

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Seddik Ben Yahia -Jijel-  
Faculté des Sciences Exactes et Informatique  
Département de Mathématiques

Thèse présentée pour l'obtention du Diplome de Doctorat en Sciences

Spécialité : Mathématiques Option : Analyse

Par : Boukoucha Rachid

THÈME

**Quelques résultats récents sur la théorie qualitative  
des systèmes différentiels planaires**

Soutenu publiquement, le 02 / 06 / 2016 devant le jury composé de :

Président : Mr. Tahar Zerzaihi Pr. Univ Mohamed Seddik Benyahia Jijel

Rapporteur : Mr. Ahmed Bendjeddou Pr. Univ Ferhat Abbas Sétif 1

Examineurs :

Mr. Mustapha Fateh Yarou Pr. Univ Mohamed Seddik Benyahia Jijel

Mr. Abdelkrim Boukabou Pr. Univ Mohamed Seddik Benyahia Jijel

Mr. Ahmed Berboucha Pr. Univ Abderrahmane Mira Béjaia

Mr. Salah Eddine Rebiai Pr. Univ Hadj Lakhder Batna 2

# *Remerciements*

Je voudrai tout d'abord remercier Monsieur Ahmed Bendjeddou, Professeur à l'université de Sétif, mon Directeur de thèse qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de travailler avec lui. Je lui suis infiniment reconnaissant, non seulement parce qu'il a accepté de me proposer un sujet de thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec moi. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il m'a beaucoup encouragé.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Tahar Zerzaihi, Professeur à l'université de Jijel, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, je l'en remercie énormément.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Mustapha Fateh Yarou, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Abdelkrim Boukabou , Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse.

Je remercie Monsieur Ahmed Berboucha, Professeur à l'université de Bejaia, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse.

Je tiens également à remercier Monsieur Salah Eddine Rebiai, Professeur à l'université de Batna, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ma thèse.

Enfin, je remercie mes parents et ma femme qui m'ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en ma volonté de réussir.

# Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des principales notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Systèmes dynamiques . . . . .	2
1.3 Systèmes différentiels autonomes . . . . .	2
1.4 Solutions et solutions périodiques . . . . .	3
1.5 Points d'équilibre . . . . .	3
1.6 Portrait de phase . . . . .	3
1.7 Stabilité d'un point d'équilibre . . . . .	4
1.8 Classification des points d'équilibre . . . . .	4
1.8.1 Point centre . . . . .	4
1.8.2 Point selle (col) . . . . .	5
1.8.3 Point spirale (foyer) . . . . .	6
1.8.4 Point noeud . . . . .	7
1.9 Cycles limites . . . . .	7
1.10 Classification des cycles limites . . . . .	8

---

1.10.1 Cycles limites stables . . . . .	8
1.10.2 Cycles limites instables . . . . .	8
1.10.3 Cycles limites semi stables . . . . .	9
1.11 Intégrales premières . . . . .	10
1.12 L'application de premier retour de Poincaré . . . . .	13
1.13 Critère de Bendixon de non existence . . . . .	16
1.14 Critère de Dulac de non existence . . . . .	17
<b>2 Intégrabilité et cycles limites non algébriques pour quelques classes de systèmes différentiels</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.2 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels . . . . .	21
2.3 Expression exacte du cycle limite pour une classe cubique de systèmes différentiels . . . . .	25
2.4 Expression exacte du cycle limite pour une classe de systèmes différentiels . . . . .	30
2.5 Conclusion . . . . .	36
<b>3 Intégrabilité et non existence de cycles limites pour quelques familles de systèmes de Kolmogorov</b>	<b>37</b>
3.1 Introduction . . . . .	38
3.2 Sur la non-existence de cycle limite pour une classe cubique de systèmes de Kolmogorov. . . . .	39
3.3 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de systèmes de Kolmogorov . . . . .	43
3.4 Sur la dynamique d'une classe de systèmes rationnels de Kolmogorov	47
3.5 Conclusion . . . . .	53

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>54</b>
<b>Annexe. Le programme P4</b>	<b>56</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>

# Introduction

Les équations différentielles sont apparues pour la première fois vers la fin du dix-septième siècle dans les travaux d'Isaac Newton, Leibniz et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville aux dix-huitième siècle et dix-neuvième siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi comme un outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions. Avec son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle publié en 1881, Henri Poincaré [44] a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier de leurs propriétés. Cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions d'une façon explicite, ce sont des méthodes dites qualitatives.

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

où  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes ou des fonctions rationnelles.

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et les cycles limites des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels planaires polynômiaux,

voir [17, 26, 27, 29, 31, 39] et le livre de Ye Yanqian et al. [51] consacré seulement à l'étudier des cycles limites. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences (Physique, Biologie, Economie, .....).

C'est en 1900 que D. Hilbert [33] a posé les fameux vingt-trois problèmes. En particulier dans le 16ème problème, il pose la question du nombre et de la disposition de trajectoires périodiques isolées pour des systèmes différentiels polynômiaux. Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites, voir par exemple les articles [1, 4, 5, 15, 19, 28].

Dans ce travail on va étudier l'intégrale première pour quelques classes de systèmes différentiels planaires qui possèdent un cycle limite non algébrique, de plus on détermine l'expression exacte de ce cycle limite. Un autre résultat obtenu, concerne l'intégrale première pour quelques classes de systèmes différentiels planaires et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites de ces système, puis nous étudions l'existence de l'intégrale première et la non-existence de cycles limites et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites pour quelques familles de systèmes différentiels de Kolmogorov.

Cette thèse est structurée en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires utilisés par la suite dans le deuxième et le troisième chapitre. Ces deux derniers chapitres sont consacrés essentiellement à nos résultats.

Le second chapitre est composé de trois parties. Dans la première partie, on va déterminer l'intégrale première et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y) + xR_m(x, y), \\ y' = Q_n(x, y) + yR_m(x, y), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$  respectivement.

Dans la deuxième partie on va déterminer les conditions d'existence de cycles limites non algébriques et on donne sous ces conditions l'expression exacte de cycles limites pour une classe cubique de systèmes différentiels de la forme :



$$\begin{cases} x' = nx + (\lambda x + \beta y)(ax^2 + bxy + ay^2), \\ y' = ny - (\beta x - \lambda y)(ax^2 + bxy + ay^2), \end{cases}$$

où  $n, a, b, \lambda$  et  $\beta$  sont des paramètres réels.

Dans la troisième partie on va déterminer les conditions d'existence de cycles limites non algébriques et on donne sous ces conditions l'expression exacte de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} x' = x((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (x-2y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \\ y' = y((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (2x+y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \end{cases}$$

où  $a, b, c, n, m$  et  $l$  sont des paramètres réels.

Le troisième chapitre est composé de trois parties. Dans la première partie, on va déterminer l'intégrale première et on démontre la non existence de cycles limites pour une classe cubique de systèmes différentiels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y(\mu + ux^2 + vxy + wy^2), \end{cases}$$

où  $\lambda, \mu, a, b, c, u, v$  et  $w$  sont des paramètres réels.

Dans la deuxième partie on va déterminer l'intégrale première et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(P_n(x, y) + R_m(x, y)), \\ y' = y(Q_n(x, y) + R_m(x, y)), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$  respectivement.

Dans la troisième partie on va déterminer l'intégrale première et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels rationnels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \left( P_n(x, y) + \frac{R_m(x, y)}{S_a(x, y)} \right), \\ y' = y \left( Q_n(x, y) + \frac{R_m(x, y)}{S_a(x, y)} \right), \end{cases}$$

---

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$ ,  $R_m(x, y)$  et  $S_a(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$ ,  $m$  et  $a$  respectivement, de plus on va démontrer la non existence de cycles limites pour cette classe de systèmes.

Les chapitres 2 et 3 représentent les travaux publiés suivants :

-**Ahmed Bendjeddou and Rachid Boukoucha**, *Explicit non-algebraic limit cycles of a class of polynomial systems*, Far East Journal of Applied Mathematics, International Journal, volume 91 No.2 (2015) 133-142.

-**Ahmed Bendjeddou and Rachid Boukoucha**, *Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, volume 3 No 1 (2015) 110 – 115.

-**Rachid Boukoucha and Ahmed Bendjeddou**, *A Quintic polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycle*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, volume 103 No. 2 (2015), 235-241.

-**Rachid Boukoucha and Ahmed Bendjeddou**, *On the non-existence of limit cycles for a cubic Kolmogorov systems*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, volume 103 No. 2 (2015), 227-233.

-**Rachid Boukoucha and Ahmed Bendjeddou**, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes dynamiques, les systèmes différentiels autonomes, les solutions et solutions périodiques, les orbites périodiques, les points d'équilibre, le portrait de phase, le cycle limite, la classification des points d'équilibre et les cycles limites dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et l'intégrabilité des systèmes différentiels. On introduira aussi un rappel sur les théorèmes et les critères fondamentaux sur l'existence et la non existence de solutions périodiques.

## 1.2 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1** *Un système dynamique est un triplet  $D = (U, T, \Phi)$ , où  $U$  est un ensemble non vide appelé espace d'état,  $T = \mathbb{R}_+$  (l'ensemble des nombres réels positifs) appelé domaine temporel et  $\Phi : U \times T \rightarrow U$  une fonction telle que :*

$$\forall x \in U, \forall t \in T,$$

$$\begin{cases} \Phi(x, 0) = x, \\ \Phi(\Phi(x, t), s) = \Phi(x, s + t). \end{cases}$$

La fonction  $\Phi$  décrit essentiellement l'évolution de l'état du système dans le temps.

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

## 1.3 Systèmes différentiels autonomes

**Définition 1.2** *On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $x$  et de  $y$ . Le champ de vecteurs associé au système (1.1) est noté  $X = (P, Q)$ . Nous supposons que

les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  (donc les conditions de Cauchy-Lipchitz sont satisfaites en tout point ordinaire du système (1.1)). Si les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des polynômes, on appelle alors degré du système (1.1), le nombre  $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ . Sur la courbe  $P(x, y) = 0$ ; dite isocline verticale, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $y$ ; et sur la courbe  $Q(x, y) = 0$ ; dite isocline horizontale, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des  $x$ .

## 1.4 Solutions et solutions périodiques

**Définition 1.3** On dit que  $(x(t), y(t))_{t \in I}$  où  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , est une solution du système (1.1) si le champs de vecteurs  $X = (P, Q)$  est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plan de phase. Autrement dit,  $\forall t \in I : P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y} = 0$ .

**Définition 1.4** On appelle solution périodique du système (1.1), toute solution  $(x(t), y(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R} : x(t+T) = x(t)$  et  $y(t+T) = y(t)$ . Le plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

## 1.5 Points d'équilibre

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.1), au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibre.

**Définition 1.5** On dit que le point  $(x_0, y_0)$  est un point d'équilibre (point critique) du système (1.1), s'il est solution du système

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

## 1.6 Portrait de phase

Soit le système différentiel (1.1).

Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.1) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites. Les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ses points

d'équilibre représentés dans le plan  $(x, y)$  s'appelle portrait de phase, et le plan  $(x, y)$  est appelé plan de phase.

## 1.7 Stabilité d'un point d'équilibre

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.1).

Notons par  $X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$  et  $X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ .

**Définition 1.6** *On dit que  $(x_0, y_0)$  est stable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow \forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon.$$

*Le point  $(x_0, y_0)$  est dit asymptotiquement stable si et seulement si  $(x_0, y_0)$  est stable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .*

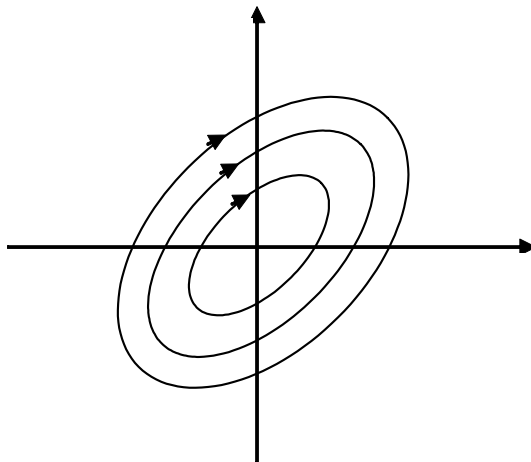
## 1.8 Classification des points d'équilibre

Les points d'équilibre qu'on rencontre dans l'étude d'un système à deux variables appartiennent à l'un des types fondamentaux appelés : noeud, col (ou selle), centre (ou sommet) et foyer.

