RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMMED SEDDIK BENYAHIA-JIJEL

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA)

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de

Doctorat L.M.D

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle

présentée et soutenue par

Loubna Boulkemh

Thème

Perturbations presque convexes pour une classe de problèmes d'évolution

Soutenue publiquement le : 24/02/2024

Devant le jury composé de

Président :	Nouressadat Touafek	Professeur	Université de Jijel
Directeur :	Doria Affane	Professeur	Université de Jijel
Examinateur :	Rachid Boukoucha	Professeur	Université de Bejaia
	Nadjet Abada	M.C.A	ENS de Constantine
	Farida Belhannache	M.C.A	Université de Jijel
	Fatine Aliouane	M.C.A	Université de Jijel

Promotion **2023/2024**

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à ma directrice de thèse Madame **Affane Doria**, Professeur à l'université de Jijel, pour son encadrement précieux, sa confiance, sa grande patience, sa disponibilité et l'aide précieuse avec lesquels j'ai toujours apportée avec bienveillance tout au long de ces cinq années de thèse. Ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Je témoigne que je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans son soutien. Cette thèse lui doit beaucoup. Pour tout cela, merci madame, vous avez été et restera la monitrice de mon travail de recherche.

Je remercie plus particulièrement, Monsieur **Nouressadat Touafek**, Professeur à l'université de Jijel d'avoir accepté la tâche de président du jury.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury : Monsieur **Rachid Boukoucha**, Professeur à l'université de Bejaia, madame **Nadjet Abada**, Maître de Conférences de classe A à l'université de Constantine, madame **Farida Belhannache**, Maître de Conférences de classe A à l'université de Jijel et mademoiselle **Fatine Aliouane**, maître de Conférences de classe A à l'université de de Jijel, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir examiner avec attention mon travail, pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette thèse ainsi pour leurs précieuses remarques.

J'aimerais bien exprimer toute ma gratitude, mes remerciements à ma famille : mes parents, mon mari, mes enfants et mes frères. J'en profite pour remercier mes collègues du laboratoire de recherche et tous mes enseignants du département de mathématiques de l'université de Jijel.

Table des matières

Introduction

Le processus de la rafle perturbé dépendant du temps et de l'état est une inclusion différentielle d'évolution régie par le cône normal de la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t,u(t)) \quad \text{p.p. } \ t \in [T_0, T], \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ \ \forall t \in [T_0, T], \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

où, pour tout $t \in [T_0, T]$ $(T > T_0 \geq 0)$, $C : [T_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une application multivoque, $N_{C(t,u(t))}(u(t))$ est le cône normal de l'ensemble mobile $C(t, u(t))$ à la position $u(t)$ et G est une application univoque où multivoque jouant le rôle d'une perturbation du problème, c'est-à-dire une force externe appliquée sur le système. Ce type de problèmes a été initié par Jean-Jacques Moreau (voir [44]) pour les ensembles dépendants du temps C et $G \equiv 0$ (voir [43, 44, 45, 46]) pour traiter des problèmes d'élasto-plasticité, de quasi-statique, de circuits électriques, d'hystérésis et de dynamique. Cependant, de nombreuses applications des processus de la rafle peuvent également être trouvées de nos jours dans la mécanique non lisse, l'optimisation convexe, la modélisation du mouvement des foules, l'économie mathématique, les réseaux dynamiques, les circuits électriques commutés, etc, voir par exemple [2, 32, 33, 36, 40] et les références qui y figurent. L'existence (et l'unicité) des solutions de ces systèmes et de leurs variantes classiques soumises à des forces de perturbation, à des processus de la rafle du second ordre dépendant de l'état, etc., a été étudiée de manière fructueuse dans la littérature, voir par exemple [1, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 17, 21, 18, 22, 26, 31, 34, 37, 40, 49, 50, 51, 52] et les références qui y figurent.

Ce problème a été étudié la première fois pour les ensembles convexes $C(t, u(t))$ par Chraibi [27] dans $\mathbb{R}^3$, puis, par K.M. Marques [41] dans les espaces de Hilbert sous certaines conditions de compacité. Depuis, une amélioration fut apportée pour contourner

l'hypothèse de convexité des ensembles C grâce à la notion d'ensemble prox-régulier, ont été étudier par Castaing-Ibrahim-Yarou [22] pour prouver l'existence lorsque $G \equiv 0$ et $C(t, u(t))$ est prox-régulier. La démonstration est basée sur l'algorithme de rattrapage de Moreau. Ensuite, dans autre recherche ils ont remplacé l'hypothèse de prox-régulier des ensembles $C(t, u(t))$ par les ensemble sous lisse. La sous lisse est une propriété géométrique des ensembles, elle a été introduit et étudié par Aussel-Danilis-Thibault dans [16], donc cette classe d'ensembles, est une extension de la convexité et de la prox-régularité d'un ensemble. De cette manière, le résultat concernant l'existence d'une solution d'inclusion différentielle du premier ordre est plus général, par exemple, la présence de symétries dans le problème.
Dans l'étude de l'existence de solutions pour les inclusions différentielles, l'utilisation d'hypothèses de convexité sur la perturbation G est largement connue, cette propriété nécessaire pour passer à une limite faible le long d'une suite, qu'il s'agisse d'une suite minimisante ou d'une suite d'inclusions différentielles approximations, en préservant les propriétés nécessaires. En raison de sa généralité, cette approche ne doit pas toujours fournir les meilleurs résultats, car elle ne prend pas en compte d'éventuelles informations supplémentaires, ce problème. Ce problème a été étudié à fond dans plusieurs papiers, voir par exemple [4, 22, 37].

Dans [25], Cellina-Ornelas ont remplacé la convexité par une propriété topologique des ensembles plus faible appelée la presque convexité pour étudier le problème de Cauchy suivant

$$\dot{u}(t) \in F(u(t)),\ u(T_0) = u_0.$$

La presque convexité n'implique pas que l'ensemble de solutions soit compact dans l'espace des fonctions continues à convergence uniforme, comme cela se produit dans le cas de l'hypothèse de convexité, mais seulement que les sélections de cet l'ensemble des solutions est compact. Cette propriété est suffisante pour établir l'existence de solutions du problème de temps optimal. L'objectif d'un problème de contrôle optimal est d'amener un système d'un état initial le plus prés possible d'un état final en minimisant (ou maximisant) un critère d'optimisation.

La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50 avec le principe du maximum. Les auteurs ont donné une condition nécessaire d'optimalité. Cette théorie est développée plus tard dans différentes branches mathématiques : le problème de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles, la théorie de contrôle stochastique, et la théorie des jeux. De nos jours, la théorie de contrôle optimal a de nombreuses applications :

les guidages, automobile, robotique, réseaux informatiques, bioréacteurs, contrôles des procédes chimiques, etc. Dans un problème de temps optimal on cherche le temps minimal pour qu'une trajectoire $u(\cdot)$ de système atteint d'un point initial arbitraire u_0 au point final précis u_1.

Dans [4, 5], les auteurs ont montré l'existence d'une solution du problème

$$(\mathcal{I})\begin{cases}\dot{u}(t)\in -N_C(u(t))+G(u(t)) & \text{p.p. } t\geq 0,\\ u(0)\in C,\end{cases}$$

où la perturbation est à valeurs presque convexes.

Comme continuation des travaux mentionnés ci-dessus, nous étudions l'existence de solutions du problème $(\mathcal{P})$ en dimension finie, où l'ensemble mobile est equi-uniformément sous lisse, et la perturbation est à valeurs convexes puis le problème autonome

$$(\mathcal{PC})\begin{cases}\dot{u}(t)\in -N_{C(u(t))}(u(t))+G(u(t)) & \text{p.p. } t\in[T_0,T],\\ u(t)\in C(u(t)) \ \ \forall t\in[T_0,T],\\ u(T_0)=u_0\in C(u_0),\end{cases}$$

dans le cas presque convexe et une hypothèse plus faible sur la semi-continue supèrieurement.

Dans notre thèse, nous utilisons les résultats publiés dans [37] pour établir l'existence de solutions du problème $(\mathcal{P})$ dans un espace de dimension finie, où les ensembles $C(t,u(t))$ sont equi-uniformément sous lisse et la perturbation G est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes et l'élément de norme minimale satisfasse une condition de croissance linéaire. En s'inspirant de la méthode de l'algorithme de rattrapage de Moreau dans [23], c'est-à-dire, en considérant une partition appropriée de l'intervalle temps, nous avons construit une suite d'approximante qui converge vers la solution du problème considéré, et on a étudié quelques propriétés topologiques de l'ensemble admissible. En utilisant les résultats obtenue et l'idée donné dans [4, 5] pour établir l'existence de solutions du problème autonome $(\mathcal{PC})$ sous une hypothèse plus faible sur la semi-continuité supérieurement et celle de la presque convexité des valeurs de G. Comme application, nous avous considéré le système de contrôle autonome

$$\dot{u}(t)\in -N_{C(u(t))}(u(t))+h(u(t),z(t)), \quad \text{pour} \quad z(t)\in Z(t),$$

où l'ensemble $G(u(t))=h(u(t),Z(u(t)))$ est compact et presque convexe.

Un autre axe de recherche, consiste à généraliser le problème $(\mathcal{P})$ pour obtenir un nouveaux resultat d'existence de l'inclusion différentielle perturbée par la somme d'une multi-application et une fonction de la forme

$$(\mathcal{SP}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)) + F(t,u(t)) + f(t,u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [T_0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ \ \forall t \in [T_0,T], \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0,u_0), \end{cases} \tag{1}$$

où F est semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides et l'élément de norme minimale satisfait une condition de croissance linéaire, et f une fonction continue. Dans la première partie, on a montré l'existence de solutions du problème $(\mathcal{SP})$ dans le cas où F est à valeurs convexes, et on a étudié la compacité de l'ensemble admissible. Dans la dexième, puisque la classe des ensembles presque convexes n'est pas stable par translation, on a définie une classe plus grande qui contient les multi-applications à valeurs presque convexes et leurs translations pour montrer l'existence d'une solution du problème autonome de $(\mathcal{SP})$. Comme application on a étudié l'existence de solutions du problème de temps optimal.

Comme derniers résultats, on a suivi les mêmes étapes du résultat précédemment pour définir un nouveau problème avec deux perturbations dépendant du temps de l'état de l'atat et la vitesse de la forme

$$(\mathfrak{I}) \begin{cases} \dot{u}(t) + h(t,\dot{u}(t)) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)) + H(t,u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [T_0,T], \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ \ \forall t \in [T_0,T], \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0,u_0), \end{cases} \tag{2}$$

telles que $h : [T_0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et $H : [T_0,T] \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes non nécéssairement bornées.

Cette thèse comporte une introduction générale et quatre chapitres.

Dans le premier chapitre on a présenté plusieurs définitions et résultats d'ordre générale qui nous ont été nécessaires dans nos démonstrations.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence de solutions du problème $(\mathcal{P})$ lorsque la perturbation est convexe. Puis, on a démontré l'existence de solutions de problème autonome de $(\mathcal{P})$ dans le cas la presque convexité. Ensuite, on a présenté une application à un problème de temps optimal. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans la revue de classe A : Miskolc Mathematical Notes (voir [6]).

Dans le troisième chapitre, on a montré l'existence de solutions du problème $(\mathcal{SP})$ dans le cas convexe. Puis on a utilisé ce résultat pour montrer l'existence de solution d'un problème autonome où la multi-application est à valeurs presque convexes. Finalement, on a montré l'existence de solutions du problème du temps minimal. Les résultats présentés dans cette partie ont été publiés dans le journal de classe B "Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica" voir (voir[7]).

Dans le quatrième chapitre, on a prouvé l'existence de solutions du problème $(\mathfrak{I})$, telle que la multi-application est à valeurs convexes non nécessairement bornées. Ensuite, on a montré l'existence de solutions du problème autonome de $(\mathfrak{I})$ telle que la multi-application est à valeurs presque convexes. Dans la dernière section de ce chapitre, on a étudie l'existence de solutions du problème du temps minimal. Les résultats présentés de ce chapitre ont été publiés dans le journal de classe B "Advanced Studies : Euro-Tbilisi Mathematical Journal" voir [19].

Chapitre 1

Notations et résultats préliminaires

Sommaire

1.1) Notations

Tout au long de cette thèse, nous utiliserons les notations suivantes.

- $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n, muni de la norme $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- $\mathbb{B}$ la boule unité fermée.
- $B(a,\eta)$ la boule ouverte de centre a et de rayon $\eta > 0$.

Soient $T > T_0 \geq 0$ et $\mathcal{I} = [T_0, T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, on note par :

- $C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ l'espace de Banach de toutes les applications continues $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$, muni de la norme
$$\|f\| = \max_{t\in\mathcal{I}} \|f(t)\|;$$
- $L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ l'espace des applications Lebesgue intégrables définies sur $\mathcal{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme
$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathcal{I}} \|f(t)\|dt;$$
- $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ L'espace des applications essentiellement bornées définies sur $\mathcal{I}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, muni de la norme
$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{c \geq 0 : \|f(t)\| \leq c, \text{ p.p. sur } \mathcal{I}\};$$
- $\sigma\big(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ la topologie faible définie sur $L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$;
- $\sigma\big(L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ la topologie faible* définie sur $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$.
- $\mathcal{B}(X)$ la tribu de Borel sur X

Pour S un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, on note par

- $1\!\!\mathrm{I}_S$ la fonction caractéristique de S, définie par
$$1\!\!\mathrm{I}_S(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in S, \\ 0 & si\ x \notin S; \end{cases}$$
- $\psi_S(\cdot)$ la fonction indicatrice de S, définie par :
$$\psi_S(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in S, \\ +\infty & si\ x \notin S; \end{cases}$$
- $d_S(x)$ la fonction distance entre le point $x \in \mathbb{R}^n$ et l'ensemble S, définie par
$$d_S(x) = \inf_{y\in S} \|x - y\|;$$

- $Proj_S(x)$ la projection du point $x \in \mathbb{R}^n$ dans l'ensemble S, définie par

$$Proj_S(x) = \big\{y \in S : d_S(x) = \|x - y\|\big\}.$$

Si S est fermé (resp. convexe) $Proj_S(x)$ existe (resp. unique).

1.2) Rappel sur la continuité

Pour les résultats de cette section on renvoie le lecteur aux références [14, 30, 35]. Nous considérons dans la suite deux espaces métriques (X, d) et (Y, d').

Définition 1.1 (Fonction continue).
Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction, f est dite continue en un point $x_0 \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon.$$

- *f est continue sur X si elle est continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.2.
Une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est dite

- *lipschitzienne : s'il existe $L \geq 0$ telle que*

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq L\, d(x, y),\ \ \forall\, x, y \in X;$$

- *localement lipschitzienne : si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x, tel que la restriction de f sur V_x est lipschitzienne.*

Définition 1.3 (Équi-continuité).
Une partie K de $C_Y(X)$ est dite équi-continue au point $x \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in K : d(x, x') \leq \eta \Longrightarrow d'\big(f(x), f(x')\big) \leq \varepsilon.$$

- *K est dite équi-continue sur X si elle est équi-continue en tout point $x \in X$.*

Définition 1.4 (Fonction absolument continue).
Une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute partition dénombrable de sous intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ de $[a, b]$ vérifiant

$$\sum_k (b_k - a_k) < \delta,$$

on a

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.5.

une fonction $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction intégrable $v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(t) - f(a) = \int_a^t v(s)ds, \quad \forall\, t \in [a, b],$$

et on a f est dérivable presque partout et sa dérivée est $\dot{f} = v$ p.p.

Remarque 1.6.

- *Toute fonction absolument continue est continue (la réciproque est fausse).*
- *Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.*
- *Toute fonction lipschitzienne est localement lipschitzienne.*

1.3) Quelques notions d'analyse convexe

Pour plus de détails dans cette section, se référer à [14, 15, 54].

Définition 1.7.

Soit E un espace vectoriel et $a, b \in E$. On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités a et b que l'on note $[a, b]$, l'ensemble

$$\big\{\lambda a + (1 - \lambda)b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\big\}.$$

- *Le segment ouvert est l'ensemble $\big\{\lambda a + (1 - \lambda)b,\ 0 < \lambda < 1\big\}$ noté $]a, b[$.*

Définition 1.8 (Ensemble convexe).

Une partie S d'un espace vectoriel E est dite convexe si, toutes les fois que deux points a et b appartiennent à S, le segment $[a, b]$ est contenu dans S, c'est-à-dire,

$$\forall a, b \in S,\ \forall \lambda \in [0, 1] :\ \lambda a + (1 - \lambda)b \in S.$$

Définition 1.9 (Simplexe).

On appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble Δ_n défini par

$$\Delta_n = \Big\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n :\ \lambda_i \geq 0,\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Définition 1.10 (Combinaison convexe).

Soient E un espace vectoriel et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$. On appelle combinaison convexe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout élément $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ tel que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_n$.

Proposition 1.11.
Soient E un espace vectoriel et $S \subset E$ non vide. Alors, S est convexe si et seulement si, il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Définition 1.12 (Enveloppe convexe).
Soit S un sous ensemble non vide d'un espace vectoriel E. On appelle enveloppe convexe de S qu'on le note $co(S)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E contenants S. Alors, c'est le plus petit convexe de E contenant S.

Définition 1.13 (Enveloppe convexe fermée).
Soient E un espace vectoriel et $S \subset E$ non vide. On appelle enveloppe convexe fermée de S qu'on le note $\overline{co}(S)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de E contenant S. Donc, c'est le plus petit convexe fermé de E contenant S.

Théorème 1.14.
Soient E un espace vectoriel, E' son dual topologique et S un sous ensemble non vide de E, alors

$$\overline{co}(S) = \big\{x \in E,\ \forall x' \in E' :\ \langle x', x\rangle \leq \delta^*(x', S)\big\},$$

telle que $\delta^*(\cdot, S)$ la fonction support associée à S, définie par

$$\delta^*(x', S) = \sup_{y \in S} \langle x', y\rangle.$$

Définition 1.15 (Fonction convexe).
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction.

- *On appelle domaine effectif de f qu'on le note $D(f)$, l'ensemble défini par*

$$D(f) = \{x \in X :\ f(x) < +\infty\}.$$

- *On dit que f est convexe si et seulement si*

$$\forall\ x, y \in D(f), \forall\ \lambda \in [0,1] :\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1.4) Quelques résultats de convergence

Dans cette section, nous donnons quelques théorèmes de convergence qui nous seront utiles dans la démonstration de nos résultats d'existence. Pour plus de détails voir [14, 39]

Théorème 1.16 (**Théorème d'Ascoli-Arzelâ**).
Soient X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet, et K un sous ensemble de $C_Y(X)$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors, K est relativement compact si et seulement si, K est équi-continu et $K(x)$ est relativement compact pour tout $x \in X$, avec

$$K(x) = \{f(x);\ f \in K\}.$$

Le théorème suivant est une conséquence du Théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 1.17.
Soient X un sous ensemble compact de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach de dimension finie et $(f_n)_n$ une suite de fonctions absolument continues définies sur X à valeurs dans E, satisfaisant les conditions suivantes :

1. *pour tout $t \in X, (f_n(t))_n$ est un sous ensemble relativement compact de E ;*
2. *il existe une fonction à valeurs réelles positives $h \in L^1_E(X)$ telle que,*

$$\|\dot{f}_n(t)\| \leq h(t) \text{ p.p. sur } X.$$

Alors, il existe une sous suite de $(f_n)_n$ (qu'on le note aussi $(f_n)_n$) qui converge vers une fonction absolument continue $f : X \to E$ au sens suivant

- *a) $(f_n)_n$ converge uniformément vers f ;*
- *b) $(\dot{f}_n)_n$ converge faiblement vers $\dot{f}$ dans $L^1_E(X)$, c'est-à-dire, $(\dot{f}_n)_n$ converge $\sigma(L^1_E(X), L^\infty_E(X))$ vers $\dot{f}$.*

Théorème 1.18 (**Lemme de Mazur**).
Soient E un espace de Banach et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers x. Alors, il existe une suite $(z_n)_n$ (où z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, \ldots$) qui convergeant fortement vers x.
En d'autres termes, si $(x_n)_n$ converge faiblement alors $(z_n)_n$ converge fortement avec

$$z_n \in co\{x_k,\ k \geq n\}.$$

1.5) Quelques notions sur les multi-applications

Nous donnons dans cette section quelques définitions et résultats concernant les multi-applications et leurs sélections. les définitions et les résultats suivants ont été pris des références [14, 15, 24, 35, 53]

Définition 1.19.

Soient X et Y deux ensembles non vides.

1. *Une multi-application F définie sur X à valeurs dans Y, est une fonction qui à chaque élément $x \in X$ associe un sous ensemble $F(x)$ de Y. On note*
$$\begin{aligned} F : X &\rightharpoondown Y \\ x &\longmapsto F(x). \end{aligned}$$
2. *On appelle domaine de la multi-application F qu'on le note $dom(F)$, l'ensemble*
$$dom(F) = \big\{x \in X : F(x) \neq \emptyset\big\}.$$
3. *On appelle image de F, qu'on le note $Im(F)$, l'ensemble*
$$Im(F) = \big\{y \in Y ; \exists\, x \in X : y \in F(x)\big\}.$$
4. *On appelle le graphe de F qu'on le note $Gph(F)$, le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*
$$Gph(F) = \big\{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\big\}.$$

1.5.1) Continuité des multi-applications

Définition 1.20 (Semi-continuité supérieurement).

Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightharpoondown Y$ une multi-application.

1. *On dit que F est semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$ si et seulement si, pour tout ouvert $O \subset Y$ contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $F(\Omega) \subset O$.*
2. *On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.*

Théorème 1.21.

Soit $F : X \rightharpoondown Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors, le graphe de F est fermé.

Le réciproque est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 1.22.

Soit $F : X \rightharpoondown Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors, F est semi-continue supérieurement.

Proposition 1.23.
Soit F une multi-application définie de X à valeurs dans un espace de Banach de dimension finie E. Donc, si $F(\cdot)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes, $co(F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement.

Proposition 1.24.
Si X, Y, Z des espaces topologiques séparés, $f : X \times Y \to Z$ est une fonction continue, $U : X \rightharpoondown Y$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compacte, alors $x \to F(x) = f(x, U(x))$ est semi-continue supérieurement.

Théorème 1.25.
Soient X et Y deux espaces topologiques, F une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, alors

$$\limsup_{x \to x'} F(x) = F(x'), \quad \forall\, x' \in X.$$

Dans la suite, nous enonçons un théorème de fermuture pour les multi-applications semi-continues supérieurement.

Théorème 1.26.
Soient Y un espace de Banach séparable, Y' sont dual topologique, X un espace topologique, F une multi-application définie sur $\mathcal{I} \times X$ à valeurs non vides, convexes et compactes dans Y, telle que pour tout $t \in \mathcal{I}$ fixé, $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement. Soient $(x_n)_n, x$ des applications définies sur $\mathcal{I}$ à valeurs dans X et $(y_n)_n, y$ des applications intégrables définies sur $\mathcal{I}$ à valeurs dans Y. Supposons que

a) $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ *p.p. sur* $\mathcal{I}$;

b) $(y_n)_n$ *converge* $\sigma(L^1_Y(\mathcal{I}), L^\infty_{Y'}(\mathcal{I}))$ *vers* y ;

c) $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$ *p.p. sur* $\mathcal{I}$.

Alors, $y(t) \in F(t, x(t))$ *p.p. sur* $\mathcal{I}$.

1.5.2) Mesurabilité des multi-applications

Supposons que (Ω, Σ) est un espace mesurable.

Définition 1.27 (**multi-application mesurable**).
Soit X un espace métrique complet et $F : \Omega \rightharpoondown X$ une multi-application. On dit que F est Σ-mesurable où simplement mesurable si pour tout ouvert O de X

$$F^{-1}(O) = \{x \in \Omega : F(x) \cap O \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.28.

Soient X un espace métrique séparable complet et $F : \Omega \multimap X$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) F est mesurable ;

ii) pour tout $x \in X$, la fonction

$$\begin{aligned} g_x : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g_x(t) = d_{F(t)}(x) \end{aligned}$$

est mesurable.

Théorème 1.29.

Soient E un espace de Banach séparable, $F : \Omega \times E \multimap E$ une multi-application mesurable et $u : \Omega \to E$ une application mesurable. Alors la multi-application $F(\cdot, u(\cdot))$ est mesurable.

Proposition 1.30.

Soit F une multi-application définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si $F(\cdot)$ est mesurable alors, $co(F(\cdot))$ il est aussi.

Définition 1.31.

Soient X et Y deux espaces métriques et $f : \Omega \times X \to Y$. On dit que f est une application de Carathéodory si

$$\begin{aligned} f_x : \Omega &\longrightarrow Y \\ t &\longmapsto f_x(t) = f(t, x) \end{aligned}$$

est mesurable pour chaque $x \in X$, fixé et l'application

$$\begin{aligned} f_t : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f_t(x) = f(t, x) \end{aligned}$$

est continue sur X pour chaque $t \in \Omega$, fixé.

Proposition 1.32.

Soient X un espace métrique séparable et Y un espace métrique. Soit $f : \Omega \times X \to Y$ une application de Carathéodory, alors f est $\big(\Sigma \otimes \mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)\big)$-mesurable.

1.5.3) Sélections

Définition 1.33 (**sélection mesurable**).

Soient X un espace métrique et $F : \Omega \rightharpoonup Y$ une multi-application. Une fonction $f : \Omega \to X$ est appelée sélection de F si

$$f(x) \in F(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

- *Une sélection f est dite une sélection mesurable si f est mesurable.*

Théorème 1.34 (**Théorème d'existence de sélection mesurable**).

Soit X un espace métrique complet séparable et $F : \Omega \rightharpoonup X$ une multi-application à valeurs fermées non vides. Si F est mesurable alors elle admet au moins une sélection mesurable.

Définition 1.35.

Soient X un espace métrique, E un espace de Banach et $F : X \rightharpoonup E$ une multi-application. Nous définissons la multi-application minimale de F par

$$m\big(F(x)\big) = \min\big\{\|y\|;\, y \in F(x)\big\}.$$

Si E est un espace de Hilbert et F est à valeurs convexes fermées, alors $m\big(F(\cdot)\big)$ est une fonction univoque, appelée sélection minimale, et on note

$$m\big(F(x)\big) = Proj_{F(x)}(0).$$

Proposition 1.36.

Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré avec Σ une tribu μ complet et μ une mesure σ-fini, Y un espace métrique complet séparable, et $F : X \rightharpoonup Y$ une multi-application mesurable à valeurs fermées convexes. Alors, la sélection minimale $m(F(\cdot))$ est mesurable.

1.6) Sous différentiels et cône normaux

Dans cette section, nous donnons quelques résultats sur les sous différentiels et les cônes normaux au sens de Clarke et au sens de Fréchet. Pour plus de détails voir [20, 24, 28, 29, 42].

1.6.1) Sous différentiels

Définition 1.37 (Sous différentiabilité).

Soient H un espace de Hilbert, $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $x_0 \in D(f)$. On appelle sous différentiel de f au point x_0 (au sens de l'analyse convexe) qu'on le note $\partial f(x_0)$, l'ensemble défini par

$$\partial f(x_0) = \big\{x' \in H : f(x) - f(x_0) \geq \langle x', x - x_0 \rangle, \forall x \in H\big\}.$$

- *On dit que f est sous différentiable au point x_0 si et seulement si, $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*
- *Un point $x' \in \partial f(x_0)$ est dit sous gradient de f au point x_0.*

Définition 1.38 (Dérivée directionnelle au sens de Clarke).

Soient H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x \in H$. Alors, la dérivée directionnelle au sens de Clarke de f au point x dans la direction $v \in H$, qu'on le note $f^o(x, v)$ est définie par

$$f^o(x; v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

$\big($*telle que y est un vecteur de H et t est un scalaire positif.*$\big)$

Définition 1.39 (Sous différentiel au sens de Clarke).

Soient H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x \in H$. Alors, le sous différentiel au sens de Clarke de f au point x, noté $\partial^C f(x)$ est défini par

$$\partial^C f(x) = \big\{\xi \in H : \langle \xi, v \rangle \leq f^o(x; v), \ \ \forall\, v \in H\big\}.$$

Proposition 1.40.

Soient H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe localement lipschitzienne au voisinage de $x \in H$, alors $\partial^C f(x)$ coïncide avec $\partial f(x)$.

Définition 1.41 (Sous différentiel au sens de Fréchet).

Soient H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction localement lipschitzienne au voisinage de $x \in H$. Le sous différentiel au sens de Fréchet de f au point x, noté $\partial^F f(x)$, l'ensemble défini par

$$\partial^F f(x) = \big\{\xi \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \ \forall\, y \in B(x, \delta) : \ \langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon \|y - x\|\big\}.$$

Remarquons que nous avons toujours

$$\partial^F f(x) \subset \partial^C f(x), \ \ \forall\, x \in E.$$

Notons aussi que $\partial^F f(x)$ et $\partial^C f(x)$ sont des ensembles convexes fermés.

1.6.2) Cônes normaux

Définition 1.42 (**Cône**).

Soient H un espace de Hilbert et $S \subset H$. On dit que S est un cône si et seulement si

$$\forall\, x \in S,\ \forall\, \lambda \geq 0,\ \lambda\, x \in S.$$

Si de plus S est convexe. On dit que S est un cône convexe.

Définition 1.43 (**Cône normal**).

Soient H un espace de Hilbert , S un sous ensemble convexe non vide de H. On appelle cône normal à S au point x_0, qu'on le note $N_S(x_0)$, le sous différentiel de la fonction indicatrice de S au point $x_0 \in S$, c'est-à-dire

$$N_S(x_0) = \partial\psi_S(x_0) = \big\{x' \in H : \langle x', x - x_0\rangle \leq 0,\ \forall x \in S\big\}.$$

Définition 1.44 (**Cône tangent au sens de Clarke**).

Soient H un espace de Hilbert , S un sous ensemble non vide fermé de H .Le cône tangent au sens de Clarke à S au point $x \in S$ qu'on le note $T_S^C(x)$, est défini par l'ensemble

$$T_S^C(x) = \big\{v \in H :\ d_S^o(x, v) = 0\big\}.$$

Définition 1.45 (**Cône normal au sens de Clarke**).

Soient H un espace de Hilbert , S un sous ensemble non vide fermé de H. Le cône normal au sens de Clarke $N_S^C(x)$ de S au point $x \in S$ est défini par

$$N_S^C(x) = \big\{\xi \in H : \langle \xi, v\rangle \leq 0,\ \forall\, v \in T_S^C(x)\big\}.$$

Il est connu aussi comme le sous différentiel de la fonction indicatrice

$$N_S^C(x) = \partial^C\psi_S(x).$$

Nous avons une autre caractérisation de $N_S^C(x)$ en terme du sous différentiel.

Proposition 1.46.

Soient H un espace de Hilbert , S un sous ensemble non vide fermé de H. Alors Pour tout $x \in H$, on a toujours l'inclusion suivante

$$\partial^C d_S(x) \subset N_S^C(x) \cap \mathbb{B}.$$

Définition 1.47 (**Cône normal au sens de Fréchet**).
Soit S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert H. Le cône normal au sens de Fréchet de S au point $x \in S$, qu'on le note $N_S^F(x)$, est l'ensemble défini par

$$N_S^F(x) = \big\{v \in H, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \langle v, y - x\rangle \leq \varepsilon\|y - x\|, \forall\, y \in B(x,\delta) \cap S\big\}.$$

On a toujours l'inclusion suivante

$$N_S^F(x) \subset N_S^C(x),\ \forall x \in S.$$

Remarque 1.48.
Si S un sous ensemble convexe, alors

$$N_S^C(x) = N_S^F(x) = N_S(x).$$

Proposition 1.49.
Soit S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $x \in S$ on a

1. $\partial^F d_S(x) = N_S^F(x) \cap \mathbb{B}$.
2. *Si* $y \in Proj_S(x)$ *alors,* $x - y \in N_S^F(y)$ *et ainsi* $x - y \in N_S^C(y)$.

1.7) Ensembles sous lisses

Nous introduisons dans ce qui suit, la définition et quelques propriétés des ensembles sous lisses. pour plus de détails voir [16, 37, 47].
Soit S un sous ensemble non vide fermé d'un espace de Hilbert H.

Définition 1.50.
L'ensemble S est dit sous lisse au point $x_0 \in S$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tous $x_1, x_2 \in B(x_0,\delta) \cap S$ et tous $\xi_i \in N_S^C(x_i) \cap \mathbb{B}$ $(i \in \{1,2\})$, on a

$$\langle \xi_1 - \xi_2, x_1 - x_2\rangle \geq -\varepsilon\|x_1 - x_2\|. \tag{1.1}$$

L'ensemble S est dit sous lisse s'il est sous lisse en tout point $x_0 \in S$.
De plus, on dit que S est uniformément sous lisse si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que (1.1) soit vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in S$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et tous $\xi_i \in N_S^C(x_i) \cap \mathbb{B}$ $(i \in \{1,2\})$.

La proposition suivante donne une propriété importante des ensembles sous lisse.

Proposition 1.51.

Si un ensemble fermé S d'un espace de Hilbert H est sous lisse en $x_0 \in S$, alors

$$N_S^C(x_0) = N_S^F(x_0),$$

et

$$\partial^C d_S(x_0) = \partial^F d_S(x_0).$$

Remarque 1.52.

Dans tout ce qui suit, pour les ensembles sous lisses, on adopte les notations $\partial d_S(\cdot)$ et $N_S(\cdot)$ pour le sous différentiel et le cône de Clarke (resp. de Fréchet).

Maintenant, on va donner la définition d'un ensemble equi-uniformément sous lisse.

Définition 1.53.

Soit $(S(q))_{q \in Q}$ une famille d'ensembles fermés de H de paramètre $q \in Q$. Cette famille est dite equi-uniformément sous lisse, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $q \in Q$, l'inégalité (1.1) soit vérifiée pour tous $x_1, x_2 \in S(q)$ satisfaisant $\|x_1 - x_2\| < \delta$ et tous $\xi_i \in N_{S(q)}(x_i) \cap \mathbb{B}$.

La proposition suivante donne une propriété de semi-continuité supérieurement de la fonction support du sous différentiel de la fonction distance aux ensembles sous lisses.

Proposition 1.54.

Soit $\{S(t,x) : (t,x) \in \mathcal{I} \times H\}$ une famille d'ensembles fermés et non vides de H, qui est equi-uniformément sous lisse et soit un réel $\eta \geq 0$. Supposons qu'ils existent des constantes réelles $L_1 \geq 0$, $L_2 \in [0,1[$ telles que pour tous $x_1, x_2, y \in H$ et $t, s \in \mathcal{I}$

$$|d_{S(t,x_1)}(y) - d_{S(s,x_2)}(y)| \leq L_1 |t - s| + L_2 \|x_1 - x_2\|. \tag{1.2}$$

Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout $(t,x,y) \in Gph\, S$, on a $\eta \partial d_{S(t,x)}(y) \subset \eta \mathbb{B}$;

(ii) pour toute suite $(t_n, x_n)_n \subset \mathcal{I} \times H$ convergeant vers (t,x), toute suite $(y_n)_n$ convergeant vers $y \in S(t,x)$ avec $y_n \in S(t_n, x_n)$ et tout $\xi \in H$, on a

$$\limsup_{n \to +\infty} \delta^*\Big(\xi, \eta \partial d_{S(t_n,x_n)}(y_n)\Big) \leq \delta^*\Big(\xi, \eta \partial d_{S(t,x)}(y)\Big).$$

1.8) La presque convexité

La presque convexité est une propriété topologique des ensembles. Notons qu'il existe plusieurs définitions en littérature des ensembles presque convexes et nous nous sommes intéressés par la suivante.

Définition 1.55. *[25]*
Soit X un espace vectoriel. L'ensemble $D \subset X$ est dit presque convexe, si pour tout $\xi \in co(D)$, ils existent deux constantes λ_1 et λ_2, $0 \leq \lambda_1 \leq 1 \leq \lambda_2$, tels que

$$\lambda_1 \xi \in D \quad et \quad \lambda_2 \xi \in D.$$

Exemples. Citant quelques exemples de la presque convexité :

- Tout ensemble convexe est presque convexe. Il suffit de prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
- L'ensemble $D = Fr(Q)$, où Q est un convexe qui ne contient pas l'origine.
- L'ensemble $D = \{0\} \cup Fr(Q)$, où Q est un convexe qui contient l'origine.

1.9) L'ensemble admissible

L'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$ est représente l'ensemble de toutes les solutions possibles du problème dans un temps fini t, qui est défini par (voir[48])

$$Acc_{u_0}(t) = \big\{u \in \mathbb{R}^n : \; u = u(t) \quad \text{telle que} \quad u(\cdot) \in S_t(u_0)\big\},$$

où $S_t(u_0)$ est l'ensemble des trajectoires du problème $(\mathcal{P})$ sur un intervalle $[T_0, t]$ de $[T_0, T]$et défini par

$$S_t(u_0) = \big\{u \in C_{\mathbb{R}^n}([T_0, t]) : u \text{ est une solution du problème } (\mathcal{P})\big\}.$$

On peut écrire aussi l'ensemble admissible sous la forme

$$Acc_{u_0} = \bigcup_{t \in \mathcal{I}} Acc_{u_0}(t).$$

Nous introduisons le concept fondamental suivant de la théorie du contrôle optimal $\mathfrak{T} : Acc_{u_0} \to \mathcal{I}$, telle que

$$\mathfrak{T}(u) = \inf\{t \in \mathcal{I} : u \in Acc_{u_0}(t)\}.$$

Ceci est connu sous le nom de fonction de temps minimal, il est clairement bien défini sur l'ensemble admissible Acc_{u_0}.

1.10) Lemme de Gronwall

Le lemme suivant est une forme discrète du Lemme de Gronwall utile pour nos preuves.

Lemme 1.56. *[38]*
Soient $(y_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites positives et c une constante strictement positive, telles que

$$y_n \leq c + \sum_{0 \leq k < n} g_k y_k, \quad \forall \;\; n \geq 0.$$

Alors,

$$y_n \leq c \exp\left(\sum_{0 \leq k < n} g_k\right), \quad \forall \;\; n \geq 0.$$

Chapitre 2

Existence de solutions pour le processus de la rafle avec une perturbation multivoque

Sommaire

2.1) Indroduction du chapitre

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour un processus de la rafle du premier ordre dépendant du temps et de l'état avec une perturbation multivoque à valeurs convexes et presque convexes. Dans ce résultat, nous avons généralisé les travaux [4, 37] dans le cas ou la perturbation convexe et [4, 5, 25] dans le cas presque convexe pour établir de nouveaux résultats. Tout d'abord, on a utilisé la méthode de rattrapage de Moreau (voir [23, 40]) pour étudier l'existence de solutions et en utilisant ce résultat pour prouver la compacité de l'ensemble admissible du problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)) + G(t,u(t)) \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(t,u(t)) \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0,u_0), \end{cases}$$

où l'ensemble mobile $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est equi-uniformément sous lisse et la perturbation $G : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes et où l'élément de norme minimale satisfait une condition de croissance linéaire.

Dans le deuxième résultat, sous l'hypothèses de la presque convexité de la perturbation G et l'affaiblissement de l'hypothèse de la semi-continuité supérieurement, on a prouvé l'existence d'une solution du problème autonome

$$(\mathcal{PC}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(u(t)) + G(u(t)) \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

Comme application des resultats obtenus, on a prouvé l'existence de solutions du problème de contrôle optimal

$$(\mathcal{PCO}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(u(t)) + h(u(t),z(t)), \text{ p.p. } t \in \mathcal{I} \\ u(t) \in C(u(t)), \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ z(t) \in Z(u(t)), \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

quand l'ensemble $G(u(t)) = h(u(t), Z(u(t)))$ est compact et presque convexe, après nous avons utilisé la fonction de temps minimal pour décrire l'ensemble admissible de ce problème, et $G(u(t))$ les solutions du problème de contrôle $(\mathcal{PCO})$ sont des solutions du $(\mathcal{PC})$, dans lequel les contrôles n'apparaissent pas explicitement, on dit que G est paramétré par des éléments de Z. L'équivalence entre un système de contrôle et l'inclusion différentielle correspondante est l'idée centrale utilisée pour prouver l'existence d'une solution au problème du temps minimal pour $(\mathcal{PCO})$.

2.2) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs convexes

Nous étudions dans cette partie l'existence de solutions et quelques propriétés topologiques de l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P})$ où la perturbation G est à valeurs convexes.

Théorème 2.1.
Soit $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ *pour tout $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble $C(t, x)$ est equi-uniformément sous lisse ;*

$(\mathcal{H}_2)$ *ils existent deux constantes $L_1 \geq 0$ et $L_2 \in [0, 1[$ telles que, pour tous $s, t \in \mathcal{I}$, et tous $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\big|d_{C(t,x_1)}(y) - d_{C(s,x_2)}(y)\big| \leq L_1|t - s| + L_2\big\|x_1 - x_2\big\|.$$

Soit $G : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides, fermées et convexes telle que :

$(\mathcal{H}_3)$ *pour un certain réel positif α,*

$$d_{G(t,x)}(0) \leq \alpha\big(1 + \|x\|\big) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour tout $u_0 \in C\big(T_0, u_0\big)$,

(1) *le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution absolument continue $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$;*

(2) *si la multi-application G est à valeurs bornées on a*

   (a) *pour $\tilde{t} \in \mathcal{I}$ fixé, l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(\tilde{t})$ du problème $(\mathcal{P})$ est compact ;*

   (b) *la multi-application $Acc_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement.*

Preuve.
(**1**) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la partition de $\mathcal{I}$ par les points

$$\mathcal{I}_k^n = [t_k^n, t_{k+1}^n[, \; t_k^n = T_0 + ke_n, \; e_n = \frac{T - T_0}{n}, \; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \; \text{ et } \; \mathcal{I}_n^n = \{t_n^n\} = \{T\}.$$

Pour tout $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, on note par $m(t, x)$ l'élément de norme minimale de l'ensemble fermé convexe $G(t, x)$, c'est-à-dire, $m(t, x) = Proj_{G(t,x)}(0)$.
Par la définition de m et l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$, on trouve

$$m(t, x) \in G(t, x) \quad \text{et} \quad \big\|m(t, x)\big\| \leq \alpha\big(1 + \|x\|\big). \tag{2.1}$$

Etape 1. Construction des "solutions approximatives".

