.6x_n^3 x_{n-1}^2 + 3x_n^4 x_{n-1} + 2.5x_{n-1}^5}. \tag{2.7}$$

On a $\overline{x} = 2.142$. *Toutes les conditions du Théorème* (2.3.4) *sont satisfaites et* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$.*(voir fig.* (2.3)*)*

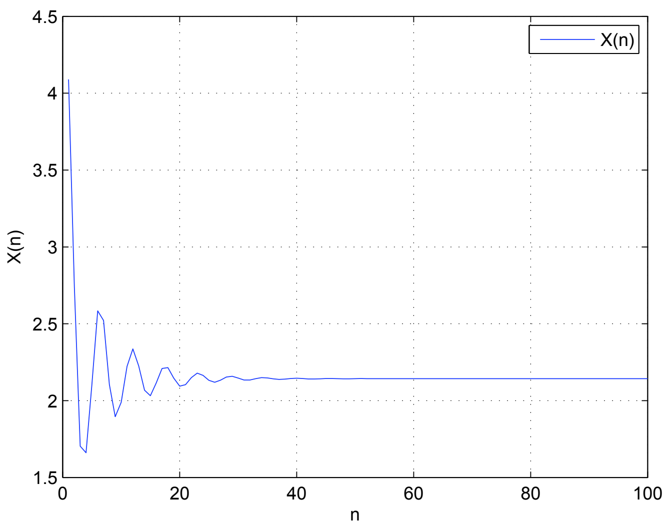

FIGURE 2.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.7) avec les valeurs initiales $x_{-1} = 1.2, x_0 = 3$.

Exemple 2.3.2 *Si on prend* $(a, b, c, d, e, f, A, B, C, D, E, F) = (2, 3, 3, 1.8, 3, 4, 4, 2.8, 1, 4, 1, 3)$, *l'équation* (2.5) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^5 + 3x_n x_{n-1}^4 + 3x_n^2 x_{n-1}^3 + 1.8x_n^3 x_{n-1}^2 + 3x_n^4 x_{n-1} + 4x_{n-1}^5}{4x_n^5 + 2.8x_n x_{n-1}^4 + x_n^2 x_{n-1}^3 + 4x_n^3 x_{n-1}^2 + x_n^4 x_{n-1} + 3x_{n-1}^5}. \tag{2.8}$$

On a $\overline{x} = 1.063$. *Toutes les conditions du Théorème* (2.3.5) *sont satisfaites et* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$.*(voir fig.* (2.4)*)*

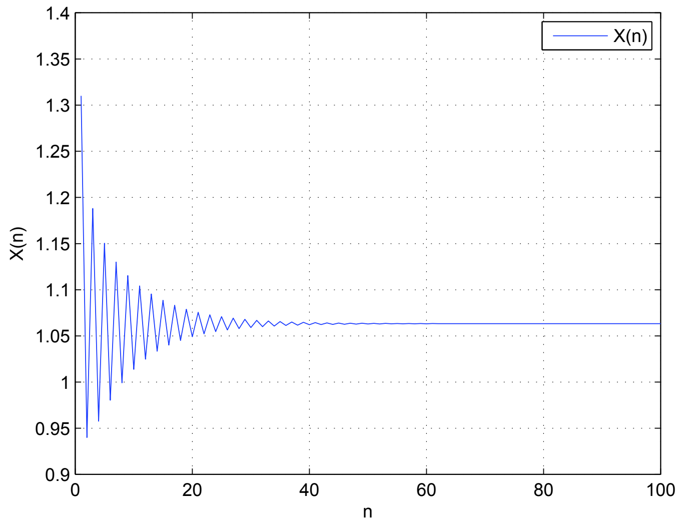

FIGURE 2.4 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.8) avec les valeurs initiales $x_{-1} = 8, x_0 = 1$.

2.4 Troisième équation

Dans cette section nous étudions la stabilité globale et la périodicité des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^k + b\sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k},\ k = 3, 4, \ldots; n = 0, 1, \ldots, \tag{2.9}$$

où les paramètres a, b, c, A, B, C et les valeurs initiales x_0, x_{-1} sont des nombres réels strictement positifs.

Considérons la fonction $f :]0,+\infty[^2 \rightarrow]0,+\infty[$ définie par

$$f(x,y) = \frac{ax^k + b\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + cy^k}{Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k}.$$

Aisi l'équation (2.9) s'écrit

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots$$

2.4.1 Périodicité des solutions

Dans le théorème suivant, on étudiera la périodicité des solutions positives de l'équation (2.9).

Théorème 2.4.1 *Soient*

$$\begin{aligned}
\breve{p}_1 &= aC - cA + aB + bC, \\
\breve{p}_2 &= aC - cA + cC + aA - (k-1)(bA + cB) + k(aB + bC), \\
\breve{q}_i &= aC - cA - i(bA + cB) + (i+1)(aB + bC), i = 1, 2, ..., k-2.
\end{aligned}$$

Supposons que $\breve{p}_1, \breve{p}_2, \breve{q}_1, \breve{q}_2, ..., \breve{q}_{k-2} \geq 0$. *Alors l'équation* (2.9) *n'a aucune solution périodique de période deux.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux nombres réels distinct α et β strictement positifs, tel que

$$..., \alpha, \beta, \alpha, \beta, ...$$

soit solution périodique de période deux de l'équation (2.9). Donc, on a

$$\alpha = f(\beta, \alpha), \beta = f(\alpha, \beta).$$

Donc

$$\beta.f(\beta,\alpha)-\alpha.f(\alpha,\beta)=\beta.\frac{\left(a\beta^k+b\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+c\alpha^k\right)}{A\beta^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+C\alpha^k}-\alpha.\frac{\left(a\alpha^k+b\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+c\beta^k\right)}{A\alpha^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+C\beta^k}=0.$$

$$\frac{F(\alpha,\beta)}{K(\alpha,\beta)}=0,$$

où

- $F(\alpha,\beta)=\beta\Big(a\beta^k+b\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+c\alpha^k\Big)\Big(A\alpha^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+C\beta^k\Big)-\alpha\Big(a\alpha^k+b\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+c\beta^k\Big)\Big(A\beta^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+C\alpha^k\Big).$
- $K(\alpha,\beta)=\Big(A\beta^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+C\alpha^k\Big)\Big(A\alpha^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+C\beta^k\Big).$

On a

$$F(\alpha,\beta)=\beta\Big(aA\beta^k\alpha^k+aB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\beta^k+aC\beta^{2k}+bA\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\alpha^k+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2+bC\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\beta^k+cA\alpha^{2k}+cB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\alpha^k+cC\alpha^k\beta^k\Big)-\alpha\Big(aA\alpha^k\beta^k+aB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\alpha^k+aC\alpha^{2k}+bA\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\beta^k+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2+bC\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\alpha^k+cA\beta^{2k}+cB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\beta^k+cC\beta^k\alpha^k\Big),$$

$$=aA\alpha^k\beta^{k+1}+bA\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+k}\beta^{k-j+1}+cA\alpha^{2k}\beta+aB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{2k-j+1}+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2\beta+cB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{k+1+j}\beta^{k-j}+aC\beta^{2k+1}+bC\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{2k-j+1}+cC\beta^{k+1}\alpha^k-aA\beta^k\alpha^{k+1}-bA\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+1}\beta^{2k-j}-cA\beta^{2k}\alpha-aB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+k+1}\beta^{k-j}-bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2\alpha-cB\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+1}\beta^{2k-j}-aC\alpha^{2k+1}$$

$$-bC\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^{j+k+1}\beta^{k-j}-cC\alpha^{k+1}\beta^k,$$

$$= (aA + cC)(\beta - \alpha)\alpha^k\beta^k + (bA + cB)(\alpha^k\beta - \beta^k\alpha)\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j} + aC(\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1}) + cA(\alpha^{2k}\beta - \beta^{2k}\alpha) + (aB + bC)(\beta^{k+1} - \alpha^{k+1})\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j} + bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$$

$$= (aA + cC)(\beta - \alpha)\alpha^k\beta^k + (bA + cB)\beta\alpha(\alpha^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j} - \beta^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}) + aC(\beta - \alpha)(\beta^{2k} + \beta^{2k-1}\alpha + \beta^{2k-2}\alpha^2 + \cdots + \beta^2\alpha^{2k-2} + \beta\alpha^{2k-1} + \alpha^{2k}) - cA(\beta - \alpha)(\beta^{2k-2} + \beta^{2k-3}\alpha + \beta^{2k-4}\alpha^2 + \cdots + \alpha^{2k-4}\beta^2 + \alpha^{2k-3}\beta + \alpha^{2k-2}) + (aB + bC)(\beta^{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j} - \alpha^{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}) + bB(\beta - \alpha)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$$

$$= (aA + cC)(\beta - \alpha)\alpha^k\beta^k + (bA + cB)\beta\alpha\Big(\alpha^{2k-2}\beta + \alpha^{2k-3}\beta^2 + \cdots + \alpha^{k+1}\beta^{k-2} + \alpha^k\beta^{k-1} - \beta^k\alpha^{k-1} - \beta^{k+1}\alpha^{k-2} + \cdots + \beta^{2k-3}\alpha^2 + \beta^{2k-2}\alpha\Big) + aC(\beta - \alpha)\Big((\beta^{2k} + \alpha^{2k}) + \beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \alpha^2\beta^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha^k\beta^k\Big) - cA(\beta - \alpha)\Big(\beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \alpha^2\beta^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \alpha^k\beta^k\Big) + (aB + bC)\Big(\beta^{k+2}\alpha^{k-1} + \beta^{k+3}\alpha^{k-2} + \cdots + \beta^{2k-1}\alpha^2 + \beta^{2k}\alpha - \alpha^{2k}\beta - \alpha^{2k-1}\beta^2 - \cdots - \alpha^{k+3}\beta^{k-2} - \alpha^{k+2}\beta^{k-1}\Big) + bB(\beta - \alpha)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$$

$$= (aA + cC)(\beta - \alpha)\alpha^k\beta^k - (bA + cB)\beta\alpha\Big(\beta\alpha(\beta^{2k-3} - \alpha^{2k-3}) + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-5} - \alpha^{2k-5}) + \beta^3\alpha^3(\beta^{2k-7} - \alpha^{2k-7}) + \cdots + \beta^{k-3}\alpha^{k-3}(\beta^5 - \alpha^5) + \beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\beta^3 - \alpha^3) + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\beta - \alpha)\Big) + aC(\beta - \alpha)\Big((\beta^{2k} + \alpha^{2k}) + \beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^k\alpha^k\Big) - cA(\beta - \alpha)\Big(\beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^k\alpha^k\Big) + (aB + bC)\Big(\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\beta^3 - \alpha^3) + \beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\beta^5 - \alpha^5) + \cdots + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-3} - \alpha^{2k-3}) + \beta\alpha(\beta^{2k-1} - \alpha^{2k-1})\Big) + bB(\beta - \alpha)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$$

$$= (aA + cC)(\beta - \alpha)\alpha^k\beta^k - (bA + cB)\beta\alpha\Big[\beta\alpha(\beta - \alpha)\Big(\alpha^{2k-4} + \alpha^{2k-5}\beta + \alpha^{2k-6}\beta^2 + \cdots + \beta^{2k-6}\alpha^2 + \beta^{2k-5}\alpha + \beta^{2k-4}\Big) + \alpha^2\beta^2(\beta - \alpha)\Big(\alpha^{2k-6} + \alpha^{2k-7}\beta + \alpha^{2k-8}\beta^2 + \cdots + \beta^{2k-8}\alpha^2 + \beta^{2k-7}\alpha + \beta^{2k-6}\Big) + \alpha^3\beta^3(\beta - \alpha)\Big(\alpha^{2k-8} + \alpha^{2k-9}\beta + \cdots + \beta^{2k-9}\alpha + \beta^{2k-8}\Big) + \cdots + \alpha^{k-3}\beta^{k-3}(\beta - \alpha)\Big((\alpha^4 + \beta^4) + \beta\alpha(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^2\alpha^2\Big) + \beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\beta - \alpha)\Big((\alpha^2 + \beta^2) + \beta\alpha\Big) + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}\Big] + aC(\beta - \alpha)\Big((\beta^{2k} + \alpha^{2k}) + \beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^k\alpha^k\Big) - cA(\beta - \alpha)\Big(\beta\alpha(\beta^{2k-2} + \alpha^{2k-2}) + \beta^2\alpha^2(\beta^{2k-4} + \alpha^{2k-4}) + \cdots + \alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\beta^2 + \alpha^2) + \beta^k\alpha^k\Big) + (aB + bC)\Big[(\beta - \alpha)\Big(\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^k\alpha^k\Big) + (\beta - \alpha)\Big(\beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\alpha^4 + \beta^4) + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^k\alpha^k\Big) + \cdots + (\beta - \alpha)\Big(\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4} + \beta^{2k-4}) + \beta^3\alpha^3(\alpha^{2k-6} + \beta^{2k-6}) + \cdots + \beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2 + \beta^2) + \beta^k\alpha^k\Big) + (\beta - \alpha)\Big(\beta\alpha(\alpha^{2k-2} + \beta^{2k-2}) + \beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4} + \beta^{2k-4}) + \cdots +$$

$\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+\beta^k\alpha^k\Big)\Big]+bB(\beta-\alpha)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$