Soit  $(0, 0)$  un point d'équilibre isolé du système (1.1).

### 1.8.1 Point centre

Le point  $(0, 0)$  est dit un centre s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  qui contient un nombre dénombrable  $\gamma_n$  de trajectoires fermées dont chacune contient  $(0, 0)$  dans son intérieur et tel que les diamètres des trajectoires tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .



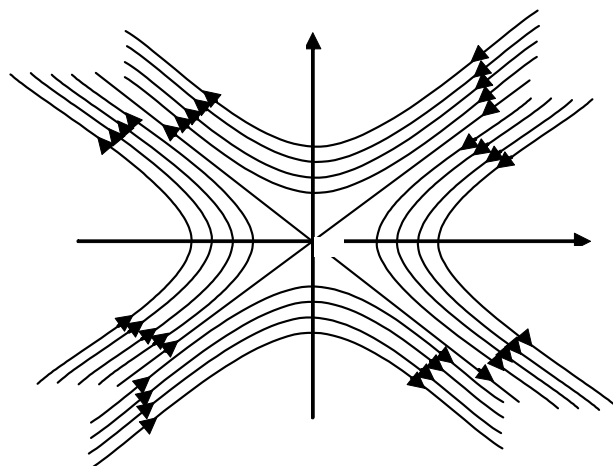
Point centre.

### 1.8.2 Point selle (col)

Le point  $(0, 0)$  est dit point selle (col) s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1- il existe deux courbes passant par  $(0, 0)$  tel que l'une est entrante et l'autre est sortante quant  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ . Les deux courbes divisent le plan de phase en quatre domaines.

2- dans chacun des quatre domaines, il existe une infinité de trajectoires suffisamment proche de  $(0, 0)$  mais qui ne passent pas par  $(0, 0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ou  $t \rightarrow -\infty$ .



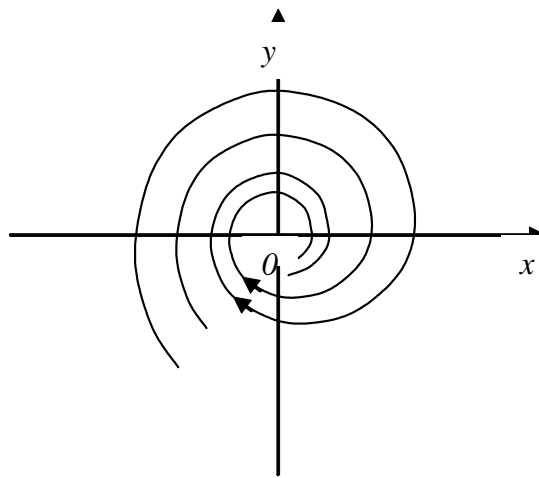
Point selle.

### 1.8.3 Point spirale (foyer)

Le point  $(0, 0)$  est dit point spirale (foyer) s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

1-  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (ou bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné,

2-  $\gamma$  approche  $(0, 0)$  en spirale tournant autour de  $(0, 0)$  une infinité de fois quant  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ).



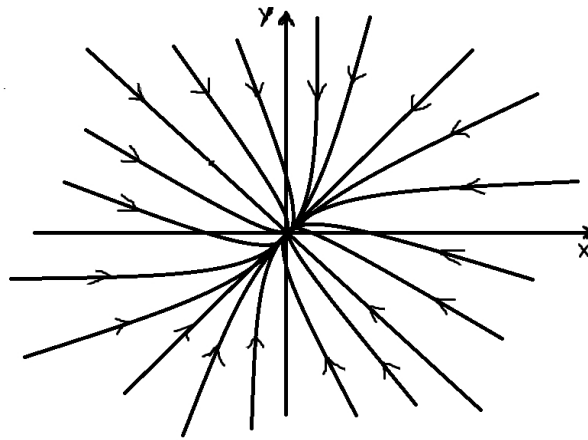
Point spirale (foyer).



### 1.8.4 Point noeud

Le point  $(0,0)$  est dit point noeud s'il existe un voisinage de  $(0,0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

- 1-  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (ou bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné,
- 2-  $\gamma$  approche  $(0,0)$  quant  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ),
- 3-  $\gamma$  passe par  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (ou bien pour  $t \rightarrow -\infty$ ).



Point noeud.

**Proposition 1.1** *Le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système (1.1) est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col, si l'origine du système linéaire associé est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col.*

## 1.9 Cycles limites

**Définition 1.7** *Un cycle limite est l'orbite d'une solution périodique non constante isolée, du système (1.1). Il est représenté dans le plan des phases par une trajectoire fermée et isolée. Elle reflète la périodicité du mouvement et son caractère oscillatoire. Le cycle limite est dit algébrique s'il est contenu dans une courbe algébrique dans le plan, sinon il est dit non-algébrique.*

L'intérêt du cycle limite, en tant qu'orbite périodique isolée, apparaît souvent dans plusieurs branches de la science et de la technologie. Le fait que le système admet un cycle limite implique l'existence d'une solution périodique isolée. Le

problème général de trouver le nombre de cycles limites pour des systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a un raccordement au 16ème problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié.

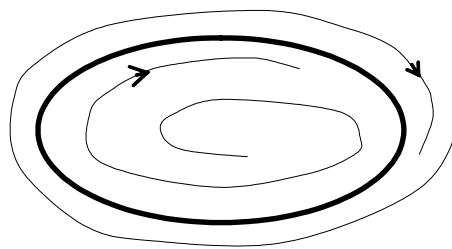
**Remarque :** Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

## 1.10 Classification des cycles limites

Il existe trois types de cycles limites : cycle limite stable, cycle limite instable et cycle limite semi stable.

### 1.10.1 Cycles limites stables

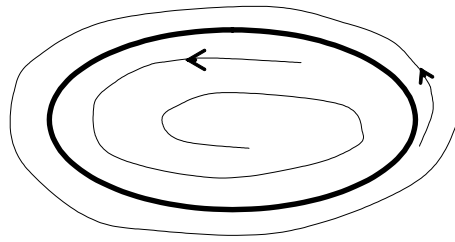
Un cycle limite stable a comme interprétation physique une oscillation limite du système étudié. C'est une solution périodique vers laquelle tendent les autres solutions.



Cycle limite stable.

### 1.10.2 Cycles limites instables

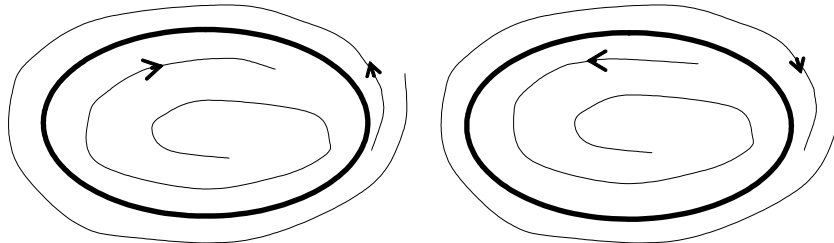
Un cycle limite instable n'apparaît pas physiquement comme une oscillation. Il constitue une séparation de chaque côté de laquelle les trajectoires s'éloignent vers d'autres points singuliers ou vers l'infini.



Cycle limite instable.

### 1.10.3 Cycles limites semi stables

Un cycle limite semi stable est une trajectoire fermée vers laquelle tendent les trajectoires d'un côté mais s'éloignent de l'autre côté.



Cycle limite semi stable.

Un tel cycle limite est, théoriquement, une solution périodique du système d'équations étudié.

**Théorème 1.1** [46] Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.1) de période  $T$ .  $\gamma$  est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

où  $\operatorname{div}(\gamma(t))$  est la divergence du système, définie par

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t).$$

$\gamma$  est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Dans le cas où la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt$  est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite  $\gamma$  est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

**Définition 1.8 (Cycle limite hyperbolique) :** Si la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt$  est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

**Exemple :** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.2)$$

En coordonnées polaires, le système (1.2) s'écrit

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

d'où  $r' = 0 \Leftrightarrow r = 0$  ou  $r = 1$ .

Pour  $r = 0$  on a :  $(0, 0)$  est un point d'équilibre du système (1.2) (solution constante), pour  $r = 1$  on a :  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t))dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos t, \sin t) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.2) a un cycle limite hyperbolique stable.

## 1.11 Intégrales premières

On dit qu'une fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est une intégrale première du système (1.1) si elle est constante sur les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  de ce système, c'est-à-dire

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \equiv 0,$$

sur les points de  $\Omega$ .

On dit que le système différentiel (1.1) est intégrable sur un ouvert  $\Omega$ , s'il admet une intégrale première sur  $\Omega$ .

La notion d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrale première, donc la question qui se pose : *Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ?* ou *si on a une classe de systèmes différentiels qui dépendent des paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ?* Malheureusement ces questions n'ont pas des bonnes réponses pour le moment.

## Facteur intégrant

La fonction  $R(x, y)$  est un facteur intégrant du système (1.1) sur l'ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $R \in C^1(\Omega)$ ,  $R \neq 0$  dans  $\Omega$  et la forme différentielle  $\omega = RPdy - RQdx$  est fermée.

On peut démontrer que le facteur intégrant vérifie :

$$\operatorname{div}(RP, RQ) = 0, \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \operatorname{div}(P, Q),$$

on dénote par :

$$\operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(P, Q) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

la divergence du champ de vecteurs  $(P, Q)$ .

L'intégrale première  $H$  associée au facteur intégrant  $R$  est donnée par

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

où  $h$  une fonction de  $x$  et  $H$  satisfait  $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$ . Alors

$$\begin{cases} \dot{x} = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Inversement, si on a l'intégrale première  $H$  du système (1.1) on peut toujours trouver un facteur intégrant  $R$ .

## Facteur intégrant inverse

La fonction  $V(x, y)$  est un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $V \in C^1(\Omega)$ ,  $V \neq 0$  sur  $\Omega$  et

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $R = \frac{1}{V}$  définit un facteur intégrant, dans  $\Omega \setminus \{V = 0\}$ , du système (1.1).

Le facteur intégrant inverse est parmi les outils qui sont utilisés dans l'étude de l'existence et de la non existence de cycles limites, on peut même déterminer leurs formules en utilisant le facteur intégrant inverse. Cette méthode est introduite par Giacomini, Llibre et Viano en 1996 [29] et est basée sur les Critères suivants :

**Critère [29]**

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  défini dans un sous ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $(x(t), y(t))$  une solution périodique de période  $T$ .

Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation aux dérivées partielles linéaires suivante :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = RV \quad (x, y) \in U,$$

où  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  vérifiant  $\int_0^T R(x(t), y(t)) dt \neq 0$ .

Alors la trajectoire fermée  $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in U : t \in [0, T]\}$  est contenue dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\},$$

et  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteur  $(P, Q)$  et les fonctions  $V$  et  $R$  sont analytiques  $\gamma$  est un cycle limite.

**Preuve.** Nous définissons  $R(t) = R(x(t), y(t))$  et  $V(t) = V(x(t), y(t))$ . On considère l'équation différentielle  $\dot{Z} = R(t)Z$ . Sa solution générale est  $Z(t) = Z(0) \exp(\int_0^t R(s) ds)$ . Puisque  $V(x, y)$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles, il s'en suit que  $Z = V(t)$  est la solution de  $\dot{Z} = R(t)Z$ . Donc  $V(t) = V(0) \exp(\int_0^t R(s) ds)$ . Puisque  $(x(t), y(t))$  est une solution périodique de période  $T$ ,  $V(T) = V(0)$ . D'où  $\int_0^T R(s) ds \neq 0$ , on trouve que  $V(0) = 0$  et par conséquent  $V(t) \equiv 0$ .

Maintenant nous supposons que  $\gamma$  est contenu dans un anneau circulaire. Alors il y a un anneau circulaire  $A$  voisinage fermé de  $\gamma$ . Nous notons que  $\gamma$  peut-être dans la limite de  $A$ . Puisque  $\int_\gamma R dt \neq 0$ , si  $A$  est suffisamment borné, alors  $\int_\gamma R dt \neq 0$  pour toute trajectoire fermée  $\gamma'$  dans  $A$ , donc  $A \subset \Sigma$ . Donc contradiction avec le fait que  $\Sigma$  est localement 1-dimensionnel (variété de dimension 1), donc  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire.