On va construire une suite (x_k^n) qui vérifie $x_0^n = u_0 \in C(t_0^n, x_0^n)$.

Comme l'ensemble $C(t_1^n, x_0^n)$ est fermé, on peut choisir un point

$$x_1^n \in Proj_{C(t_1^n, x_0^n)}(x_0^n + e_n m(t_0^n, x_0^n)), \tag{2.2}$$

c'est-à-dire,

$$x_1^n \in C(t_1^n, x_0^n). \tag{2.3}$$

D'après la relation (2.2) et la Proposition 1.49, on obtient

$$x_0^n + e_n m(t_0^n, x_0^n) - x_1^n \in N_{C(t_1^n, x_0^n)}(x_1^n).$$

D'autre part, par (2.3) on trouve

$$\begin{aligned}
\left\|x_1^n - x_0^n\right\| &= \left\|x_1^n - x_0^n - e_n m(t_0^n, x_0^n) + e_n m(t_0^n, x_0^n)\right\| \\
&\leq \left\|x_1^n - \left(x_0^n + e_n m(t_0^n, x_0^n)\right)\right\| + \left\|e_n m(t_0^n, x_0^n)\right\| \\
&= d_{C(t_1^n, x_0^n)}\Big(x_0^n + e_n m(t_0^n, x_0^n)\Big) + \left\|e_n m(t_0^n, x_0^n)\right\| \\
&\leq d_{C(t_1^n, x_0^n)}(x_0^n) + \left\|e_n m(t_0^n, x_0^n)\right\| + \left\|e_n m(t_0^n, x_0^n)\right\| \\
&\leq \Big|d_{C(t_1^n, x_0^n)}(x_0^n) - d_{C(t_0^n, x_0^n)}(x_0^n)\Big| + 2e_n\left\|m(t_0^n, x_0^n)\right\|.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ et la relation (2.1), on obtient

$$\left\|x_1^n - x_0^n\right\| \leq L_1|t_1^n - t_0^n| + 2\alpha e_n(1 + \|x_0^n\|) = L_1 e_n + 2\alpha e_n(1 + \|x_0^n\|). \tag{2.4}$$

Par induction sur k, on peut construire une suite (x_{k+1}^n). Puisque $C(t_{k+1}^n, x_k^n)$ est fermé, alors on peut trouver

$$x_{k+1}^n \in Proj_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\Big(x_k^n + e_n m\big(t_k^n, x_k^n\big)\Big); \tag{2.5}$$

et donc

$$x_{k+1}^n \in C(t_{k+1}^n, x_k^n). \tag{2.6}$$

Observons que la relation (2.5) et la Proposition 1.49 donnent

$$x_k^n + e_n m\big(t_k^n, x_k^n\big) - x_{k+1}^n \in N_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}(x_{k+1}^n). \tag{2.7}$$

D'autre part, on a par (2.6) l'estimation

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &= \left\|x_{k+1}^n - x_k^n - e_n m(t_k^n, x_k^n) + e_n m(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq \left\|x_{k+1}^n - (x_k^n + e_n m(t_k^n, x_k^n))\right\| + \left\|e_n m(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&= d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\big(x_k^n + e_n m(t_k^n, x_k^n)\big) + \left\|e_n m(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}(x_k^n) + \left\|e_n m(t_k^n, x_k^n)\right\| + \left\|e_n m(t_k^n, x_k^n)\right\| \\
&\leq \Big|d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}(x_k^n) - d_{C(t_k^n, x_{k-1}^n)}(x_k^n)\Big| + 2e_n\left\|m(t_k^n, x_k^n)\right\|.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ et la relation (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq L_1|t_{k+1}^n - t_k^n| + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| + 2\alpha e_n(1 + \|x_k^n\|) \\ &= L_1 e_n + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| + 2\alpha e_n(1 + \|x_k^n\|). \end{aligned}$$

Donc, pour $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on obtient l'estimation

$$\begin{aligned} &\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq L_1 e_n + 2\alpha e_n(1 + \|x_k^n\|) + L_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| \\ &\leq L_1 e_n + 2\alpha e_n(1 + \|x_k^n\|) + L_2\big(L_1 e_n + 2\alpha e_n(1 + \|x_{k-1}^n\|) + L_2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\|\big) \\ &\leq L_1 e_n(1 + L_2) + 2\alpha e_n\big((1 + \|x_k^n\|) + L_2(1 + \|x_{k-1}^n\|)\big) + L_2^2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\| \\ &= L_1 e_n(1 + L_2) + 2\alpha e_n(1 + L_2) + 2\alpha e_n\big(\|x_k^n\| + L_2\|x_{k-1}^n\|\big) + L_2^2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\|. \\ &\leq L_1 e_n\Big(1 + L_2 + L_2^2 + \ldots + L_2^{k-1}\Big) + 2\alpha e_n\Big(1 + L_2 + L_2^2 + \ldots + L_2^{k-1}\Big) \\ &+2\alpha e_n\Big(\|x_k^n\| + L_2\|x_{k-1}^n\| + L_2^2\|x_{k-2}^n\| + \ldots + L_2^{k-1}\|x_1^n\|\Big) + L_2^k\|x_1^n - x_0^n\|. \end{aligned}$$

D'après la relation (2.4) et l'estimation précédente on obtient,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq (L_1 + 2\alpha)e_n\Big(1 + L_2 + L_2^2 + \ldots + L_2^k\Big) + 2\alpha e_n\Big(\|x_k^n\| + L_2\|x_{k-1}^n\| + L_2^2\|x_{k-2}^n\| \\ &+ \ldots + L_2^k\|x_0^n\|\Big) \\ &= (L_1 + 2\alpha)e_n\sum_{j=0}^{k} L_2^j + 2\alpha e_n\sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j}\|x_j^n\|, \end{aligned}$$

puisque $L_2 \in [0, 1[$, on trouve

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}e_n + 2\alpha e_n\sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j}\|x_j^n\|. \tag{2.8}$$

D'autre part, par (2.8) on a

$$\begin{aligned} \|x_k^n - x_0^n\| &\leq \|x_k^n - x_{k-1}^n\| + \|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\| + \ldots + \|x_1^n - x_0^n\| \\ &\leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}e_n + 2\alpha e_n\sum_{j=0}^{k-1} L_2^{k-j}\|x_j^n\| + \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}e_n + 2\alpha e_n\sum_{j=0}^{k-2} L_2^{k-j}\|x_j^n\| \\ &+ \ldots + e_n(L_1 + 2\alpha) + 2\alpha e_n\|x_0^n\| \\ &\leq \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}\, e_n(k-1) + 2\alpha e_n\|x_0^n\|\sum_{j=0}^{k-1} L_2^j + 2\alpha e_n\|x_1^n\|\sum_{j=0}^{k-1} L_2^j \\ &+ 2\alpha e_n\|x_2^n\|\sum_{j=0}^{k-1} L_2^j + \ldots + 2\alpha e_n\|x_{k-1}^n\|\sum_{j=0}^{k-1} L_2^j \\ &= \frac{L_1 + 2\alpha}{1 - L_2}\frac{T}{n}(k-1) + 2\alpha e_n\Big(\|x_0^n\| + \|x_1^n\| + \ldots + \|x_{k-1}^n\|\Big)\sum_{j=0}^{k-1} L_2^j. \end{aligned}$$

Comme $L_2 \in [0,1[$, on peut écrire

$$\|x_k^n - x_0^n\| \leq T\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2} + \frac{2\alpha e_n}{1-L_2}\sum_{j=0}^{k-1}\|x_j^n\|.$$

Donc,

$$\|x_k^n\| \leq \|x_0^n\| + T\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2} + \frac{2\alpha e_n}{1-L_2}\sum_{j=0}^{k-1}\|x_j^n\|.$$

Par le Lemme 1.56, on aura pour tout $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

$$\|x_k^n\| \leq \left(\|x_0^n\| + T\frac{L_1+2\alpha}{1-L_2}\right)\exp\left(\frac{2\alpha T}{1-L_2}\right) =: \beta. \tag{2.9}$$

Etape 2. Construction de la suite $\left(\mathbf{u_n}(\cdot)\right)_{\mathbf{n}\geq \mathbf{0}}$.

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathcal{I}_k^n$, $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, on définit

$$u_n(t) = \frac{t_{k+1}^n - t}{e_n}\, x_k^n + \frac{t-t_k^n}{e_n}\, x_{k+1}^n.$$

Remarquant que pour tout $t \in [t_k^n, t_{k+1}^n]$,

$$u_n(t_k^n) = \frac{t_{k+1}^n - t_k^n}{e_n}\, x_k^n + \frac{t_k^n - t_k^n}{e_n}\, x_{k+1}^n = x_k^n;$$

et

$$u_n(t_{k+1}^n) = \frac{t_{k+1}^n - t_{k+1}^n}{e_n}\, x_k^n + \frac{t_{k+1}^n - t_k^n}{e_n}\, x_{k+1}^n = x_{k+1}^n.$$

Pour tout $t \in]t_k^n, t_{k+1}^n[$,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}. \tag{2.10}$$

D'après les relations (2.6), (2.7), (2.10) et la définition de $\left(u_n(\cdot)\right)_n$, on trouve

$$u_n(t_{k+1}^n) \in C(t_{k+1}^n, u_n(t_k^n)); \tag{2.11}$$

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(t_{k+1}^n, u_n(t_k^n))}(u_n(t_{k+1}^n)) + m(t_k^n, u_n(t_k^n)) \quad \text{p.p. } \ t \in \mathcal{I}_k^n. \tag{2.12}$$

D'autre part, par (2.8), on a

$$\frac{\|x_{k+1}^n - x_k^n\|}{e_n} \leq \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2} + 2\alpha\sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j}\|x_j^n\|,$$

et par la relation (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{k+1}^n - x_k^n\|}{e_n} &\leq \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2} + 2\alpha\sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j}\beta \\ &\leq \frac{L_1+2\alpha}{1-L_2} + 2\alpha\beta\sum_{j=0}^{k} L_2^{k-j}.\end{aligned}$$

Puisque $L_2 \in [0,1[$, on trouve

$$\frac{\|x_{k+1}^n - x_k^n\|}{e_n} \leq \frac{1}{1-L_2}\Big(L_1 + 2\alpha + 2\alpha\beta\Big). \tag{2.13}$$

La relation (2.10) et (2.13) donnent

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{1}{1-L_2}\Big(L_1 + 2\alpha + 2\alpha\beta\Big) =: \gamma. \tag{2.14}$$

Pour tout $t \in \mathcal{I}$ et chaque $n \geq 1$, on définit deux fonctions $\delta_n, \theta_n : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_k^n & \text{si} \quad t \in \mathcal{I}_k^n, \\ t_{n-1}^n & \text{si} \quad t = T, \end{cases}$$

et

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_{k+1}^n & \text{si} \quad t \in \mathcal{I}_k^n; \\ T & \text{si} \quad t = T. \end{cases}$$

Observons que

$$\lim_{n\to+\infty} \big|\delta_n(t) - t\big| = \lim_{n\to+\infty} \big|\theta_n(t) - t\big| = 0. \tag{2.15}$$

En effet, pour tout $t \in \mathcal{I}_k^n$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a

$$|\delta_n(t) - t| = t - \delta_n(t) = t - t_k^n \leq t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T - T_0}{n} \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

Et nous avons

$$|\theta_n(t) - t| = \theta_n(t) - t = t_{k+1}^n - t \leq t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T - T_0}{n} \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

Pour tout $t = T$

$$|\delta_n(t) - t| = |t_{n-1}^n - t| \leq T - T = 0 \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

de même

$$|\theta_n(t) - t| = T - T = 0 \longrightarrow 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

De plus, les définitions de $\delta_n(\cdot)$ et $\theta_n(\cdot)$ combinées avec (2.1), (2.9), (2.11) et (2.12) donnent

$$u_n\big(\theta_n(t)\big) \in C\big(\theta_n(t), u_n\big(\delta_n(t)\big)\big) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{2.16}$$

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\left(u_n(\theta_n(t))\right) + m(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))) \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}, \tag{2.17}$$

$$\big\|m(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))\big\| \leq \alpha(1+\beta) =: \eta \quad \forall t \in \mathcal{I}. \tag{2.18}$$

Etape 3. Convergence des suites.

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathcal{I}$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| &= \Big\|\frac{t_{k+1}^n - \theta_n(t)}{e_n}\, x_k^n + \frac{\theta_n(t) - t_k^n}{e_n}\, x_{k+1}^n - \frac{t_{k+1}^n - t}{e_n}\, x_k^n - \frac{t - t_k^n}{e_n}\, x_{k+1}^n\Big\| \\
&= \Big\|\frac{t_{k+1}^n - \theta_n(t) - t_{k+1}^n + t}{e_n} x_k^n + \frac{\theta_n(t) - t_k^n - t + t_k^n}{e_n} x_{k+1}^n\Big\| \\
&= \Big\|\frac{t_\theta_n(t)}{e_n} x_k^n + \frac{\theta_n(t) - t}{e_n} x_{k+1}^n\Big\| \\
&= \Big\|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\big(\theta_n(t) - t\big)\Big\| \\
&= \Big\|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\Big\||\theta_n(t) - t|. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

D'après les relations (2.10), (2.14) et (2.19), on trouve

$$\big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| \leq \|\dot{u}_n(t)\||\theta_n(t) - t| \leq \gamma|\theta_n(t) - t|, \qquad (2.20)$$

et par (2.15), on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| = 0, \qquad (2.21)$$

De la même manière, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\big\| = 0. \qquad (2.22)$$

A partir de la relation (2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)\| - \|u_n(\theta_n(t))\| &\leq \big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| \\
&\leq \gamma\ |\theta_n(t) - t| \\
&\leq \gamma\ e_n \\
&\leq \gamma\ (T - T_0).
\end{aligned}$$

On utilise (2.9) et l'inégalité précédente pour trouver

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)\| &\leq \gamma(T - T_0) + \|u_n(\theta_n(t))\| \\
&= \gamma(T - T_0) + \|x_{k+1}^n\| \\
&\leq \gamma(T - T_0) + \beta.
\end{aligned}$$

On conclut que pour tout $t \in \mathcal{I}$, $(u_n(t))_n$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, pour tous $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ tels que $t_1 \leq t_2$, et par relation (2.14) on a

$$\big\|u_n(t_2) - u_n(t_1)\big\| = \Big\|\int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_n(s)\ ds\Big\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \big\|\dot{u}_n(s)\big\|\ ds \leq \gamma(t_2 - t_1).$$

Donc la suite des fonctions $(u_n(\cdot))_n$ est equi-continue. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.16), la suite $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compact dans $C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ et comme

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \gamma \quad p.p.\, t \in \mathcal{I},$$

par la conséquence d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.17), on conclut qu'il existe une sous suite de $(u_n(\cdot))_n$ (notée par $(u_n(\cdot))_n$) qui converge vers une fonction absolument continue $u(\cdot)$ au sens :

- $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot) \in C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$;
- $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}))$ vers $z(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ avec

$$\|z(t)\| \leq \gamma \quad p.p.t \in \mathcal{I}.$$

Montrons que $z = \dot{u}$ p.p. En fixant $t \in \mathcal{I}$ et prenant n'importe quel $\xi \in \mathbb{R}^n$, la convergence faible de $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^{T} \langle 1\!\mathrm{I}_{[T_0,t]}(s)\, \xi, \dot{u}_n(s)\rangle\, ds = \int_{T_0}^{T} \langle 1\!\mathrm{I}_{[T_0,t]}(s)\, \xi, z(s)\rangle\, ds$$

ce qui équivalent à

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \xi, u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\, ds\rangle = \langle \xi, u_0 + \int_{T_0}^{t} z(s)\, ds\rangle.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\, ds = \int_{T_0}^{t} z(s)\, ds,$$

puisque $u_n(\cdot)$ est une fonction absolument continue, on obtient

$$u(t) - u_0 = \lim_{n\to+\infty} \big(u_n(t) - u_0\big) = \lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\, ds = \int_{T_0}^{t} z(s)\, ds,$$

alors, $u(\cdot)$ est une fonction absolument continue et $z = \dot{u}$ p.p.
On pose

$$\big(m(\delta_n(\cdot), u_n(\delta_n(\cdot))\big)_n = \big(h_n(\cdot)\big)_n.$$

La suite des fonctions $\big(h_n(\cdot)\big)_{n\geq 1}$ est mesurable car $G(\cdot,\cdot)$ est semi-continue supérieurement et par la relation (2.18),

$$\|h_n(t)\| \leq \eta \quad p.p.\, t \in \mathcal{I},$$

d'où $\big(h_n(\cdot)\big)_{n\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ et donc il existe une sous suite (notée par $(h_n(\cdot))_{n\geq 1}$) qui converge $\sigma\big(L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ vers une fonction $h(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$. Alors, pour tout $v_1(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle h_n(\cdot), v_1(\cdot)\rangle = \langle h(\cdot), v_1(\cdot)\rangle.$$

Soit $v_2(\cdot) \in L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$, puisque $L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}) \subset L^{1}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$, on conclut par l'équation précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle h_n(\cdot), v_2(\cdot)\rangle = \langle h(\cdot), v_2(\cdot)\rangle,$$

qui implique que la suite $\big(h_n(\cdot)\big)_{n\geq 1}$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^{\infty}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}))$ vers la fonction $h(\cdot)$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ et qui vérifie

$$\|h(t)\| \leq \eta \ \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}. \tag{2.23}$$

Etape 4. Montrons que u est une solution du problème $(\mathcal{P})$.

Pour tout $t \in \mathcal{I}$ et pour tout $n \geq 1$, d'après $(\mathcal{H}_2)$ et (2.16), on a

$$\begin{aligned} d_{C(t,u(t))}(u_n(t)) &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + d_{C(t,u(t))}(u_n(\theta_n(t))) \\ &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + \Big|d_{C(t,u(t))}(u_n(\theta_n(t))) - d_{C(\theta_n(t),u(\delta_n(t)))}(u_n(\theta_n(t)))\Big| \\ &\leq \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| + L_1|\theta_n(t) - t| + L_2\|u_n(\delta_n(t)) - u(t)\|. \end{aligned}$$

Utilisant (2.15), (2.21) et (2.22), par passage à la limite dans l'inégalité précédente on obtient

$$d_{C(t,u(t))}(u_n(t)) \longrightarrow 0, \ \text{ si } \ n \to +\infty,$$

donc

$$d_{C(t,u(t))}(u(t)) = 0, \ \ \forall t \in \mathcal{I}.$$

Puisque $C(\cdot,\cdot)$ est à valeurs fermées, on trouve

$$u(t) \in C(t, u(t)) \ \ \ \forall t \in \mathcal{I}.$$

Par les relations (2.14) et (2.18) on a

$$\big\| - \dot{u}_n(t) + h_n(t)\big\| \leq \gamma + \eta =: M,$$

c'est-à-dire

$$- \dot{u}_n(t) + h_n(t) \in M\mathbb{B} \ \ \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}. \tag{2.24}$$

D'après la relation (2.17) et (2.24), on conclut que

$$-\dot{u}_n(t) + h_n(t) \in N_{C(\theta_n(t),u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\theta_n(t))\big) \cap M\mathbb{B} \ \ \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}.$$

Par la Propositions 1.49, on a

$$- \dot{u}_n(t) + h_n(t) \in M\partial d_{C\left(\theta_n(t),u_n(\delta_n(t))\right)}\big(u_n(\theta_n(t))\big) \ \ \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}. \tag{2.25}$$

D'autre part,

$$h_n(t) \in G\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big) \ \ \ \forall t \in \mathcal{I}. \tag{2.26}$$

D'après l'étape 3, la suite $\big(-\dot{u}_n + h_n, h_n\big)$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers $\big(-\dot{u}+h, h\big)$, par le Lemme de Mazur, il existe une sous suite $\big(\xi_n, \zeta_n\big)_n$ qui converge fortement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers $\big(-\dot{u}+h, h\big)$ tel que

$$\xi_n \in co\{-\dot{u}_q + h_q, \quad q \geq n\}, \tag{2.27}$$

et

$$\zeta_n \in co\{h_q, \quad q \geq n\}. \tag{2.28}$$

On peut extraire une sous suite de $\big(\xi_n, \zeta_n\big)_n$ qui converge presque partout vers $\big(-\dot{u}+h, h\big)$. Donc, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $N \subset \mathcal{I}$, tel que pour tout $t \in \mathcal{I}\backslash N$

$$-\dot{u}(t) + h(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\xi_q(t), \quad q \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{-\dot{u}_q(t) + h_q(t), \quad q \geq n\}, \tag{2.29}$$

et

$$h(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\zeta_q(t), \quad q \geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{h_q(t), \quad q \geq n\}. \tag{2.30}$$