$= (aA+cC)(\beta-\alpha)\alpha^k\beta^k-(bA+cB)(\beta-\alpha)\Big[\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4}+\beta^{2k-4})+2\beta^3\alpha^3(\alpha^{2k-6}+\beta^{2k-6})+3\beta^4\alpha^4(\alpha^{2k-8}+\beta^{2k-8})+\cdots+(k-3)\beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\alpha^4+\beta^4)+(k-2)\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+(k-1)\beta^k\alpha^k\Big]+aC(\beta-\alpha)\Big[(\alpha^{2k}+\beta^{2k})+\beta\alpha(\alpha^{2k-2}+\beta^{2k-2})+\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4}+\beta^{2k-4})+\cdots+\alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+\beta^k\alpha^k\Big]-cA(\beta-\alpha)\Big[\beta\alpha(\alpha^{2k-2}+\beta^{2k-2})+\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4}+\beta^{2k-4})+\cdots+\alpha^{k-1}\beta^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+\beta^k\alpha^k\Big]+(aB+bC)(\beta-\alpha)\Big[\beta\alpha(\beta^{2k-2}+\alpha^{2k-2})+2\beta^2\alpha^2(\beta^{2k-4}+\alpha^{2k-4})+3\beta^3\alpha^3(\beta^{2k-6}+\alpha^{2k-6})+4\beta^4\alpha^4(\beta^{2k-8}+\alpha^{2k-8})+\cdots+(k-2)\beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\beta^4+\alpha^4)+(k-1)\beta^{k-1}\beta^{k-1}(\beta^2+\alpha^2)+(k-1)\beta^k\alpha^k\Big]+bB(\beta-\alpha)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2,$

$= (\beta-\alpha)\Bigg[aC(\alpha^{2k}+\beta^{2k})+\breve{p}_1\beta\alpha(\alpha^{2k-2}+\beta^{2k-2})+\breve{q}_1\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4}+\beta^{2k-4})+\breve{q}_2\beta^3\alpha^3(\alpha^{2k-6}+\beta^{2k-6})+\cdots+\breve{q}_{k-3}\beta^{k-2}\alpha^{k-2}(\alpha^4+\beta^4)+\breve{q}_{k-2}\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+\breve{p}_2\beta^k\alpha^k+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}\Big)^2\Bigg].$

Donc

$$\frac{F(\alpha,\beta)}{K(\alpha,\beta)}=(\beta-\alpha)\frac{S(\alpha,\beta)}{K(\alpha,\beta)},$$

avec

$$\begin{aligned}
S(\alpha,\beta) &= aC(\alpha^{2k}+\beta^{2k})+\breve{p}_1\beta\alpha(\alpha^{2k-2}+\beta^{2k-2})+\breve{q}_1\beta^2\alpha^2(\alpha^{2k-4}+\beta^{2k-4)}\\
&+ \breve{q}_2\beta^3\alpha^3(\alpha^{2k-6}+\beta^{2k-6})+\ldots+\breve{q}_{k-2}\beta^{k-1}\alpha^{k-1}(\alpha^2+\beta^2)+\breve{p}_2\beta^k\alpha^k\\
&+ bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}\Big)^2,\\
K(\alpha,\beta) &= \Big(A\beta^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\beta^j\alpha^{k-j}+C\alpha^k\Big)\Big(A\alpha^k+B\sum_{j=1}^{k-1}\alpha^j\beta^{k-j}+C\beta^k\Big).
\end{aligned}$$

Comme $S(\beta,\alpha)>0$, on obtient $\beta=\alpha$, ce qui est une contradiction.

■

2.4.2 Stabilité locale et globale des points d'équilibres

Notons d'abord que l'équation (2.9) admet dans $]0,+\infty[$ un seul point d'équilibre , et il est donné par

$$\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}.$$

Dans la suite nous avons besoin les nombres suivants :

$$r_1 = aB - bA, r_2 = aC - cA, r_3 = bC - Bc.$$

Le lemme suivant est consacré à l'étude de la monotonie de la fonction f.

Lemme 2.4.1

1) *Supposons que* $\frac{a}{A} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$ *et* r_3 *positive. Alors,* f *est croissante par rapport à* x *pour chaque* y *et décroissante par rapport à* y *pour chaque* x.

2) *Supposons que* $\frac{a}{A} \leq \min\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$ *et* r_3 *négative. Alors,* f *est décroissante par rapport à* x *pour chaque* y *et croissante par rapport à* y *pour chaque* x.

Preuve.

1. On a $r_3 \geq 0$, de plus $\frac{a}{A} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$ implique que

$$r_1,\, r_2 \geq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_1 \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)x^{j+k-1}y^{k-j} + r_2 k x^{k-1} y^k + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j x^{j-1} y^{2k-j}}{(Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{r_1 \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)x^{j+k}y^{k-j-1} + r_2 k x^k y^{k-1} + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j x^{j} y^{2k-j-1}}{(Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k)^2}.$$

2. On a $r_3 \leq 0$, de plus $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B'}, \dfrac{c}{C}\right)$ implique que

$$r_1, r_2 \leq 0.$$

Donc, le résultat découle des deux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{r_1 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) x^{j+k-1} y^{k-j} + r_2 k x^{k-1} y^k + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j x^{j-1} y^{2k-j}}{(Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{r_1 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j) x^{j+k} y^{k-j-1} + r_2 k x^k y^{k-1} + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j x^j y^{2k-j-1}}{(Ax^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k)^2}.$$

■

Dans le théorème suivant nous prouvons que les solutions de l'équation aux différences (2.9) sont bornées.

Théorème 2.4.2 *Soit* $\{x_n\}_{n=-1}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.9).

1) *Supposons que* $\dfrac{a}{A} \geq \max\left(\dfrac{b}{B'}, \dfrac{c}{C}\right)$ *et* $r_3 \geq 0$*. Alors, pour* $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*

$$\frac{c}{C} \leq x_n \leq \frac{a}{A}.$$

2) *Supposons que* $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B'}, \dfrac{c}{C}\right)$ *et* $r_3 \leq 0$*. Alors, pour* $n = 1, 2, \ldots,$ *on a*

$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{c}{C}.$$

Preuve.

1. On a

$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_1 \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} - r_2 x_{n-1}^k}{A(Ax_n^k + B\sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + x_{n-1}^k)},$$

$$x_{n+1} - \frac{c}{C} = \frac{r_3 \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + r_2 x_n^k}{C(Ax_n^k + B \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + x_{n-1}^k)}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\frac{a}{A} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$, on obtient

$$r_1, r_2 \geq 0.$$

Alors,

$$\frac{c}{C} \leq x_n \leq \frac{a}{A}, \quad n \geq 1.$$

2. On a

$$x_{n+1} - \frac{a}{A} = \frac{-r_1 \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} - r_2 x_{n-1}^k}{A(Ax_n^k + B \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + x_{n-1}^k)},$$

$$x_{n+1} - \frac{c}{C} = \frac{r_3 \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + r_2 x_n^k}{C(Ax_n^k + B \sum_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + x_{n-1}^k)}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $\frac{a}{A} \leq \min\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$, on obtient

$$r_1, r_2 \leq 0.$$

Alors,

$$\frac{a}{A} \leq x_n \leq \frac{c}{C}, \quad n \geq 1.$$

■

La stabilité locale du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$ de l'équation (2.9) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 2.4.3 *Supposons que*

$$\frac{2k\left|\frac{(k-1)}{2}(r_1 + r_3) + r_2\right|}{(a + (k-1)b + c)(A + (k-1)B + C)} < 1.$$

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$ *de l'équation* (2.9) *est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation aux différences linéaire associée de l'équation (2.9) autour du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$ est

$$x_{n+1} = p_1 x_n + p_2 x_{n-1},$$

avec

$$\begin{aligned}
p = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{x}) &= \frac{r_1 \sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\overline{x}^{2k-1} + r_2 k\overline{x}^{2k-1} + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j\overline{x}^{2k-1}}{\left(A\overline{x}^k + B\sum_{j=1}^{k-1}\overline{x}^k + C\overline{x}^k\right)^2}, \\
&= \frac{\overline{x}^{2k-1}\left[r_1 \sum_{j=1}^{k-1} k - r_1 \sum_{j=1}^{k-1} j + r_2 k + r_3 \sum_{j=1}^{k-1} j\right]}{\overline{x}^{2k}\left(A + B\sum_{j=1}^{k-1} 1 + C\right)^2}, \\
&= \frac{k(k-1)(r_1+r_3) + 2r_2 k}{2\overline{x}\left(A + B\sum_{j=1}^{k-1} 1 + C\right)^2}, \\
&= \frac{k(k-1)(r_1+r_3) + 2kr_2}{2(a+(k-1)b+c)(A+(k-1)B+C)}.
\end{aligned}$$

De même on obtient

$$q = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{x}) = \frac{k(k-1)(r_1+r_3) + 2kr_2}{2(a+(k-1)b+c)(A+(k-1)B+C)}.$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$\lambda^2 - p_1\lambda - p_2 = 0.$$

Soient h et g deux fonctions définies par

$$h(\lambda) = \lambda^2,\ g(\lambda) = p_1\lambda + p_2.$$

On a

$$|g(\lambda)| \le |p_1| + |p_2| = \frac{k\left|(k-1)(r_1+r_3) + 2r_2\right|}{(a+(k-1)b+c)(A+(k-1)B+C)} < 1 = |h(\lambda)|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, touts les zéros de $\lambda^2 - p_1\lambda - p_2 = 0$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le Théorème (0.0.2), $\overline{x}$ est localement asymptotiquement stable. ■

La stabilité asymptotique globale de l'équation (2.9), fera l'objet des deux résultats suivants :

Théorème 2.4.4 *Soient*

$$\begin{aligned}\breve{p}_1 &= aC - cA + aB + bC,\\ \breve{p}_2 &= aC - cA - (k-1)(bA + cB) + (k-1)(aB + bC),\\ \breve{q}_i &= aC - cA - i(bA + cB) + (i+1)(aB + bC).\end{aligned}$$

1. Supposons que

- $\dfrac{a}{A} \leq \min\left(\dfrac{b}{B}, \dfrac{c}{C}\right)$ *et* r_3 *négative.*
- $\dfrac{k\left|(k-1)(r_1 + r_3) + 2r_2\right|}{(a + (k-1)b + c)(A + (k-1)B + C)} < 1.$
- $\breve{p}_1, \breve{p}_2, \breve{q}_i > 0$, *i=1,2,...,k-2.*

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$ *de l'équation* (2.9) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation(2.9) avec $x_{-1}, x_0 \in \left[\dfrac{a}{A}, \dfrac{c}{C}\right]$. D'après le Théorème (2.4.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif, c'est à dir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. D'après la deuxième partie du Lemme (2.4.1) on voit que la fonction

$$f(x,y) = \frac{ax^k + b\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + cy^k}{Ax^k + B\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j} + Cy^k}$$

satisfait les hypothèses du Théorème (0.0.6), aussi d'après la partie 2 du Théorème (2.4.2) la solution est bornée. Donc, on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = l_2$, avec

$$l_1 = f(l_2, l_1),\ l_2 = f(l_1, l_2).$$

Maintenant, d'après le Théorème (2.4.1)(et sa preuve), l'équation (2.9) n'a aucune solution périodique de période deux et on a

$$l_1 = l_2 = \overline{x} = \frac{a + (k-1)b + c}{A + (k-1)B + C}.$$

■

Théorème 2.4.5 *Soient*

$$\begin{aligned} p_1 &= cA - aC + bA + cB, \\ p_2 &= cA - aC + aA + cC - (k-1)(bC + aB) + (k-1)(bA + cB), \\ q_i &= cA - aC - i(bC + aB) + (i+1)(bA + cB). \end{aligned}$$

1. Supposons que

- $\frac{a}{A} \geq \max\left(\frac{b}{B}, \frac{c}{C}\right)$ *et* r_3 *positif.*
- $\frac{k\left|(k-1)(r_1 + r_3) + 2r_2\right|}{(a + (k-1)b + c)(A + (k-1)B + C)} < 1.$
- $p_1, p_2, q_i > 0$, *i=1,2,...,k-2.*

Alors, le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$ *de l'équation* (2.9) *est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution positive de l'équation (2.9) avec $x_{-1}, x_0 \in \left[\frac{c}{C}, \frac{a}{A}\right]$. D'après le Théorème (2.4.3) il suffit de prouver que $\overline{x}$ est globalement attractif , c'est à dire

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}.$$

D'après la première partie du Lemme (2.4.1), f est croissante par rapport à x pour chaque y et décroissante par rapport à y pour chaque x. Supposons que (m, M) est une solution du système

$$m = f(m, M), \; M = f(M, m)$$

c'est à dire

$$m = \frac{am^k + b\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + cM^k}{Am^k + B\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + CM^k},$$

$$M = \frac{aM^k + b\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + cm^k}{AM^k + B\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + Cm^k}.$$

Donc

$$Mm = \frac{M(am^k + b\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + cM^k)}{Am^k + B\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + CM^k},$$

$$Mm = \frac{m(aM^k + b\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + cm^k)}{AM^k + B\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + Cm^k}.$$

D'où

$$\frac{M(am^k + b\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + cM^k)}{Am^k + B\sum_{j=1}^{k-1} m^j M^{k-j} + CM^k} - \frac{m(aM^k + b\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + cm^k)}{AM^k + B\sum_{j=1}^{k-1} M^j m^{k-j} + Cm^k} = 0.$$

$$\frac{L(m,M)}{K(m,M)} = 0,$$

avec

- $L(m,M) = M(am^k + b\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} + cM^k)(AM^k + B\sum_{j=1}^{k-1} M^jm^{k-j} + Cm^k) - m(aM^k + b\sum_{j=1}^{k-1} M^jm^{k-j} + cm^k)(Am^k + B\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} + CM^k)$
- $K(m,M) = (Am^k + B\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} + CM^k)(AM^k + B\sum_{j=1}^{k-1} M^jm^{k-j} + Cm^k)$.