C'est bien connu dans la théorie des systèmes planaires analytiques que la courbe périodique n'est pas un cycle limite, quand elle est contenue dans un anneau circulaire. Puisque la deuxième possibilité ne peut pas se produire, donc  $\gamma$  est un cycle limite. ■

### Critère [29]

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation linéaire aux dérivées partielles suivante :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Si  $\gamma$  est un cycle limite du système (1.1), alors  $\gamma$  est contenu dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}.$$

## 1.12 L'application de premier retour de Poincaré

Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil (ou le moyen) le plus fondamental est l'application de premier retour de Poincaré, définie par Henri Poincaré en 1881, voir [44].

L'idée de l'application de Poincaré est simple : Si  $\Gamma$  est une orbite périodique du système (1.3)

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

passant par le point  $x_0$  et  $\Sigma$  un hyperplan perpendiculaire à  $\Gamma$  en  $x_0$ , alors pour tout point  $x \in \Sigma$  suffisamment proche de  $x_0$ , la solution de (1.3) passant par  $x$  en  $t = 0$ , va retraverser  $\Sigma$  au point  $P(x)$  proche de  $x_0$ , la fonction  $x \longrightarrow P(x)$  s'appelle l'application de Poincaré.

L'application de Poincaré peut également être définie lorsque  $\Sigma$  est une surface lisse, passant par un point  $x_0$  de  $\Gamma$ , ce qui n'est pas une tangente à  $\Gamma$  en  $x_0$ . Dans ce cas, on dit que la surface  $\Sigma$  se coupe transversalement avec la courbe  $\Gamma$  en  $x_0$ . Voir la figure suivante :

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de l'application de Poincaré  $P(x)$  et de sa dérivée première  $DP(x)$ .

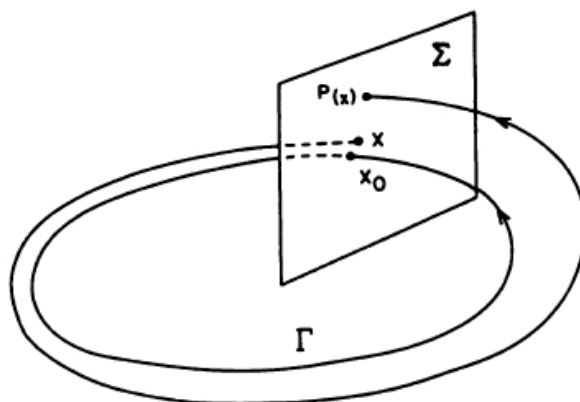


FIG. 1.1 – L'application de premier retour de Poincaré.

**Théorème 1.2** [46] Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f \in C^1(E)$ , supposons que,  $\phi_t(x_0)$  est une solution périodique de (1.3) de période  $T$  et que le cycle :

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\},$$

est contenu dans  $E$ . Soit  $\Sigma$  l'hyperplan orthogonal à  $\Gamma$  en  $x_0$ , c'est à dire :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe un  $\delta > 0$  et une fonction unique  $\tau(x)$ , définie et continûment différentiable, tel que :

$$\tau(x_0) = T \text{ et } \phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma,$$

pour tout  $x \in N_\delta(x_0)$ .

**Définition 1.9** Soient  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$  et  $\tau(x)$  définis dans le théorème précédent, alors pour  $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ , la fonction  $P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$  est appelée l'application de premier retour de Poincaré de  $\Gamma$  en  $x_0$ .

**Théorème 1.3** [46] Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et supposons que  $f \in C^1(E)$ , soit  $\gamma(t)$  une solution périodique de (1.3) de période  $T$ . Alors la dérivée de l'application de Poincaré  $P(s)$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  qui est normale à  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \gamma(t) - \gamma(0) \quad 0 \leq t \leq T\}$  en  $x = 0$  est donnée par :

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt.$$



**Corollaire** [46] Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution périodique  $\gamma(t)$  est un cycle limite stable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$ , et il s'agit d'un cycle limite instable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0$ . Il peut s'agir d'un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartenir à une bande continue de cycles si cette quantité est égale à zéro.

**Exemple 1.4** Le système (1.2)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

admet un point d'équilibre à l'origine et un cycle limite  $\Gamma$  donné par :  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)^T$ . On peut trouver l'application de Poincaré de  $\Gamma$  en résolvant le système écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

avec  $r(0) = r_0$  et  $\theta(0) = \theta_0$ . La première équation peut se résoudre soit comme équation différentielle à variables séparables ou comme une équation de Bernoulli. La solution est donnée par :

$$\begin{aligned} r(t, r_0) &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{\frac{-1}{2}}, \\ \theta(t, \theta_0) &= t + \theta_0. \end{aligned}$$

Si  $\Sigma$  est la droite  $\theta = \theta_0$  passant par l'origine, alors  $\Sigma$  est perpendiculaire à  $\Gamma$  et la trajectoire passant par le point  $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$  en  $t = 0$  coupe le rayon  $\theta = \theta_0$  une autre fois en  $t = 2\pi$ . Il en résulte que l'application de premier retour de Poincaré est donnée par :

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

Il est clair que  $P(1) = 1$  est correspond au cycle  $\Gamma$  et on a aussi :

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-3}{2}},$$

et que  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ . Donc le cycle limite  $\Gamma$  du système (1.2) est stable. Le portrait de phase du système (1.2) est illustré dans la figure suivante :

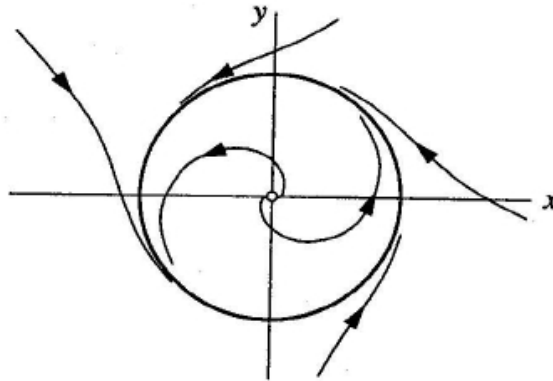


FIG. 1.2 – Portrait de phase du système (1.2).

### 1.13 Critère de Bendixon de non existence

La recherche de solutions périodiques (cycles limites) est conditionnée par le critère de Bendixon stipulant qu'il ne peut y avoir d'orbite fermée entièrement contenue dans une région simplement connexe du plan, si la divergence du champ de vecteurs y garde un signe constant. Dans ce paragraphe, on donne des résultats qui permettent de démontrer la non existence de solutions périodiques pour un système différentiel autonome d'ordre deux.

**Théorème 1.5** (*Critère de Bendixon*) [57]

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons le système autonome (1.1).

Si  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  n'est pas nulle et ne change pas de signe dans  $\Omega$ , alors le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Gamma : X(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  une trajectoire fermée dans  $\Omega$ . On note par  $D$  l'intérieur de  $\Gamma$ .

Puisque  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $D$  alors

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

d'autre part en appliquant la formule de Green on a :

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (P dx - Q dy)$$

$$= \oint_{\Gamma} (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (P \dot{Q} - \dot{P} Q) dt = 0,$$

qui est une contradiction.

Donc le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

## 1.14 Critère de Dulac de non existence

**Théorème 1.6** (*Critère de Dulac*) [46]

Considérons le système :  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f = (f_1, f_2)$ .

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\mu$  une fonction scalaire de classe  $C^1$  et positive dans  $\Omega$ , si

$$\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) = \frac{\partial(\mu(x) f_1(x))}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu(x) f_2(x))}{\partial x_2},$$

ne s'annule sur aucun sous ensemble ouvert de  $\Omega$ , alors le système n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Phi$  une solution périodique dans  $\Omega$  qui entoure une région  $A \subset \Omega$ .

Puisque  $\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $A$ , alors

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0.$$

D'autre part, en appliquant la Formule de Green on a :

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl,$$

où  $\vec{n}$  est la normale vers l'extérieur et  $dl$  l'élément de déplacement le long de  $\Phi$ .

$f \vec{n} = 0$  puisque  $\Phi$  est une solution périodique donc le champ de vecteur est tangent à  $\Phi$ , alors la normale est perpendiculaire à  $f$  et on a :

$$\oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0.$$

En conclusion on a d'une part

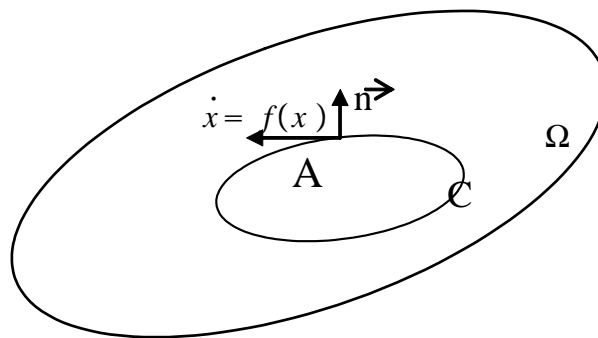
$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0,$$

et d'autre part

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0,$$

qui est une contradiction.

Donc le système  $\dot{x} = f(x)$  n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$



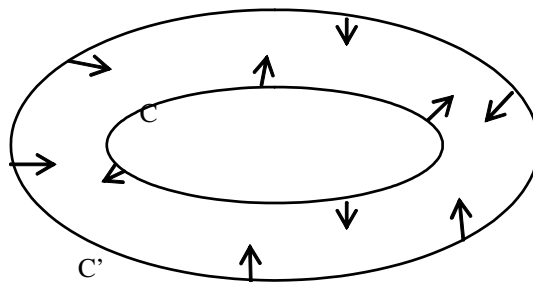
Critère de Dulac de non existence

■

**Théorème 1.7** (*Existence*) [57]

Soient deux courbes fermées  $C$  et  $C'$ , la seconde entoure la première.

Si en chaque point de  $C$ , le vecteur vitesse  $(P, Q)$  de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur et si en chaque point de  $C'$ , il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre  $C$  et  $C'$ .



Théorème d'existence d'un cycle limite entre  $C$  et  $C'$ .

**Critère de Christopher** [31]

Soit  $f = 0$  une courbe algébrique non singulière de degré  $m$  et  $D$  un polynôme du degré un tel que la droite  $D = 0$  soit à l'extérieur de toutes les composantes

bornées de  $f = 0$ . On choisit les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$ , alors le champ de vecteurs de degré  $m$  suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha f - Df_y, \\ \dot{y} = \beta f + Df_x, \end{cases}$$

a toutes les composantes bornées de  $f = 0$  comme cycles limites hyperboliques. En outre, ce champ de vecteurs n'a pas d'autres cycles limites.

**Théorème 1.8** (*Poincaré-Bendixon*) [2]

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que :

- Le système (1.1) n'admet pas de point fixe dans  $\Omega$ ,
- La solution  $\Gamma = \{(x, y) = (\Phi(t), \Psi(t)), t \geq t_0\}$  reste à l'intérieur de  $\Omega$ .

Alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

- 1)  $\Gamma$  est un cycle limite,
- 2)  $\Gamma$  s'enroule en spirale sur un cycle limite.

Dans les deux cas, le système (1.1) admet une solution périodique.

## Chapitre 2

# Intégrabilité et cycles limites non algébriques pour quelques classes de systèmes différentiels

## 2.1 Introduction

Ce chapitre est composé de trois parties : Dans la première partie nous considérons une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y) + xR_m(x, y), \\ y' = Q_n(x, y) + yR_m(x, y), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$ , respectivement. Nous nous intéressons à déterminer l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes. Voir [7].

Dans la seconde partie nous déterminons les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels cubiques de la forme :

$$\begin{cases} x' = nx + (\lambda x + \beta y)(ax^2 + bxy + ay^2), \\ y' = ny - (\beta x - \lambda y)(ax^2 + bxy + ay^2), \end{cases}$$

où  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\lambda$  et  $\beta$  sont des paramètres réels. De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Voir [6].

Dans la troisième partie nous déterminons des conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} x' = x((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (x-2y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \\ y' = y((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (2x+y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \end{cases}$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $n$ ,  $m$  et  $l$  sont des paramètres réels. De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Voir [10].

## 2.2 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels

Dans cette partie, nous nous intéressons à déterminer l'expression exacte de l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites de systèmes

différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y) + xR_m(x, y), \\ y' = Q_n(x, y) + yR_m(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$ , respectivement. Nous définissons les polynômes trigonométriques :

$$f_1(\theta) = P_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta, \quad f_2(\theta) = R_m(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\text{et } f_3(\theta) = Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

Le résultat principal sur l'intégrale première et les courbes qui sont formées par les orbites du système (2.1) est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *On considère le système différentiel (2.1), alors on a :*

(a) *Si  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \neq 0$ , alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw,$$

où  $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$ ,  $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$  et  $\lambda = n - m - 1$ .