Fixons $t \in \mathcal{I}\backslash N$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$. D'après les relations (2.25), on a

$$\langle \mu, -\dot{u}_n(t) + h_n(t)\rangle \leq \delta^*\Big(\mu, M\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big). \tag{2.31}$$

Alors, pour chaque $n \geq 0$ et tout $t \in \mathcal{I}\backslash N$, à partir de (2.27) on a par le Théorème 1.14

$$\langle \mu, \xi_k(t)\rangle \leq \sup_{q\geq n}\langle \mu, -\dot{u}_q(t) + h_q(t)\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

en prenant la limite dans l'inégalité précédente quand $k \to +\infty$, on aura par (2.31)

$$\begin{aligned}\langle \mu, -\dot{u}(t) + h(t)\rangle &\leq \sup_{q\geq n}\langle \mu, -\dot{u}_q(t) + h_q(t)\rangle \\ &\leq \sup_{q\geq n} \delta^*\Big(\mu, M\partial d_{C(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big)\end{aligned}$$

qui assure que

$$\langle \mu, -\dot{u}(t) + h(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^*\Big(\mu, M\partial d_{C\big(\theta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big)}\big(u_n(\theta_n(t))\big)\Big).$$

Utilisons la Proposition 1.54, il vient que

$$\langle \mu, -\dot{u}(t) + h(t)\rangle \leq \delta^*\Big(\mu, M\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)\Big).$$

Comme l'ensemble $M\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)$ est convexe fermé, on conclut que

$$-\dot{u}(t) + h(t) \in M\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in \mathcal{I},$$

d'après la Proposition 1.49, on obtient

$$-\dot{u}(t)+h(t)\in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad \text{p.p. } t\in\mathcal{I}. \tag{2.32}$$

D'autre part, laes relations (2.26) et (2.30) donnent

$$\langle\mu,h_n(t)\rangle\leq\delta^*\Big(\mu,G(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t))\Big),$$

on obtient par (2.28)

$$\langle\mu,\zeta_k(t)\rangle\leq\sup_{q\geq n}\langle\mu,h_q(t)\rangle,\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

par passage à la limite quand $k\to+\infty$ et par (2.26) on a

$$\langle\mu,h(t)\rangle\leq\sup_{q\geq n}\langle\mu,h_q(t)\rangle\leq\sup_{q\geq n}\delta^*\Big(\mu,G(\delta_q(t),u_q(\delta_q(t))\Big),$$

qui implique que

$$\langle\mu,h(t)\rangle\leq\limsup_{n\to+\infty}\delta^*\Big(\mu,G(\delta_n(t),u_n(\delta_n(t))\Big).$$

la semi-continuité supérieurement de $G(\cdot,\cdot)$ donne

$$\langle\mu,h(t)\rangle\leq\delta^*\Big(\mu,G(t,u(t))\Big),$$

et comme G est à valeurs convexes fermées, on obtient

$$h(t)\in G\big(t,u(t)\big). \tag{2.33}$$

Par les relations (2.32) et (2.33) on conclut que

$$\dot{u}(t)\in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)+G\big(t,u(t)\big) \quad \text{p.p. } \; t\in\mathcal{I}.$$

(**2**) (a) Avant de donner la démonstration de la compacité de l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(\tilde{t})$ il est indispensable de montrer que l'ensemble de trajectoire

$$S_{\tilde{t}}(u_0)=\Big\{u\in C_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}]) : u \text{ est une solution absolument continue de } (\mathcal{P})\Big\}$$

est compact pour tout $\tilde{t}\in\mathcal{I}$.

D'après la partie 1, le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution sur $\mathcal{I}$, donc l'ensemble $S_{\tilde{t}}(u_0)\neq\emptyset$.

Soit $(u_n(\cdot))_n$ une suite des trajectoires de $S_{\tilde{t}}(u_0)$, alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n(\cdot)$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{P})$, vérifiant

$$\big\|\dot{u}_n(t)\big\|\leq\gamma \quad \text{p.p. } \; t\in[T_0,\tilde{t}]. \tag{2.34}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|u_n(t)\| &= \|u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\| \, ds \\
&\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{t} \|\dot{u}_n(s)\| \, ds \\
&\leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{t} \gamma \, ds \\
&= \|u_0\| + \gamma(t - T_0) \\
&\leq \|u_0\| + \gamma(\tilde{t} - T_0) =: \omega. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Donc, $(u_n(t))_n$ est relativement compact dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, pour tout $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \in [T_0, \tilde{t}]$ telle que $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}_2$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_n(\tilde{t}_1) - u_n(\tilde{t}_2)\| &= \left\| \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \dot{u}_n(s) \, ds \right\| \\
&\leq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{u}_n(s)\| ds \\
&\leq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \gamma \, ds \\
&\leq \gamma(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1)
\end{aligned}$$

alors, la suite des fonctions $(u_n(\cdot))_n$ est equi-continue sur $[T_0, \tilde{t}]$. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà, on conclut que $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tilde{t}])$. Et par la relation (2.34), on déduit qu'il existe une sous suite $(u_n(\cdot))_n$ $\big($notée aussi par $(u_n(\cdot))_n\big)$ qui converge uniformément vers une fonction absolument continue $u(\cdot)$ dans $[T_0, \tilde{t}]$ et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tilde{t}]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tilde{t}]))$ vers $\dot{u}(\cdot)$ telle que

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \gamma \ \text{ p.p. } \ t \in [T_0, \tilde{t}].$$

De plus, nous avons en vertue de la relation (2.34) et en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lim_{n \to +\infty} u_n(t) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \Big(u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s) ds \Big) \\
&= u_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s) ds.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la fonction $(f_n)_n$ où $f_n : [T_0, \tilde{t}] \to \mathbb{R}^n$ est une sélection mesurable de la multi-application $G(\cdot, u_n(\cdot))$. Comme G est à valeurs bornées on peut trouver $m_1 > 0$ telle que

$$\|f_n(t)\| \leq m_1 \quad \forall t \in [T_0, \tilde{t}], \qquad (2.36)$$

alors $(f_n)_n$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$, Donc elle admet une sous suite qui converge $\sigma\big(L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}]), L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])\big)$ vers une fonction f dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$. Par conséquence, pour tout $\xi_1(\cdot)$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n(\cdot),\xi_1(\cdot)\rangle = \langle f(\cdot),\xi_1(\cdot)\rangle. \tag{2.37}$$

Soit $\xi_2(\cdot)\in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$, puisque $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])\subset L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$, par la relation (2.37) on a

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n(\cdot),\xi_2(\cdot)\rangle = \langle f(\cdot),\xi_2(\cdot)\rangle,$$

c'est-à-dire, la suite $(f_n)_n$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}]))$ vers une fonction f dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$ telle que

$$\|f(t)\|\le m_1 \quad \forall t\in[T_0,\tilde{t}].$$

Montrons maintenant que la limite $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$.
Commme $(u_n)_n$ est une suite de solutions du problème $(\mathcal{P})$ et

$$f_n(t)\in G(t,u_n(t)) \quad \forall t\in[T_0,\tilde{t}], \tag{2.38}$$

on a l'inclusion suivante

$$-\dot{u}_n(t)+f_n(t)\in N_{C(t,u_n(t))}\,(u_n(t)) \;\text{ p.p. } t\in[T_0,\tilde{t}]. \tag{2.39}$$

D'après (2.34) et (2.36), on obtient pour presque tout $t\in[T_0,\tilde{t}]$

$$\|\dot{u}_n(t)-f_n(t)\|\le\|\dot{u}_n(t)\|+\|f_n(t)\|\le\gamma+m_1 =: m_2. \tag{2.40}$$

Les relations (2.39) et (2.40) donnent

$$-\dot{u}_n(t)+f_n(t)\in N_{C(t,u_n(t))}\,(u_n(t))\cap m_2\mathbb{B} \;\text{ p.p. } t\in[T_0,\tilde{t}].$$

Par la Proposition 1.49, on obtient

$$-\dot{u}_n(t)+f_n(t)\in m_2\partial d_{(t,u_n(t))}(u_n(t)) \;\text{ p.p. }\; t\in[T_0,\tilde{t}]. \tag{2.41}$$

Puisque $\big(-\dot{u}_n+f_n,f_n\big)_n$ est converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$ vers $\big(-\dot{u}+f,f\big)$, alors par le Théorème 1.18, il existe une suite $(x_n(\cdot),y_n(\cdot))_n$ telle que

$$x_n\in co\{-\dot{u}_m+f_m,\;\; m\ge n\} \quad \text{et} \quad y_n\in co\{f_m,\;\; m\ge n\} \tag{2.42}$$

et $(x_n,y_n)_n$ converge fortement vers $\big(-\dot{u}+f,f\big)$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}([T_0,\tilde{t}])$. On peut alors extraire une sous suite de $(x_n(\cdot),y_n(\cdot))_n$ qui converge presque partout vers $\big(-\dot{u}+f,f\big)$. Donc, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $A\subset[T_0,\tilde{t}]$ tel que pour tout $t\in[T_0,\tilde{t}]\backslash A$

$$\begin{aligned}
-\dot{u}(t)+f(t) &\in \bigcap_{n\ge0}\overline{\{x_m(t),\;\; m\ge n\}}\\
&\subset \bigcap_{n\ge0}\overline{co}\{\dot{u}_m(t)+f_m(t),\;\; m\ge n\},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

et

$$\begin{aligned} f(t) &\in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{y_m(t), \quad m \geq n\}} \\ &\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{f_m(t), \quad m \geq n\}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Fixons $t \in [T_0, \tilde{t}]\backslash A$ et $z \in \mathbb{R}^n$, par les relations (2.41) et (2.43) on obtient

$$\langle z, -\dot{u}(t) + f(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^*\Big(z, m_2\partial d_{C(t,u_n(t))}\big(u_n(t)\big)\Big).$$

La Proposition 1.54 donne,

$$\langle z, -\dot{u}(t) + f(t)\rangle \leq \delta^*\Big(z, m_2\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)\Big).$$

Comme la multi-application $t \to m_2\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)$ est à valeurs convexes fermées, on obtient

$$-\dot{u}(t) + f(t) \in M\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big),$$

d'après la Proposition 1.49, on obtient

$$-\dot{u}(t) + f(t) \in N_{C(t,u(t))}(u(t)) \quad \text{p.p. } t \in \mathcal{I}. \tag{2.45}$$

De plus, la relation (2.44) donne

$$\langle z, f(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^*\Big(z, G(t, u_n(t))\Big).$$

La semi-continuité supérieurement de G donne

$$\langle z, f(t)\rangle \leq \delta^*\Big(z, G(t, u(t))\Big),$$

puisque G est à valeurs convexes fermées, on obtient

$$f(t) \in G\big(t, u(t)\big). \tag{2.46}$$

Par (2.45) et (2.46), on conclut que

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) + G\big(t, u(t)\big) \quad \text{p.p. } \ t \in [T_0, \tilde{t}].$$

Donc $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{P})$ sur l'interval $[T_0, \tilde{t}]$, alors l'ensemble de trajectoire $S_{\tilde{t}}(u_0)$ est compact.

Montrons maintenant que $Acc_{u_0}(\tilde{t})$ est compacte dans $\mathbb{R}^n$.
Soit (x_n) une suite de $Acc_{u_0}(\tilde{t})$ converge vers $x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors, il existe une suite $(u_n) \in S_{\tilde{t}}(u_0)$ telle que $x_n = u_n(\tilde{t})$.

Comme la suite (u_n) est dans l'ensemble compact $S_{\tilde{t}}(u_0)$, on peut extraire une sous suite (notée par (u_n)) converge uniformément vers $u \in S_{\tilde{t}}(u_0)$ avec

$$u(\tilde{t}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tilde{t}) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

donc $u(\tilde{t}) = x_0$, et comme $u \in S_{\tilde{t}}(u_0)$ on obtient $x_0 \in Acc_{u_0}(\tilde{t})$, d'où $Acc_{u_0}(\tilde{t})$ est compact.

(b) Montons que la multi-application $\mathbf{Acc_{u_0}}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement dans $\mathcal{I}$.

Soient $t \in \mathcal{I}$ et V un voisinage ouvert de $Acc_{u_0}(t)$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe V_0 un voisinage ouvert de l'origine où

$$Acc_{u_0}(t) + V_0 \subset V$$

notons par $S_t(u_0)$ l'ensemble des solutions du problème $(\mathcal{P})$ sur $\mathcal{I}$, d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, il existe $\delta > 0$ tel que si $t' > t$ et $\mid t - t' \mid < \delta$: $u(t') - u(t) \in V_0$ pour tout $u(\cdot) \in S_t(u_0)$, comme $u(t) \in Acc_{u_0}(t)$

$$u(t') \in u(t) + V_0 \subset V \quad \forall\, u(\cdot) \in S_t(u_0)$$

d'où

$$Acc_{u_0}(t) \subset V \quad \forall t' \in B(t, \delta)$$

qui montre par définition que $Acc_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement.

■

2.3) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs presque convexes

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions du problème $(\mathcal{PC})$ tel que G est une multi-application à valeurs presque convexeS et avec une hypothèse plus faible sur la semi-continuité supérieurement. On étudie aussi la relation entre la solution du problème $(\mathcal{PC})$ et du problème $(\mathcal{PC}_{co})$. Nous commençons par le lemme préliminaire suivant.

Lemme 2.2.
Soit $G : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application mesurable à valeurs non vides compactes et presque convexes, $u_0 \in C(T_0)$ et $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue. Supposons que f une fonction Lebesgue intégrable. Alors, il existe deux fonctions intégrables $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définie dans $\mathcal{I}$, satisfaitsant pour tout $t \in \mathcal{I}$

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \leq \lambda_2(t)$$

et

$$\lambda_1(t)\, f(t) \in G\big(u(t)\big) \quad et \quad \lambda_2(t)\, f(t) \in G\big(u(t)\big). \tag{2.47}$$

Preuve.
Comme $G(u(t))$ est presque convexe pour tout $t \in \mathcal{I}$, alors, ils existent deux muli-applications à valeurs non vides $\Lambda_1(\cdot)$ et $\Lambda_2(\cdot)$ telle que

$$\begin{aligned} &\Lambda_1(\cdot) : \mathcal{I} \rightharpoonup [0,1] \\ &\qquad t \rightharpoonup \Lambda_1(t) = \big\{\lambda_1 \in [0,1] :\ \lambda_1 f(t) \in G(u(t))\big\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\Lambda_2(\cdot) : \mathcal{I} \rightharpoonup [1,+\infty[\\ &\qquad t \rightharpoonup \Lambda_2(t) = \big\{\lambda_2 \in [1,+\infty[:\ \lambda_2 f(t) \in G(u(t))\big\} \end{aligned}$$

Considérons $Gph(\Lambda_1)$ le graphe de Λ_1 défini par

$$\begin{aligned} Gph(\Lambda_1) &= \big\{(t,\lambda_1) \in \mathcal{I} \times [0,1] :\ \lambda_1 f(t) \in G(u(t))\big\} \\ &= \big\{(t,\lambda_1) \in \mathcal{I} \times [0,1] :\ d_{G(u(t))}\big(\lambda_1 f(t)\big) = 0\big\} \\ &= \varphi^{-1}\big(\{0\}\big) \cap \big(\mathcal{I} \times [0,1]\big), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{I} \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,\lambda_1) &\longmapsto \varphi(t,\lambda_1) = d_{G(u(t))}\big(\lambda_1 f(t)\big) \end{aligned}$$

montrons que φ est mesurable : pour notre démonstration il suffit de vérifier que φ est de Carathéodory.

On a pour tout t fixé

$$\begin{aligned}\left|\varphi_t(\lambda_1^1) - \varphi_t(\lambda_1^2)\right| &= \left|d_{G(u(t))}\big(\lambda_1^1 f(t)\big) - d_{G(u(t))}\big(\lambda_1^2 f(t)\big)\right| \\ &\leq \left\|\lambda_1^1 m(u(t)) - \lambda_1^2 f(t)\right\| \\ &\leq \|f(t)\||\lambda_1^1 - \lambda_1^2|\end{aligned}$$

puisque f dans L^1, alors φ_t est lipschitz et donc $\varphi_t(\cdot)$ est continue.

Maintenant pour tout $\lambda_1 \in [0,1]$ fixé,

$$\varphi_{\lambda_1}(t) = d_{G\circ u(t)}(\lambda_1 f(t))$$

on a G est mesurable et u est mesurable donc $G \circ u$ est mesurable.

Posons

$$g(t,\lambda_1) = \varphi_{\lambda_1}(t) = d_{G\circ u(t)}(\lambda_1 f(t)).$$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, pour tout t fixé on a $\lambda_1 \mapsto g(t,\lambda_1)$ est continue et pour tout λ_1 fixé, on a $t \mapsto g(t,\lambda_1)$ est mesurable donc $(t,\lambda_1) \mapsto g(t,\lambda_1) = d_{G\circ u(t)}(\lambda_1)$ est une fonction Carathéodory et alors g est mesurable.

Soit

$$\begin{aligned} h : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto h(t) = \big(t, \lambda_1 f(t)\big)\end{aligned}$$

h une application mesurable car c'est le (produit cartésien de deux fonctions mesurables)

$$\begin{aligned} g\circ h : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(h(t)) = g\big(t, \lambda_1 f(t)\big) = d_{G\circ u(t)}(\lambda_1 f(t))\end{aligned}$$

g est mesurable et h est mesurable, alors $g \circ h$ l'est aussi.

Or $(g\circ h)(t) = \varphi_{\lambda_1}(t)$, donc φ_{λ_1} est mesurable, alors φ est Carathéodory et donc mesurable. Alors l'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction φ est mesurable, de plus $\mathcal{I} \times [0,1]$ est mesurable, d'où $Gph(\Lambda_1)$ est mesurable. Par conséquent, $\Lambda_1(\cdot)$ est une multi-application mesurable à valeurs bornées, donc il existe une sélection intégrable $\lambda_1(\cdot) \in \Lambda_1(\cdot)$ telle que

$$0 \leq \lambda_1(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

et

$$\lambda_1(t) f(t) \in G(u(t)) \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

On utilise le même raisonnement pour montrer que $\Lambda_2(\cdot)$ est mesurable. Donc, considérons le graphe de Λ_2 défini par

$$\begin{aligned} Gph(\Lambda_2) &= \big\{(t,\lambda_2) \in \mathcal{I} \times [1,+\infty[:\ \lambda_2 f(t) \in G(u(t))\big\} \\ &= \big\{(t,\lambda_2) \in \mathcal{I} \times [1,+\infty[:\ d_{G(u(t))}\big(\lambda_2 f(t)\big) = 0\big\} \\ &= \varphi^{-1}\big(\{0\}\big) \cap \big(\mathcal{I} \times [1,+\infty[\big). \end{aligned}$$

Donc Λ_2 est mesurable, comme $G(\cdot)$ est à valeurs bornées, alors $\Lambda_2(\cdot)$ est à valeurs bornées aussi, donc, elle admet une sélection intégrable $\lambda_2(\cdot)$ définie dans $\mathcal{I}$ telle que

$$\lambda_2(t) \geq 1, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

et

$$\lambda_2(t) f(t) \in G(u(t)).$$

■

Maintenant, nous présentons le théorème essentiel de cette section.

Théorème 2.3.
Soit $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant :

($\mathcal{A}_1$) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $C(x)$ est equi-uniformément sous lisse ;*

($\mathcal{A}_2$) *il existe une constante $L_2 \in [0,1[$ telle que, pour tous $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$*

$$\big|d_{C(x_1)}(y) - d_{C(x_2)}(y)\big| \leq L_2 \big\|x_1 - x_2\big\|.$$

Soit $G : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application mesurable à valeurs compactes et presque convexes telles que :

($\mathcal{A}_3$) *la multi-application $co(G(\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$;*

($\mathcal{A}_4$) *pour un certain réel $\alpha \geq 0$,*

$$d_{co(G(x))}(0) \leq \alpha(1 + \|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donc, pour tout $u_0 \in C\big(u_0\big)$,

1. *le problème ($\mathcal{PC}$) admet au mois une solution absolument continue ;*
2. *pour $\tilde{t} \in \mathcal{I}$ fixé, l'ensemble admissible de ($\mathcal{PC}$) à $\tilde{t}$, $Acc_{u_0}(\tilde{t})$, coïncide avec $Acc^{co}_{u_0}(\tilde{t})$ l'ensemble admissible en $\tilde{t}$ du problème ($\mathcal{PC}_{co}$) où*

$$(\mathcal{PC}_{co}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(u(t)) + co(G(u(t))) \quad p.p.\ \ t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \ \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

Preuve.