On a

$$L(m,M) = M\Big(aAm^kM^k + aB\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}m^k + aCm^{2k} + bA\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}M^k + bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2 + bC\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}m^k + cAM^{2k} + cB\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}M^k + cCM^km^k\Big) - m\Big(aAM^km^k + aB\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}M^k + aCM^{2k} + bA\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}m^k + bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2 + bC\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}M^k + cAm^{2k} + cB\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}m^k + cCm^kM^k\Big),$$

$$= aAm^kM^{k+1} + aB\sum_{j=1}^{k-1} m^{j+k}M^{k-j+1} + aCm^{2k}M + bA\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{2k-j+1} + bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2M + bC\sum_{j=1}^{k-1} m^{k+1+j}M^{k-j} + cAM^{2k+1} + cB\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{2k-j+1} + cCM^{k+1}m^k - aAM^km^{k+1} - aB\sum_{j=1}^{k-1} m^{j+1}M^{2k-j} - aCM^{2k}m - bA\sum_{j=1}^{k-1} m^{j+k+1}M^{k-j} - bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2m - bC\sum_{j=1}^{k-1} m^{j+1}M^{2k-j} - cAm^{2k+1} - cB\sum_{j=1}^{k-1} m^{j+k+1}M^{k-j} - cCm^{k+1}M^k,$$

$$= (aA + cC)(M - m)M^km^k + (aB + bC)(m^kM - M^km)\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} + cA(M^{2k+1} - m^{2k+1}) + aC(m^{2k}M - M^{2k}m) + (bA + cB)(M^{k+1} - m^{k+1})\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} + bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2,$$

$$= (aA + cC)(M - m)M^km^k + (aB + bC)mM(m^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j} - M^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}) + cA(M - m)(M^{2k} + M^{2k-1}m + M^{2k-2}m^2 + \cdots + M^2m^{2k-2} + Mm^{2k-1} + m^{2k}) - aC(M - m)(M^{2k-2} + M^{2k-3}m +$$

$$M^{2k-4}m^2+\cdots+m^{2k-4}M^2+m^{2k-3}M+m^{2k-2})+(bA+cB)(M^{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j}-m^{k+1}\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j})+$$
$$bB(M-m)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j}\Big)^2,$$

$$=(aA+cC)(M-m)M^km^k+(aB+bC)mM\Big(m^{2k-2}M+m^{2k-3}M^2+\cdots+m^{k+1}M^{k-2}+m^kM^{k-1}-$$
$$M^km^{k-1}-M^{k+1}m^{k-2}+\cdots+M^{2k-3}m^2+M^{2k-2}m\Big)+cA(M-m)\Big((M^{2k}+m^{2k})+mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+$$
$$m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+m^2)+m^kM^k\Big)-aC(M-m)\Big(mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+$$
$$m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+m^2)+m^kM^k\Big)+(bA+cB)\Big(M^{k+2}m^{k-1}+M^{k+3}m^{k-2}+\cdots+$$
$$M^{2k-1}m^2+M^{2k}m-m^{2k}M-m^{2k-1}M^2-\cdots-m^{k+3}M^{k-2}-m^{k+2}M^{k-1}\Big)+bB(M-m)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j}\Big)^2,$$

$$=(aA+cC)(M-m)M^km^k-(aB+bC)mM\Big(mM(M^{2k-3}-m^{2k-3})+m^2M^2(M^{2k-5}-m^{2k-5})+$$
$$m^3M^3(M^{2k-7}-m^{2k-7})+\cdots+m^{k-3}M^{k-3}(M^5-m^5)+m^{k-2}M^{k-2}(M^3-m^3)+m^{k-1}M^{k-1}(M-m)\Big)+$$
$$cA(M-m)\Big((M^{2k}+m^{2k})+mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+$$
$$m^2)+m^kM^k\Big)-aC(M-m)\Big(mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+$$
$$m^2)+m^kM^k\Big)+(bA+cB)\Big(m^{k-1}M^{k-1}(M^3-m^3)+m^{k-2}M^{k-2}(M^5-m^5)+\cdots+m^2M^2(M^{2k-3}-$$
$$m^{2k-3})+mM(M^{2k-1}-m^{2k-1})\Big)+bB(M-m)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j}\Big)^2,$$

$$=(aA+cC)(M-m)M^km^k-(aB+bC)mM\Big[mM(M-m)\Big(m^{2k-4}+m^{2k-5}M+m^{2k-6}M^2+\cdots+$$
$$M^{2k-6}m^2+M^{2k-5}m+M^{2k-4}\Big)+m^2M^2(M-m)\Big(m^{2k-6}+m^{2k-7}M+m^{2k-8}M^2+\cdots+M^{2k-8}m^2+$$
$$M^{2k-7}m+M^{2k-6}\Big)+m^3M^3(M-m)\Big(m^{2k-8}+m^{2k-9}M+\cdots+M^{2k-9}m+M^{2k-8}\Big)+\cdots+m^{k-3}M^{k-3}(M-$$
$$m)\Big((m^4+M^4)+mM(m^2+M^2)+m^2M^2\Big)+m^{k-2}M^{k-2}(M-m)\Big((m^2+M^2)+mM\Big)+m^{k-1}M^{k-1}\Big]+$$
$$cA(M-m)\Big((M^{2k}+m^{2k})+mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+$$
$$m^2)+m^kM^k\Big)-aC(M-m)\Big(mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+\cdots+M^{k-1}m^{k-1}(M^2+$$
$$m^2)+m^kM^k\Big)+(bA+cB)\Big[(M-m)\Big(m^{k-1}M^{k-1}(m^2+M^2)+m^kM^k\Big)+(M-m)\Big(m^{k-2}M^{k-2}(m^4+$$
$$M^4)+m^{k-1}M^{k-1}(m^2+M^2)+m^kM^k\Big)+\cdots+(M-m)\Big(m^2M^2(m^{2k-4}+M^{2k-4})+m^3M^3(m^{2k-6}+$$
$$M^{2k-6})+\cdots+m^{k-1}M^{k-1}(m^2+M^2)+m^kM^k\Big)+(M-m)\Big(mM(m^{2k-2}+M^{2k-2})+m^2M^2(m^{2k-4}+$$
$$M^{2k-4})+\cdots+m^{k-1}M^{k-1}(m^2+M^2)+m^kM^k\Big)\Big]+bB(M-m)\Big(\sum_{j=1}^{k-1}m^jM^{k-j}\Big)^2,$$

$= (aA + cC)(M - m)M^k m^k - (aB + bC)(M - m)\Big[m^2M^2(m^{2k-4} + M^{2k-4}) + 2m^3M^3(m^{2k-6} + M^{2k-6}) + 3m^4M^4(m^{2k-8} + M^{2k-8}) + \cdots + (k-3)m^{k-2}M^{k-2}(m^4 + M^4) + (k-2)m^{k-1}m^{k-1}(m^2 + M^2) + (k-1)m^kM^k\Big] + cA(M-m)\Big[(M^{2k} + m^{2k}) + mM(M^{2k-2} + m^{2k-2}) + m^2M^2(M^{2k-4} + m^{2k-4}) + \cdots + M^{k-1}m^{k-1}(M^2 + m^2) + m^kM^k\Big] - aC(M-m)\Big[mM(M^{2k-2} + m^{2k-2}) + m^2M^2(M^{2k-4} + m^{2k-4}) + \cdots + M^{k-1}m^{k-1}(M^2 + m^2) + m^kM^k\Big] + (bA + cB)(M-m)\Big[mM(m^{2k-2} + M^{2k-2}) + 2m^2M^2(m^{2k-4} + M^{2k-4}) + 3m^3M^3(m^{2k-6} + M^{2k-6}) + 4m^4M^4(m^{2k-8} + M^{2k-8}) + \cdots + (k-2)m^{k-2}M^{k-2}(m^4 + M^4) + (k-1)m^{k-1}m^{k-1}(m^2 + M^2) + (k-1)m^kM^k\Big] + bB(M-m)\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2,$

$= (M-m)\Big[cA(M^{2k}+m^{2k})+p_1mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+q_1m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+q_2m^3M^3(M^{2k-6}+m^{2k-6})+\cdots+q_{k-3}m^{k-2}M^{k-2}(M^4+m^4)+q_{k-2}m^{k-1}M^{k-1}(M^2+m^2)+p_2m^kM^k+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2\Big].$

Donc

$$\frac{L(M,m)}{K(M,m)} = (M-m)\frac{R(M,m)}{K(M,m)},$$

avec

$R(M,m) = cA(M^{2k}+m^{2k})+p_1mM(M^{2k-2}+m^{2k-2})+q_1m^2M^2(M^{2k-4}+m^{2k-4})+q_2m^3M^3(M^{2k-6}+m^{2k-6})+\cdots+q_{k-3}m^{k-2}M^{k-2}(M^4+m^4)+q_{k-2}m^{k-1}M^{k-1}(M^2+m^2)+p_2m^kM^k+bB\Big(\sum_{j=1}^{k-1} m^jM^{k-j}\Big)^2.$

On a $L(M,m) = 0$ et comme $R(M,m) > 0$, on obtient

$$M = m.$$

Donc, d'après le Théorème (0.0.5), on obtient

$$\lim_{x\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

■

2.4.3 L'ordre de convergence

On s'intéresse ici à l'estimation de l'ordre de convergence d'une solution de l'équation (2.9) qui converge vers le point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$.

On a pour $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \overline{x} &= \frac{ax_n^k + b\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + cx_{n-1}^k}{Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k} - \frac{a+(k-1)\,b+c}{A+(k-1)\,B+C} \\
&= \frac{\left(r_1\,(k-1)\,x_n^k + r_2 x_n^k + r_3\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j}\right) - \left(r_1\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + r_2 x_{n-1}^k + r_3\,(k-1)\,x_{n-1}^k\right)}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)\,B+C)} \\
&= \frac{r_1\left((k-1)\,x_n^k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j}\right) + r_2\left(x_n^k - x_{n-1}^k\right) + r_3\left(\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} - (k-1)\,x_{n-1}^k\right)}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)\,B+C)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \overline{x} &= \frac{r_1\left[\left(x_n^k - x_n x_{n-1}^{k-1}\right) + \left(x_n^k - x_n^2 x_{n-1}^{k-2}\right) + \cdots + \left(x_n^k - x_n^{k-1} x_{n-1}\right)\right]}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)\,B+C)} \\
&+ \frac{r_2\,(x_n - x_{n-1})\left(x_n^{k-1} + x_n^{k-2} x_{n-1} + \cdots + x_{n-1}^{k-1}\right)}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)\,B+C)} \\
&+ \frac{r_3\left[\left(x_n x_{n-1}^{k-1} - x_{n-1}^k\right) + \left(x_n^2 x_{n-1}^{k-2} - x_{n-1}^k\right) + \cdots + \left(x_n^{k-1} x_{n-1} - x_{n-1}^k\right)\right]}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)\,B+C)}.
\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-\overline{x} &= r_1 \frac{(x_n - x_{n-1})\left[\sum\limits_{j=0}^{k-2} x_n^{j+1}x_{n-1}^{k-j-2} + \sum\limits_{j=0}^{k-3} x_n^{j+2}x_{n-1}^{k-j-3} + \cdots + \sum\limits_{j=0}^{0} x_n^{j+k-1}x_{n-1}^{-j}\right]}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)} \\
&\quad + r_2 \frac{(x_n - x_{n-1})\sum\limits_{j=0}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j-1}}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)} \\
&\quad + r_3 \frac{(x_n - x_{n-1})\left[\sum\limits_{j=0}^{0} x_n^{-j}x_{n-1}^{j+k-1} + \sum\limits_{j=0}^{1} x_n^{1-j}x_{n-1}^{j+k-2} + \cdots + \sum\limits_{j=0}^{k-2} x_n^{k-j-2}x_{n-1}^{j+1}\right]}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)} \\
&= (r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3)(x_n - x_{n-1}),
\end{aligned}$$

avec

$$S_1 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-2} x_n^{j+1}x_{n-1}^{k-j-2} + \sum\limits_{j=0}^{k-3} x_n^{j+2}x_{n-1}^{k-j-3} + \cdots + \sum\limits_{j=0}^{0} x_n^{j+k-1}x_{n-1}^{-j}}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)},$$

$$S_2 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j-1}}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)}$$

et

$$S_3 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{0} x_n^{-j}x_{n-1}^{j+k-1} + \sum\limits_{j=0}^{1} x_n^{1-j}x_{n-1}^{j+k-2} + \cdots + \sum\limits_{j=0}^{k-2} x_n^{k-j-2}x_{n-1}^{j+1}}{\left(Ax_n^k + B\sum\limits_{j=1}^{k-1} x_n^j x_{n-1}^{k-j} + Cx_{n-1}^k\right)(A+(k-1)B+C)}.$$

Ainsi

$$x_{n+1}-\overline{x} = (r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3)(x_n - \overline{x}) - (r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3)(x_{n-1} - \overline{x}). \tag{2.10}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_1 &= \lim_{n\to\infty} S_3 = \frac{k(k-1)}{2(a+(k-1)b+c)(A+(k-1)B+C)}, \\
\lim_{n\to\infty} S_2 &= \frac{k}{(a+(k-1)b+c)(A+(k-1)B+C)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}(r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3) = p,$$

donc

$$r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3 = p + \varepsilon_1(n), \quad \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_1(n) = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} -(r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3) = q,$$

donc

$$-(r_1S_1 + r_2S_2 + r_3S_3) = q + \varepsilon_2(n), \quad \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_2(n) = 0.$$

Soit

$$e_n = x_n - \overline{x}.$$

Donc, l'équation (2.10) devient

$$e_{n+1} = (p + \epsilon_1(n))e_n + (q + \epsilon_2(n))e_{n-1} \tag{2.11}$$

C'est à dire l'équation (2.11) peut être écrite sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} e_n \\ e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon_2(n) & \epsilon_1(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{n-1} \\ e_n \end{pmatrix},$$

l'équation caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ est la même que l'équation caractéristique de l'équation linéaire associé à l'équation (2.9) autour du point d'équilibre $\overline{x} = \frac{a+(k-1)b+c}{A+(k-1)B+C}$. En utilisant les Théorèmes de Perron, on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.4.6 *Soient $\overline{x}$ Le point d'équilibre et $(x_n)_{n\geq 1}$ une solution positive de l'équation* (2.9). *Alors, le vecteur d'erreur $E_n = \begin{pmatrix} e_n \\ e_{n-1} \end{pmatrix}$ satisfait les relations asymptotiques*

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\|E_{n+1}\|}{\|E_n\|}, \quad \rho = \lim_{n\to\infty}\left(\|E_n\|\right)^{1/n},$$

avec ρ égale le module de l'une des racines de l'équation caractéristique.