*De plus, les courbes qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.1), s'écrivent :*

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{c} h \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \\ \lambda \exp\left(\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{\lambda}},$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

(b) *Si  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda = 0$ , alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp\left(-\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right).$$

*De plus, les courbes qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.1), s'écrivent :*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp\left(\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right),$$



où  $h \in \mathbb{R}$ .

(c) Si  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est  $H(x, y) = \frac{y}{x}$ .

De plus, les courbes qui sont formées par les trajectoires du système différentiel (2.1), s'écrivent :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Pour démontrer (a), (b) et (c), on écrit le système différentiel polynomial (2.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , donc le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} r' = f_1(\theta) r^n + f_2(\theta) r^{m+1}, \\ \theta' = f_3(\theta) r^{n-1}, \end{cases} \quad (2.2)$$

où les fonctions  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$  et  $f_3(\theta)$  sont données dans l'introduction et  $r' = \frac{dr}{dt}$ ,  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ .

(a) Supposons  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \neq 0$  :

Prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (2.2) devient l'équation différentielle de Bernoulli :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta) r + B(\theta) r^{1-\lambda}, \quad (2.3)$$

où les fonctions  $A(\theta)$  et  $B(\theta)$  sont définies dans l'hypothèse (a) du théorème 2.1 et  $\lambda = n - m - 1$ . En introduisant le changement de variables de type  $\rho = r^\lambda$ , l'équation différentielle de Bernoulli (2.3) devient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \lambda(A(\theta) \rho + B(\theta)). \quad (2.4)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.4) est

$$\rho(\theta) = \exp\left(\lambda \int^\theta A(\omega) d\omega\right) \left(\alpha + \lambda \int^\theta \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} \exp\left(-\lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \\ &\quad \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\lambda \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw. \end{aligned}$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.1), s'écrivent sous la forme :

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{c} h \exp \left( \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ \lambda \exp \left( \lambda \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -\lambda \int^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{\lambda}} .$$

Ainsi (a) du théorème 2.1 est démontré.

(b) Supposons maintenant  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda = 0$  :

Prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (2.2) devient l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{d\theta} = (A(\theta) + B(\theta)) r . \quad (2.5)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.5) est

$$r(\theta) = \alpha \exp \left( \int^{\theta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) ,$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) .$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.1), s'écrivent sous la forme :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) .$$

Ainsi (b) du théorème 2.1 est démontré.

(c) Supposons maintenant que  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , donc à partir du système (2.2), il en résulte que  $\theta' = 0$ . Ainsi, les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (2.1) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Ainsi,  $H(x, y) = \frac{y}{x}$  est une intégrale première du système. Alors les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (2.1), s'écrivent sous la forme :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

Ceci termine la démonstration du (c) du théorème 2.1. ■

L'exemple suivant est donné pour illustration.

**Exemple 2.2** Prenons  $P_3(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$ ,  $Q_3(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$  et  $R_0(x, y) = -1$ , alors le système (2.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 - x^2y + xy^2 - y^3, \\ y' = -y + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le système (2.6) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \exp\left(-2 \arctan \frac{y}{x}\right).$$

Les courbes qui sont formées par les orbites de système différentiel (2.6) s'écrivent sous la forme :  $x^2 + y^2 - 1 = h \exp\left(2 \arctan \frac{y}{x}\right)$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Expression exacte du cycle limite pour une classe cubique de systèmes différentiels

Ce travail est une extension des résultats récents présentés par Benterki et Llibre intitulé "polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles" voir [9], à d'autres nouvelles classes. Des exemples concrets présentant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3** *Considérons le système différentiel polynomial cubique suivant :*

$$\begin{cases} x' = nx + (\lambda x + \beta y)(ax^2 + bxy + ay^2), \\ y' = ny - (\beta x - \lambda y)(ax^2 + bxy + ay^2). \end{cases} \quad (2.7)$$

Le système (2.7) admet un cycle limite non algébrique, donné explicitement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , par :

$$r(\theta, r_*) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{n}{a\beta + \frac{1}{2}b\beta \sin 2s} e^{\frac{2\lambda}{\beta}s} \right) ds},$$

où  $n, a, b, \lambda, \beta$  et  $r_*$  sont des paramètres réels, tels que  $2a > |b|$ ,  $\beta > 0$ ,  $n > 0$ ,  $\lambda < 0$  et

$$r_* = \sqrt{\frac{4n}{\beta} \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}.$$

**Preuve.** Pour démontrer ce théorème, on écrit le système différentiel polynomial (2.7) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Le système (2.7) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = nr + \lambda \left( a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta \right) r^3, \\ \theta' = -\beta \left( a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta \right) r^2, \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$  et  $r' = \frac{dr}{dt}$ .

Puisque  $2a > |b|$  et  $\beta > 0$ , on déduit que  $\theta'$  est négatif pour tout  $t$ . Ce qui signifie que les orbites  $(r(t), \theta(t))$  du système (2.8) ont une orientation opposée par rapport à celles  $(x(t), y(t))$  du système (2.7).

On prend une nouvelle variable indépendante, la coordonnée  $\theta$ . Le système différentiel (2.8) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\lambda}{\beta}r + \frac{-2n}{2a\beta + b\beta \sin 2\theta} \frac{1}{r}, \quad (2.9)$$

qui est une équation de Bernoulli.

On fait le changement de variable  $\rho = r^2$ , on obtient une équation différentielle linéaire

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2\lambda}{\beta}\rho + \frac{-4n}{2a\beta + b\beta \sin 2\theta}. \quad (2.10)$$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire (2.10) est

$$\rho(\theta) = \left( \frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + k \right) e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta}, \quad (2.11)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

Donc, la solution générale de l'équation de Bernoulli (2.9) est

$$r(\theta) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + k}, \quad (2.12)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle de Bernoulli (2.9) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est

$$r(\theta, r_0) = e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{-4e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + r_0^2}, \quad (2.13)$$

où  $r_0 = r(0)$ .

Une solution périodique du système (2.8) doit satisfaire à la condition :  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , ce qui conduit à une valeur unique  $r_0 = r_*$ , donnée par :

$$r_* = \sqrt{\frac{4n}{\beta} \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}. \quad (2.14)$$

Puisque  $2a > |b|$ ,  $\beta > 0$ ,  $n > 0$  et  $\lambda < 0$ , nous avons  $2a + b \sin 2s > 0$  pour tout  $s \in [0, 2\pi]$ . Par conséquent  $r_* > 0$ .

On remplace  $r_0$  par cette valeur de  $r_*$  dans (2.13), nous obtenons la solution

$$r(\theta, r_*) = 2e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{-n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}. \quad (2.15)$$

Alors si  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous aurons  $r(\theta, r_*) > 0$  est une orbite périodique, et par conséquent un cycle limite. Dans ce qui suit on montre que  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . En effet

$$r(\theta, r_*) = 2e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\frac{-n}{\beta} \int_{2\pi}^\theta \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \frac{n}{\beta} \left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds}.$$

Alors

$$r(\theta, r_*) = 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} e^{-\frac{\lambda}{\beta}\theta} \sqrt{\int_\theta^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds} > 0.$$

car  $2a > |b|$ ,  $n > 0$  et  $\lambda < 0$ . Par conséquent  $\left( \frac{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}}{e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi} - 1} \right) < 0$

et  $\frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} > 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

On déduit que,  $r(\theta, r_*)$  est un cycle limite pour le système différentiel (2.7).

La courbe  $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin(\theta))$  dans le plan  $(x, y)$  avec :

$$r(\theta, r_*)^2 = 4e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta} \left( \frac{-n}{\beta} \int_0^\theta \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \right)$$

est non algébrique, en raison de l'expression :

$$4e^{-\frac{2\lambda}{\beta}\theta} \left( \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta}\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta}s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \right).$$

Plus précisément, en coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , la courbe définie par ce cycle limite est

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4e^{-\frac{2\lambda}{\beta} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left( \begin{array}{l} -\frac{n}{\beta} \int_0^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta} s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds + \\ \frac{n}{\beta} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta} \pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta} s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \end{array} \right) = 0.$$

Mais il n'y a pas un entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^n}$  et  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^n}$  disparaissent à la fois.

Pour être convaincu par ce fait, on doit calculer, par exemple  $\frac{\partial f}{\partial x}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - \frac{4\frac{n}{\beta}y}{(x^2 + y^2) \left( 2a + b \sin\left(2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right)} - \\ &\quad \frac{8\lambda n}{\beta^2} \left( \frac{y \exp\left(-\frac{2\lambda}{\beta} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{x^2 + y^2} \right) \left( \begin{array}{l} \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{4\lambda}{\beta} \pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta} s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds - \\ \int_0^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \left( \frac{e^{\frac{2\lambda}{\beta} s}}{2a + b \sin 2s} \right) ds \end{array} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $f(x, y)$  apparaît à nouveau, donc  $f(x, y)$  reste dans l'ordre de dérivation, alors la courbe  $f(x, y) = 0$  est non-algébrique et le cycle limite sera également non algébrique. ■

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

**Exemple 2.4** Prenons :  $a = \beta = n = 1$  et  $\lambda = b = -1$ , alors le système (2.7) s'écrit :

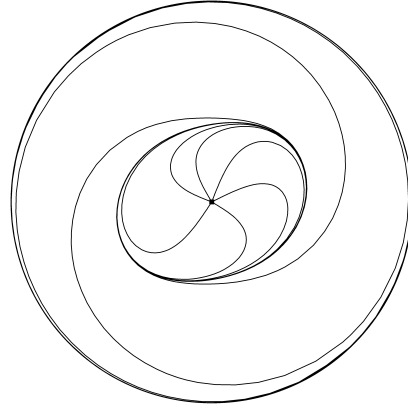
$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2). \end{cases} \quad (2.16)$$

Le système (2.16) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^\theta \sqrt{r_*^2 - 4 \int_0^\theta \left( \frac{e^{-2s}}{2 - \sin 2s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* = \sqrt{2 \frac{e^{4\pi}}{e^{4\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2 - \sin 2s} e^{-2s} \right) ds} \simeq 1.1912$ .

Ceci est un résultat présenté par Benterki et Llibre dans [9].



Cycle limite du système (2.16).

**Exemple 2.5** Prenons  $\beta = 1$ ,  $n = a = 2$ ,  $\lambda = -2$  et  $b = -1$ , alors le système (2.7) s'écrit

$$\begin{cases} x' = 2x + (-2x + y)(2x^2 - xy + 2y^2), \\ y' = 2y - (x + 2y)(2x^2 - xy + 2y^2). \end{cases} \quad (2.17)$$

Le système (2.17) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression exacte dans les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{2\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{4}{4 - \sin 2s} e^{-4s} \right) ds},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r_* = \sqrt{4 \left( \frac{e^{8\pi}}{e^{8\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{4 - \sin 2s} e^{-4s} \right) ds} \simeq 0.74808.$$

**Exemple 2.6** Prenons :  $\beta = \sqrt{3}$ ,  $n = \sqrt{2}$ ,  $a = 3$  et  $\lambda = b = -2$ , alors le système (2.7) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2}x + (-2x + \sqrt{3}y)(3x^2 - 2xy + 3y^2), \\ y' = \sqrt{2}y - (\sqrt{3}x + 2y)(3x^2 - 2xy + 3y^2). \end{cases} \quad (2.18)$$

Le système (2.18) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3} - \sqrt{3} \sin 2s} e^{\frac{-4}{\sqrt{3}}s} \right) ds},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r_* = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( \frac{e^{\frac{8}{\sqrt{3}}\pi}}{e^{\frac{8}{\sqrt{3}}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{6 - 2 \sin 2s} e^{\frac{-4}{\sqrt{3}}s} \right) ds} \simeq 0.53663.$$

**Exemple 2.7** Prenons :  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{5}$ ,  $a = \sqrt{7}$ ,  $\lambda = -\sqrt{5}$  et  $b = \sqrt{2}$ , alors le système (2.7) s'écrit

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + (-\sqrt{5}x + \frac{1}{2}y) (\sqrt{7}x^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{7}y^2), \\ y' = \frac{1}{5}y - (\frac{1}{2}x + \sqrt{5}y) (\sqrt{7}x^2 + \sqrt{2}xy + \sqrt{7}y^2). \end{cases} \quad (2.19)$$

Le système (2.19) admet un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = e^{2\sqrt{5}\theta} \sqrt{r_*^2 - 2 \int_0^\theta \left( \frac{4}{10\sqrt{7} + 5\sqrt{2} \sin 2s} e^{-4\sqrt{5}s} \right) ds},$$

$$\text{où } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r_* = \sqrt{\frac{4}{5} \left( \frac{e^{8\sqrt{5}\pi}}{e^{8\sqrt{5}\pi} - 1} \right) \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2\sqrt{7} + \sqrt{2} \sin 2s} e^{-4\sqrt{5}s} \right) ds} \simeq 0.17905.$$

## 2.4 Expression exacte du cycle limite pour une classe de systèmes différentiels

Dans cette partie nous déterminons les conditions pour l'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels de la forme :

$$\begin{cases} x' = x((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (x-2y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \\ y' = y((m+l)x^2 + 2nxy + (m-l)y^2) + \\ (2x+y)(x^2+y^2)((a+c)x^2 + 2bxy + (a-c)y^2), \end{cases} \quad (2.20)$$

où  $a, b, c, n, m$  et  $l$  sont des paramètres réels. De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Des exemples concrets présentant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :



**Théorème 2.8** *Le système différentiel (2.20) admet un cycle limite non-algébrique explicitement donné en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :*

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_*^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds},$$

avec  $a + |c| + |b| < 0$ ,  $m - |l| - |n| > 0$  et

$$r_* = \sqrt{\frac{e^{2\pi}}{-1 + e^{2\pi}} \int_0^{2\pi} - \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds}.$$

De plus, ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.