(**1**) Montons pour tout $t \in \mathcal{I}$, il existe une fonction absolument continue

$$\begin{aligned} \gamma(\cdot) : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ \tau &\longmapsto \gamma(\tau) \end{aligned}$$

telle que la fonction $\tilde{x}(\cdot)$ donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\cdot) : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \tau &\longmapsto \tilde{x}(\tau) = x(\gamma(\tau)) \end{aligned}$$

est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{PC})$ sur l'intervalle $\mathcal{I}$. De plus,

$$\tilde{x}(T_0) = x(T_0) \quad \text{et} \quad \tilde{x}(T) = x(T).$$

(a) Soit $[a, b] \subset \mathcal{I}$ et supposons qu'ils existent deux fonctions intégrables $\lambda_1(\cdot)$ et $\lambda_2(\cdot)$ définies sur $[a, b]$, telles que

$$0 \leq \lambda_1(\tau) \leq 1 \leq \lambda_2(\tau) \quad \forall \tau \in [a, b],$$

et vérifie (2.47), où $f(\cdot) = m(u(\cdot))$ vérifie les conditions c'est-à-dire il est dans L^1. De plus, supposons que $\lambda_1(\tau) > 0$ p.p. $\tau \in [a, b]$.

En utilant la même procédure que dans la preuve du Théorème 3.3 dans [5] et Théorème 2 dans [25], nous conclons l'existence de deux sous ensembles mesurables de $[a, b]$ ayant des fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_1$ et $\mathbb{1}_2$ qui vérifient

$$\mathbb{1}_1(\cdot) + \mathbb{1}_2(\cdot) = \mathbb{1}_{[a,b]}(\cdot),$$

et une fonction absolument continue $s : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ telle que

$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\lambda_1(\tau)}\, \mathbb{1}_1(\tau) + \frac{1}{\lambda_2(\tau)}\, \mathbb{1}_2(\tau),$$

$$\int_a^b 1 d\tau = \int_a^b \Big(\mathbb{1}_1(\tau) \frac{1}{\lambda_1(\tau)} + \mathbb{1}_2(\tau) \frac{1}{\lambda_2(\tau)} \Big)\, d\tau,$$

et

$$\int_a^b \dot{s}(\tau)\, d\tau = s(b) - s(a) = b - a.$$

(b) D'après le Théorème 2.1, il existe une solution absolument continue $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ du problème

$$(\mathcal{PC}_{co}) \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(u(t)) + co\big(G(u(t))\big) & \text{p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \;\; \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

Considérons l'ensemble

$$\Omega = \big\{\tau \in \mathcal{I} : 0 \in co\big(G(x(\tau))\big)\big\}.$$

Montrons que Ω est fermé. Soit $(\tau_n)_n$ une suite de Ω qui converge vers $\tau \in \mathcal{I}$.
Donc $0 \in co\big(G(x(\tau_n))\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $co(G(\cdot))$ est une muli-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, donc son graphe est fermé (Théorème 1.21), et comme la fonction $x(\cdot)$ est continue, nous aurons $0 \in co\big(G(x(\tau))\big)$, alors, $\tau \in \Omega$ et donc Ω est fermé.

Cas 1. Si Ω est vide, dans ce cas $\lambda_1(\tau) > 0$, car si on considère le contraire c'est-à-dire,

$$\exists \tau_0 \in \mathcal{I} : \lambda_1(\tau_0) = 0,$$

par relation (2.47) on a

$$0 = \lambda_1(\tau_0) m\big(x(\tau_0)\big) \in G\big(x(\tau_0)\big) \subset co\big(G\big(x(\tau_0)\big)\big).$$

Donc, $\tau_0 \in \Omega$, contradiction avec la supposition de l'ensemble Ω est vide.
Nous pouvons appliquer l'étape (a) sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Soit

$$s(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega) d\omega,$$

puisque $\dot{s}$ est strictement positive, alors s est croissante, et on a $(s(T_0), s(T)) = (T_0, T)$. Donc s, est défini de $\mathcal{I}$ dans lui même.
Soit $\gamma(\cdot)$ la fonction inverse de $s(\cdot)$ définie par

$$\begin{aligned} \gamma(\cdot) : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ \tau &\longmapsto \gamma(\tau) = s^{-1}(\tau) \end{aligned}$$

donc,

$$(\gamma(T_0), \gamma(T)) = (T_0, T).$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{d\tau}\, s(\gamma(\tau)) = \dot{s}(\gamma(\tau))\, \dot{\gamma}(\tau) = 1,$$

alors

$$\dot{\gamma}(\tau) = \frac{1}{\dot{s}(\gamma(\tau))} = \lambda_1\big(\gamma(\tau)\big) 1\!\!1_1\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big) 1\!\!1_2\big(\gamma(\tau)\big).$$

Considérons l'application $\tilde{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{x}(\tau) = x(\gamma(\tau)), \quad \forall \tau \in \mathcal{I},$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\, \tilde{x}(\tau) &= \dot{x}\big(\gamma(\tau)\big)\dot{\gamma}(\tau) \\ &= \dot{x}\big(\gamma(\tau)\big)\Big(\lambda_1\big(\gamma(\tau)\big) 1\!\!1_1\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big) 1\!\!1_2\big(\gamma(\tau)\big)\Big), \end{aligned}$$

puisque $x(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{PC}_{co})$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\,\tilde{x}(\tau) &\in \Big(-N_{C(x(\gamma(\tau)))}(x(\gamma(\tau))) + m(x(\gamma(\tau)))\Big)\Big(\lambda_1\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_1\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_2\big(\gamma(\tau)\big)\Big)\\
&= -N_{C(x(\gamma(\tau)))}(x(\gamma(\tau)))\Big(\lambda_1\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_1\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_2\big(\gamma(\tau)\big)\Big)\\
&+ m(x(\gamma(\tau)))\Big(\lambda_1\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_1\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big)1\!\!1_2\big(\gamma(\tau)\big)\Big)\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés du cône normal et la relation (2.47), on trouve

$$\frac{d}{d\tau}\,\tilde{x}(\tau) \in -N_{C(x(\gamma(\tau)))}(x(\gamma(\tau))) + G(x(\gamma(\tau))) = -N_{C(\tilde{x}(\tau))}(\tilde{x}(\tau)) + G(\tilde{x}(\tau)).$$

D'où $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathcal{PC})$.

Cas 2. Si Ω est non vide. Soit $l = \sup\{\tau,\ \tau \in \Omega\}$. Nous avons $l \in \Omega$ car Ω est fermé. En effet, on a

$$l = \sup\{\tau,\ \tau \in \Omega\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tau_\varepsilon \in \Omega : l - \varepsilon < \tau_\varepsilon \leq l,$$

donc, on peut écrire

$$\forall n > 0, \exists (\tau_n)_n \in \Omega : l - \frac{1}{n} < \tau_n \leq l < l + \frac{1}{n},$$

d'où

$$\forall n > 0, \exists (\tau_n)_n \in \Omega : |\tau_n - l| < \frac{1}{n},$$

alors, il existe une suite $(\tau_n)_n$ dans Ω tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = l$, comme Ω est fermé, on obtient $l \in \Omega$.

Le complémentaire de Ω est ouvert relativement à $\mathcal{I}$, donc il constitue d'une famille des intervalles ouverts au plus dénombrables J de la forme $]a_i, b_i[$, aveclaposibilité que deux intervalles sont laforme $[a_{i_i}, b_{i_i}[$ avec $a_{i_i} = T_0$ et le deuxième intervalle de la forme $]a_{i_f}, b_{i_f}]$ avec $a_{i_f} = l$.

Pour tout $i \subset J$, on peut appliquer la partie (a) sur $]a_i, b_i[$, donc, il existe deux sous ensembles mesurables de $]a_i, b_i[$, avec des fonctions caractéristiques $1\!\!1_1^i(\cdot)$ et $1\!\!1_2^i(\cdot)$ telles que

$$1\!\!1_1^i(\cdot) + 1\!\!1_2^i(\cdot) = 1\!\!1_{]a_i,b_i[}(\cdot).$$

Posons

$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\lambda_1(\tau)}1\!\!1_1^i(\tau) + \frac{1}{\lambda_2(\tau)}1\!\!1_2^i(\tau),$$

on obtient

$$\int_{a_i}^{b_i} \dot{s}(\omega)d\omega = b_i - a_i.$$

Pour tout $\tau \in [T_0, l]$, on considère

$$\dot{s}(\tau) = \frac{1}{\lambda_2(\tau)}\,1\!\!1_\Omega(\tau) + \sum_i \big(\frac{1}{\lambda_1(\tau)}\,1\!\!1_1^i(\tau) + \frac{1}{\lambda_2(\tau)}\,1\!\!1_2^i(\tau)\big),$$

où la somme est sur tous les intervalles du complémentaire de Ω contenus dans $[T_0, l]$. Puisque $\lambda_2(\tau) \geq 1$ et

$$\int_{T_0}^{l} \dot{s}(\omega) d\omega = p \leq l - T_0.$$

Posons

$$s(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{s}(\omega)\, d\omega.$$

De plus, comme $s(\cdot)$ est une fonction absolument continue et strictement croissante sur un intervalle $[T_0, l]$, alors elle admet une fonction inverse définie de $[T_0, l]$ à $[T_0, p]$.
On définit $\gamma : [T_0, p] \to [T_0, l]$ comme la fonction inverse de la fonction $s(\cdot)$, le prolongement absolument continu de $\gamma(\cdot)$ noté par $\tilde{\gamma}(\cdot)$, est défini comme suit :

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \begin{cases} \gamma(\tau) & \text{si } \tau \in [T_0, p], \\ l & \text{si } \tau \in]p, l]. \end{cases}$$

Montrons maintenant que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x\big(\tilde{\gamma}(\tau)\big)$ est une solution du problème $(\mathcal{PC})$ sur l'intervalle $[T_0, l]$.
Sur $[T_0, p]$ on a $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\tau)$, γ est inversible et sa dérivée

$$\dot{\gamma}(\tau) = \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big)\mathbb{1}_{\Omega}\big(\gamma(\tau)\big) + \sum_i \Big(\lambda_1\big(\gamma(\tau)\big)\mathbb{1}_1^i\big(\gamma(\tau)\big) + \lambda_2\big(\gamma(\tau)\big)\mathbb{1}_2^i\big(\gamma(\tau)\big)\Big),$$

comme

$$\frac{d}{d\tau}\,\tilde{x}(\tau) = \dot{x}\big(\tilde{\gamma}(\tau)\big)\dot{\tilde{\gamma}}(\tau) = \dot{x}\big(\gamma(\tau)\big)\dot{\gamma}(\tau).$$

D'après les propriétés du cône normal et la relation (2.47), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\,\tilde{x}(\tau) &\in \dot{\gamma}(\tau)\big(- N_{C(x(\gamma(\tau)))}(x(\gamma(\tau))) + m(x(\gamma(\tau)))\big) \\ &\in -N_{C(x(\gamma(\tau)))}(x(\gamma(\tau))) + G(x(\gamma(\tau))) \\ &= -N_{C(\tilde{x}(\tau))}(\tilde{x}(\tau)) + G(\tilde{x}(\tau)). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Sur l'intervalle $]p, l]$, on a $\tilde{\gamma}(\tau) = l$ et $\dot{\tilde{\gamma}}(\tau) = 0$, donc

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \tilde{\gamma}(p) = \gamma(p),$$

on obtient

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{\gamma}(\tau)) = x(\gamma(p)) = x(\tilde{\gamma}(p)) = \tilde{x}(p) \quad \text{et} \quad \tilde{x}(p) = x(l),$$

alors $\tilde{x}$ est constante sur $]p, l]$, et puisque Ω est non vide, on a

$$\frac{d}{d\tau}\,\tilde{x}(\tau) = 0 \in co\big(G(x(l))\big) = co\big(G(\tilde{x}(\tau))\big) \quad \forall \tau \in]p, l]. \tag{2.49}$$

D'autre part, comme

$$0 \in -N_{C(\tilde{x}(\tau))}(\tilde{x}(\tau))$$

utilisons l'inclusion (2.49), on conclut que

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 \in -N_{C(\tilde{x}(\tau))}(\tilde{x}(\tau)) + G(\tilde{x}(\tau)) \quad \forall \tau \in]p, l]. \tag{2.50}$$

D'après (2.48) et (2.50), on déduit que $\tilde{x}(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{PC})$ sur l'intervalle $[T_0, l]$.
Sur l'intervalle $]l, T]$, Ω est vide et $\lambda_1(\tau) > 0$, alors on peut répéter les arguments de la partie (a) et le cas 1, pour montrer que $\tilde{x}$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{PC})$.
(**2**) Soit $\tilde{u}(t) \in Acc_{u_0}(t)$ pour tout $t \in \mathcal{I}$, donc $\tilde{u}(\cdot)$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{PC})$ sur l'intervalle $[T_0, t]$, telle que

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}}(t) &\in -N_{C(\tilde{u}(t))}(\tilde{u}(t)) + G(\tilde{u}(t)),\\ &\subset -N_{C(\tilde{u}(t))}(\tilde{u}(t)) + co(G(\tilde{u}(t))) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

donc, toute solution du problème $(\mathcal{PC})$ est une solution du problème $(\mathcal{PC}_{co})$. Alors pour tout $t \in \mathcal{I}$ et $\tilde{u}(t) \in Acc_{u_0}(t)$, on a

$$\tilde{u}(t) \in Acc^{co}_{u_0}(t).$$

On déduit que

$$Acc_{u_0}(t) \subset Acc^{co}_{u_0}(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}. \tag{2.51}$$

Inversement, soit $u(t) \in Acc^{co}_{u_0}(t)$, alors $u(\cdot)$ est une solution absolument continue du problème $(\mathcal{PC}_{co})$ sur $[T_0, t]$. On peut alors répéter la preuve de la partie (1) sur $[T_0, t]$ pour trouver une solution $\tilde{u}(\cdot) : [T_0, t] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ du problème $(\mathcal{PC})$, tel que $\tilde{u}(t) = u(t) \in Acc_{u_0}(t)$, et par conséquent

$$Acc^{co}_{u_0}(t) \subset Acc_{u_0}(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}. \tag{2.52}$$

On conclut par (2.51) et (2.52), que

$$Acc_{u_0}(t) = Acc^{co}_{u_0}(t) \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

■

2.4) Application au problème de temps optimal

Dans cette section, on va appliquer les théorèmes montré précédemment pour résoudre un problème du temps minimal de l'inclusion différentielle $(\mathcal{PCO})$. Puis, on utilise la fonction de temps minimal pour décrire l'ensemble admissible de ce problème.

Théorème 2.4.

Soient $C : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées qui satisfait les hypothèses $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$ du Théorème 2.3 et $Z : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes sur $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in Z(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1^h)$ *il existe une constante $\alpha > 0$, tel que :*

$$\|h(x,y)\| \leq \alpha(1 + \|x\|) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n;$$

$(\mathcal{H}_2^h)$ *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $h(x,0) = 0$.*

$(\mathcal{H}_3^h)$ *Soit $G : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application mesurable à valeurs non vides compactes et presque convexes, telles que*

$$G(x) = \big\{h(x,z)\big\}_{z \in Z(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soient u_0, u_1 deux points dans $\mathbb{R}^n$, on suppose que pour tout $t \in \mathcal{I}$, $u_1 \in Acc_{u_0}(t)$ l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{PCO})$. Donc,

1. *le problème d'atteindre u_1 depuis u_0 en un temps minimal admet une solution ;*
2. *pour tout $t \in \mathcal{I}$*

$$Acc_{u_0}(t) = \big\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{T}(u) \leq t\big\}.$$

Preuve.

(**1**) Sous les hypothèses sur h et Z, Proposition 1.24 $G(\cdot)$ est semi-continue supérieurement, et d'après la Proposition 1.23 $co(G(.))$ est semi-continue supérieurement telle que

$$d_{co(G(x))}(0) \leq \alpha(1 + \|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Donc le problème $(\mathcal{PCO})$ qui est équivalent au sens de solution au problème $(\mathcal{PC})$ admet au moins une solution et il a le même ensemble admissible $Acc_{u_0}(t)$ pour tout $t \in \mathcal{I}$. Soit

$$\bar{t} = \inf\{s \in [T_0, t] : u_1 \in Acc_{u_0}(s)\}.$$

Donc, par la propriété de minoration, il existe une suite décroissante $\left(\bar{t}_n\right)_n$ dans $[T_0, t]$ converge vers $\bar{t}$, et pour tout entier n il existe une fonction $u_n(\cdot)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}(u(t)) + G(u(t)) \quad \text{p.p. } \ t \in [T_0, \bar{t}_n], \\ u(t) \in C(u(t)) \quad \forall t \in [T_0, \bar{t}_n], \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

tel que $u_1 = u_n(\bar{t}_n)$. Pour tout $s \in [T_0, \bar{t}]$, on définit la suite des fonctions $(y_n(\cdot))_n$ par $y_n(s) = u_n(s)$ pour tout $s \in [T_0, \bar{t}]$, alors

$$\left(y_n(s)\right)_n \subset Acc_{u_0}(s) = Acc^{co}_{u_0}(s).$$

Par la compacité de $Acc^{co}_{u_0}(s)$, on peut extraire une sous suite $\left(y_n(s)\right)_n$ converge vers $y(s) \in Acc^{co}_{u_0}(s)$, d'où

$$u_1 = u_n(\bar{t}_n) \in Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}_n)$$

avec la multi-application $Acc^{co}_{u_0}(\cdot)$ est semicontinue supérieurement à valeurs compactes, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}_n) = Acc^{co}_{u_0}(\bar{t})$$

donc

$$u_1 \in Acc^{co}_{u_0}(\bar{t})$$

D'après Théorème 2.3, $Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}) = Acc_{u_0}(\bar{t})$, d'où

$$y(\bar{t}) = u_1 \in Acc_{u_0}(\bar{t}).$$

par conséquent la fonction $y(\cdot)$ satisfait

$$\lim_{n\to\infty} y_n(\bar{t}_n) = y(\bar{t}) = u_1 \in Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}).$$

Alors, y est la solution du problème $(\mathcal{PCO})$ qui atteint u_1 dans le temps minimal, et $\bar{t}$ est la valeurs du temps minimal.

(2) Soit $t \in \mathcal{I}$ fixé et $u_1 \in Acc_{u_0}(t)$, alors il existe une fonction $u(\cdot)$ solution du problème $(\mathcal{PCO})$ tel que $u_1 = u(t)$. On définit la fonction

$$\tilde{u}(s) = \begin{cases} u(s) & \text{si } \ s \in [T_0, t], \\ u_1 & \text{si } \ s \in [t, T]. \end{cases}$$

Pour presque tout $s \in [T_0, t]$, d'après le Théorème 2.3 on obtient

$$\dot{\tilde{u}}(s) \in -N_{C(\tilde{u}(s))}(\tilde{u}(s)) + G(\tilde{u}(s)). \tag{2.53}$$

Pour presque tout $s \in [t, T]$, $\dot{\tilde{u}}(s) = 0$, par l'hypothèse $(\mathcal{H}_2^h)$ et comme $0 \in -N_{C(\tilde{u}(s))}(\tilde{u}(s))$ on trouve

$$\dot{\tilde{u}}(s) = 0 \in -N_{C(\tilde{u}(s))}(\tilde{u}(s)) + h(\tilde{u}(s), z(s)), \tag{2.54}$$

d'où, d'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_3^h)$, on a

$$\dot{\tilde{u}}(s) = 0 \in -N_{C(\tilde{u}(s))}(\tilde{u}(s)) + G(\tilde{u}(s)) \ \text{ p.p. } \ s \in [t, T]. \tag{2.55}$$

Des relations (2.53) et (2.55), on conclut que $\tilde{u}(\cdot)$ est une solution de $(\mathcal{PCO})$ pour presque partout $t \in \mathcal{I}$.
D'autre part, pour tout $t < s$, $\tilde{u}(s) = u_1 \in Acc_{u_0}(s)$. Donc

$$Acc_{u_0}(t) \subseteq Acc_{u_0}(s) \ \text{ p.p. } \ t < s. \tag{2.56}$$

Pour tout $s < t$, soit $z \in \big\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{T}(u) \leq t\big\}$. Alors, d'après la relation (2.56), on a

$$Acc_{u_0}\big(\mathfrak{T}(u)\big) \subseteq Acc_{u_0}(t),$$

d'après la définition de la fonction de temps minimal $\mathfrak{T}(u)$, on obtient

$$z \in Acc_{u_0}(t).$$

Donc,

$$\big\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{T}(u) \leq t\big\} \subseteq Acc_{u_0}(t). \tag{2.57}$$

De plus, en utilisant la définition de l'ensemble admissible on obtient

$$Acc_{u_0}(t) \subseteq \big\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{T}(u) \leq t\big\}. \tag{2.58}$$

On déduit des relations (2.57) et (2.58) que

$$Acc_{u_0}(t) = \big\{u \in \mathbb{R}^n : \mathfrak{T}(u) \leq t\big\}.$$

■

Chapitre 3

Existence de solutions pour le processus de la rafle avec deux perturbations multivoque et univoque

Sommaire

3.1) Introduction du chapitre

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de solutions et la compacité de l'ensemble admissible du problème non autonome

$$(\mathcal{SP}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) + F\big(t, u(t)\big) + f\big(t, u(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(t, u(t)) \ \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

tel que l'ensemble mobile $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est equi-uniformément sous lisse, $F : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est une multi-application à valeurs non vides fermées convexes semi-continues supérieurement et non nécésairement bornée et $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue qui satisfait une condition de croissance linéaire.