2.4.4 Exemples numériques

Pour confirmer les résultats de cette partir, nous considérons les exemples numériques suivants :

Exemple 2.4.1 *Si on prend* $k = 3$, $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $A = 5$, $B = 2$, $C = 3$, *l'équation* (2.9) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + x_n^2 x_{n-1} + x_n x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}^3}{5x_n^3 + 2x_n^2 x_{n-1} + 2x_n x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}^3}. \tag{2.12}$$

On a $\overline{x} = 0.5$. *Toutes les conditions du Théorème* (2.4.5) *sont satisfaites et on a* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. *(voire fig.*(2.5)*)*

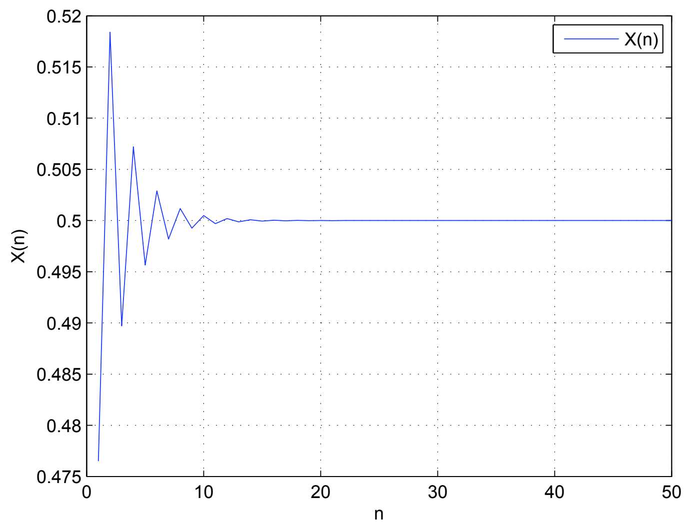

Figure 2.5 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.12) avec les valeurs initiales $x_{-1} = 0.45$, $x_0 = 0.55$.

Exemple 2.4.2 *Si on prend* $k = 4$, $a = 2$, $b = 2$, $c = 6$, $A = 1.3$, $B = 3$, $C = 9.5$, *l'équation* (2.9) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^4 + 2x_n^3 x_{n-1} + 2x_n^2 x_{n-1}^2 + 2x_n x_{n-1}^3 + 6x_{n-1}^4}{1.3x_n^4 + 3x_n^3 x_{n-1} + 3x_n^2 x_{n-1}^2 + 3x_n x_{n-1}^3 + 9.5x_{n-1}^4}. \tag{2.13}$$

On a $\overline{x} = 0.707$. *Toutes les conditions du Théorème* (2.4.4) *sont satisfaites et* $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$. *(voir fig.* (2.6)*)*

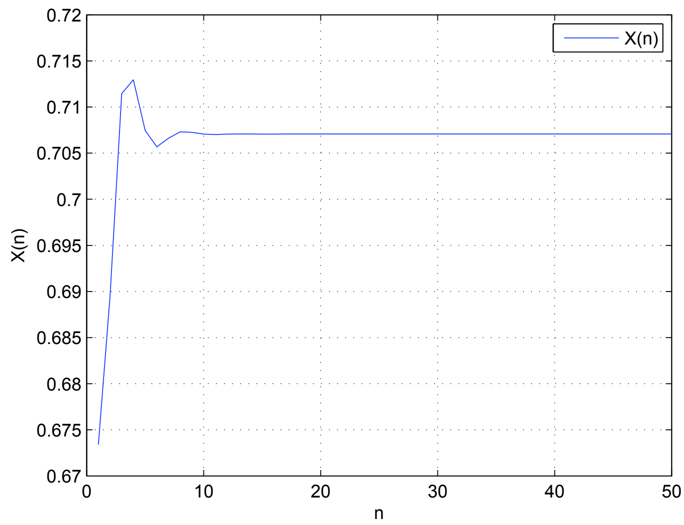

FIGURE 2.6 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (2.13) avec les valeurs initiales $x_{-1} = 0.95$, $x_0 = 0.75$.

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT DES SOLUTIONS DE CERTAINES ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES D'ORDRES SUPÉRIEURS

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_*^+$, k entier natural fixé et les valeurs initiales x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 sont des nombres réels. Puis, nous étudions la stabilité globale et la périodicité des solutions des systèmes d'équations aux différences suivants :

$$x_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

avec x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0, y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_0 sont des nombres réels et k entier natural fixé.

3.2 L'équation $x_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma x_{n-k}}$

Dans [55] Tollu et al. ont obtenu la forme des solutions des équations aux différences de type Ricatti

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{-1 + x_n},$$

en termes de la valeur initiale x_0 et des nombres de Fibonacci.

Motivé par les résultats obtenu dans [55], nous étudierons ici l'équation aux différences plus générale

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_*^+$, k entier natural fixé et les valeurs initiales x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 sont des nombres réels.

Remarque 3.2.1

- *Pour d'autres résultats généralisant ceux de Tollu et al., on pourra consulter [48].*
- *L'équation* (3.1) *se ramène à l'équation*

$$x_{n+1} = \frac{q}{p + x_{n-k}}, \tag{3.2}$$

en posant

$$q = \frac{\alpha}{\gamma} \text{ et } p = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ainsi, au lieu de l'équation (3.1)*, on étudera l'équation* (3.2).

3.2.1 Forme des solutions

Nous rappelons que W_n est le n-ème nombre d'Horadam, qui vérifié la relation de récurrence $W_{n+1} = pW_n + qW_{n-1}$ avec $W_0 = 0$, $W_1 = 1$.

Le théorème suivant décrit la forme des solutions de l'équation (3.2).

Théorème 3.2.1 *Soit* $\{x_n\}_{n\geq -k}$ *une solution de* (3.2). *Alors pour* $n = 0, 1, \ldots,$

$$x_{(k+1)n+i} = \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q, \quad i = 1, 2, ..., k+1.$$

avec les valeurs initiales sont des nombres réels et $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \notin \left\{ -\frac{W_{n+2}}{W_{n+1}},\ n = 0, 1, ... \right\}$.

Preuve. Par un calcule directe, on obtient de (3.2) que

$$x_i = \frac{q}{p + x_{i-(k+1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k+1,$$

donc le résultat est vérifié pour $n = 0$. Supposons que $n > 0$ et que le résultat est vérifier pour $n - 1$, c'est à dire,

$$x_{(k+1)(n-1)+i} = \frac{W_n + W_{n-1} x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}} q, \quad i = 1, 2, ..., k+1.$$

Montrons le résultat pour n. Il découle de l'équation (3.2) et de l'hypothèse de la récurrence que

$$\begin{aligned}
x_{(k+1)n+i} &= \frac{q}{p + x_{(k+1)(n-1)+i}} \\
&= \frac{q}{p + \dfrac{W_n + W_{n-1} x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}} q} \\
&= \frac{q}{\dfrac{pW_{n+1} + qW_n + (pW_n + qW_{n-1}) x_{i-(k+1)}}{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}}.
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$x_{(k+1)n+i} = \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q.$$

■

3.2.2 Stabilité global des solutions positives

Notons d'abord que l'équation (3.2) admet dans $]0, +\infty[$ un seul point d'équilibre , et il est donné par

$$E = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

Soit $I =]0, +\infty[$, et considérons la fonction $f : I^{k+1} \longrightarrow I$, définie par

$$f(u_0, u_1, ..., u_k) = \frac{q}{p + u_k}.$$

La stabilité locale du point d'équilibre $E = \frac{-p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ de l'équation (3.2) est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.2 *Le point d'équilibre E est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. L'équation linéaire associée à l'équation (3.2) autour du point d'équilibre E est donnée par

$$y_{n+1} = \frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q} y_{n-k}$$

et son polynôme caractéristique

$$\lambda^{k+1} = \frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q}.$$

Considérons les deux fonctions définies par

$$a(\lambda) = \lambda^{k+1}, \quad b(\lambda) = \frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q}.$$

On a

$$-1 < \frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q} < 1.$$

En effet,

$$p\sqrt{p^2 + 4q} < \sqrt{p^2 + 4q}\sqrt{p^2 + 4q} = p^2 + 4q,$$

donc

$$-p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q} < 4q,$$

ainsi

$$-2q - p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q} < 4q,$$

d'où

$$\frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q} < 1.$$

D'autre part

$$p\sqrt{p^2 + 4q} > p^2,$$

donc

$$-p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q} > 0,$$

ainsi

$$-2q - p^2 + p\sqrt{p^2 + 4q} > -2q,$$

d'où

$$-1 < \frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q}.$$

Alors,

$$\left|\frac{-p^2 - 2q + p\sqrt{p^2 + 4q}}{2q}\right| < 1.$$

Par conséquent

$$|b(\lambda)| < |a(\lambda)|, \ \forall \lambda : |\lambda| = 1.$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, tous les zéros de $P(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda)$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le Théorème (0.0.2), E est localement asymptotiquement stable. ∎

La stabilité asymptotique globale de l'équation (3.2), fera l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.2.3 *Le point d'équilibre E est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{x_n\}_{n\geq -k}$ une solution positive de l'équation (3.2). D'après le Théorème (3.2.2) il suffit de prouver que E est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} x_n = E.$$

Pour cela, on prouve que pour $i = 1, ..., k+1$ on a

$$\lim_{n\to\infty} x_{(k+1)n+i} = E.$$

Pour $i = 1, ..., k+1$, il découle du Théorème (3.2.1) que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{(k+1)n+i} &= \lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}\left(1 + \frac{W_n}{W_{n+1}} x_{i-(k+1)}\right)}{W_{n+1}\left(\frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} + x_{i-(k+1)}\right)} q \\
&= \frac{q + \frac{q}{\Phi_+} x_{i-(k+1)}}{\Phi_+ + x_{i-(k+1)}} \\
&= \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = E.$$

■

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons les deux exemples numériques suivants :

Exemple 3.2.1 *Si on prend* $p = 1, q = 8$ *et* $k = 1$*, l'équation* (3.2) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{8}{1 + x_{n-1}}. \tag{3.3}$$

Supposons $x_0 = 2$ *et* $x_{-1} = 1$. (voir Fig. (3.1)).

Exemple 3.2.2 *Si on prend* $p = 2, q = 11$ *et* $k = 4$*, l'équation* (3.2) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{11}{2 + x_{n-4}}. \tag{3.4}$$

Supposons $x_0 = 1.5$*,* $x_{-1} = 2.4$*,* $x_{-2} = 3$*,* $x_{-3} = 0.9$ *et* $x_{-4} = 2$. (voir Fig. (3.2)).

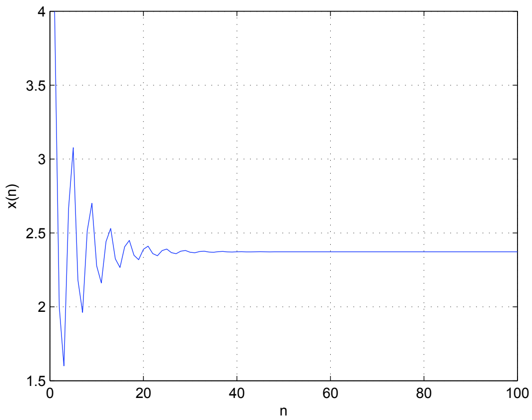

FIGURE 3.1 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.3).

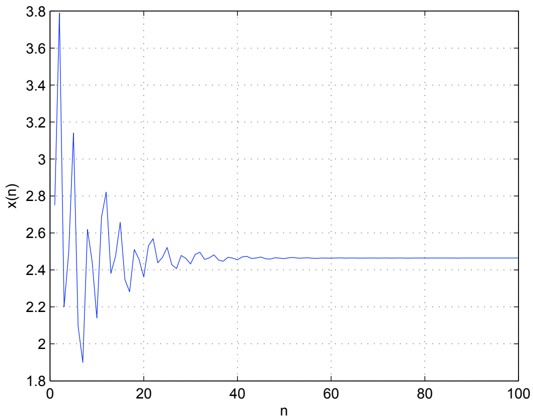

FIGURE 3.2 – Ce graphique représente le comportement de la solution de l'équation (3.4)

3.2.3 D'autres relations entre les solutions de l'équation (3.2) et les nombres d'Horadam

Théorème 3.2.4 *Soient* $x_{-k+i} = \dfrac{qW_k}{W_{k+1}}$, $i = 0, 1, ..., k$, *les valeurs initiales de l'équation* (3.2). *Alors pour* $n, k \in \mathbb{N}$ *and* $n > k+1$, *on a*

$$W_n = \frac{q^{n-(k+1)} W_{k+1}}{x_i x_{(k+1)+i} x_{2(k+1)+i} \cdots x_{(n-(k+2))(k+1)+i}}.$$

Preuve. On a d'après le Théorème (3.2.1)

$$\begin{aligned}
x_i &= \frac{W_1 + W_0 x_{i-(k+1)}}{W_2 + W_1 x_{i-(k+1)}} q, \\
x_{(k+1)+i} &= \frac{W_2 + W_1 x_{i-(k+1)}}{W_3 + W_2 x_{i-(k+1)}} q, \\
x_{2(k+1)+i} &= \frac{W_3 + W_2 x_{i-(k+1)}}{W_4 + W_3 x_{i-(k+1)}} q, \\
&\vdots \\
x_{n(k+1)+i} &= \frac{W_{n+1} + W_n x_{i-(k+1)}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}} q
\end{aligned}$$

D'où,

$$\prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} = \frac{q^{n+1}}{W_{n+2} + W_{n+1} x_{i-(k+1)}}. \tag{3.5}$$

Donc,

$$\prod_{j=0}^{n-(k+2)} x_{j(k+1)+i} = \frac{q^{n-(k+1)}}{W_{n-k} + W_{n-(k+1)} x_{i-(k+1)}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x_i x_{(k+1)+i} x_{2(k+1)+i} \cdots x_{(n-(k+2))(k+1)+i} &= \prod_{j=0}^{n-(k+2)} x_{j(k+1)+i} \\
&= \frac{q^{n-(k+1)}}{W_{n-k} + W_{n-(k+1)} x_{i-(k+1)}}. \\
&= \frac{q^{n-(k+1)}}{W_{n-k} + \frac{qW_k}{W_{k+1}} W_{n-(k+1)}} \\
&= \frac{q^{n-(k+1)} W_{k+1}}{W_{n-k} W_{k+1} + q W_k W_{n-(k+1)}}.
\end{aligned}$$