**Preuve.** Pour démontrer notre résultat on écrit le système différentiel polynomial (2.20) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = (m + l \cos 2\theta + n \sin 2\theta) r^3 + (a + b \sin 2\theta + c \cos 2\theta) r^5, \\ \theta' = 2(a + c \cos 2\theta + b \sin 2\theta) r^4, \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$  et  $r' = \frac{dr}{dt}$ .

Puisque  $a + |c| + |b| < 0$ ,  $\theta'$  est négatif pour tout  $t$ , cela signifie que les orbites  $(r(t), \theta(t))$  du système (2.21) ont une orientation opposée par rapport à celles  $(x(t), y(t))$  du système (2.20).

On prend la coordonnée  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. Le système différentiel (2.21) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}r + \frac{(m + l \cos 2\theta + n \sin 2\theta)}{2(a + c \cos 2\theta + b \sin 2\theta)} \frac{1}{r}, \quad (2.22)$$

qui est une équation de Bernoulli.

On fait le changement de variable  $\rho = r^2$ , on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho + \frac{m + l \cos 2\theta + n \sin 2\theta}{a + c \cos 2\theta + b \sin 2\theta}. \quad (2.23)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.23) est

$$\rho(\theta) = e^\theta \left( k + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds \right), \quad (2.24)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ . Alors

$$r(\theta) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{k + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds}, \quad (2.25)$$

où  $k \in \mathbb{R}$ .

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle (2.22) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est

$$r(\theta, r_0) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_0^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds}, \quad (2.26)$$

où  $r_0 = r(0)$ .

Une telle solution périodique du système (2.21) doit satisfaire à la condition  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , ce qui conduit à une valeur unique  $r_0 = r_*$  donnée par

$$r_* = \sqrt{\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \sqrt{\int_0^{2\pi} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds}}.$$

Puisque :  $a + |c| + |b| < 0$  et  $m - |l| - |n| > 0$ , nous avons  $a + b \cos 2s + c \sin 2s < 0$  et  $m + l \cos 2s + n \sin 2s > 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Par conséquent  $r_* > 0$ . On remplace  $r_0$  par cette valeur de  $r_*$  dans (2.26), nous obtenons la solution :

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{\frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - 1} \int_0^{2\pi} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds}. \quad (2.27)$$

Alors si  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , nous aurons  $r(\theta, r_*) > 0$  est une orbite périodique et par conséquent un cycle limite. Dans ce qui suit on montre que  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tous  $\theta \in \mathbb{R}$ . En effet

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{\left( \frac{1}{1 - e^{2\pi}} \right) \int_0^{2\pi} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds - \int_\theta^{2\pi} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds} > 0,$$

car  $a + |c| + |b| < 0$  et  $m - |l| - |n| > 0$ , par conséquent  $\frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} < 0$

et  $\int_0^{2\pi} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds < 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

On déduit que  $r(\theta, r_*)$  est un cycle limite pour le système différentiel (2.20).

La courbe  $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin(\theta))$  dans le plan  $(x, y)$  avec

$$r(\theta, r_*)^2 = e^\theta \left( r_*^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds \right),$$

n'est pas algébrique, en raison de l'expression  $e^{\arctan(\frac{y}{x})} r_*^2$ . Plus précisément, en coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ , la courbe définie par ce cycle limite est

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( r_*^2 + \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds \right) = 0.$$

Mais il n'y a pas un entier  $n$  pour lequel  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^n}$  et  $\frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^n}$  disparaissent à la fois. Pour être convaincu par ce fait, on doit calculer, par exemple  $\frac{\partial f}{\partial x}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = & 2x - \left( y \frac{-m - l(\cos(2 \arctan(\frac{y}{x}))) - n(\sin(2 \arctan(\frac{y}{x})))}{(x^2 + y^2)(a + c \cos(2 \arctan(\frac{y}{x})) + b \sin(2 \arctan(\frac{y}{x})))} \right) + \\ & y \frac{e^{\arctan(\frac{y}{x})}}{x^2 + y^2} \left( r_*^2 + \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( e^{-s} \frac{m + l \cos 2s + n \sin 2s}{a + c \cos 2s + b \sin 2s} \right) ds \right). \end{aligned}$$

Puisque  $f(x, y)$  apparaît à nouveau, donc  $f(x, y)$  reste dans l'ordre de dérivation, alors la courbe  $f(x, y) = 0$  est non-algébrique et le cycle limite sera également non algébrique.

Afin de montrer l'hyperbolicité du cycle limite, on utilise l'application de premier retour de Poincaré  $\Pi(\rho_0) = \rho(2\pi, \rho_0)$ .

On a :

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = e^{2\pi} > 1.$$

Par conséquent, le cycle limite de l'équation différentielle (2.22) est instable et hyperbolique, donc ce cycle limite est stable et hyperbolique pour le système différentiel (2.20). ■

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

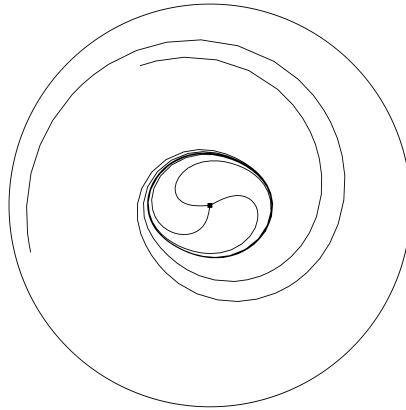
**Exemple 2.9** Prenons :  $a = -3, b = c = m = 1$  et  $n = l = 0$ , le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x - 2(x - 2y)(x^2 - xy + 2y^2), \\ y' = y - 2(2x + y)(x^2 - xy + 2y^2). \end{cases} \quad (2.28)$$

Le système (2.28) est un système cubique. Il a un cycle limite non-algébrique donné explicitement par :

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_*^2 + \int_0^\theta \left( \frac{e^{-s}}{-3 + \cos 2s + \sin 2s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* \simeq 0.68591$ .



Cycle limite du système (2.28).

**Exemple 2.10** Prenons :  $a = -3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ ,  $n = 3$ ,  $m = 8$  et  $l = 2$ , le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(10x^2 + 6xy + 6y^2) + (x - 2y)(x^2 + y^2)(-3x^2 + 2xy - 3y^2), \\ y' = y(10x^2 + 6xy + 6y^2) + (2x + y)(x^2 + y^2)(-3x^2 + 2xy - 3y^2), \end{cases} \quad (2.29)$$

Le système (2.29) est un système cubique. Il a un cycle limite non-algébrique donné explicitement par :

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_*^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{8 + 2 \cos 2s + 3 \sin 2s}{-3 + \sin 2s} \right) ds}.$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* \simeq 1.9923$ .

**Exemple 2.11** Prenons :  $a = -3$ ,  $b = c = n = l = 1$  et  $m = 2$ , le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(3x^2 + 2xy + y^2) - 2(x - 2y)(x^2 + y^2)(x^2 - xy + 2y^2), \\ y' = y(3x^2 + 2xy + y^2) - 2(2x + y)(x^2 + y^2)(x^2 - xy + 2y^2). \end{cases} \quad (2.30)$$

Le système (2.30) est un système quintique. Il a un cycle limite non-algébrique donné explicitement par :

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_*^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{2 + \cos 2s + \sin 2s}{-3 + \cos 2s + \sin 2s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* \simeq 1.1629$ .

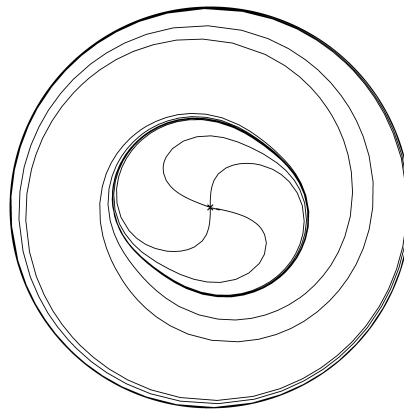
**Exemple 2.12** Prenons :  $a = -4$ ,  $b = c = 1$ ,  $n = -1$ ,  $m = 5$  et  $l = 2$  le système (2.20) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(7x^2 - 2xy + 3y^2) + (x - 2y)(x^2 + y^2)(-3x^2 + 2xy - 5y^2), \\ y' = y(7x^2 - 2xy + 3y^2) + (2x + y)(x^2 + y^2)(-3x^2 + 2xy - 5y^2). \end{cases} \quad (2.31)$$

Le système (2.31) est un système quintique. Il a un cycle limite non-algébrique donné explicitement par :

$$r(\theta, r_*) = e^{\frac{1}{2}\theta} \sqrt{r_*^2 + \int_0^\theta \left( e^{-s} \frac{5 + 2 \cos 2s - \sin 2s}{-4 + \cos 2s + \sin 2s} \right) ds},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $r_* \simeq 1.2742$ .



Cycle limite du système (2.31).

## **2.5 Conclusion**

Dans la première section de ce chapitre on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels planaires. Dans la deuxième section de ce chapitre, on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels cubiques planaires pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique donné explicitement. Dans la troisième section de ce chapitre, on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels quintique planaires pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique avec expression explicite.

## Chapitre 3

Intégrabilité et non existence de cycles limites pour quelques familles de systèmes de Kolmogorov

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va traiter quelques classes de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. On va déterminer l'intégrale première et on donne la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels de Kolmogorov. Il ya beaucoup de phénomènes naturels qui peuvent être modélisés par les systèmes de Kolmogorov tels que l'écologie mathématiques et la dynamique des populations voir [56], les réactions chimiques, la physique des plasmas voir [54], l'hydrodynamique voir [55], l'économie, etc ..

Ce chapitre est composé de trois parties : Dans la première partie nous considérons une classe cubique de systèmes différentiels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x (\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y (\mu + ux^2 + vxy + wy^2), \end{cases}$$

où  $\lambda, \mu, a, b, c, u, v$  et  $w$  sont des paramètres réels. On s'intéresse à l'étude de l'intégrabilité et de la non existence de cycles limites. Voir [11].

Dans la seconde partie, nous considérons une classe de systèmes différentiels polynômiaux planaires de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x (P_n(x, y) + R_m(x, y)), \\ y' = y (Q_n(x, y) + R_m(x, y)), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$  respectivement. Nous nous intéressons à l'intégrabilité et aux courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes. Voir [7].

Dans la troisième partie, nous considérons une famille de systèmes différentiels rationnels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \left( P_n(x, y) + \frac{R_m(x, y)}{S_a(x, y)} \right), \\ y' = y \left( Q_n(x, y) + \frac{R_m(x, y)}{S_a(x, y)} \right), \end{cases}$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$ ,  $R_m(x, y)$  et  $S_a(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$ ,  $m$  et  $a$  respectivement. Nous nous intéressons à l'intégrabilité et aux courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes. De plus, on va démontrer la non existence de cycles limites pour cette famille de systèmes. Voir [12]



### 3.2 Sur la non-existence de cycle limite pour une classe cubique de systèmes de Kolmogorov.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'intégrabilité et à la non existence d'orbites périodiques des systèmes cubiques de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x (\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y (\mu + ux^2 + vxy + wy^2), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\lambda, \mu, a, b, c, u, v$  et  $w$  sont des réels.