Puis, nous définissons une classe plus large concernant les multi-applications à valeurs presque convexes, pour étudier l'existence d'une solution du problème autonome

$$(\mathcal{ASP}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + F\big(u(t)\big) + f\big(u(t)\big) \ \ \text{p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \ \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

sous une hypothèse plus faible sur la semi-continuité supérieure et l'hypothèse de la presque convexité des valeurs de $F : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$.

Comme application, nous considérons le système de contrôle autonome

$$(\mathcal{ASP}_{\mathcal{O}}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + h\big(u(t), z(t) + f\big(u(t)\big) \ \ \text{p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ z(t) \in U(u(t)) \ \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \ \ \forall t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

contrôler par les paramètres $z(t) \in U(u(t))$, tel que $U : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes, sous l'hypothèse de presque convexes sur l'ensemble

$$F(u(t)) = h\big(u(t), U(u(t))\big) = \big\{h\big(u(t), z(t)\big)\big\}_{z(t) \in U(u(t))}.$$

3.2) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs convexes

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions et la compacité l'ensemble admissible pour le processus de la rafle $(\mathcal{SP})$, telle que F est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées et non vides non nécessairement bornées.

Théorème 3.1.
Soit $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées qui vérifie :

- $(\mathscr{A}_1^C)$ *pour tout $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, $C(t, x)$ est équi-uniformément sous lisse ;*
- $(\mathscr{A}_2^C)$ *ils existent deux constantes $L_1 \geq 0$, $L_2 \in [0, 1[$ telles que, pour tous $t, s \in \mathcal{I}$ et pour tous $x, u, v \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\left|d_{C(t,u)}(x) - d_{C(s,v)}(x)\right| \leq L_1|t - s| + L_2\big\|u - v\big\|.$$

Soit $F : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes, telle que :

- $(\mathscr{A}^F)$ *pour un certain réel $\alpha \geq 0$,*

$$d_{F(t,x)}(0) \leq \alpha\big(1 + \|x\|\big) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Considérons $f : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que :

- $(\mathscr{A}^f)$ *pour un certaint réel $\beta > 0$,*

$$\big\|f(t, x)\big\| \leq \beta(1 + \|x\|) \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Donc, pour tout $u_0 \in C(T_0, u_0)$

1. *le problème $(\mathcal{SP})$ admet une solution lipschitzienne ;*
2. *si la multi-application F est à valeurs bornées on a , pour $\tau \in \mathcal{I}$ fixé, l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(\tau)$ est compact.*

Preuve.
(1) Existence de solution.
Pour tout $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, on pose $m(t, x)$ l'élément de norme minimale de F, c'est-à-dire,

$$m(t, x) = Proj_{F(t,x)}(0),$$

et on pose

$$h(t,x) = m(t,x) + f(t,x).$$

D'après l'hypothèse $(\mathscr{A}^F)$ et $(\mathscr{A}^f)$, on obtient

$$\|h(t,x)\| \leq (\alpha+\beta)\big(1+\|x\|\big) =: \gamma\big(1+\|x\|\big), \tag{3.1}$$

telle que $\gamma := \alpha + \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la partition de l'intervalle $\mathcal{I}$ par

$$\mathcal{I}_i^n = [t_i^n, t_{i+1}^n[,\ t_i^n = T_0 + i\mu_n,\ \mu_n = \frac{T - T_0}{n},\ i \in \{0,1,\dots,n-1\} \text{ et } \mathcal{I}_n^n = \{t_n^n\} = \{T\}.$$

Etape 1. On définit inductivement la suite $(x_i^n)_{0\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Notons $x_0^n = u_0 \in C(t_0^n, x_0^n)$ et pour chaque $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ les inclusions suivantes sont bien définies

$$x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, x_i^n), \tag{3.2}$$

$$x_i^n + \mu_n h(t_i^n, x_i^n) - x_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}(x_{i+1}^n). \tag{3.3}$$

En effet, pour $i = 0$ et puisque $C(t_1^n, x_0^n)$ est fermé, on peut prendre

$$x_1^n \in Proj_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n + \mu_n h(t_0^n, x_0^n)\big), \tag{3.4}$$

ce qui implique que

$$x_1^n \in C(t_1^n, x_0^n). \tag{3.5}$$

Donc, par la Proposition 1.49 et la relation (3.4), on écrit

$$x_0^n + \mu_n h(t_0^n, x_0^n) - x_1^n \in N_{C(t_1^n,x_0^n)}(x_1^n).$$

D'après (3.5), on trouve

$$\begin{aligned}
\big\|x_1^n - x_0^n\big\| &\leq \|x_1^n - \big(x_0^n + \mu_n h(t_0^n, x_0^n)\big)\| + \|\mu_n h(t_0^n, x_0^n)\| \\
&= d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n + \mu_n h(t_0^n, x_0^n)\big) + \mu_n\big\|h(t_0^n, x_0^n)\big\| \\
&\leq d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n\big) + \big\|\mu_n h(t_0^n, x_0^n)\big\| + \big\|\mu_n h(t_0^n, x_0^n)\big\| \\
&\leq \Big|d_{C(t_1^n,x_0^n)}(x_0^n) - d_{C(t_0^n,x_0^n)}(x_0^n)\Big| + 2\mu_n\big\|h(t_0^n, x_0^n)\big\|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $(\mathscr{A}_2^C)$ et l'inégalité (3.1), on a

$$\begin{aligned}
\big\|x_1^n - x_0^n\big\| &\leq L_1|t_1^n - t_0^n| + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_0^n\|) \\
&= L_1\mu_n + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_0^n\|).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Supposons que, pour $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ les points $x_1^n, x_2^n, \dots, x_i^n$ ont été construits satisfaisant (3.2) et (3.3). On pose

$$x_{i+1}^n \in Proj_{C(t_{i+1}^n,x_i^n)}\big(x_i^n + \mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big),$$

qui est bien définie car $C(t_{i+1}^n, x_i^n)$ est fermé et nous avons

$$x_{i+1}^n \in C(t_{i+1}^n, x_i^n).$$

D'après la Proposition 1.49, nous avons pour tout $t \in \mathcal{I}_i^n$,

$$x_i^n + \mu_n h(t_i^n, x_i^n) - x_{i+1}^n \in N_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}(x_{i+1}^n).$$

D'autre part, d'après la relation (3.2) on a,

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq \|x_{i+1}^n - \big(x_i^n + \mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big)\| + \|\mu_n h(t_i^n, x_i^n)\| \\
&\leq d_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}\big(x_i^n + \mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big) + \big\|\mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big\| \\
&\leq d_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}\big(x_i^n\big) + \big\|\mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big\| + \big\|\mu_n h(t_i^n, x_i^n)\big\| \\
&\leq \Big| d_{C(t_{i+1}^n, x_i^n)}(x_i^n) - d_{C(t_i^n, x_{i-1}^n)}(x_i^n) \Big| + 2\mu_n \big\|h(t_i^n, x_i^n)\big\|.
\end{aligned}$$

Par $(\mathscr{A}_2^C)$ et (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq L_1 |t_{i+1}^n - t_i^n| + L_2 \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_i^n\|) \\
&\leq L_1\mu_n + L_2 \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_i^n\|).
\end{aligned}$$

Fixons $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, il vient que

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq L_1\mu_n + L_2 \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_i^n\|) \\
&\leq L_1\mu_n + L_2\big(L_1\mu_n + L_2\|x_{i-1}^n - x_{i-2}^n\| + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_{i-1}^n\|)\big) + 2\gamma\mu_n(1 + \|x_i^n\|) \\
&\leq L_1\mu_n(1 + L_2) + L_2^2\|x_{i-1}^n - x_{i-2}^n\| + 2\gamma\mu_n\big((1 + \|x_i^n\|) + L_2(1 + \|x_{i-1}^n\|)\big) \\
&\leq L_1\mu_n(1 + L_2 + L_2^2) + L_2^3\|x_{i-2}^n - x_{i-3}^n\| + 2\gamma\mu_n\big((1 + \|x_i^n\|) + L_2(1 + \|x_{i-1}^n\|) \\
&+ L_2^2(1 + \|x_{i-2}^n\|)\big).
\end{aligned}$$

Par induction, on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_{i+1}^n - x_i^n\| &\leq L_1\mu_n(1 + L_2 + \ldots + L_2^i) + 2\gamma\mu_n(1 + L_2 + \ldots + L_2^i) + 2\gamma\mu_n(\|x_i^n\| + L_2\|x_{i-1}^n\| \\
&+ \ldots + L_2^i\|x_0^n\|) \\
&= (L_1 + 2\gamma)\mu_n \sum_{k=0}^{i} L_2^k + 2\gamma\mu_n \sum_{k=0}^{i} L_2^{i-k}\|x_k^n\|,
\end{aligned}$$

puisque $L_2 \in [0, 1[$, on aura

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\mu_n + 2\gamma\mu_n \sum_{k=0}^{i} L_2^{i-k}\|x_k^n\|. \tag{3.7}$$

De plus, d'après (3.6) et (3.7), on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_i^n - x_0^n\| &\leq \|x_i^n - x_{i-1}^n\| + \|x_{i-1}^n - x_{i-2}^n\| + \ldots + \|x_1^n - x_0^n\| \\
&\leq \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\mu_n + 2\gamma\mu_n \sum_{k=0}^{i-1} L_2^{i-k}\|x_k^n\| + \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\mu_n + 2\gamma\mu_n \sum_{k=0}^{i-2} L_2^{i-k}\|x_k^n\| \\
&+ \ldots + (L_1 + 2\gamma)\mu_n + 2\gamma\mu_n\|x_0^n\| \\
&\leq \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\mu_n(i-1) + 2\gamma\mu_n\|x_0^n\| \sum_{k=0}^{i-1} L_2^k + 2\gamma\mu_n\|x_1^n\| \sum_{k=0}^{i-1} L_2^k \\
&+ 2\gamma\mu_n\|x_2^n\| \sum_{k=0}^{i-1} L_2^k + \ldots + 2\gamma\mu_n\|x_{i-1}^n\| \sum_{k=0}^{i-1} L_2^k \\
&\leq \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\frac{T}{n}(i-1) + 2\gamma\mu_n\Big(\|x_0^n\| + \|x_1^n\| + \ldots + \|x_{i-1}^n\|\Big) \sum_{k=0}^{i-1} L_2^k.
\end{aligned}$$

Comme $L_2 \in [0, 1[$, on obtient

$$\|x_i^n - x_0^n\| \leq T\frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2} + \frac{2\gamma T}{1 - L_2}\sum_{k=0}^{i-1}\|x_k^n\|.$$

Donc,

$$\|x_i^n\| \leq \|x_0^n\| + T\frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2} + \frac{2\gamma T}{1 - L_2}\sum_{k=0}^{i-1}\|x_k^n\|.$$

Par le Lemme 1.56 et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on aura

$$\|x_i^n\| \leq \Big(\|x_0^n\| + T\frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\Big) \exp\Big(\frac{2\gamma T}{1 - L_2}\Big) =: \eta. \tag{3.8}$$

En utilisant les relations (3.7) et (3.8), on obtient

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \frac{L_1 + 2\gamma}{1 - L_2}\, \mu_n + 2\gamma\, \mu_n \sum_{k=0}^{i} L_2^{i-k}\eta.$$

On déduit du fait $L_2 \in [0, 1[$ que

$$\|x_{i+1}^n - x_i^n\| \leq \frac{1}{1 - L_2}\, \mu_n\big(L_1 + 2\gamma + 2\gamma\eta\big). \tag{3.9}$$

Etape 2. Construction de la suite $\big(\mathbf{u_n}(\cdot)\big)_{\mathbf{n\geq 0}}$

Pour tout $t \in \mathcal{I}_i^n$ avec $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et pour tout $n \geq 1$, on définit

$$u_n(t) = x_i^n + \big(t - t_i^n\big)\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\mu_n}. \tag{3.10}$$

Observons que $u_n(t_i^n) = x_i^n$, et la dérivée de $u_n(\cdot)$ est

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\mu_n},\ t \in]t_i^n, t_{i+1}^n[. \tag{3.11}$$

D'après la relation (3.2), on a

$$u_n(t_{i+1}^n) \in C\big(t_{i+1}^n, u_n(t_i^n)\big) \tag{3.12}$$

et par les relations (3.3) et (3.11), on peut écrire

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C\left(t_{i+1}^n, u_n(t_i^n)\right)}\big(u_n(t_{i+1}^n)\big) + h\big(t_i^n, u_n(t_i^n)\big) \ \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}_i^n. \tag{3.13}$$

Les relations (3.9) et (3.11) impliquent que

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \frac{1}{1-L_2}\big(L_1 + 2\gamma + 2\gamma\eta\big) =: \Delta. \tag{3.14}$$

Maintenant, on définit deux fonctions $\theta_n(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ et $\rho_n(\cdot) : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ par

$$\theta_n(t) = \begin{cases} t_i^n & \text{si} \quad t \in \mathcal{I}_i^n, \\ t_{n-1}^n & \text{si} \quad t = T. \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\rho_n(t) = \begin{cases} t_{i+1}^n & \text{si} \quad t \in \mathcal{I}_i^n, \\ T & \text{si} \quad t = T. \end{cases} \tag{3.16}$$

Remarquons que, pour tout $t \in \mathcal{I}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \big|\theta_n(t) - t\big| = \lim_{n \to +\infty} \big|\rho_n(t) - t\big| = 0. \tag{3.17}$$

En combinant (3.12), (3.13), (3.15) et (3.16), il en résulte que

$$u_n\big(\rho_n(t)\big) \in C\big(\rho_n(t), u_n(\theta_n(t))\big) \quad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{3.18}$$

et pour presque partout $t \in \mathcal{I}$

$$\dot{u}_n(t) \in -N_{C(\rho_n(t), u_n(\theta_n(t)))}\ \big(u_n(\rho_n(t))\big) + h\big(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))\big). \tag{3.19}$$

D'autre part, pour tout $t \in \mathcal{I}$ et de la relation (3.8) on a

$$\begin{aligned} \big\|h\big(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))\big)\big\| &\leq \gamma(1 + \|u_n(\theta_n(t))\|) \\ &= \gamma(1 + \|x_i^n\|) \\ &\leq \gamma(1 + \eta) =: \Theta, \end{aligned} \tag{3.20}$$

et

$$\begin{aligned} \big\|m\big(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))\big)\big\| &\leq \alpha(1 + \|u_n(\theta_n(t))\|) \\ &= \alpha(1 + \|x_i^n\|) \\ &\leq \alpha(1 + \eta), \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec, $m\big(\theta_n(\cdot), u_n(\theta_n(\cdot))\big) = Proj_{F(\theta_n(\cdot),u_n(\theta_n(\cdot)))}(0)$.

Etape 3. La convergence des suites.

En vertu de la relation (3.10), on a pour tout $t \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\big\|u_n(t)\big\| - \big\|u_n(\rho_n(t))\big\| &\leq \big\|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\| \\ &= \big\|x_{i+1}^n - x_i^n - \big(t - t_i^n\big)\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\mu_n}\big\| \\ &= \Big\|\frac{(t_{i+1}^n - t_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)}{\mu_n} - \frac{(t - t_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)}{\mu_n}\Big\| \\ &= \Big\|\frac{x_{i+1}^n - x_i^n}{\mu_n}\Big\||t_{i+1}^n - t|,\end{aligned}$$

alors,

$$\big\|u_n(t)\big\| - \big\|u_n(\rho_n(t))\big\| \leq \big\|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\big\| = \|\dot{u}_n(t)\|\big(\rho_n(t) - t\big),$$

donc par (3.14), on trouve

$$\big\|u_n(t)\big\| - \big\|u_n(\rho_n(t))\big\| \leq \Delta\,\big(\rho_n(t) - t\big), \tag{3.22}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho_n(t) = t$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\big\| = 0. \tag{3.23}$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}\big\|u_n(t)\big\| - \big\|u_n(\theta_n(t))\big\| &\leq \big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| \\ &= \|\dot{u}_n(t)\|\big(t - \theta_n(t)\big) \\ &\leq \Delta\,\big(t - \theta_n(t)\big),\end{aligned}$$

il resulte de la relation (3.17) que

$$\lim_{n\to+\infty} \big\|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\big\| = 0. \tag{3.24}$$

En utilisant (3.8) et (3.22), nous trouvons

$$\|u_n(t)\| \leq \Delta(\rho_n(t) - t) + \|u_n(\rho_n(t))\| \leq \Delta(T - T_0) + \eta.$$

D'où, $(u_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$. D'autre part, pour tout $t, t' \in \mathcal{I}$ tel que $t \leq t'$ (prenant en compte (3.14))

$$\begin{aligned}\|u_n(t') - u_n(t)\| &= \Big\|\int_t^{t'} \dot{u}_n(s)ds\Big\| \\ &\leq \int_t^{t'} \|\dot{u}_n(s)\|ds \\ &= \Delta(t' - t),\end{aligned}$$

donc $(u_n(\cdot))_n$ est équi-continue. On conclut par le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.16) que la suite $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$. Puisque

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \Delta \;\; p.p. \; t \in \mathcal{I},$$

par la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.17), on déduit que $(u_n(\cdot))_n$ admet une sous suite (notée aussi $(u_n(\cdot))_n$) qui converge vers une fonction absolument continue $u(\cdot)$ définie de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}^n$ dans le sens

- $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot) \in C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$;
- $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}))$ vers $\dot{u}(\cdot)$, tel que $\|\dot{u}(t)\| \leq \Delta$, presque partout $t \in \mathcal{I}$.

Donc,

$$u(t) = \lim_{n\to+\infty} \big(u_n(t) - u_0\big) = \lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^{t} \dot{u}_n(s)\, ds = \int_{T_0}^{t} \dot{u}(s)\, ds.$$

Alors $u(\cdot)$ est une fonction absolument continue sur $\mathcal{I}$ et $y = \dot{u}$. La fonction $u(\cdot)$ est aussi Δ lipschitzienne sur $\mathcal{I}$ (puisque $\|y(t)\| \leq \Delta \;\; p.p. \; t \in \mathcal{I}$).

On pose pour tout $n \geq 0$

$$\Big(m\big(\theta_n(\cdot), u_n(\theta_n(\cdot))\big)\Big)_n = \big(p_n(\cdot)\big)_n,$$

par (3.21) on obtient,

$$\|p_n(t)\| \leq \alpha(1+\eta) \;\; \forall t \in \mathcal{I},$$

alors $\big(p_n(\cdot)\big)_n$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$, d'où elle admet une sous suite $\big($notée par $\big(p_n(\cdot)\big)_n\big)$ qui converge $\sigma\big(L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ vers une fonction $p(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$. Donc pour tout $c_1(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle p_n(\cdot), c_1(\cdot)\rangle = \langle p(\cdot), c_1(\cdot)\rangle.$$

Soit $c_2(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}) \subset L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \langle p_n(\cdot), c_2(\cdot)\rangle = \langle p(\cdot), c_2(\cdot)\rangle,$$

alors, la suite $\big(p_n(\cdot)\big)_n$ est $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}))$-convergente vers une fonction $p(\cdot)$ qui vérifie

$$\|p(t)\| \leq \alpha(1+\eta) \;\; \forall t \in \mathcal{I}.$$

Soit

$$\Big(f\big(\theta_n(\cdot), u_n(\theta_n(\cdot))\big)\Big)_n = \big(q_n(\cdot)\big)_n,$$

d'après la continuité de f, (3.17) et (3.24) on obtient que $\big(q_n(\cdot)\big)_n$ converge vers $q(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot))$ et par $(\mathscr{A}^f)$, (3.8) on a

$$\|q(t)\| \leq \beta(1+\eta) \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Etape 4. On montre que u(·) est une solution de $(\mathcal{SP})$.