D'après l'identité (i) du Lemme (0.0.2) on obtient

$$x_i x_{(k+1)+i} x_{2(k+1)+i} \cdots x_{(n-(k+2))(k+1)+i} = \frac{q^{n-(k+1)} W_{k+1}}{W_n}.$$

D'où,

$$W_n = \frac{q^{n-(k+1)} W_{k+1}}{x_i x_{(k+1)+i} x_{2(k+1)+i} \cdots x_{(n-(k+2))(k+1)+i}}.$$

■

Théorème 3.2.5 *Soient* $x_{-k+i} = -\frac{W_{n+2+r}}{W_{n+1+r}}$, $i = 1, ..., k$, *les valeurs initiales de l'équation* (3.2). *Alors pour* $n, r \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(-1)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} = \frac{W_{n+1+r}}{W_r}.$$

En plus

$$\lim_{r\to\infty}(-1)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} = \Phi_{+}^{n+1},$$

Preuve. On a de l'égalité (3.5),

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} &= \frac{q^{n+1}}{W_{n+2} + W_{n+1}x_{i-(k+1)}} \\ &= \frac{q^{n+1}}{W_{n+2} - W_{n+1}\frac{W_{n+2+r}}{W_{n+1+r}}} \\ &= \frac{q^{n+1}W_{n+1+r}}{W_{n+1+r}W_{n+2} - W_{n+1}W_{n+2+r}}.\end{aligned}$$

Donc, d'après l'identité d'Ocagne, on obtient

$$(-1)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} = \frac{W_{n+1+r}}{W_r}.$$

Soit $r \to \infty$, Alors

$$\lim_{r\to\infty}(-1)^{n+1} \prod_{j=0}^{n} x_{j(k+1)+i} = \lim_{r\to\infty} \frac{W_{n+1+r}}{W_r} = \Phi_{+}^{n+1}.$$

■

3.3 Le système $x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-k}}$, $y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-k}}$

Dans cette section nous étudions le comportement des solutions du système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.6}$$

où k entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels avec $x_{-k}, y_{-k}, ..., x_0, y_0 \notin \left\{-\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$, où $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est la suite de Fibonacci.

Avant d'étudier le système (3.6), nous rappelons quelques résultats fondamentaux nécessaire pour notre étude.

Soient f et g deux fonctions continûment différentiables

$$f: I^{k+1} \times J^{k+1} \longrightarrow I, \; g: I^{k+1} \times J^{k+1} \longrightarrow J$$

où I, J sont des intervalles réels. Considérons le système d'équations aux différences

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} = & g(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) \end{cases} \tag{3.7}$$

où $n, k \in \mathbb{N}_0$, $(x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_0) \in I^{k+1}$ et $(y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0) \in J^{k+1}$.
Il est claire que la système (3.6), est un cas particulier du système plus générale (3.7).

Définissons la fonction

$$H: I^{k+1} \times J^{k+1} \longrightarrow I^{k+1} \times J^{k+1}$$

par

$$H(W) = (f_0(W), f_1(W), \ldots, f_k(W), g_0(W), g_1(W), \ldots, g_k(W))$$

avec

$$W = (u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k)^T,$$

$$f_0(W) = f(W), f_1(W) = u_0, \ldots, f_k(W) = u_{k-1},$$

$$g_0(W) = g(W), g_1(W) = v_0, \ldots, g_k(W) = v_{k-1}.$$

Posons,

$$W_n = [x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}]^T.$$

Ainsi, le système (3.7) est équivalent au système

$$W_{n+1} = H(W_n), \; n = 0, 1, \ldots, \tag{3.8}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x_{n+1} = & f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}\right) \\ x_n = & x_n \\ \vdots & \\ x_{n-k+1} = & x_{n-k+1} \\ y_{n+1} = & g\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1} \ldots,, y_{n-k}\right) \\ y_n = & y_n \\ \vdots & \\ y_{n-k+1} = & y_{n-k+1} \end{cases}.$$

Définition 3.3.1

1. *Un point* $(\overline{x};\overline{y})$ *est dit point d'équilibre pour le système* (3.7) *si*

$$\overline{x} = F(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, ..., \overline{y}),$$

$$\overline{y} = G(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, ..., \overline{y}).$$

2. *Un point* $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, ..., \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ *est point d'équilibre du système* (3.8) *si*

$$\overline{W} = H(\overline{W}).$$

Définition 3.3.2 *Soient* $\overline{W}$ *un point d'équilibre du système* (3.8) *et* $\| \,.\, \|$ *une norme, par exemple la norme euclidienne.*

1. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit stable (ou localement stable) si pour chaque* $\epsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \delta$ *implique* $\| W_n - \overline{W} \| < \epsilon$ *pour* $n \geq 0$.
2. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit asymptotiquement stable (ou localement asymptotiquement stable) s'il est stable et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que* $\| W_0 - \overline{W} \| < \gamma$ *implique*

$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \ n \to +\infty.$$

3. *Le point d'équilibre* $\overline{W}$ *est dit globalement attractif (respectivement globalement attractif de bassin d'attraction l'ensemble* $G \subseteq I^{k+1} \times J^{k+1}$*), si pour chaque* W_0 *(respectivement pour chaque* $W_0 \in G$*)*

$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \ n \to +\infty.$$

4. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit globalement asymptotiquement stable (respectivement globalement asymptotiquement stable par rapport à G) si est localement stable, et si pour chaque W_0 (respectivement pour chaque $W_0 \in G$),*

$$\| W_n - \overline{W} \| \to 0, \; n \to +\infty.$$

5. *Le point d'équilibre $\overline{W}$ est dit instable s'il n'est pas localement stable.*

Remarque 3.3.1
Il est claire que $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ *est un point d'équilibre du système* (3.7) *si et seulement si* $\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \dots, \overline{y}) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ *est un point d'équilibre du système* (3.8).

Le système linéaire associé au système (3.8) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = (\overline{x}, \overline{x}, \cdots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \cdots, \overline{y})$$

est donné par

$$W_{n+1} = AW_n, \; n = 0, 1, ...$$

où A est la matrice Jacobienne de la fonction H au point d'équilibre $\overline{W}$, donnée par

$$A = \begin{bmatrix}
\frac{\partial f_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_0}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial f_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial g_0}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_0}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_0}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\frac{\partial g_1}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_1}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial v_k}(\overline{W}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_k}{\partial u_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial u_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial u_k}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_0}(\overline{W}) & \frac{\partial g_k}{\partial v_1}(\overline{W}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial v_k}(\overline{W})
\end{bmatrix}$$

Théorème 3.3.1 (Stabilité par linéarisation, [32])

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne A sont dans le disque unité ouvert* $|\lambda| < 1$, *alors le point d'équilibre* $\overline{W}$ *du système* (3.8) *est asymptotiquement stable.*

2. *Si au moins une valeur propre de la matrice Jacobienne A a un module supérieur à un, alors le point d'équilibre* $\overline{W}$ *du système* (3.8) *est instable.*

3.3.1 Forme des solutions

Le théorème suivant décrit la forme des solutions du système (3.6).

Théorème 3.3.2 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution de* (3.6). *Alors pour* $n = 0, 1, \ldots,$

$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(k+1)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(k+1)}}, \quad i = 1, 2, ..., k+1,$$
$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}x_{i-(2k+2)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}y_{i-(2k+2)}}, \quad i = k+2, ..., 2k+2.$$

Preuve. Par un calcul direct, on obtient de (3.6) que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+y_{-k}},\ x_2 = \frac{1}{1+y_{-k+1}}, \ldots, x_{k+1} = \frac{1}{1+y_0}, \\ y_1 &= \frac{1}{1+x_{-k}},\ y_2 = \frac{1}{1+x_{-k+1}}, \ldots, y_{k+1} = \frac{1}{1+x_0}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{k+2} &= \frac{1+x_{-k}}{2+x_{-k}},\ x_{k+3} = \frac{1+x_{-k+1}}{2+x_{-k+1}}, \ldots, x_{2k+2} = \frac{1+x_0}{2+x_0}, \\ y_{k+2} &= \frac{1+y_{-k}}{2+y_{-k}},\ y_{k+3} = \frac{1+y_{-k+1}}{2+y_{-k+1}}, \ldots, y_{2k+2} = \frac{1+y_0}{2+y_0}. \end{aligned}$$

Donc le résultat est vérifié pour $n = 0$. Supposons que $n \geq 1$ et que le résultat est vérifié pour $n-1$, c'est à dire

$$x_{2(k+1)(n-1)+i} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n-2}y_{i-(k+1)}}{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-(k+1)}},\ i = 1, 2, ..., k+1, \tag{3.9}$$

$$y_{2(k+1)(n-1)+i} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n-2}x_{i-(k+1)}}{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-(k+1)}},\ i = 1, 2, ..., k+1, \tag{3.10}$$

$$x_{2(k+1)(n-1)+i} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(2k+2)}},\ i = k+2, k+3, ..., 2k+2, \tag{3.11}$$

$$y_{2(k+1)(n-1)+i} = \frac{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(2k+2)}},\ i = k+2, k+3, ..., 2k+2, \tag{3.12}$$

Pour $i = 1, ..., k+1$, il résulte de (3.6), (3.9) et (3.10) que

$$\begin{aligned}
x_{2(k+1)n+i} &= \frac{1}{1+y_{2(k+1)n-(1+k)+i}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_{2(k+1)(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1+x_{2(k+1)(n-1)+i}}{2+x_{2(k+1)(n-1)+i}} \\
&= \frac{1+\frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}y_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-(k+1)}}}{2+\frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}y_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-(k+1)}}} \\
&= \frac{\frac{(F_{2n}+F_{2n-1})+(F_{2n-1}+F_{2n-2})y_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-(k+1)}}}{\frac{2F_{2n}+F_{2n-1}+2F_{2n-1}y_{i-(k+1)}+F_{2n-2}y_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}y_{i-(k+1)}}} \\
&= \frac{F_{2n+1}+F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+1}+F_{2n}+(F_{2n-1}+F_{2n})y_{i-(k+1)}} \\
&= \frac{F_{2n+1}+F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2}+F_{2n+1}y_{i-(k+1)}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_{2(k+1)n+i} &= \frac{1}{1+x_{2(k+1)n-(1+k)+i}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{1+y_{2(k+1)(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1+y_{2(k+1)(n-1)+i}}{2+y_{2(k+1)(n-1)+i}} \\
&= \frac{1+\frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-(k+1)}}}{2+\frac{F_{2n-1}+F_{2n-2}x_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-(k+1)}}} \\
&= \frac{\frac{(F_{2n}+F_{2n-1})+(F_{2n-1}+F_{2n-2})x_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-(k+1)}}}{\frac{2F_{2n}+F_{2n-1}+2F_{2n-1}x_{i-(k+1)}+F_{2n-2}x_{i-(k+1)}}{F_{2n}+F_{2n-1}x_{i-(k+1)}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+1} + F_{2n} + (F_{2n-1} + F_{2n})x_{i-(k+1)}} \\
&= \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(k+1)}}.
\end{aligned}$$

De même, pour $i = k+2, k+3, ..., 2k+2$, de (1.3), (3.11) et (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}
x_{2(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + y_{2(k+1)n-(1+k)+i}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x_{2(k+1)(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1 + x_{2(k+1)(n-1)+i}}{2 + x_{2(k+1)(n-1)+i}} \\
&= \frac{1 + \frac{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(2k+2)}}}{2 + \frac{F_{2n} + F_{2n-1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(2k+2)}}} \\
&= \frac{\frac{F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n}x_{i-(2k+2)} + F_{2n-1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(2k+2)}}}{\frac{2F_{2n+1} + F_{2n} + 2F_{2n}x_{i-(2k+2)} + F_{2n-1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(2k+2)}}} \\
&= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n+2} + F_{2n}x_{i-(2k+2)} + F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}} \\
&= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}x_{i-2(k+2)}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_{2(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + x_{2(k+1)n-(1+k)+i}} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + y_{2(k+1)(n-1)+i}}} \\
&= \frac{1 + y_{2(k+1)(n-1)+i}}{2 + y_{2(k+1)(n-1)+i}} \\
&= \frac{1 + \frac{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(2k+2)}}}{2 + \frac{F_{2n} + F_{2n-1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(2k+2)}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{F_{2n+1} + F_{2n} + F_{2n}y_{i-(2k+2)} + F_{2n-1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(2k+2)}}}{\frac{2F_{2n+1} + F_{2n} + 2F_{2n}y_{i-(2k+2)} + F_{2n-1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(2k+2)}}}$$

$$= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+1} + F_{2n+2} + F_{2n}y_{i-(2k+2)} + F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}$$

$$= \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}y_{i-2(k+2)}}.$$

■

3.3.2 Stabilité globale des solutions positives

Dans cette partie, nous étudions la stabilité asymptotique globale du système (3.6). Soient $I = J =]0, +\infty[$, et considérons les fonctions

$$f : I^{k+1} \times J^{k+1} \longrightarrow I,\ g : I^{k+1} \times J^{k+1} \longrightarrow J$$

définies par

$$f(u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{1 + v_k},$$

$$g(u_0, u_1, \ldots, u_k, v_0, v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{1 + u_k}.$$

Notons que le système (3.6) admet dans $I \times J$ un seul point d'équilibre , et il est donné par

$$E = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Théorème 3.3.3 *Le point d'équilibre E est localement asymptotiquement stable.*

Preuve. Le système linéaire associé au système (3.6) autour du point d'équilibre

$$\overline{W} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \ldots, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \ldots, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \in I^{k+1} \times J^{k+1}$$

est donné par

$$X_{n+1} = AX_n,\ X_n = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}, y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k})^T \tag{3.13}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$$

où B, C sont des matrices d'ordre $(k+1)$ données par

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I_{2k+2}) = \det \begin{bmatrix} B - \lambda I_{k+1} & C \\ C & B - \lambda I_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{2k+2} - \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & \frac{-3+\sqrt{5}}{2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Donc on obtient

$$P(\lambda) = \lambda^{2k+2} - \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

On considère les deux fonctions définies par

$$a(\lambda) = \lambda^{2k+2},\ b(\lambda) = \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^2.$$

On a

$$|b(\lambda)| < |a(\lambda)|\,, \forall \lambda : |\lambda| = 1$$

Donc, d'après le Théorème de Rouché, touts les zéros de $P(\lambda) = a(\lambda) - b(\lambda$ sont dans $|\lambda| < 1$. D'où, d'après le Théorème (3.3.1), E est localement asymptotiquement stable.