Nous définissons les polynômes trigonométriques :  $A(\theta) = a(\cos\theta)^2 + b(\cos\theta)(\sin\theta) + c(\sin\theta)^2$  et  $B(\theta) = u(\cos\theta)^2 + v(\cos\theta)(\sin\theta) + w(\sin\theta)^2$ .

Le résultat principal sur l'intégrabilité et la non existence d'orbites périodiques pour le système cubique de Kolmogorov (3.1) est le suivant :

**Théorème 3.1** *Considérons le système cubique de Kolmogorov (3.1), alors on a :*

(a) *Si  $\mu = \lambda$  et  $A(\theta) \neq B(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp \left( -2 \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) - \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left( - \int^{\omega} \left( 2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left( \frac{2\lambda}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega.$$

*De plus, le système (3.1) n'a pas de cycles limites.*

(b) *Si  $\mu \neq \lambda$  et  $A(\theta) = B(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \exp \left( 2 \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds \right) + 2 \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left( 2 \int^{\omega} \left( \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left( \frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega.$$

*De plus, le système (3.1) n'a pas de cycles limites.*

(c) *Si  $\mu = \lambda$  et  $B(\theta) = A(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est  $H(x, y) = \frac{y}{x}$ . De plus, le système (3.1) n'a pas de cycles limites.*

**Preuve.** Pour démontrer le théorème 3.1, on écrit le système différentiel polynomial (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} r' = (\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta) r + (A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta) r^3, \\ \theta' = (\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta + ((B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta) r^2, \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $r' = \frac{dr}{dt}$  et  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ .

(a) Si  $\mu = \lambda$  et  $B(\theta) \neq A(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système différentiel (3.2) devient :

$$\begin{cases} r' = \lambda r + (A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta) r^3, \\ \theta' = ((B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta) r^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Prenons la coordonnée  $\theta$  comme une variable indépendante. Le système différentiel (3.3) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} r + \frac{\lambda}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} \frac{1}{r}, \quad (3.4)$$

qui est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variables  $\rho = r^2$ , on obtient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2 \frac{A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} \rho + \frac{2\lambda}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta}. \quad (3.5)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.5) est

$$\rho(\theta) = \exp \left( \int^{\theta} \left( 2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left( \alpha + \int^{\theta} \exp \left( \int^{\omega} \left( 2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left( \frac{2\lambda}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega \right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp \left( - \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \left( 2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) - \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left( -2 \int^{\omega} \left( \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left( \frac{2\lambda}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega.$$

Les points d'équilibre du système de Kolmogorov (3.1) sont situés à l'origine, ou sur les axes  $x$  ou  $y$ , ou dans un des quatre quadrants ouverts obtenus de  $\mathbb{R}^2$  par la suppression de l'axe  $x$  et l'axe  $y$ . Etant donné que les axes des  $x$  et  $y$  sont formés par des orbites du système (3.1), les points d'équilibres situés sur ces axes ne peuvent pas être entourés par des orbites périodiques. Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites. Soit une orbite périodique entour un point d'équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts, et que  $h_\gamma = H(\gamma)$ .

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par les orbites du système différentiel (3.1) s'écrivent :

$$r(\theta) = \sqrt{h \exp f(\theta) + \exp f(\theta) \int^\theta \exp(-f(\omega)) g(\omega) d\omega},$$

où  $f(\theta) = 2 \int^\theta \left( \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds$  et  $g(\theta) = \frac{2\lambda}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta}$ .

Par conséquent, l'orbite périodique est contenue dans la courbe

$$r(\theta) = \sqrt{h_\gamma \exp f(\theta) + \exp f(\theta) \int^\theta \exp(-f(\omega)) g(\omega) d\omega}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique et par conséquent il n'existe pas de cycles limites contenus dans l'un des quadrants ouverts, car cette courbe a au plus un point unique sur tout les droites  $\theta = \theta^*$  pour tout  $\theta^* \in [0, 2\pi)$ . Ainsi (a) du théorème 3.1 est démontré.

(b) Supposons maintenant que  $\mu \neq \lambda$  et  $A(\theta) = B(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le système (3.2) devient :

$$\begin{cases} r' = (\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta) r + A(\theta) r^3, \\ \theta' = (\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta. \end{cases} \quad (3.6)$$

Prenons la coordonnée  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. Le système différentiel (3.6) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} r + \frac{A(\theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} r^3,$$

qui est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variable  $\rho = \frac{1}{r^2}$ , on obtient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -2 \frac{(\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} \rho - 2 \frac{A(\theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta}.$$

La solution générale de l'équation linéaire est

$$\rho(\theta) = \exp\left(-2 \int^{\theta} \left(\frac{\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\alpha - 2 \int^{\theta} \exp\left(\int^{\omega} \left(2 \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \exp\left(2 \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right) + 2 \int^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp\left(2 \int^{\omega} \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega.$$

Soient  $\gamma$  une orbite périodique, si elle existe, qui entoure un point d'équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts et  $h_{\gamma} = H(\gamma)$ . Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par des orbites du système différentiel (3.1), s'écrivent sous la forme :

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{\exp\left(2 \int^{\theta} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right)}{h - 2 \int^{\theta} \exp\left(2 \int^{\omega} \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega}}.$$

Par conséquent, l'orbite périodique  $\gamma$  est contenue dans la courbe suivante :

$$r(\theta) = \sqrt{\frac{\exp\left(2 \int^{\theta} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right)}{h_{\gamma} - 2 \int^{\theta} \exp\left(2 \int^{\omega} \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega}}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique  $\gamma$ , et par conséquent il n'existe pas de cycles limites contenus dans l'un des quadrants ouverts, car cette courbe a au plus un point sur tous les droites  $\theta = \theta^*$  pour tout  $\theta^* \in [0, 2\pi)$ . Ainsi le résultat (b) du théorème 3.1 est démontré.

(c) Supposons maintenant que :  $\mu = \lambda$  et  $B(\theta) = A(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , à partir de (3.2) il résulte que  $\theta' = 0$ . Ainsi, les lignes droites passant par l'origine

des coordonnées du système différentiel (3.1) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Par conséquent,  $\frac{y}{x}$  est une intégrale première du système, donc le système (3.2) n'a pas d'orbites périodiques. Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites. Ceci termine la démonstration du résultat (c) du théorème 3.1. ■

### 3.3 Expression exacte de l'intégrale première pour une classe de systèmes de Kolmogorov

Dans cette section, nous nous intéressons à l'intégrabilité et aux courbes formées par les orbites des systèmes différentiels polynômiaux en dimensions deux de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(P_n(x, y) + R_m(x, y)), \\ y' = y(Q_n(x, y) + R_m(x, y)), \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $P_n(x, y)$ ,  $Q_n(x, y)$  et  $R_m(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$  et  $m$  respectivement.

Nous définissons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$g_1(\theta) = P_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos^2 \theta + Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin^2 \theta,$$

$$g_2(\theta) = Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta \sin \theta - P_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta \sin \theta \text{ et}$$

$$g_3(\theta) = Q_n(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_n(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

Le résultat principal sur l'intégrabilité et les courbes formées par les orbites des systèmes différentiels planaires (3.7) est le suivant :

**Théorème 3.2** *Considérons le système polynômial (3.7), alors on a :*

(a) *Si  $g_2(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda + 1 \neq 0$ , alors le système (3.7) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} \exp \left( -(\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega \right) - (\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -(\lambda + 1) \int^w C(\omega) d\omega \right) D(w) dw,$$

où  $C(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)}$ ,  $D(\theta) = \frac{g_3(\theta)}{g_2(\theta)}$  et  $\lambda = n - m - 1$ .

De plus, les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.7), s'écrivent :

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{c} h \exp \left( (\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega \right) + \\ (\lambda + 1) \exp \left( (\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega \right) \\ \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( -(\lambda + 1) \int^w C(\omega) d\omega \right) D(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{\lambda+1}},$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

(b) Si  $g_2(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda + 1 = 0$ , alors le système (3.7) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} (C(\omega) + D(\omega)) d\omega \right).$$

De plus, les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.7), s'écrivent

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} (C(\omega) + D(\omega)) d\omega \right),$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

(c) Si  $g_2(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.7) est intégrable et son intégrale première est  $H(x, y) = \frac{y}{x}$ .

De plus, les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.7), s'écrivent :  $y = hx$ , où  $h \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Pour démontrer ce théorème, nous écrivons le système différentiel polynomial (3.7) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Donc le système (3.7) devient :

$$\begin{cases} r' = g_1(\theta) r^{n+1} + g_3(\theta) r^{m+1}, \\ \theta' = g_2(\theta) r^n, \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $g_1(\theta)$ ,  $g_2(\theta)$  et  $g_3(\theta)$  sont des fonctions trigonométriques données dans l'introduction.

(a) Si  $g_2(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda + 1 \neq 0$ , nous prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.8) devient l'équation différentielle de Bernoulli :

$$\frac{dr}{d\theta} = C(\theta) r + D(\theta) r^{-\lambda}, \quad (3.9)$$

où  $C(\theta) = \frac{g_1(\theta)}{g_2(\theta)}$ ,  $D(\theta) = \frac{g_3(\theta)}{g_2(\theta)}$  et  $\lambda = n - m - 1$ . En introduisant le changement de variables  $\rho = r^{\lambda+1}$ , nous obtenons l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (\lambda + 1) (C(\theta) \rho + D(\theta)). \quad (3.10)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.10) est

$$\rho(\theta) = \exp\left((\lambda + 1) \int^{\theta} C(\omega) d\omega\right) \left(\alpha + (\lambda + 1) \int^{\theta} \exp\left(-(\lambda + 1) \int^w C(\omega) d\omega\right) D(w) dw\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.9) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda+1}{2}} \exp\left(-(\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega\right) - (\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-(\lambda + 1) \int^w C(\omega) d\omega\right) D(w) dw.$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  formées par les orbites du système différentiel (3.7), s'écrivent sous la forme :

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{l} h \exp\left((\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega\right) + \\ (\lambda + 1) \exp\left((\lambda + 1) \int^{\arctan \frac{y}{x}} C(\omega) d\omega\right) \\ \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-(\lambda + 1) \int^w C(\omega) d\omega\right) D(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{\lambda + 1}},$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

Ceci termine la démonstration du résultat (a) du théorème 3.2.

(b) Supposons maintenant que :  $g_2(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda + 1 = 0$ .

Nous prenons la variable  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.8) devient l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{d\theta} = (A(\theta) + B(\theta)) r. \quad (3.11)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.11) est

$$r(\theta) = \alpha \exp\left(\int^{\theta} (C(\omega) + D(\omega)) d\omega\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.9) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} (C(\omega) + D(\omega)) d\omega \right).$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  formées par les orbites du système différentiel (3.7), s'écrivent sous la forme :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} (C(\omega) + D(\omega)) d\omega \right),$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

Ceci termine la démonstration du résultat (b) du théorème 3.2.

(c) Supposons maintenant que :  $g_2(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Donc, à partir du système (3.8) il en résulte que  $\theta' = 0$ . Ainsi, les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (3.7) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Donc,  $H(x, y) = \frac{y}{x}$  est une intégrale première du système (3.7). Ensuite, les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , qui sont formées par des orbites du système différentiel (3.7) peuvent être écrites en tant que  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ .

Ceci termine la démonstration du résultat (c) du théorème 3.2. ■

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

**Exemple 3.3** Prenons :  $P_3(x, y) = 2x^3 + 2xy^2$ ,  $Q_3(x, y) = 4x^3 + y^3 + 4xy^2 + x^2y$  et  $R_2(x, y) = 3x^2 + 3y^2$ , alors le système (3.7) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(2x^3 + 2xy^2 + 3x^2 + 3y^2), \\ y' = y(4x^3 + y^3 + 4xy^2 + x^2y + 3x^2 + 3y^2). \end{cases} \quad (3.12)$$

Le système (3.12) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{(2x + 3)(2x + y)}{x(2x + y + 3)}.$$

Les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.12) sont données par :  $\frac{(2x + 3)(2x + y)}{x(2x + y + 3)} = h$ , où  $h \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 3.4** Prenons :  $P_3(x, y) = x^3 + xy^2$ ,  $Q_3(x, y) = 2x^3 + y^3 + 2xy^2 + x^2y$  et  $R_2(x, y) = -x^2 - y^2$ , alors le système (3.7) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(x^3 + xy^2 - x^2 - y^2), \\ y' = y(2x^3 + y^3 + 2xy^2 + x^2y - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (3.13)$$



Le système (3.13) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{-x - y + xy + x^2}{-x + xy + x^2}.$$

Les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.13) sont données par :  $\frac{-x - y + xy + x^2}{-x + xy + x^2} = h$ , où  $h \in \mathbb{R}$ .