Par $(\mathscr{A}_2^C)$ et (3.18), pour tout $t \in \mathcal{I}$ on a

$$\begin{aligned} d_{C(t,u(t))}\big(u_n(t)\big) &\le \|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\| + d_{C(t,u(t))}\big(u_n(\rho_n(t))\big) \\ &\le \|u_n(t) - u_n(\rho_n(t))\| + \Big| d_{C(t,u(t))}\big(u_n(\rho_n(t))\big) - d_{C(\rho_n(t),u_n(\theta_n(t)))}\big(u_n(\rho_n(t))\big)\Big| \\ &\le \|u_n(\rho_n(t)) - u_n(t)\| + L_1|t-\rho_n(t)| + L_2\big\|u(t) - u_n(\theta_n(t))\big\|. \end{aligned}$$

En utilisant (3.17), (3.23), (3.24) et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on trouve

$$d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) = 0.$$

Grâce à la fermeture de $C(t, u(t))$ on obtient

$$u(t) \in C\big(t, u(t)\big) \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

D'autre part, par (3.14) et (3.20), nous avons

$$\big\| - \dot{u}_n(t) + p_n(t) + q_n(t)\big\| \le \Delta + \Theta =: \Upsilon.$$

D'où

$$- \dot{u}_n(t) + p_n(t) + q_n(t) \in \Upsilon\mathbb{B} \ \text{ p.p.} \quad t \in \mathcal{I} \tag{3.25}$$

Alors les relations (3.19) et (3.25) donnent que

$$-\dot{u}_n(t) + p_n(t) + q_n(t) \in N_{C(\rho_n(t),u_n(\theta_n(t)))}\ \big(u_n(\rho_n(t))\big) \cap \Upsilon\mathbb{B},$$

vai de la Propositions 1.49 on aura

$$- \dot{u}_n(t) + p_n(t) + q_n(t) \in \Upsilon\partial d_{C(\rho_n(t),u_n(\theta_n(t)))}\ \big(u_n(\rho_n(t))\big) \ \text{ p.p.} \ \ t \in \mathcal{I} \tag{3.26}$$

avec

$$p_n(t) \in F\big(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))\big) \ \ \forall t \in \mathcal{I}. \tag{3.27}$$

Puisque la suite $\big(- \dot{u}_n + p_n + q_n, p_n\big)_n$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers $\big(- \dot{u} + p + q, p\big)$ (d'après l'étape 3). Par le Lemme de Mazur, il existe une sous suite $\big(\omega_n, \zeta_n\big)_n$ vérifiant

$$\omega_n \in co\{-\dot{u}_k + p_k + q_k, \ \ k \ge n\},$$

et

$$\zeta_n \in co\{p_k, \ \ k \ge n\},$$

telle que $\big(\omega_n, \zeta_n\big)_n$ converge fortement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers $\big(-\dot{u}+p+q, p\big)$. La convergece forte dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ de $\big(\omega_n, \zeta_n\big)_n$ vers $\big(- \dot{u} + p + q, p\big)$ nous permet d'extraire de la suite

$\big(\omega_n, \zeta_n\big)_n$ une sous suite qui converge presque partout vers $\big(-\dot{u}+p+q, p\big)$. Donc, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $\mathscr{S} \subset \mathcal{I}$ telle que, pour tout $t \in \mathcal{I}\backslash\mathscr{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$-\dot{u}(t)+p(t)+q(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{\omega_k(t),\ k\geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{-\dot{u}_k(t)+p_k(t)+q_k(t),\ k\geq n\}, \tag{3.28}$$

et

$$p(t) \in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{p_k(t),\ \ k\geq n\}} \subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{p_k(t),\ \ k\geq n\}. \tag{3.29}$$

Fixons $t \in \mathcal{I}\backslash\mathscr{S}$ et $z \in \mathbb{R}^n$, la relation (3.26) et (3.28) donne

$$\langle z, -\dot{u}(t)+p(t)+q(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^*\Big(z, \Upsilon\partial d_{C(\rho_n(t),u_n(\theta_n(t)))}\big(u_n(\rho_n(t))\big)\Big).$$

Par la Proposition 1.54, on déduit que

$$\langle z, -\dot{u}(t)+p(t)+q(t)\rangle \leq \delta^*\Big(z, \Upsilon\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)\Big).$$

Puisque $t \mapsto \Upsilon\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big)$ à valeurs convexes fermées, on conclut que

$$-\dot{u}(t)+p(t)+q(t) \in \Upsilon\partial d_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) \subset N_{C(t,u(t))}(u(t)). \tag{3.30}$$

De plus, d'après (3.27), (3.29) et la semi-continuité supérieure de F, on a

$$\langle z, p(t)\rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^*\Big(z, F(\theta_n(t), u_n(\theta_n(t))\Big) \leq \delta^*\Big(z, F(t,u(t))\Big).$$

Comme F est à valeurs convexes fermées, on conclut que

$$p(t) \in F\big(t, u(t)\big). \tag{3.31}$$

Par (3.30) et (3.31), on aura

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) + F\big(t,u(t)\big) + f\big(t,u(t)\big) \ \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}.$$

(2) La compacité de l'ensemble admissible.

Pour montrer que l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(\tau)$ est compact, on prouver premièrement que l'ensemble des solutions

$$S_\tau(u_0) = \Big\{u \in C_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tau]) : u \text{ est une solution lipschitzienne de } (\mathcal{SP})\Big\}$$

est compact pour tout $\tau \in \mathcal{I}$.

D'après la partie 1, le problème $(\mathcal{SP})$ admet au moins une solution sur $\mathcal{I}$, d'où l'ensemble de trajectoire $S_\tau(u_0)$ est non vide.

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $S_\tau(u_0)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_n)_n$ est une solution lipschitzienne du problème $(\mathcal{SP})$ telle que

$$\big\|\dot{u}_n(\tilde{t})\big\| \leq \Delta \ \text{ p.p. } \ \tilde{t} \in [T_0, \tau], \tag{3.32}$$

et

$$\|u_n(\tilde{t})\| \leq \|u_0\|+\int_{T_0}^{\tilde{t}} \|\dot{u}_n(s)\| \, ds \leq \|u_0\|+\int_{T_0}^{\tilde{t}} \Delta \, ds \leq \|u_0\|+\Delta(\tilde{t}-T_0) \leq \|u_0\|+\Delta(\tau-T_0).$$

Donc, $(u_n(\tilde{t}))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$.
De plus, pour tout $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [T_0, \tau]$ tels que $\tilde{t}_1 \leq \tilde{t}_2$ on a

$$\begin{aligned}\|u_n(\tilde{t}_2) - u_n(\tilde{t}_1)\| &= \Big\| \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \dot{u}(s) \, ds \Big\| \\ &\leq \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \|\dot{u}(s) \, ds\| \\ &= \Delta(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1),\end{aligned}$$

d'où, $(u_n(\cdot))_n$ est équi-continue. En vertue du Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.16), la suite $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$. Puisque

$$\|\dot{u}_n(\tilde{t})\| \leq \Delta \ \text{ p.p. } \ \tilde{t} \in [T_0, \tau]$$

on déduit par la conséquence d'Ascoli-Arzelà, qu'on peut extraire une sous suite de $(u_n(\cdot))_n$ (notée par $(u_n(\cdot))_n$) qui converge uniformément vers $u(\cdot)$ dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$ et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$ vers $\dot{u}(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$ telle que

$$\|\dot{u}(\tilde{t})\| \leq \Delta \ \text{ p.p. } \ \tilde{t} \in [T_0, \tau].$$

Nous avons,

$$u(\tilde{t}) = \lim_{n\to+\infty} u_n(\tilde{t}) = u_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^{\tilde{t}} \dot{u}_n(s) \, ds = u_0 + \int_{T_0}^{\tilde{t}} \dot{u}(s) \, ds$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit la suite des fonctions $(k_n)_n$ où $k_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ est une sélection mesurable de la multi-application $F(\cdot, u_n(\cdot))$. Comme F est à valeurs bornées on peut trouver $\alpha_1 > 0$ telle que

$$\|k_n(\tilde{t})\| \leq \alpha_1, \quad \forall \tilde{t} \in [T_0, \tau].$$

Il est clair que $(k_n)_n$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$, alors elle admet une sous suite qui converge $\sigma\big(L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau]), L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])\big)$ vers une fonction k dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$. Par conséquent, pour toute fonction $\xi_1(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \langle k_n(\cdot), \xi_1(\cdot)\rangle = \langle k(\cdot), \xi_1(\cdot)\rangle. \tag{3.33}$$

Soit $\xi_2(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau]) \subset L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, \tau])$, en utilisant la relation (3.33), on peut conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle k_n(\cdot), \xi_2(\cdot)\rangle = \langle k(\cdot), \xi_2(\cdot)\rangle,$$

c'est-à-dire, la suite $\big(k_n(\cdot)\big)_n$ converge $\sigma\big(L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tau]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tau])\big)$ vers une fonction $k(\cdot)$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tau])$.

Soit $(l_n(\cdot))_n$ une suite de fonctions continue où $l_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$. D'après l'hypothèse $(\mathscr{A}^f)$ on trouve

$$\|l_n(\tilde{t})\| = \|f_n(\tilde{t}, u_n(\tilde{t}))\| \leq \beta(1 + \|u_n(\tilde{t})\|) \leq \beta(1+\Delta) =: \alpha_2 \;\; \forall \tilde{t} \in [T_0,\tau].$$

Vai la continuité de $(l_n(\cdot))_n$, il resulte que $(l_n(\cdot))_n$ converge vers $l(\cdot)$ et

$$\|l(\tilde{t})\| \leq \alpha_2 \;\; \forall \tilde{t} \in [T_0,\tau].$$

Montrons maintenant que la limite $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{SP})$.

Comme la suite (u_n) est une solution du problème $(\mathcal{SP})$ et

$$k_n(\tilde{t}) \in F(\tilde{t}, u_n(\tilde{t})) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

on aura

$$-\dot{u}_n(\tilde{t}) + k_n(\tilde{t}) + l_n(\tilde{t}) \in N_{C\left(\tilde{t}, u_n(\tilde{t})\right)}\big(u_n(\tilde{t})\big) \quad \text{p.p. } t \in [T_0,\tau]. \tag{3.34}$$

avec

$$\|-\dot{u}_n(\tilde{t}) + k_n(\tilde{t}) + l_n(\tilde{t})\| \leq \Delta + \alpha_1 + \alpha_2 =: \alpha_3 \quad p.p.\, \tilde{t} \in [T_0,\tau].$$

Ce qui implique que

$$-\dot{u}_n(\tilde{t}) + k_n(\tilde{t}) + l_n(\tilde{t}) \in \alpha_3\mathbb{B} \;\; p.p.\, \tilde{t} \in [T_0,\tau]. \tag{3.35}$$

D'après les relations (3.34) et (3.35) et la Proposition 1.49, il vient que

$$-\dot{u}_n(\tilde{t}) + k_n(\tilde{t}) + l_n(\tilde{t}) \in \alpha_3 \partial d_{C\left(\tilde{t}, u_n(\tilde{t})\right)}(u_n(\tilde{t})) \quad \text{p.p. } \tilde{t} \in [T_0,\tau]. \tag{3.36}$$

Puisque $\big(-\dot{u}_n + k_n + l_n, k_n\big)_n$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}([T_0,\tau])$ vers $\big(-\dot{u}+k+l, k\big)$, on peut appliquer le Lemme de Mazur pour assurer l'éxistence d'une suite $(a_n(\cdot), b_n(\cdot))_n$ telle que

$$a_n \in co\{-\dot{u}_m + k_m + l_m, \;\; m \geq n\} \quad \text{et} \quad b_n \in co\{k_m, \;\; m \geq n\} \tag{3.37}$$

qui converge foretement vers $\big(-\dot{u} + k + l, k\big)$ dans $L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0,\tau])$. Alors on peut extraire une sous suite de $(a_n(\cdot), b_n(\cdot))_n$ qui converge presque partout vers $\big(-\dot{u} + k + l, k\big)$. Donc, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $\mathscr{C} \subset [T_0,\tau]$ tel que pour tout $\tilde{t} \in [T_0,\tau]\backslash\mathscr{C}$

$$\begin{aligned} -\dot{u}(\tilde{t}) + k(\tilde{t}) + l(\tilde{t}) \;\; &\in \;\; \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{a_m(\tilde{t}), \;\; m \geq n\}} \\ &\subset \;\; \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{-\dot{u}_m(\tilde{t}) + k_m(\tilde{t}) + l_m(\tilde{t}), \;\; m \geq n\} \end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\begin{aligned} k(\tilde{t}) &\in \bigcap_{n\geq 0} \overline{\{b_m(\tilde{t}), \quad m \geq n\}} \\ &\subset \bigcap_{n\geq 0} \overline{co}\{k_m(t), \quad m \geq n\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Fixons $\tilde{t} \in [T_0, \tau] \backslash \mathscr{C}$ et $\varrho \in \mathbb{R}^n$, alors la relation (3.36) donne

$$\langle \varrho, -\dot{u}(\tilde{t}) + k(\tilde{t}) + l(\tilde{t}) \rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^* \Big(\varrho, \alpha_3 \partial d_{C(\tilde{t}, u_n(\tilde{t}))}(u_n(\tilde{t})) \Big).$$

Par la Proposition 1.54, on déduit que

$$\langle \varrho, -\dot{u}(\tilde{t}) + k(\tilde{t}) + l(\tilde{t}) \rangle \leq \delta^* \Big(\varrho, \alpha_3 \partial d_{C(\tilde{t}, u(\tilde{t}))}(u(\tilde{t})) \Big).$$

Puisque la multi-application $t \mapsto \alpha_3 \partial d_{C(\tilde{t}, u(\tilde{t}))}\big(u(\tilde{t})\big)$ est à valeurs convexes et fermées, on obtient

$$-\dot{u}(\tilde{t}) + k(\tilde{t}) + l(\tilde{t}) \in \alpha_3 \partial d_{C(\tilde{t}, u(\tilde{t}))}\big(u(\tilde{t})\big) \text{ p.p. } \tilde{t} \in [T_0, \tau].$$

D'après la Proposition 1.49, on obtient

$$-\dot{u}(\tilde{t}) + k(\tilde{t}) + l(\tilde{t}) \in N_{C(\tilde{t}, u(\tilde{t}))}(u(\tilde{t})) \text{ p.p. } \tilde{t} \in [T_0, \tau]. \tag{3.40}$$

D'autre part, on obtient par (3.39) que

$$\langle \varrho, k(\tilde{t}) \rangle \leq \limsup_{n\to+\infty} \delta^* \Big(\varrho, F(\tilde{t}, u_n(\tilde{t}) \Big).$$

la semi-continuité supérieure de F donne

$$\langle \varrho, k(\tilde{t}) \rangle \leq \delta^* \Big(\varrho, F(\tilde{t}, u(\tilde{t})) \Big).$$

D'après la convexité et la fermeture de la multi-application F, on trouve

$$k(\tilde{t}) \in F\big(\tilde{t}, u(\tilde{t})\big). \tag{3.41}$$

Par (3.40) et (3.41), on conclut que

$$\dot{u}(\tilde{t}) \in -N_{C(\tilde{t}, u(\tilde{t}))}\big(u(\tilde{t})\big) + F\big(\tilde{t}, u(\tilde{t})\big) + f\big(\tilde{t}, u(\tilde{t})\big) \text{ p.p. } \tilde{t} \in [T_0, \tau].$$

C'est-à-dire $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{PC})$. Alors $S_\tau(u_0)$ est compact pour tout $\tau \in \mathcal{I}$. Et, comme dans la preuve du Théorème 2.1 partie 2 (a), on déduit que $Acc_{u_0}(\tau)$ compacte. ■

3.3) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs presque convexes

Dans cette section, on étudie l'existence de solutions du problème $(\mathcal{ASP})$ et la relation entre de l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{ASP})$ et l'ensemble admissible du problème convexifié.

Considérons les hypothèses suivantes

Hypothèse 1 : Soit $C : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées qui satisfait :

$(\mathscr{H}_1^C)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $C(x)$ est equi-uniformément sous lisse ;

$(\mathscr{H}_2^C)$ il existe une constant $L_2 \in [0, 1[$ et pour tous $x, u, v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\big|d_{C(u)}(x) - d_{C(v)}(x)\big| \leq L_2\big\|u - v\big\|.$$

Hypothèse 2 : Soit $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ une multi-application mesurable à valeurs non vides compactes et presque convexes telles que :

$(\mathscr{H}_1^F)$ la multi-application $co(F(\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$;

$(\mathscr{H}_2^F)$ pour un certain $\alpha > 0$,

$$d_{co(F(x))}(0) \leq \alpha\big(1 + \|x\|\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Hypothèse 3 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que, pour un certain réel $\beta \geq 0$,

$$\big\|f(x)\big\| \leq \beta(1 + \|x\|) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit

$$X = \{F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n : F \text{ satisfait l'hypothèse 2}\},$$

$$Y = \{f \in C_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) : f \text{ satisfait l'hypothèse 3}\}.$$

Puisque la classe des ensembles presque convexes n'est pas stable par translation, nous allons définir une classe plus large Z qui contient les multi-applications à valeurs presque convexes et leurs translations telle que

$$Z = \big\{F \in X, \exists\, f \in Y : \ F + f \text{ est à valeurs presque convexes}\big\}.$$

Exemple 3.2. *L'ensemble $D = Fr(B) \cup \{0\}$, ou B est un boule, D est une ensemble presque convexe, et la translation est toujours presque convexe.*

Théorème 3.3.

Supposons que l'hypothèse 1 soit vérifiée et soit $F \in Z$. Alors pour chaque $u_0 \in C(u_0)$,

1. *le problème $(\mathcal{ASP})$ admet au moins une solution lipschitzienne ;*
2. *pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{ASP})$ en τ, $Acc_{u_0}(\tau)$, coïnside avec $Acc^{co}_{u_0}(\tau)$, l'ensemble admissible en τ du problème convexifié.*

Preuve.

(1). (a) Soit $[\alpha,\beta] \subset \mathcal{I}$ et supposons qu'il existe deux fonctions intégrables $\xi_1(\cdot)$ et $\xi_2(\cdot)$ définies sur $[\alpha,\beta]$, telles que

$$0 \leq \xi_1(t) \leq 1 \leq \xi_2(t) \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

vérifiant (2.47) et supposons que $\xi_1(t) > 0$ p.p. $t \in \mathcal{I}$

Avec la même manière que la preuve du Théorème 2.3 partie 1 (a), nous prouvons l'existence de deux ensembles mesurables de $[\alpha,\beta]$ ayant des fonctions caractéristiques $1\!\!\mathrm{I}_1$ et $1\!\!\mathrm{I}_2$ telles que

$$1\!\!\mathrm{I}_1(\cdot) + 1\!\!\mathrm{I}_2(\cdot) = 1\!\!\mathrm{I}_{[\alpha,\beta]}(\cdot),$$

et une fonction absolument continue

$$y : [\alpha,\beta] \longrightarrow [\alpha,\beta]$$

avec $y(\beta) - y(\alpha) = \beta - \alpha$, tel que

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\xi_1(t)}\, 1\!\!\mathrm{I}_1(t) + \frac{1}{\xi_2(t)}\, 1\!\!\mathrm{I}_2(t).$$

(b) Par le Théorème 3.1, il existe une solution lipcshitzienne $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ du problème

$$(\mathcal{ASP}_{co}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + co\big(F(u(t))\big) + f\big(u(t)\big) \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}; \\ u(t) \in C(u(t)) \quad \forall t \in \mathcal{I}; \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

Soit $m_T\big(x(\tau)\big) = Proj_{co(F(x(\tau)))+f(x(\tau))}(0)$ et considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{\tau \in \mathcal{I} : \ m_T\big(x(\tau)\big) = 0\}.$$

$\mathcal{A}$ est fermé. En effet, soit (τ_n) une suite de $\mathcal{A}$ qui converge vers $\tau \in \mathcal{I}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \tau_n \in \mathcal{I}$ et $m_T\big(x(\tau_n)\big) = 0$. Puisque $x(\cdot)$ est continue, alors $m_T\big(x(\tau)\big) = 0$, donc $\tau \in \mathcal{A}$ est $\mathcal{A}$ est fermé.

Cas 1. $\mathcal{A}$ est vide.

Dans ce cas $\xi_1(\tau) > 0$. Car sinon, on suppose le contraire c'est-à-dire,

$$\exists \tau_0 \in \mathcal{I} : \xi_1(\tau_0) = 0,$$

on obtient par la relation (2.47)

$$\xi_1(\tau_0) m_T\big(x(\tau_0)\big) = 0 \in F\big(x(\tau_0)\big) + f\big(x(\tau_0)\big) \subset co\Big(F\big(x(\tau_0)\big)\Big) + f\big(x(\tau_0)\big).$$

Donc, $m_T\big(x(\tau_0)\big) = 0$. D'où $\tau_0 \in \mathcal{A}$, ceci est en contradiction avec le fait que $\mathcal{A}$ est vide. Nous pouvons appliquer la partie (a) à l'intervalle $\mathcal{I}$. On pose

$$y(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{y}(s)\, ds.$$

$y(\cdot)$ est croissante et on a

$$y(T_0) = T_0 \quad \text{et} \quad y(T) = T,$$

donc, y est définie de $\mathcal{I}$ en lui même. Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \vartheta : \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ \tau & \longmapsto & \vartheta(\tau) = y^{-1}(\tau), \end{array}$$

où $y^{-1}(\cdot)$ est la fonction inverse de $y(\cdot)$ donc

$$\vartheta(T_0) = T_0 \quad \text{et} \quad \vartheta(T) = T.$$

Comme

$$1 = \frac{d}{d\tau} y(\vartheta(\tau)) = \dot{y}\big(\vartheta(\tau)\big)\, \dot{\vartheta}(\tau),$$

on obtient

$$\dot{\vartheta}(\tau) = \frac{1}{\dot{y}\big(\vartheta(\tau)\big)} = \xi_1\big(\vartheta(\tau)\big)\, \mathbb{1}_1(\vartheta(\tau)) + \xi_2\big(\vartheta(\tau)\big)\, \mathbb{1}_2(\vartheta(\tau)).$$

On définit la fonction $\tilde{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$, par

$$\tilde{x}(\tau) = x\big(\vartheta(\tau)\big) \quad \forall \tau \in \mathcal{I},$$

donc

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = \dot{\vartheta}(\tau)\, \dot{x}\big(\vartheta(\tau)\big).$$

Puisque $x(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{ASP}_{co})$, d'après la démonstration du Théorème 3.1 on a,

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) \in \dot{\vartheta}(\tau)\Big(- N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + m_T\big(x(\vartheta(\tau))\big)\Big).$$

En utilisant la propriété du cône normal et la définition de l'ensemble Z, on obtient pour tout $t \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &\in -N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + \dot{\vartheta}(\tau)m_T\big(x(\vartheta(\tau))\big)\\ &\in -N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + F\big(x(\vartheta(\tau))\big) + f\big(x(\vartheta(\tau))\big)\\ &= -N_{C(\tilde{x}(\tau))}\big(\tilde{x}(\tau)\big) + F\big(\tilde{x}(\tau)\big) + f\big(\tilde{x}(\tau)\big)\end{aligned}$$

donc, $\tilde{x}(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{ASP})$.