■

Théorème 3.3.4 *Le point d'équilibre E est globalement asymptotiquement stable.*

Preuve. Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ une solution de (3.6). D'après le Théorème (3.3.3) il suffit de prouver que E est globalement attractif, c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = E.$$

Pour cela, on prouve que pour $i = 1, ..., 2k+1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2(k+1)n+i} = \lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n+i} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pour $i = 1, ..., k+1$, il découle du Théorème (3.3.2) que

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2(k+1)n+i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(k+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}y_{i-(k+1)}}{\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} + y_{i-(k+1)}}, \tag{3.14}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n+i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(k+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}x_{i-(k+1)}}{\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} + x_{i-(k+1)}}. \tag{3.15}$$

En utilisant la formule de Binet

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.16}$$

avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{2n} \times \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2n}}{\alpha-\beta}}{\alpha^{2n+1} \times \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2n+1}}{\alpha-\beta}} = \frac{1}{\alpha}. \tag{3.17}$$

De même on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} = \alpha. \tag{3.18}$$

Donc, de (3.14)-(3.18), on aura

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2(k+1)n+i} = \frac{1 + \frac{1}{\alpha}y_{i-(k+1)}}{\alpha + y_{i-(k+1)}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n+i} = \frac{1 + \frac{1}{\alpha}x_{i-(k+1)}}{\alpha + x_{i-(k+1)}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'une manière similaire, on obtient, pour $i = k+2, k+2, ..., 2k+1$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{2(k+1)n+i} = \lim_{n\to+\infty} y_{2(k+1)n+i} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

■

Remarque 3.3.2 *Si* $x_{i_0-(k+1)} = \overline{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\Big($*respectivement* $y_{i_0-(k+1)} = \overline{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)$ *pour* $1 \leq i_0 \leq k+1$, *on a pour* $n = 0, 1, \ldots$

$$y_{(k+1)n+i_0} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{respectivement } x_{(k+1)n+i_0} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Utilisant le fait que

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{1}{1+\overline{x}} = \frac{1}{1+\overline{y}}$$

et le Théorème (3.3.2), *on obtient*

$$\begin{aligned} y_{(k+1)n+i_0} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}\overline{x}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{x}} &= \frac{F_{2n+1} + \frac{F_{2n}}{1+\overline{x}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{x}} = \frac{\frac{F_{2n+1}+F_{2n}+\overline{x}F_{2n+1}}{1+\overline{x}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{x}} \\ &= \frac{\frac{F_{2n+2}+\overline{x}F_{2n+1}}{1+\overline{x}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{x}} = \frac{1}{1+\overline{x}} = \overline{x}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x_{(k+1)n+i_0} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}\overline{y}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{y}} &= \frac{F_{2n+1} + \frac{F_{2n}}{1+\overline{y}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{y}} = \frac{\frac{F_{2n+1}+F_{2n}+\overline{y}F_{2n+1}}{1+\overline{y}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{y}} \\ &= \frac{\frac{F_{2n+2}+\overline{y}F_{2n+1}}{1+\overline{y}}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}\overline{y}} = \frac{1}{1+\overline{y}} = \overline{y}. \end{aligned}$$

De même, si $x_{i_0-(2k+2)} = \overline{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\Big($*respectivement* $y_{i_0-(2k+2)} = \overline{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)$ *pour chaque* $k+2 \leq i_0 \leq 2k+2$, *on a pour* $n = 0, 1, \ldots$

$$y_{(k+1)n+i_0} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{respectivement } x_{(k+1)n+i_0} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons l' exemple numérique suivant :

Exemple 3.3.1 *Si on prend* $k = 5$, *le système* (3.6) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-5}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{1+x_{n-5}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.19}$$

Supposons $x_{-5} = 1$, $x_{-4} = 1.6$, $x_{-3} = 3.4$, $x_{-2} = 6.1$, $x_{-1} = 2$, $x_0 = 1.3$, $y_{-5} = 0.7$, $y_{-4} = 4.2$, $y_{-3} = 0.3$, $y_{-2} = 2.4$, $y_{-1} = 0.2$ *et* $y_0 = 5$. (voir Fig. (3.3)).

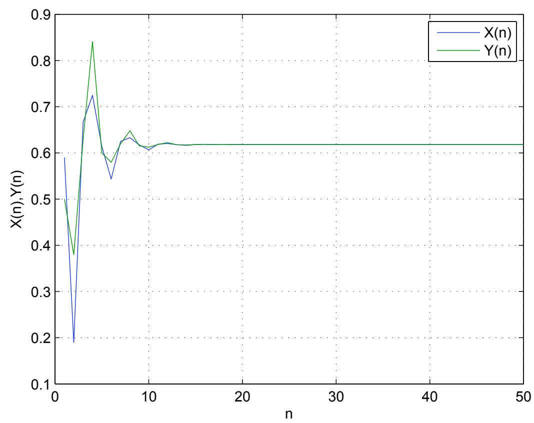

FIGURE 3.3 – Ce graphique représente le comportement de la solution du système (3.19).

3.3.3 D'autres systèmes

Corollaire 3.3.1 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{-1 + y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{-1 + x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.20}$$

où kest un entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels, avec $x_{-k}, y_{-k}, ..., x_0, y_0 \notin \left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 0, 1, ...\right\}$. *Alors pour* $n = 1, 2, ...,$

$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} - F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} - F_{2n+1}y_{i-(k+1)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} - F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} - F_{2n+1}x_{i-(k+1)}}, \quad i = 1, 2, ..., k+1,$$
$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} - F_{2n+2}x_{i-(2k+2)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} - F_{2n+2}y_{i-(2k+2)}}, \quad i = k+2, ..., 2k+2.$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.3.2) en remplaçant (x_n, y_n) par $(-x_n, -y_n)$. ■

Corollaire 3.3.2 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 - y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{-1 - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.21}$$

où k est un entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels, avec $y_{-k}, ..., y_0 \notin \left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$, *et* $x_{-k}, ...,, x_0 \notin \left\{-\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$, *Alors pour* $n = 0, 1, ...,$

$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} - F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} - F_{2n+1}y_{i-(k+1)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(k+1)}}, \quad i = 1, 2, ..., k+1,$$
$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}x_{i-(2k+2)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} - F_{2n+2}y_{i-(2k+2)}}, \quad i = k+2, ..., 2k+2.$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.3.2) en remplaçant y_n par $-y_n$. ■

Corollaire 3.3.3 *Soit $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{-1-y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.22}$$

où k est un entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels, avec $x_{-k}, ..., x_0 \notin \left\{\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$ et $y_{-k}, ..., y_0 \notin \left\{-\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}, n = 1, 2, ...\right\} \cup \left\{-\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}, n = 1, 2, ...\right\}$. Alors pour $n = 0, 1, ...,$

$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}y_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(k+1)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+1} - F_{2n}x_{i-(k+1)}}{F_{2n+2} - F_{2n+1}x_{i-(k+1)}}, \quad i = 1, 2, ..., k+1,$$
$$x_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} - F_{2n+1}x_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} - F_{2n+2}x_{i-(2k+2)}}, \quad y_{2(k+1)n+i} = \frac{F_{2n+2} + F_{2n+1}y_{i-(2k+2)}}{F_{2n+3} + F_{2n+2}y_{i-(2k+2)}}, \quad i = k+2, ..., 2k+2.$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.3.2) en remplaçant x_n par $-x_n$. ■

3.4 Le système $x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{n-k}}$, $y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-k}}$

Dans cette section, nous étudions la périodicité des solutions du système d'équations aux différences

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.23}$$

où k est un entier natural fixé et les valeurs initiales $x_{-k}, y_{-k}, x_{-k+1}, y_{-k+1}, ..., x_0, y_0 \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.

Le résultat suivant est consacré à la périodicité des solutions du système (3.23).

Théorème 3.4.1 *Toute solution $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ du système* (3.23) *est périodique de période* $6k+6$, *c'est à dire*

$$x_{n+(6k+6)} = x_n, \quad y_{n+(6k+6)} = y_n, \quad n = -k, -k+1, \cdots.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+(6k+6)} &= \frac{1}{1-y_{n+5k+5}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x_{n+4k+4}}} \\
&= \frac{-1+x_{n+4k+4}}{x_{n+4k+4}} = \frac{-1+\frac{1}{1-y_{n+3k+3}}}{\frac{1}{1-y_{n+3k+3}}} \\
&= y_{n+3k+3} = \frac{1}{1-x_{n+2k+2}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{1-y_{n+k+1}}} = \frac{-1+y_{n+k+1}}{y_{n+k+1}} \\
&= \frac{-1+\frac{1}{1-x_n}}{\frac{1}{1-x_n}} = x_n.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
y_{n+(6k+6)} &= \frac{1}{1-x_{n+5k+5}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-y_{n+4k+4}}} \\
&= \frac{-1+y_{n+4k+4}}{y_{n+4k+4}} = \frac{-1+\frac{1}{1-x_{n+3k+3}}}{\frac{1}{1-x_{n+3k+3}}} \\
&= x_{n+3k+3} = \frac{1}{1-y_{n+2k+2}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{1-x_{n+k+1}}} = \frac{-1+x_{n+k+1}}{x_{n+k+1}} \\
&= \frac{-1+\frac{1}{1-y_n}}{\frac{1}{1-y_n}} = y_n.
\end{aligned}$$

■

Le théorème suivant décrit la forme des solutions du système (3.23).

Théorème 3.4.2 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution de* (3.23). *Alors pour* $n = 0, 1, ...,$ *on a*

$$x_{6(k+1)n+i} = \frac{1}{1-y_{-k+i-1}}, \quad y_{6(k+1)n+i} = \frac{1}{1-x_{-k+i-1}}, \quad i = 1, ..., k+1. \tag{3.24}$$

$$x_{6(k+1)n+i} = \frac{-1+x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, \quad y_{6(k+1)n+i} = \frac{-1+y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, \quad i = k+2, ..., 2k+2. \tag{3.25}$$

$$x_{6(k+1)n+i} = y_{-k+i-1}, \quad y_{6(k+1)n+i} = x_{-k+i-1}, \quad i = 2k+3, ..., 3k+3. \tag{3.26}$$

$$x_{6(k+1)n+i} = \frac{1}{1 - x_{-k+i-1}}, \quad y_{6(k+1)n+i} = \frac{1}{1 - y_{-k+i-1}}, \quad i = 3k+4, ..., 4k+4. \tag{3.27}$$

$$x_{6(k+1)n+i} = \frac{-1 + y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, \quad y_{6(k+1)n+i} = \frac{-1 + x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, \quad i = 4k+5, ..., 5k+5. \tag{3.28}$$

$$x_{6(k+1)n+i} = x_{-k+i-1}, \quad y_{6(k+1)n+i} = y_{-k+i-1}, \quad i = 5k+6, ..., 6k+6. \tag{3.29}$$

Preuve. 1) Soit, $n = 0, 1, \ldots, k$. On obtient de (3.23)

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1 - y_{-k}}, \\
y_1 &= \frac{1}{1 - x_{-k}}, \\
x_2 &= \frac{1}{1 - y_{-k+1}}, \\
y_2 &= \frac{1}{1 - x_{-k+1}}, \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= \frac{1}{1 - y_0}, \\
y_{k+1} &= \frac{1}{1 - x_0}.
\end{aligned}$$

Du Théorème (3.4) on obtient

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{6(k+1)+1} = x_{6(k+1)2+1} = \cdots = \frac{1}{1-y_{-k}}, \\
y_1 &= y_{6(k+1)+1} = y_{6(k+1)2+1} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k}}, \\
x_2 &= x_{6(k+1)+2} = x_{6(k+1)2+2} = \cdots = \frac{1}{1-y_{-k+1}}, \\
y_2 &= y_{6(k+1)+2} = y_{6(k+1)2+2} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k+1}}, \\
&\vdots \\
x_{k+1} &= x_{6(k+1)+k+1} = x_{6(k+1)2+k+1} = \cdots \frac{1}{1-y_0}, \\
y_{k+1} &= y_{6(k+1)+k+1} = y_{6(k+1)2+k+1} = \cdots \frac{1}{1-x_0},
\end{aligned}$$

d'où (3.24).

2) Soit, $n = k+1, k+2, ..., 2k+1$. De (3.23) on aura

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-y_{(n-k-1)+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x_{n-k-1-k}}} = \frac{-1+x_{n-2k-1}}{x_{n-2k-1}}, \tag{3.30}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-x_{(n-k-1)+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-y_{n-k-1-k}}} = \frac{-1+y_{n-2k-1}}{y_{n-2k-1}}. \tag{3.31}$$

Maintenant en utilisant (3.30) et (3.31), on obtient

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= \frac{-1+x_{-k}}{x_{-k}}, \\
y_{k+2} &= \frac{-1+y_{-k}}{x_{-k}}, \\
x_{k+3} &= \frac{-1+x_{-k+1}}{x_{-k}}, \\
y_{k+3} &= \frac{-1+y_{-k}}{x_{-k+1}}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2} &= \frac{-1+x_0}{x_0}, \\
y_{2k+2} &= \frac{-1+y_0}{x_0}.
\end{aligned}$$

D'après le Théorème (3.4), on a

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= x_{6(k+1)+k+2} = x_{6(k+1)2+k+2} = \cdots = \frac{-1+x_{-k}}{x_{-k}}, \\
y_{k+2} &= y_{6(k+1)+k+2} = y_{6(k+1)2+k+2} = \cdots = \frac{-1+x_{-k}}{x_{-k}}, \\
x_{k+3} &= x_{6(k+1)+k+3} = x_{6(k+1)2+k+3} = \cdots = \frac{-1+x_{-k+1}}{x_{-k+1}}, \\
y_{k+3} &= y_{6(k+1)+k+3} = y_{6(k+1)2+k+3} = \cdots = \frac{-1+x_{-k+1}}{x_{-k+1}}, \\
&\vdots \\
x_{2k+2} &= x_{6(k+1)+2k+2} = x_{6(k+1)2+2k+2} = \cdots = \frac{-1+x_0}{x_0}, \\
y_{2k+2} &= y_{6(k+1)+2k+2} = y_{6(k+1)2+2k+2} = \cdots = \frac{-1+y_0}{y_0},
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de (3.25).