### 3.4 Sur la dynamique d'une classe de systèmes rationnels de Kolmogorov

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence d'une intégrale première et à la non-existence de cycles limites des systèmes rationnels de Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \left( P(x, y) + \frac{R(x, y)}{S(x, y)} \right), \\ y' = y \left( Q(x, y) + \frac{R(x, y)}{S(x, y)} \right), \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y)$  et  $S(x, y)$  sont des polynômes homogènes de degré  $n$ ,  $n$ ,  $m$  et  $a$  respectivement.

Nous définissons les fonctions trigonométriques suivantes :

$$f_1(\theta) = P(\cos \theta, \sin \theta) \cos^2 \theta + Q(\cos \theta, \sin \theta) \sin^2 \theta, \quad f_2(\theta) = \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)}$$

et  $f_3(\theta) = Q(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta \sin \theta - P(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta \sin \theta$ .

Le résultat principal sur l'existence d'une intégrale première et des orbites périodiques du système rationnel de Kolmogorov (3.14) est le suivant :

**Théorème 3.5** *Considérons un système rationnel de Kolmogorov (3.14), alors on a :*

(a) *Si  $f_3(\theta) \neq 0$ ,  $S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n + a \neq m$ , alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n-m+a}{2}} \exp \left( (m - n - a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - (n - m + a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( (m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw,$$

où  $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$  et  $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$ , les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.14) sont écrites en coordonnées cartésiennes par :

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{l} h \exp \left( (n - m + a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ (n - m + a) \exp \left( (n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega \right) \\ \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left( (m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{n - m + a}},$$

où  $h \in \mathbb{R}$ . De plus, le système (3.14) n'a pas de cycles limites.

(b) Si  $f_3(\theta) \neq 0$ ,  $S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n + a = m$ , alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right),$$

les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.14) sont écrites en coordonnées cartésiennes par :

$$x^2 + y^2 - h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) = 0,$$

où  $h \in \mathbb{R}$ . De plus, le système (3.14) n'a pas de cycles limites.

(c) Si  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est  $H = \frac{y}{x}$  et les courbes formées par les orbites du système différentiel (3.14), sont écrites en coordonnées cartésiennes sous la forme :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ . De plus, le système (3.14) n'a pas de cycles limites.

**Preuve.** Pour démontrer ce théorème, on écrit le système différentiel rationnel (3.14) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Le système (3.14) devient :

$$\begin{cases} r' = f_1(\theta) r^{n+1} + f_2(\theta) r^{m-a+1}, \\ \theta' = f_3(\theta) r^n, \end{cases} \quad (3.15)$$

où les fonctions trigonométriques :  $f_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta)$  et  $f_3(\theta)$  sont celles données dans l'introduction,  $r' = \frac{dr}{dt}$  et  $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ .

(a) Si  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n + a \neq m$ , prenons comme nouvelle variable indépendante la coordonnée  $\theta$ . Ce système différentiel (3.15) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta) r + B(\theta) r^{1+m-n-a}, \quad (3.16)$$

où  $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$  et  $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$ , qui est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variables  $\rho = r^{n-m+a}$ , on obtient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n - m + a) (A(\theta) \rho + B(\theta)). \quad (3.17)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.17) est

$$\rho(\theta) = \exp\left((n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega\right) \left(\alpha + (n - m + a) \int^\theta \exp\left((m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n-m+a}{2}} \exp\left((m - n - a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - (n - m + a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left((m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw.$$

Soient  $\gamma$  une orbite périodique, si elle existe, qui entoure un point d'équilibre situé dans le quadrant ( $x > 0, y > 0$ ) et  $h_\gamma = H(\gamma)$ , où  $h_\gamma \in \mathbb{R}$ .

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  formées par des orbites du système différentiel (3.14), s'écrivent sous la forme :

$$r(\theta) = \left( \begin{array}{l} h \exp\left((n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega\right) + \\ (n - m + a) \exp\left((n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega\right) \\ \int^\theta \exp\left((m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{1}{n-m+a}}, \quad \text{où } h \in \mathbb{R}.$$

En coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , nous avons :

$$x^2 + y^2 = \left( \begin{array}{l} h \exp\left((n - m + a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \\ (n - m + a) \exp\left((n - m + a) \int^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \\ \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left((m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{2}{n-m+a}}, \quad \text{où } h \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, l'orbite périodique  $\gamma$  est contenue dans la courbe suivante :

$$r(\theta) = \left( \begin{array}{l} h_\gamma \exp\left((n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega\right) + \\ (n - m + a) \exp\left((n - m + a) \int^\theta A(\omega) d\omega\right) \\ \int^\theta \exp\left((m - n - a) \int^w A(\omega) d\omega\right) B(w) dw \end{array} \right)^{\frac{1}{n-m+a}}, \quad \text{où } h_\gamma \in \mathbb{R}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique  $\gamma$ . Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites contenu dans le premier quadrant ( $x > 0, y > 0$ ), parce que cette courbe a au plus un point unique sur tous les droites  $\theta = \theta^*$  pour tout  $\theta^* \in [0, 2\pi)$ . Ainsi le résultat (a) du théorème 3.5 est démontré.

(b) Supposons maintenant que  $f_3(\theta) \neq 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n + a = m$ .

Prenons la coordonnée  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante. Le système différentiel (3.15) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = (A(\theta) + B(\theta)) r. \quad (3.18)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.18) est

$$r(\theta) = \alpha \exp\left(\int^{\theta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right),$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors le système (3.14) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right).$$

Soient  $\gamma$  une orbite périodique, si elle existe, qui entoure un point d'équilibre situé dans le premier quadrant ( $x > 0, y > 0$ ) et  $h_\gamma = H$ , où  $h_\gamma \in \mathbb{R}$ . Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , formées par des orbites du système différentiel (3.14), s'écrivent sous la forme :

$$r(\theta) = h \exp\left(\int^{\theta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right), \text{ où } h \in \mathbb{R}.$$

En coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , nous avons :

$$x^2 + y^2 - h \exp\left(\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right) = 0, \text{ où } h \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, l'orbite périodique  $\gamma$  est contenue dans la courbe suivante :

$$r(\theta) = h_\gamma \exp\left(\int^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega\right), \text{ où } h_\gamma \in \mathbb{R}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique  $\gamma$ . Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites contenu dans le premier quadrant ( $x > 0, y > 0$ ),

parce que cette courbe a au plus un point sur tous les droites  $\theta = \theta^*$  pour tout  $\theta^* \in [0, 2\pi)$ . Ainsi le résultat (b) du théorème 3.5 est démontré.

(c) Supposons maintenant que :  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Donc à partir de (3.15) il en résulte que  $\theta' = 0$ . Ainsi, les droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (3.14) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Par conséquent,  $H(x, y) = \frac{y}{x}$  est une intégrale première du système. Alors les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$  formées par les orbites du système différentiel (3.14), sont écrites en coordonnées cartésiennes comme  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ . Clairement le système (3.14) n'a pas d'orbites périodiques, et par conséquent n'a pas de cycles limites.

Ceci termine la démonstration du (c) du théorème 3.5. ■

Les exemples suivants sont donnés pour illustration.

**Exemple 3.6** Prenons :  $P(x, y) = 2xy - y^2$ ,  $Q(x, y) = 2xy + x^2$ ,  $R(x, y) = x - y$  et  $S(x, y) = x + y$ , alors le système (3.14) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x \left( 2xy - y^2 + \frac{x - y}{x + y} \right), \\ y' = y \left( x^2 + 2xy + \frac{x - y}{x + y} \right). \end{cases} \quad (3.19)$$

Le système différentiel rationnel (3.19) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  s'écrit :

$$\begin{cases} r' = (\sin 2\theta) r^3 + \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} r, \\ \theta' = \frac{1}{2} (\sin 2\theta) r^2. \end{cases}$$

Ici  $f_1(\theta) = \sin 2\theta$ ,  $f_2(\theta) = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$  et  $f_3(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ .

Dans le premier quadrant ( $x > 0, y > 0$ ), correspond au cas (a) du théorème 3.5. Alors le système (3.19) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp\left(-4 \arctan \frac{y}{x}\right) - \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp(-4w) \left( \frac{4 \cos w - 4 \sin w}{(\cos w + \sin w) \sin 2w} \right) dw.$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , formées par les orbites du système différentiel (3.19), sont écrites en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$x^2 + y^2 = h \exp\left(4 \arctan \frac{y}{x}\right) + \exp\left(4 \arctan \frac{y}{x}\right) \int^{\arctan \frac{y}{x}} \exp(-4w) \left( \frac{4 \cos w - 4 \sin w}{(\cos w + \sin w) \sin 2w} \right) dw,$$

où  $h \in \mathbb{R}$ . De plus, le système (3.19) n'a pas de cycles limites.

**Exemple 3.7** Prenons :  $P(x, y) = x + y$ ,  $Q(x, y) = x + 2y$ ,  $R(x, y) = -2y^3 - x^3 + 5x^2y + 8xy^2$  et  $S(x, y) = x^2 + y^2$ , alors le système (3.14) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x \left( x + y + \frac{-2y^3 - x^3 + 5x^2y + 8xy^2}{x^2 + y^2} \right), \\ y' = y \left( x + 2y + \frac{-2y^3 - x^3 + 5x^2y + 8xy^2}{x^2 + y^2} \right). \end{cases} \quad (3.20)$$

Le système différentiel rationnel (3.20) s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\begin{cases} r' = (9 \cos \theta \sin^2 \theta + 6 \cos^2 \theta \sin \theta) r^2, \\ \theta' = (\cos \theta) (\sin^2 \theta) r. \end{cases}$$

Ici  $f_1(\theta) = \cos \theta + \frac{7}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$ ,  $f_2(\theta) = -2 \sin^3 \theta - \cos^3 \theta + 5 \cos^2 \theta \sin \theta + 8 \cos \theta \sin^2 \theta$  et  $f_3(\theta) = \frac{1}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta$ .

Dans le premier quadrant ( $x > 0, y > 0$ ), correspond au cas (b) du théorème 3.5. Alors le système (3.20) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp \left( - \int^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{9 \sin w + 6 \cos w}{\sin w} \right) dw \right).$$

Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , formées par les orbites du système différentiel (3.20), sont écrites en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$x^2 + y^2 = h \exp \left( \int^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{9 \sin w + 6 \cos w}{\sin w} \right) dw \right),$$

où  $h \in \mathbb{R}$ . De plus, le système (3.20) n'a pas de cycles limites.

**Exemple 3.8** Prenons :  $P(x, y) = x + y$ ,  $Q(x, y) = x + y$ ,  $R(x, y) = 2x + 3y$  et  $S(x, y) = x^2 + y^2$ , alors système (3.14) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x \left( x + y + \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2} \right), \\ y' = y \left( x + y + \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2} \right). \end{cases} \quad (3.21)$$

Le système différentiel rationnel (3.21) s'écrit en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\begin{cases} r' = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta + (\cos \theta + \sin \theta) r^2, \\ \theta' = 0. \end{cases}$$

Ici  $f_1(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ ,  $f_2(\theta) = 2 \cos \theta + 3 \sin \theta$  et  $f_3(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Cela correspond au cas (c) du théorème 3.5. Ainsi,  $\frac{y}{x}$  est l'intégrale première du système (3.21). Les courbes  $H = h$  avec  $h \in \mathbb{R}$ , formées par les orbites du système différentiel (3.21), sont écrites en coordonnées cartésiennes sous la forme :  $y = hx$  où  $h \in \mathbb{R}$ . Le système (3.21) n'a pas d'orbites périodiques, et par conséquent n'a pas de cycles limites.

### **3.5 Conclusion**

Dans la première section de ce chapitre, on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et on a démontré la non-existence de cycles limites pour une classe cubique de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Dans la deuxième section de ce chapitre, on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes qui sont formées par les orbites des systèmes pour une classe de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Dans la troisième section de ce chapitre, on a déterminé l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels rationnels de Kolmogorov et on a donné la formule des courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes. De plus, on a démontré la non-existence de cycles limites.

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires ainsi qu'à celle des systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une intégrale première, une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part le calcul de l'intégrale première d'un système différentiel planaire détermine complètement le portrait de phase du système. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrale première, solution périodique, cycle limite, portrait de phase. Les résultats obtenus dans cette thèse s'articulent sur ces questions.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires.