3) Soit, $n = 2k+2, 2k+3, ..., 3k+2$. Par (3.23), (3.30) et (3.31), on obtient

$$x_{n+1} = \frac{-1+\frac{1}{1-y_{n-2k-2-k}}}{\frac{1}{1-y_{n-2k-2-k}}} = \frac{\frac{y_{n-3k-2}}{1-y_{n-3k-2}}}{\frac{1}{1-y_{n-3k-2}}} = y_{n-3k-2}, \tag{3.32}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{-1+\frac{1}{1-x_{n-2k-2-k}}}{\frac{1}{1-x_{n-2k-2-k}}} = \frac{\frac{x_{n-3k-2}}{1-x_{n-3k-2}}}{\frac{1}{1-x_{n-3k-2}}} = x_{n-3k-2}. \tag{3.33}$$

En utilisant (3.32) et (3.33) on aura

$$\begin{aligned}
x_{2k+3} &= y_{-k}, \\
y_{2k+3} &= x_{-k}, \\
x_{2k+4} &= y_{-k+1}, \\
y_{2k+4} &= x_{-k+1}, \\
&\vdots \\
x_{3k+3} &= y_0, \\
y_{3k+3} &= x_0.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont périodique de période $6(k+1)$, on obtient la formule (3.26). C'est à dire

$$\begin{aligned}
x_{2k+3} &= x_{6(k+1)+2k+3} = x_{6(k+1)2+2k+3} = \cdots = y_{-k}, \\
y_{2k+3} &= y_{6(k+1)+2k+3} = y_{6(k+1)2+2k+3} = \cdots = x_{-k}, \\
x_{2k+4} &= x_{6(k+1)+2k+4} = x_{6(k+1)2+2k+4} = \cdots = y_{-k+1}, \\
y_{2k+4} &= y_{6(k+1)+2k+4} = y_{6(k+1)2+2k+4} = \cdots = x_{-k+1}, \\
&\vdots \\
x_{3k+3} &= x_{6(k+1)+3k+3} = x_{6(k+1)2+3k+3} = \cdots = y_0, \\
y_{3k+3} &= y_{6(k+1)+3k+3} = y_{6(k+1)2+3k+3} = \cdots = x_0.
\end{aligned}$$

4) Soit, $n = 3k+3, 3k+4, ..., 4k+3$. De (3.23), (3.32) et (3.33), on déduit que

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 - x_{n-4k-3}}, \tag{3.34}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - y_{n-4k-3}}. \tag{3.35}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
x_{3k+4} &= \frac{1}{1 - x_{-k}}, \; y_{3k+4} = \frac{1}{1 - y_{-k}}, \\
x_{3k+5} &= \frac{1}{1 - x_{-k+1}}, \; y_{3k+5} = \frac{1}{1 - y_{-k+1}}, \\
&\vdots \\
x_{4k+4} &= \frac{1}{1 - x_0}, \; y_{4k+4} = \frac{1}{1 - y_0}.
\end{aligned}$$

Il résulte du Théorème (3.4) que

$$\begin{aligned}
x_{3k+4} &= x_{6(k+1)+3k+4} = x_{6(k+1)2+3k+4} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k}},\\
y_{3k+4} &= y_{6(k+1)+3k+4} = y_{6(k+1)2+3k+4} = \cdots = \frac{1}{1-y_{-k}},\\
x_{3k+5} &= x_{6(k+1)+3k+5} = x_{6(k+1)2+3k+5} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k+1}},\\
y_{3k+5} &= y_{6(k+1)+3k+5} = y_{6(k+1)2+3k+5} = \cdots = \frac{1}{1-y_{-k+1}},\\
&\vdots\\
x_{4k+4} &= x_{6(k+1)+4k+4} = x_{6(k+1)2+4k+4} = \cdots = \frac{1}{1-x_{0}},\\
y_{4k+4} &= y_{6(k+1)+4k+4} = y_{6(k+1)2+4k+4} = \cdots = \frac{1}{1-y_{0}}.
\end{aligned}$$

La preuve de (3.27) est achevée.

5) Soit, $n = 4k+4, 4k+5, ..., 5k+4$. Par (3.23), (3.34) et (3.35) on a

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-y_{n-4k-4-k}}} = \frac{-1+y_{n-5k-4}}{y_{n-5k-4}}, \tag{3.36}$$

et

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x_{n-4k-4-k}}} = \frac{-1+x_{n-5k-4}}{x_{n-5k-4}}. \tag{3.37}$$

Donc

$$\begin{aligned}
x_{4k+5} &= \frac{-1}{1-y_{-k}},\\
y_{4k+5} &= \frac{1}{1-x_{-k}},\\
x_{4k+6} &= \frac{-1}{1-y_{-k+1}},\\
y_{4k+6} &= \frac{1}{1-x_{-k+1}},\\
&\vdots\\
x_{5k+5} &= \frac{1}{1-y_{0}},\\
y_{5k+5} &= \frac{1}{1-x_{0}}.
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème (3.4), on obtient la formule (3.28), c'est à dire

$$\begin{aligned}
x_{4k+5} &= x_{6(k+1)+4k+5} = x_{6(k+1)2+4k+5} = \cdots = \frac{-1}{1-y_{-k}}, \\
y_{4k+5} &= y_{6(k+1)+4k+5} = y_{6(k+1)2+4k+5} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k}}, \\
x_{4k+6} &= x_{6(k+1)+4k+6} = x_{6(k+1)2+4k+6} = \cdots = \frac{-1}{1-y_{-k}}, \\
y_{4k+6} &= y_{6(k+1)+4k+6} = y_{6(k+1)2+4k+6} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k}}, \\
&\vdots \\
x_{5k+5} &= x_{6(k+1)+5k+5} = x_{6(k+1)2+5k+5} = \cdots = \frac{-1}{1-y_{-k}}, \\
y_{5k+5} &= y_{6(k+1)+5k+5} = y_{6(k+1)2+5k+5} = \cdots = \frac{1}{1-x_{-k}}.
\end{aligned}$$

6) Soit, $n = 5k+5, 5k+6, ..., 6k+5$. De (1.4), (3.36) et (3.37), on a

$$x_{n+1} = \frac{-1+\dfrac{1}{1-x_{n-6k-5}}}{\dfrac{1}{1-x_{n-6k-5}}} = \frac{\dfrac{x_{n-6k-5}}{1-x_{n-6k-5}}}{\dfrac{1}{1-x_{n-6k-5}}} = x_{n-6k-5},$$

et

$$y_{n+1} = \frac{-1+\dfrac{1}{1-y_{n-6k-5}}}{\dfrac{1}{1-y_{n-6k-5}}} = \frac{\dfrac{y_{n-6k-5}}{1-y_{n-6k-5}}}{\dfrac{1}{1-y_{n-6k-5}}} = y_{n-6k-5}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
x_{5k+6} &= x_{-k}, \\
y_{5k+6} &= y_{-k}, \\
x_{5k+7} &= x_{-k+1}, \\
y_{5k+7} &= y_{-k+1}, \\
&\vdots \\
x_{6k+6} &= x_0, \\
y_{6k+6} &= y_0.
\end{aligned}$$

Maintenant d'après le Théorème (3.4), il résulte que

$$\begin{aligned}
x_{5k+6} &= x_{6(k+1)+5k+6} = x_{6(k+1)2+5k+7} = \cdots = x_{-k},\\
y_{5k+6} &= y_{6(k+1)+5k+7} = y_{6(k+1)2+5k+7} = \cdots = y_{-k},\\
x_{5k+7} &= x_{6(k+1)+5k+7} = x_{6(k+1)2+5k+7} = \cdots = x_{-k},\\
y_{5k+7} &= y_{6(k+1)+5k+7} = y_{6(k+1)2+5k+7} = \cdots = y_{-k},\\
&\vdots\\
x_{6k+6} &= x_{6(k+1)+6k+6} = x_{6(k+1)2+6k+6} = \cdots = x_{0},\\
y_{6k+6} &= y_{6(k+1)+6k+6} = y_{6(k+1)2+6k+6} = \cdots = y_{0},
\end{aligned}$$

d'où (3.29). ■

Pour confirmer les résultats de cette partie, nous considérons l' exemple numérique suivant :

Exemple 3.4.1 *Si on prend $k = 4$, le système* (3.23) *prend la forme*

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 - y_{n-4}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{1 - x_{n-4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.38}$$

Supposons $x_{-5} = 1$, $x_{-4} = 1.6$, $x_{-3} = 3.4$, $x_{-2} = 6.1$, $x_{-1} = 2$, $x_0 = 1.3$, $y_{-5} = 0.7$, $y_{-4} = 4.2$, $y_{-3} = 0.3$, $y_{-2} = 2.4$, $y_{-1} = 0.2$ *et* $y_0 = 5$. (voir fig. (3.4)).

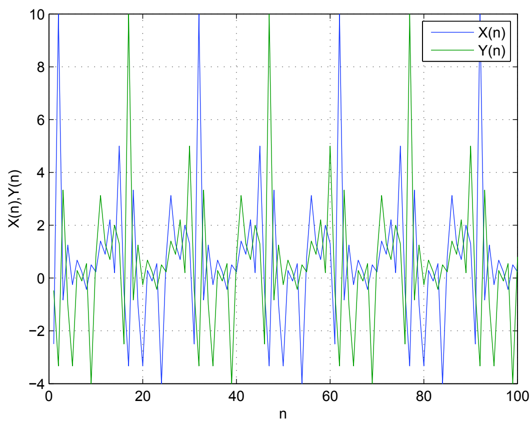

Figure 3.4 – Ce graphique montre la périodicité de la solution du système (3.38)

3.4.1 D'autres systèmes

Corollaire 3.4.1 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{-1+x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où k *est un entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls, avec* $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \neq 1$ *et* $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_0 \neq -1$. *Alors pour* $n = 0, 1, ...,$ *on a*

$$\begin{array}{lll}
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1+y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1-x_{-k+i-1}}, & i = 1, ..., k+1, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{-1+x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1+y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, & i = k+2, ..., 2k+2, \\
x_{6(k+1)n+i} = -y_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} = x_{-k+i-1}, & i = 2k+3, ..., 3k+3, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1-x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1+y_{-k+i-1}}, & i = 3k+4, ..., 4k+4, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1+y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{-1+x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & i = 4k+5, ..., 5k+5, \\
x_{6(k+1)n+i} = x_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} = -y_{-k+i-1}, & i = 5k+6, ..., 6k+6.
\end{array}$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.4.2) en remplaçant y_n par $-y_n$. ■

Corollaire 3.4.2 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$ *une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{-1+y_{n-k}}, \quad , y_{n+1} = \frac{1}{-1+x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où k *est un entier natural fixé et les valeurs initiales sont des nombres réels non nuls, avec* $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \neq -1$ *et* $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_0 \neq 1$. *Alors pour* $n = 0, 1, ...,$ *on a*

$$\begin{array}{lll}
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1-y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1+x_{-k+i-1}}, & i = 1, ..., k+1, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1+x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{-1+y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, & i = k+2, ..., 2k+2, \\
x_{6(k+1)n+i} = y_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} = -x_{-k+i-1}, & i = 2k+3, ..., 3k+3, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1+x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1}{1-y_{-k+i-1}}, & i = 3k+4, ..., 4k+4, \\
x_{6(k+1)n+i} = \dfrac{-1+y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} = \dfrac{1+x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & i = 4k+5, ..., 5k+5, \\
x_{6(k+1)n+i} = -x_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} = y_{-k+i-1}, & i = 5k+6, ..., 6k+6.
\end{array}$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.4.2) en remplaçant x_n par $-x_n$. ■

Corollaire 3.4.3 *Soit* $\{x_n, y_n\}_{n\geq -k}$*une solution du système*

$$x_{n+1} = \frac{1}{-1 - y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{-1 - x_{n-k}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

où k est un entier natural fixé et les valeurs initiales x_{-k}, y_{-k}, x_{-k+1}, y_{-k+1},...,x_0, $y_0 \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$. *Alors* $n = 0, 1, ...,$ *on a*

$$\begin{aligned}
x_{6(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + x_{-k+i-1}}, & i &= 1, ..., k+1,\\
x_{6(k+1)n+i} &= \frac{1 + x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} &= \frac{1 + y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}} & i &= k+2, ..., 2k+2,\\
x_{6(k+1)n+i} &= -y_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} &= -x_{-k+i-1}, & i &= 2k+3, ..., 3k+3,\\
x_{6(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + x_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} &= \frac{1}{1 + y_{-k+i-1}}, & i &= 3k+4, ..., 4k+4,\\
x_{6(k+1)n+i} &= \frac{1 + y_{-k+i-1}}{y_{-k+i-1}}, & y_{6(k+1)n+i} &= \frac{1 + x_{-k+i-1}}{x_{-k+i-1}}, & i &= 4k+5, ..., 5k+5,\\
x_{6(k+1)n+i} &= -x_{-k+i-1}, & y_{6(k+1)n+i} &= -y_{-k+i-1}, & i &= 5k+6, ..., 6k+6.
\end{aligned}$$

Preuve. Cela découle du Théorème (3.4.2) en remplaçant x_n par $-x_n$ et y_n par $-y_n$. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de cette thèse est l'étude du comportement des solutions de quelques équations et systèmes d'équations aux différences.