Dans le deuxième chapitre on a traité des classes de systèmes différentiels planaires. Ce chapitre est réparti en trois parties, dans la première partie on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels planaires, dans la deuxième partie on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite pour une classe de systèmes différentiels cubiques et planaires pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique donné explicitement, et on a consacré la troisième partie à une autre classe de systèmes différentiels quintiques et planaires pour laquelle nous pouvons obtenir un cycle limite non algébrique donné explicitement. A notre connaissance il est rare de trouver, dans la littérature des systèmes différentiels, un système différentiel avec un cycle limite non algébrique donné explicitement.



Dans le troisième chapitre on a traité quelques classes de systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Ce chapitre est réparti en trois parties, dans la première partie on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et on a démontré la non-existence de cycles limites pour une classe cubique de système différentiels planaires de Kolmogorov. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on a déterminé l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes qui sont formées par les orbites d'une classe de systèmes différentiels polynomiaux planaires de Kolmogorov. Dans la troisième partie de ce chapitre, on a déterminé l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels rationnels de Kolmogorov et on a donné la formule des courbes qui sont formées par les orbites de ces systèmes, de plus on a démontré la non-existence de cycles limites.

**Pour les perspectives**, vu les techniques qu'on a utilisées pour trouver une classe de systèmes cubiques avec un cycle limite non algébrique, il est possible d'espérer trouver une classe de systèmes différentiels quadratiques qui admettent un cycle limite non algébrique et donné d'une manière explicite. Signalons que ce problème est un problème ouvert jusqu'à présent.

D'autre part, on a étudié des classes de systèmes de Kolmogorov de point de vue de l'intégrabilité et de la non existence de cycle limite. Il reste le problème d'existence de cycle limite donné explicitement pour une classe de système de type Kolmogorov. A notre connaissance il n'y a pas un exemple de système de Kolmogorov avec un cycle limite non algébrique donné explicitement.

Notre investissement dans l'avenir est dans ce sens et cette thèse sert comme un outil puissant dans la recherche de l'intégrale première et l'existence de cycle limite.

## Annexe. Le programme P4

Dans cette section nous présentons un programme informatique basé sur la théorie des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Ce programme est réalisé pour dessiner le portrait de phase de n'importe quel système différentiel polynômial sur le plan obtenu par la compactification de Poincaré. La nouvelle version P5 a changé le langage symbolique de REDUCE au MAPLE, et maintenant il est mis en application plus facilement dans n'importe quel système, WINDOWS, UNIX, ou OS-X de MACINTOSH, c.-à-d. où le MAPLE est disponible.

Le P4 est un outil qui peut être utilisé dans l'étude d'un système différentiel planaire polynômial selon le choix de l'utilisateur, il dessine les portraits de phase sur le disque de Poincaré, ou sur tout rectangle dans le plan fini, ou à l'infini dans une des quatre cartes utilisées dans la compactification. Maintenant nous allons voir comment travaille le P4. En premier lieu P4 vérifie si le champ de vecteurs a un ensemble continu de points singuliers dans le plan c.-à-d., si les deux composants polynômiaux du champ de vecteurs ont un facteur commun. S'ils ont un facteur commun, nous divisons le champ de vecteurs par ce facteur commun et nous étudions le nouveau champ de vecteurs. Parfois, si le champ de vecteurs est trop grand, les logiciels de calcul algébrique utilisés (c.-à-d., REDUCE ou MAPLE) ne peuvent pas trouver ce facteur commun. Dans ces cas le P4 ne fonctionnera pas correctement. Nous déterminons les points singuliers finis isolés. Ceci peut être fait en mode algébrique ou numérique. Dans les deux cas P4 demandera au langage symbolique de résoudre le problème. Si le degré du champ de vecteurs est élevé, la détermination de ces singularités peut prendre beaucoup de temps. Dans ce cas et pour un meilleur fonctionnement, on travaille numériquement.

Pour chaque point singulier  $(x_0, y_0)$ , P4 détermine le portrait de phase local de la façon suivante. D'abord il calcule la matrice Jacobienne pour chaque point

singulier, c.-à.-d.

$$DX_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

et calcule ses valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous devons distinguer différents cas, les deux valeurs propres sont réelles, purement imaginaires, ou complexes.

# Bibliographie

- [1] K. I. T. AL-DOSARY, *Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systems*, Int. J. of Math. **18** (2007), 179–189.
- [2] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. L. MAIER, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, Wiley, New York, (1973).
- [3] I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math, **24** (1901), 1-88.
- [4] N.N. BAUTIN, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, Trans. Ame. Math. Soc. **100**, (1954), 397–413.
- [5] A. BENDJEDDOU, R. BENTERKI AND T. SALHI, *Explicit Non-Algebraic Limit Cycle for Polynomaial Systems of Degree Seven*, Applied Mathematical Sciences, Vol. **3**, (2009), no. 13, 613-622.
- [6] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, *Explicit non-algebraic limit cycles of a class of polynomial systems*, FJAM, **91**(2) (2015) 133-142.
- [7] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems*, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. **3**(1), (2015) 110 – 115.
- [8] A. BENDJEDDOU, J. LLIBRE, T. SALHI, *Dynamics of the polynomaial differential systems with homogeneous nonlinearities and a star node*, J. Differential Equations **254**, (2013), 3530–3537.
- [9] R. BENTERKI AND J. LLIBRE, *Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles*, Elect. J. of Diff. Equ, **78**, (2012), 1-6.
- [10] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *A Quintic polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycle*, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume No. 2 (2015), 235-241.

- 
- [11] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the non-existence of limit cycles for a cubic kolmogorov systems*, International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume No. 2 (2015), 227-233.
- [12] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics-Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [13] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINE AND J. LLIBRE, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Differential Equations **194** (2003), 116–139.
- [14] M. CARBONELL AND J. LLIBRE, *Limit cycles of a class of polynomial systems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **109A** (1988), 187–199.
- [15] C. CHRISTOPHER AND J. LLIBRE, *Algebraic aspects of integrability for polynomial systems*, Qualitative Theory of Planar Differential Equations **1** (1999), 71–95.
- [16] J. CAO AND H. JIANG, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, J. Math. Anal. Appl. **361** (2010) 177-186.
- [17] J. CAO, *Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method*, J. Comput. Appl. Math. **220** (2008), 624–631.
- [18] T. CARLEMAN, *Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires*, Acta Mathematica **59** (1932), 63–87.
- [19] C. CHICONE *Limit cycles of a class of polynomial vector fields in the plane*, J. Diff. Equations **63** (1986), 68–87.
- [20] C.J. CHRISTOPHER, *Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations*, Electron J. Differential Equations (1999), 7 pp.
- [21] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer–Verlag, (2006).
- [22] G. DARBOUX, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)* , Bull. Sci. math. 2ème série **2** (1878), 60–96, 123–144, 151–200.
- [23] H. DULAC, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielle ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sci. Math. Sér. (2) **32** (1908), 230–252.

- [24] I.A. GARCEA AND M. GRAU, *A survey on the inverse integrating factor*, Qual. Theory Dyn. Syst. **9** (2010), 115–166.
- [25] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. of computational and Applied Mathematics **200** (2007), 448–457.
- [26] J. GINE AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, J. Differential Equations **197** (2004), 147–161.
- [27] A. GASULL AND J. LLIBRE, *Limit cycles for a class of Abel equations*, SIAM J. of Math. Anal. **21** (1990), 1235–1244.
- [28] A. GASULL, J. LLIBRE AND J. SOTOMAYOR, *Limit cycles of vector fields of the form  $X(v) = Av + f(v)Bv$* , J. Diff. Equations **67** (1987), 90–110.
- [29] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity **9** (1996), 501–516.
- [30] H.J. GIACOMINI, C.E. REPETTO AND O.P. ZANDRON, *Integrals of motion of three-dimensional non-Hamiltonian dynamical systems*, J. Phys. A **24** (1991), 4567–4574.
- [31] C. CHRISTOPHER, *Polynomial vector fields with prescribed algebraic limit cycles*, Geometriae Dedicata **88**, 255–258, (2001).
- [32] A. GORIELY, *Integrability and nonintegrability of dynamical systems*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. **19**, World Scientific Publishing Co, Inc, River Edge, NJ, (2001).
- [33] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. (1900), pp 253–297.
- [34] M.W. HIRSCH AND S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, New York, (1974).
- [35] YU. S. ILYASHENKO, *Centennial history of Hilbert’s 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 301–354.
- [36] N. A. KOROL, *The integral curves of a certain differential equation*, (in Russian), Minsk. Gos. Ped. Inst. Minsk (1973), 47–51.
- [37] W. LI, J. LLIBRE, M. NICOLAU AND X. ZHANG, *On the differentiability of first integrals of two dimensional flows*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2079–2088.

- [38] J. LLIBRE AND G. RODRIGUEZ, *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*, J. Differential Equations **198** (2004), 374–380.
- [39] V.A. LUNKEVICH AND K. S. SIBIRSKII, *Integrals of a general quadratic differential system in cases of a center*, Differential Equations **18** (1982), 563–568.
- [40] C. CHRISTOPHER, C. LI, S. YAKOVENKO, *Advanced Course On Limit Cycles of Differential Equations*, (2006), Centre de Recerca Matemàtica Bellaterra (Spain).
- [41] L. MARKUS, *Global structure of ordinary differential equations in the plane* : Trans. Amer. Math Soc. **76** (1954), 127–148.
- [42] T. A. NEWTON *Two dimensional homogeneous quadratic differential systems*, SIAM Review **20** (1978), 120–138.
- [43] P.J. OLVER, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, New York, (1986).
- [44] H. POINCARÉ, *Memoire sur les courbes définies par une equation differentielle*, J. Mathematiques, 7 (1881), 375–422, Oeuvre (1880-1890), Gauthier-Villar, Paris.
- [45] M.J. PRELLE AND M.F. SINGER, *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 613–636.
- [46] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer.
- [47] J.W. REYN, *A bibliography of the qualitative theory of quadratic systems of differential equations in the plane*, Delf University of Technology, <http://ta.twi.tudelft.nl/DV/Staff/J.W.Reyn.html>, (1997).
- [48] J.W. REYN, *Phase portraits of planar quadratic systems*, Mathematics and Its Applications (Springer), **583**, Springer, New York, (2007).
- [49] D. SCHLOMIUK, *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 799–841.
- [50] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
- [51] YE YANQIAN AND OTHERS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, (1984).

- 
- [52] YE YANQIAN, *Qualitative Theory of Polynomial Differential Systems*, Shanghai Scientific & Technical Publishers, Shanghai, (1995) (in Chinese).
- [53] WEI YIN YE AND YE YANQIAN, *On the conditions of a center and general integrals of quadratic differential systems*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 229–236.
- [54] G. LAVEL, R. PELLAT, *Plasma Physics, in : Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, (1975).
- [55] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route, Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin, (1978), p 39.
- [56] R.M. MAY, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, (1974).
- [57] J. CH. GILLE, P. DECAULNE AND M. PELEGRIN, *Système asservis non linéaires Tome 3 Méthode topologique Stabilité*, Dunod (1975).



**Résumé :**

L'objectif de cette thèse est l'étude qualitative de quelques classes de systèmes différentiels planaires. Les résultats obtenus dans cette étude concernent l'intégrabilité et l'existence de solutions périodiques isolées, en d'autres termes, les cycles limites, de plus on détermine explicitement un cycle limite non algébrique pour quelques classes de systèmes différentiels planaires, et on a étudié l'intégrabilité et non existence de solutions périodiques isolées, en d'autres termes, les cycles limites, et on a donné la formule des courbes formées par les orbites de systèmes différentiels de Kolmogorov.

**Mots-Clés :** Systèmes différentiels planaires, Systèmes différentiels de Kolmogorov, Intégrale première, Solutions périodiques, Cycles limites non algébriques.

**Abstract :**

The objective of this thesis is the qualitative study of some classes of planar differential systems. The results obtained in this study concern the integrability and existence of isolated periodic solutions consequently existence of limit cycles, moreover we determined the expression exact of a non algebraic limit cycle for some classes of planar differential systems, and study the integrability and the non existence of isolated periodic solutions consequently no limit cycles, moreover we determined the expression of the curves formed by the trajectories for some classes of planar differential Kolmogorov systems.

**Key words :** Planar differential systems, Kolmogorov System, First Integral, Periodic solution, Non algebraic limit cycle.