Dans [43], Simsek et al. ont étudié l'équation aux différence de type max suivante :

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Motivé par ce travail, nous nous sommes intéressé dans la première partie du premier chapitre à la forme explicite et la périodicité des solutions des deux équations aux différences suivantes :

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}^2, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}, \; x_{n+1} = \max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}^2}\right\}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Dans un futur proche, nous allons essayer de résoudre en forme fermée les équations aux différences plus générales suivantes :

$$x_{n+1} = \max\left\{x_{n-k}^{2m}, \frac{1}{x_{n-k}}\right\}, \; x_{n+1} = \max\left\{x_{n-k}, \frac{1}{x_{n-k}^{2m}}\right\}, n = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots; m = 1, 2, \ldots.$$

La deuxième partie du premier chapitre a été l'objet de deux systèmes d'équations aux différences non linéaires de type rationnels, où les solutions sont en relations avec la suite de de Fibonacci.

Le deuxième chapitre a été consacré à l'étude de la stabilité globale des points d'équilibres de trois cas particuliers de l'équation aux différences quotient de deux polynômes homogènes de degré k et à deux indéterminé suivante :

$$x_{n+1}=\frac{ax_n^k+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}b_jx_n^jx_{n-1}^{k-j}+cx_{n-1}^k}{Ax_n^k+\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1}B_jx_n^jx_{n-1}^{k-j}+Cx_{n-1}^k},n=0,1,\ldots \tag{3.39}$$

avec x_{-1},x_0, a,A, b_j, B_j, c, C sont dans $]0,+\infty[$. Plus précisément, nous avons étudié les cas suivants : i) $k=3$, ii) $k=5$, iii) $k\geq 3$, $b_j=b$, $B_j=B$, $j=1,2,\ldots,k-1$. Cette étude a été motivé par le fait que la majorité d'équations aux différences rationnels étudiés sont quotient des polynômes de degré un.

Une question naturale qui se pose, est l'étude du comportement globale de l'équation plus générale (3.39)

Les résultats du dernier chapitre, ont été motivé, par le papier de Tollu et al. [55], dans lequel les deux equations de type Ricatti suivantes ont été étudiés :

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n},\quad x_{n+1}=\frac{1}{1-x_n},n=0,1,\ldots$$

Dans [55], les solutions ont été exprimé en fonction des nombres de Fibonacci. Ainsi dans la première partie de ce chapitre nous avons étudié l'équation aux différence plus générale

$$x_{n+1}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma x_{n-k}},n=0,1,\ldots, \tag{3.40}$$

les paramètres et les valeurs initiales sont des nombres réels. Les solutions de cette dernière équation ont été exprimé en fonction de la suite des nombres de Horadam, appelée aussi suite de Fibonacci généralisée.

Comme perspective et comme généralisation de l'équation aux différences (3.40), nous allons essayer de résoudre en forme fermée le système :

$$x_{n+1}=\frac{\alpha}{\mp\beta\mp\gamma y_{n-k}},\ y_{n+1}=\frac{\alpha}{\mp\beta\mp\gamma x_{n-k}},n=0,1,\ldots, \tag{3.41}$$

Notons que les cas particuliers du système (3.41)

$$x_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp y_{n-k}},\ y_{n+1} = \frac{1}{\mp 1 \mp x_{n-k}}, n = 0, 1, \ldots,$$

ont été déjà résolu dans la dernière partie du chapitre trois.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. M. Amleh, N. Kruse and G. Ladas, *On a class of difference equations with strong negative feedback*, J. Differ. Equations Appl., 5(1999), 497-515.

[2] M. Bayram, S. Ebru Das, *Global Asymptotic Stability of a Nonlinear Recursive Sequence*, Int. Math. Forum, 5(22)(2010), 1083 - 1089.

[3] E. Camouzis , G. Ladas and H. D. Voulov, *On the dynamics of* $x_{n+1} = \frac{\alpha+\gamma x_{n-1}+\delta x_{n-2}}{A+x_{n-2}}$, J. Differ. Equations Appl., 9(8) (2003), 731-738.

[4] H. Cartan, *Théorié élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusoeurs variables complexes*, Collection Enseignemnt des Sciences, Hermann, Paris, Sixiéme édition, 1978.

[5] C. Çinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1+x_n x_{n-1}}$, Appl, Math. and Comp., 150(2004), 21-24.

[6] C. Çinar, *On the periodic cycle of* $x_{n+1} = \frac{a_n+b_n x_n}{c_n x_{n-1}}$. Appl, Math. and Comp., 150(2004), 1-4.

[7] C. Çinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \frac{a x_{n-1}}{1+b x_n x_{n-1}}$, Appl, Math. and Comp., 156(2004), 587-590.

[8] C. Çinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1+a x_n x_{n-1}}$, Appl, Math. and Comp., 158(3)(2004), 793-797.

[9] C. Çinar, *On the positive solutions of the difference equation* $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1+ax_nx_{n-1}}$, Appl, Math. and Comp., 158(3)(2004), 809-812.

[10] C. Çinar, *On the positive solutions of the difference equation system* $x_{n+1} = 1/y_n,\ y_{n+1} = y_n/x_{n-1}y_{n-1}$, Appl. Math. Comput., 158 (2004), 303-305.

[11] C. Çinar, I. Y alçinkaya and R. Karatas, *On the positive solutions of the difference equation system* $x_{n+1} = m/y_n,\ y_{n+1} = py_n/x_{n-1}y_{n-1}$, J. Inst. Math. Comput. Sci., Math. Ser., 18 (2005), 135-136.

[12] C. W. Clark, *A delayed recruitement of a population dynamics with an application to baleen whale population*, J. Math. Biol., 3 (1976), 381-391.

[13] Q. Din, *On a system of rational difference equation*, Demonstr. Math., XLVII(2)(2014), 324-335.

[14] M. M. Elafifi, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{\alpha+\beta x_n+\gamma x_{n-1}}{Bx_n+Cx_{n-1}}$, Appl. Math. Comput., 147(2004), 617-628.

[15] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Undergraduate Texts in Mathematics, New York, USA, Springer, 1999.

[16] E. M. Elabbasy and E. M. Elsayed, *On the global attractivity of difference equation of higher order*, Carpathian J. Math., 24(2) (2008), 45-53.

[17] E. M. Elabbasy and E. M. Elsayed, *On the solution of the recursive sequence* $x_{n+1} = \max\left\{x_{n-2}, \frac{1}{x_{n-2}}\right\}$, Fasc. Math., 41(2009), 55-63.

[18] E. M. Elabbasy, H. El-Metwally and E. M. Elsayed, *On the solutions of a class of difference equations systems*, Demonstr. Math., 41(1) (2008), 109-122.

[19] E. M. Elsayed, *On the solutions of a rational system of difference equations*, Fasc. Math., 45 (2010), 25-36.

[20] H. El-Metwally, E. A. Grove, G. Ladas and H. D. Voulov, *On the global attractivity and the periodic character of some difference equations*, J. Difference Equ. Appl., 7 (2001), 1-14.

[21] J. Feuer and K. T. Mcdonnell, *On the eventual periodicity of* $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n, \frac{A_n}{x_{n-1}}}\right\}$ *with a periode-five parameter*, Comp. Math. Appl. 56(2008), 1883-890.

[22] E. A. Grove and G. Ladas, *Periodicities in nonlinear difference equations*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.

[23] Y. Halim, *Global character of systems of rational difference equations*, Electron. J. Math. Analysis Appl., 3(1) (2015), 204-214.

[24] Y. Halim, *Form and periodicity of solutions of some systems of higher-order difference equations*, Math. Sci. Lett. 2, accepted (2015).

[25] Y. Halim, N. Touafek and E. M. Elsayed , *Closed forme solution of some systems of rational difference equations in terms of Fibonacci numbers*, Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. Ser. A, 21(5) (2014), 473-486.

[26] Y. Halim, N. Touafek and Y. Yazlik, *Dynamic behavior of a second-order nonlinear rational difference equation*, Turk. J. Math., 39(6) (2015), 1004- 1018.

[27] Y. Halim, M. Bayram, *On the solutions of a higher-order difference equation in terms of generalized Fibonacci sequences*, Math. Methods Appl. Sci., (2015), DOI : 10.1002/mma.3745.

[28] A. F. Horadam, *Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers*, Fibonacci Q., (33) (1965), 161-176.

[29] T. F. Ibrahim and N. Touafek, *On a third-order rational difference equation with variable coefficients*, Dynam. Cont. Dis. Ser. B,20(2)(2013), 251-264.

[30] T. F. Ibrahim and N. Touafek, *Max-type system of difference equations with positive two-periodic sequences*, Math. Methods Appl. Sci., DOI : 10.1002.

[31] B. D. Iriçanin and N. Touafek, *On a second-order max-type system of difference equations*, Indian J. Math., 54(1)(2012), 119-142.

[32] V. L. Kocic and G. Ladas, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[33] N. Kruse and T. Nasemann, *Global asymptotic stability in some discrete dynamical systems*, J. Math. Anal. Appl., 235(1999), 151-158.

[34] A. S. Kurbanli, C. Çinar and I. Yalçinkaya, *On the behavior of solutions of the system of rational difference equations* $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}$, World Appl. Sci. J., 10(11) (2010), 1344-1350.

[35] A. S. Kurbanlı, C. Çinar and I. Yalçinkaya, *On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations*, Math. Comput. Modelling, 53 (2011), 1261-1267.

[36] X. Li and D. Zhu, *Global asymptotic stabilitiy in a rational equation*, J. Math. Anal. Appl., 9(2003), 833-839.

[37] A. Y. Özban, *On the positive solutions of the system of rational difference equations,* $x_{n+1} = 1/y_{n-k},\ y_{n+1} = y_n/x_{n-m}y_{n-m-k},$, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 26-32.

[38] A. Y. Özban, *On the system of rational difference equations* $x_{n+1} = a/y_{n-3},\ y_{n+1} = by_{n-3}/x_{n-q}y_{n-q}$, Appl. Math. Comput., 188(1) (2007), 833-837.

[39] M. Pituk, *More on Poincaré's and Peron's theorems for difference equations*, J. Difference Equ. Appl.,8 (2002), 201-216.

[40] J. F. T. Rabago, *On second-order linear recurrent homogenous differential equations with periode k*, Hacet. J. Math. Stat., 43(6)(2014), 923-933.

[41] D. Simsek, C. Çinar and I. Y alçinakaya, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{1+x_{n-1}x_{n-3}}$, Int. J. Pure Appl. Math., 28(1)(2006), 117-124.

[42] D. Simsek, C. Çinar and I. Y alçinakaya, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{x_{n-(5k+9)}}{1+x_{n-4}x_{n-9}...x_{n-(5k+4)}}$, Taiwanese J. Math., 5(12)(2008), 1087-1098.

[43] D. Simsek, C. Cinar, I. Yalcinkaya, *On the solutions of the difference equation* $x_{n+1} = max\left\{x_{n-1}, \frac{1}{x_{n-1}}\right\}$, Int. J. Contemp. Math. Sci., 1(10)(2006), 481-487.

[44] S. Stević, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}$. Taiwanese J. Math., 6(3)(2002), 405-414.

[45] S. Stević, *On some solvable systems of difference equations*, Appl. Math. Comput., 218 (2012), 5010-5018.

[46] S. Stević, *On a class of higher-order difference equations*, Chaos Solitons Fractals, 42(2009), 138-145.

[47] S. Stević, *On a system of difference equations* $x_{n+1} = ax_{n-1}/by_nx_{n-1} + c, y_{n+1} = \alpha y_{n-1}/\beta x_ny_{n-1} + \gamma$, Appl. Math. Comput., 218(7)(2011), 3372-3378.

[48] S. Stević, *Representation of solutions of bilinear difference equations in terms of generalized Fibonacci sequences*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 67(2014), 1-15.

[49] N. Touafek, *On a second order rational difference equation*, Hacet. J. Math. Stat., 41 (2012), 867-874.

[50] N. Touafek, *On some fractional systems of difference equations*, Iran. J. Math. Sci. Inform., 9(2)(2014), 73-86.

[51] N. Touafek and Y. Halim, *Global attractivity of a rational difference equation*, Math. Sci. Lett., 2(3) (2013), 161-165.

[52] N. Touafek and Y. Halim, *On max type difference equations : expressions of solutions*, Int. J. Nonlinear Sci., 11(2011), 396-402.

[53] N. Touafek and E. M Elsayed, *On the periodicity of some systems of nonlinear difference equations*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., Nouv. Sér., 55(103) (2012), 217-224.

[54] N. Touafek and E. M Elsayed, *On the solutions of systems of rational difference equations*, Math. Comput. Modelling, 55(7)(2012), 1987-1997.

[55] D. T. Tollu, Y. Yalzik and N. Taskara, *On the solutions of two special type of Riccati difference equation via fibonacci numbers*, Adv. Difference Equ. , (2013) Article ID 174.

[56] I. Yalçinkaya, *On the global asymptotic stability of a second-order system of difference equations*, Discrete Dyn. Nat. Soc., (2008), Article ID 860152.

[57] I. Yalçinkaya, *On the global asymptotic behavior of a system of two nonlinear difference equations,* Ars Comb., (2008), Article ID 143943.

[58] I. Yalcinkaya, *On the global attractivity of positive solutions of a rational difference equation*, Selçuk J. Appl. Math., 9 (2) (2008), 3-8.

[59] X. Yang, *On the system of rational difference equations* $x_n = A + y_{n-1}/x_{n-p}y_{n-q}$, $y_n = A + x_{n-1}/x_{n-r}y_{n-s}$, J. Appl. Math. Anal. Appl., 307 (2005), 305-311.

[60] X. Yan and W. T. Li, *Global attractivity in a rational recursive sequence*, Appl. Math. Comput., 145(1) (2003), 1-12.

[61] X. Yan and W. T. Li, *Global attractivity in the recursive sequence* $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, Appl. Math. Comput., 138 (2003), 415-423.

[62] Y. Yazlik, D. T. Tollu and N. Taskara, *On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers*, Appl. Math., 4 (2013) 15-20.