Cas 2. $\mathcal{A}$ est non vide. Soit $c = \sup\{\tau,\ \tau \in \mathcal{A}\}$, alors $c \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est fermé relativement à $\mathcal{I}$. Le complémentaire de $\mathcal{A}$ est un ouvert relative à $\mathcal{I}$, il est constitué d'une famille au plus dénombrable des intervalles ouverts $]\alpha_i, \beta_i[$, avec la possibilité que deux intervalles sont de la forme $[\alpha_{i_i}, \beta_{i_i}[$ avec $\alpha_{i_i} = T_0$ et la deuxième da la forme $]\alpha_{i_f}, \beta_{i_f}]$ avec $\alpha_{i_f} = c$. Pour tout i, appliquons la partie (a) à l'intervalle $]\alpha_i, \beta_i[$. Donc il existe deux sous ensembles mesurables de $]\alpha_i, \beta_i[$ leurs fonctions caractéristiques son $\mathbb{1}_1^i$ et $\mathbb{1}_2^i$ tels que

$$\mathbb{1}_1^i(\cdot) + \mathbb{1}_2^i(\cdot) = \mathbb{1}_{]\alpha_i,\beta_i[}(\cdot).$$

Posons

$$\dot{y}(\tau) = \frac{1}{\xi_1(\tau)}\,\mathbb{1}_1^i(\tau) + \frac{1}{\xi_2(\tau)}\,\mathbb{1}_2^i(\tau),$$

alors

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \dot{y}(\tau)d\tau = \beta_i - \alpha_i.$$

Sur l'intervalle $[T_0, c]$, on pose

$$\dot{y}(\tau) = \frac{1}{\xi_2(\tau)}\,\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\tau) + \sum_i \Big(\frac{1}{\xi_1(\tau)}\,\mathbb{1}_1^i(\tau) + \frac{1}{\xi_2(\tau)}\,\mathbb{1}_2^i(\tau)\Big),$$

où la somme est sur tous les intervalles contenus dans $[T_0, c]$. De plus, puisque $\xi_2(\tau) \geq 1$ et $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \dot{y}(\tau)d\tau = \beta_i - \alpha_i$ on trouve

$$\int_{T_0}^{c} \dot{y}(\tau)d\tau = \kappa \leq c - T_0.$$

Posons

$$y(\tau) = T_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{y}(\tau)d\tau,$$

on obtient que $y(\cdot)$ est une fonction inversible de $[T_0, c]$ à $[T_0, \kappa]$.

Soit $\vartheta : [T_0, \kappa] \to [T_0, c]$ la fonction inverse de $y(\cdot)$, alors le prolongement absolument continu de $\vartheta(\cdot)$ noté $\tilde{\vartheta}(\cdot)$ est défini par

$$\tilde{\vartheta}(\tau) = \begin{cases} \vartheta(\tau) & \text{si } \tau \in [T_0, \kappa], \\ c & \text{si } \tau \in]\kappa, c]. \end{cases}$$

Montrons que la fonction $\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{\vartheta}(\tau))$ est une solution du problème $(\mathcal{ASP})$ sur $[T_0, c]$ satisfaisant $\tilde{x}(c) = x(c)$.

• Pour $\tau \in [T_0, \kappa]$, on a $\tilde{\vartheta}(\tau) = \vartheta(\tau)$ qui est inversible et

$$\dot{\vartheta}(\tau) = \xi_2(\vartheta(\tau))\, 1\!\!\mathrm{I}_A(\vartheta(\tau)) + \sum_i \big(\xi_1(\vartheta(\tau))1\!\!\mathrm{I}_1^i(\vartheta(\tau)) + \xi_2(\vartheta(\tau))1\!\!\mathrm{I}_2^i(\vartheta(\tau))\big).$$

Comme

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = \dot{\tilde{\vartheta}}(\tau)\,\dot{x}(\tilde{\vartheta}(\tau)) = \dot{\vartheta}(\tau)\,\dot{x}(\vartheta(\tau)),$$

on trouve,

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = \dot{\vartheta}(\tau)\Big(- N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + m_T\big(x(\tau)\big)\Big). \tag{3.42}$$

En utilisant (2.47) et les propriétés du cône normal, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) &\in -N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + \dot{\vartheta}(\tau)m_T\big(x(\vartheta(\tau))\big)\\ &\in -N_{C(x(\vartheta(\tau)))}\big(x(\vartheta(\tau))\big) + F\big(x(\vartheta(\tau))\big) + f\big(x(\vartheta(\tau))\big)\\ &= -N_{C(\tilde{x}(\tau))}\big(\tilde{x}(\tau)\big) + F\big(\tilde{x}(\tau)\big) + f\big(\tilde{x}(\tau)\big)\end{aligned}$$

• Pour $\tau \in]\kappa, c]$, on a $\vartheta(\kappa) = c$ alors $\dot{\tilde{\vartheta}}(\tau) = 0$, donc on obtient

$$\tilde{\vartheta}(\tau) = \tilde{\vartheta}(\kappa) = \vartheta(\kappa) = c,$$

d'où

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tilde{\vartheta}(\tau)) = x(\tilde{\vartheta}(\kappa)) = \tilde{x}(\kappa),$$

donc $\tilde{x}$ est une constante sur $]\kappa, c]$, et comme $c \in \mathcal{A}$, on a

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 \in co(F(\tilde{x}(\tau)) + f(\tilde{x}(\tau)).$$

De plus,

$$0 \in N_{C(\tilde{x}(\tau))}\big(\tilde{x}(\tau)\big),$$

on conclut que pour tout $\tau \in]\kappa, c]$

$$\frac{d}{d\tau}\tilde{x}(\tau) = 0 \in -N_{C(\tilde{x}(\tau))}\big(\tilde{x}(\tau)\big) + F\big(\tilde{x}(\tau)\big) + f\big(\tilde{x}(\tau)\big).$$

Donc, $\tilde{x}(\cdot)$ est une solution du $(\mathcal{ASP})$ sur $[T_0, c]$ qui vérifie $\tilde{x}(c) = x(c)$.
Sur l'intervalle $]c, T]$, $\mathcal{A}$ est vide et $\xi_1(\tau) > 0$, alors on peut répéter les mêmes arguments de la partie (a) pour conclure que $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathcal{ASP})$.
(**2**) Soit $u(\tau) \in Acc_{u_0}(\tau)$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, on a $u(\cdot)$ est une solution lipschitzienne du problème $(\mathcal{ASP})$ sur $[T_0, \tau]$ qui satisfait l'inclusion

$$\begin{aligned}\dot{u}(\tau) &\in -N_{C(u(\tau))}\big(u(\tau)\big) + F\big(u(\tau)\big) + f\big(u(\tau)\big)\\ &\subset -N_{C(u(\tau))}\big(u(\tau)\big) + co\big(F\big(u(\tau)\big)\big) + f\big(u(\tau)\big)\end{aligned}$$

d'où $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathcal{ASP}_{co})$. Alors

$$u(\tau) \in Acc_{u_0}^{co}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{I},$$

donc

$$Acc_{u_0}(\tau) \subset Acc_{u_0}^{co}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{I}. \tag{3.43}$$

Inversement, soit $u(\tau) \in Acc_{u_0}^{co}(\tau)$, pour tout $\tau \in \mathcal{I}$, alors $u(\cdot)$ est une solution lipschitzienne du problème $(\mathcal{ASP}_{co})$ sur $[T_0, \tau]$. Reprenant les mêmes étapes de la preuve du Théorème 3.3 sur $[T_0, \tau]$, on trouve une solution $\tilde{u}(\cdot) : [T_0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ du problème $(\mathcal{ASP})$ tel que

$$\tilde{u}(\tau) = u(\tau) \in Acc_{u_0}(\tau).$$

Donc,

$$Acc_{u_0}^{co}(\tau) \subset Acc_{u_0}(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{I}. \tag{3.44}$$

Par (3.43) et (3.44) on aura l'égalité

$$Acc_{u_0}(\tau) = Acc_{u_0}^{co}(\tau), \quad \forall \tau \in \mathcal{I}.$$

■

3.4) Étude d'un problème du temps minimal

Comme application des résultats précédents, nous donnons le théorème suivant

Théorème 3.4. *Supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée. Soit* $U : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ *une multi-application à valeurs compactes, semi-continue supérieurement dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue satisfaisant l'hypothèse suivante :*

($\mathscr{H}^h$) *il existe une constante non négative* α*, telle que :*

$$\|h(x,y)\| \leq \alpha(1+\|x\|) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ *une multi-application définie par*

$$F(x) = \big\{h(x,z)\big\}_{z \in U(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Supposons que $F \in Z$*, tel que*

$$Z = \big\{F \in X, \exists f \in Y : F + f \textit{ est à valeurs presque convexes}\big\}.$$

Soient u_0, ξ *donnés dans* $\mathbb{R}^n$ *tels que* $u_0 \in C(u_0)$ *et pour tout* $\bar{t} \in \mathcal{I}$*,* $\xi \in Acc_{u_0}(\bar{t})$*. Donc, le problème d'atteindre* ξ *à partir de* u_0 *en un temps minimal admet une solution.*

Preuve.
Considèrons l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{t \in [T_0, \bar{t}] \ : \ \xi \in Acc_{u_0}(t)\}.$$

Par les hypothèses, le problème $(\mathcal{ASP})$ admet au moins une solution sur $[T_0, \bar{t}]$. Donc pour tout $t \in [T_0, \bar{t}]$, l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(t)$ est non vide. D'où $\mathcal{M} \neq \emptyset$. On prend $\tau = \inf \mathcal{M}$, donc, il existe une suite décroissante $(\tau_n)_n$ dans $[T_0, \bar{t}]$ qui converge vers τ et une fonction $u_n(\cdot)$ solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + F\big(u(t)\big) + f\big(u(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in [T_0, \tau_n], \\ u(t) \in C(u(t)) \ \ \forall t \in [T_0, \tau_n], \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

tel que, pour tout $n \geq 1$, $u_n(\tau_n) = \xi$. Aussi, $u_n(\cdot)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + co(F)\big(u(t)\big) + f\big(u(t)\big) \quad \text{p.p. } t \in [T_0, \tau_n], \\ u(t) \in C(u(t)) \ \ \forall t \in [T_0, \tau_n], \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0). \end{cases}$$

Soit $w_n(t) = u_n(t)$ pour $t \in [T_0, \tau]$, $w_n(\cdot) \in S_\tau(u_0)$. Par la preuve du Théorème 3.3, cet ensemble est compact. Alors on peut extraire une sous suite de $(\omega_n(\cdot))_n$ qui converge uniformément vers $\omega(\cdot) \in S_\tau(u_0)$. D'autre part, on a

$$\xi = u_n(\tau_n) \in Acc^{co}_{u_0}(\tau_n),$$

d'après le Théorème 2.1, la multi-application $Acc^{co}_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes non vides., de plus par le Théorème 1.25, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} Acc^{co}_{u_0}(\tau_n) = Acc^{co}_{u_0}(\tau).$$

Alors,

$$\xi \in Acc^{co}_{u_0}(\tau) = Acc_{u_0}(\tau).$$

Par conséquent, ω est une solution du problème $(\mathcal{ASP}_{\mathcal{O}})$ qui atteint ξ en un temps minimum, et τ est la valeur du temps minimal. $\blacksquare$

Chapitre 4

Existence de solutions pour le processus de la rafle avec des perturbations dépendant de temps de l'état et la vitesse

Sommaire

4.1) Indroduction du chapitre

Dans ce chapitre, on commence par étudie l'existence de solution et la compacité de l'ensemble addmissible pour le problème

$$(\mathfrak{I}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) + h\big(t, \dot{u}(t)\big) \in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) + H\big(t, u(t)\big) \;\text{ p.p. } \; t \in \mathcal{I}; \\ u(t) \in C(t, u(t)) \;\; \forall\, t \in \mathcal{I}; \\ u(T_0) = u_0 \in C(T_0, u_0), \end{cases}$$

tel que $h : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue dépendant de la vitesse et $H : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoondown \mathbb{R}^n$ est une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides fermées convexes non nécessairement bornées.

En deuxième étape, nous traitons le problème autonome

$$(\mathfrak{AI}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) + h\big(\dot{u}(t)\big) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + H\big(u(t)\big) \;\text{ p.p. } \; t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \;\; \forall\, t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

avec les hypothèses plus faibles sur la semi-continuité supérieure et la presque convexité de la multi-application.

Finalement, comme application, on considère le système de contrôle

$$(\mathfrak{OP}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) + h\big(\dot{u}(t)\big) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + f\big(u(t), z(t)\big) \;\text{ p.p. } \; t \in \mathcal{I}, \\ z(t) \in Z(u(t)) \text{ et } u(t) \in C(u(t)) \;\; \forall\, t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0 \in C(u_0), \end{cases}$$

contrôler par $z(t) \in Z(u(t))$, tel que $Z : \mathbb{R}^n \rightharpoondown \mathbb{R}^n$ es une multi-application semi-continuite supérieurement à valeurs compactes et l'ensemble

$$H(u(t)) = f(u(t), Z(t)) = \{f(u(t), z(t))\}_{z(t) \in Z(u(t))}$$

est à valeurs presque convexes.

4.2) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs convexes

Dans cette partie, nous commençons par étudie l'existence de solutions du problème $(\mathfrak{I})$ où la multi-application H est semi-continue supérieurement à valeurs convexes.

Théorème 4.1.
Soit $C : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ multi-application à valeurs non vides fermées satisfaisant :

$(\mathcal{H}_1^C)$ *pour tout $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble $C(t, x)$ est equi-uniformément sous lisse ;*

$(\mathcal{H}_2^C)$ *ils existent deux constantes $\Lambda_1 \geq 0$, $\Lambda_2 \in [0, 1[$ tels que, pour tous $t, s \in \mathcal{I}$ et tous $x, y, u \in \mathbb{R}^n$*

$$\left|d_{C(t,x)}(u) - d_{C(s,y)}(u)\right| \leq \Lambda_1 |t - s| + \Lambda_2 \left\|x - y\right\|.$$

Soit $H : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées qui satisfait :

$(\mathcal{H}_3^H)$ *pour un certain réel $\alpha \geq 0$,*

$$d_{H(t,x)}(0) \leq \alpha(1 + \|x\|) \;\; \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Soit $h : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que :

$(\mathcal{H}_4^h)$ *pour un certain réel $\beta \geq 0$,*

$$\left\|h(t, y)\right\| \leq \beta \quad \forall (t, y) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n.$$

Donc, pour tout $u_0 \in C(T_0, u_0)$, le problème $(\mathfrak{I})$ admet au moins une solution lipschitzienne $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq \Theta \;\; p.p. \;\; t \in \mathcal{I},$$

où

$$\Theta := \frac{1}{1 - \Lambda_2}\Big(\Lambda_1 + 2(\alpha + \beta)(2 + \Delta)\Big),$$

et

$$\Delta := \Big(\|u_0\| + T\frac{\Lambda_1 + 4(\alpha + \beta)}{1 - \Lambda_2}\Big) \exp\Big(\frac{2\,(\alpha + \beta)\,T}{1 - \Lambda_2}\Big).$$

Preuve.

Pour tout $(t,x,y)\in\mathcal{I}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, on pose $g(t,x,y)=m(t,x)-h(t,y)$, où $m(t,x)$ l'élément de la norme minimale de H c'est-à-dire, $m(t,x)=Proj_{H(t,x)}(0)$.
Par $(\mathcal{H}_3^H)$ et $(\mathcal{H}_4^h)$, on a

$$\|g(t,x,y)\|\le\alpha(1+\|x\|)+\beta\le\gamma(2+\|x\|), \tag{4.1}$$

où $\gamma=\alpha+\beta$. Pour tout entier $n\ge 1$, considérons la partition de $\mathcal{I}$ par les points

$$\mathcal{I}_k^n=[t_k^n,t_{k+1}^n[,\ t_k^n=T_0+k\,e_n,\ e_n=\frac{T-T_0}{n},\ k\in\{0,1,\dots,n-1\}\ \text{ et }\ \mathcal{I}_n^n=\{t_n^n\}=\{T\}.$$

Etape 1. On définit inductivement la suite $(\mathbf{x_k^n})_{\mathbf{0\le k\le n-1}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.
Supposons

$$x_0^n=u_0\in C(t_0^n,x_0^n)\qquad\text{et}\qquad x_1^n\in Proj_{C(t_1^n,x_0^n)}\Big(x_0^n+e_n g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\Big).$$

cet algorithme est bien défini puisque C est à valeurs fermées et on a

$$x_1^n\in C\big(t_1^n,x_0^n\big). \tag{4.2}$$

On obtient par (4.2),

$$\begin{aligned}\big\|x_1^n-x_0^n\big\| &\le \big\|x_1^n-\big(x_0^n+e_n g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big)\big\|+e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|\\ &= d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n+e_n g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big)+e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|\\ &\le d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n\big)+e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|+e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|\\ &\le \Big|d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_0^n\big)-d_{C(t_0^n,x_0^n)}\big(x_0^n\big)\Big|+2e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|\end{aligned}$$

En utilisant $(\mathcal{H}_2^C)$ et la relation (4.1) on trouve,

$$\begin{aligned}\big\|x_1^n-x_0^n\big\| &\le \Lambda_1|t_1^n-t_0^n|+2e_n\big\|g\big(t_0^n,x_0^n,\frac{x_0^n}{e_n}\big)\big\|\\ &\le \Lambda_1 e_n+2\gamma e_n(2+\|x_0^n\|).\end{aligned} \tag{4.3}$$

Maintenant, nous définissons la suite $(x_k^n)_{1\le k\le n-1}$ comme suit

$$x_{k+1}^n\in Proj_{C(t_{k+1}^n,x_k^n)}\Big(x_k^n+e_n g\big(t_k^n,x_k^n,\frac{x_k^n-x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big), \tag{4.4}$$

et nous avons

$$x_{k+1}^n\in C\big(t_{k+1}^n,x_k^n\big); \tag{4.5}$$

et

$$x_{k+1}^n-x_k^n-e_n g\big(t_k^n,x_k^n,\frac{x_k^n-x_{k-1}^n}{e_n}\big)\in -N_{C(t_{k+1}^n,x_k^n)}(x_{k+1}^n); \tag{4.6}$$

Cet algorithme est bien défini. En effet, pour $k = 1$ et par la fermeture de l'ensemble $C(t_2^n, x_1^n)$, on peut prendre

$$x_2^n \in Proj_{C(t_2^n,x_1^n)}\big(x_1^n + e_n g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big), \tag{4.7}$$

alors

$$x_2^n \in C\big(t_2^n, x_1^n\big). \tag{4.8}$$

La Proposition 1.49 et la relation (4.7) donnent

$$x_2^n - x_1^n - e_n g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big) \in -N_{C(t_2^n,x_1^n)}(x_2^n).$$

De (4.2) et (4.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\big\|x_2^n - x_1^n\big\| &\leq \big\|x_2^n - (x_1^n + e_n g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\| + e_n\big\|g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\| \\
&= d_{C(t_2^n,x_1^n)}\big(x_1^n + e_n g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big) + e_n\big\|g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\| \\
&\leq d_{C(t_2^n,x_1^n)}\big(x_1^n\big) + e_n\big\|g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\| + e_n\big\|g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\| \\
&\leq \Big|d_{C(t_2^n,x_1^n)}\big(x_1^n\big) - d_{C(t_1^n,x_0^n)}\big(x_1^n\big)\Big| + 2e_n\big\|g\big(t_1^n, x_1^n, \frac{x_1^n - x_0^n}{e_n}\big)\big\|
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_2^C)$ et la relation (4.1), on a

$$\big\|x_2^n - x_1^n\big\| \leq \Lambda_1|t_2^n - t_1^n| + \Lambda_2\|x_1^n - x_0^n\| + 2\gamma e_n(2 + \|x_1^n\|)$$

donc,

$$\big\|x_2^n - x_1^n\big\| \leq \Lambda_1 e_n + \Lambda_2\|x_1^n - x_0^n\| + 2\gamma e_n(2 + \|x_1^n\|).$$

Supposons que $(x_k^n)_{0\leq k\leq n-2}$ ont été construits satisfaisant (4.4), (4.5) et (4.6). Puisque $C(t_{k+1}^n, x_k^n)$ est fermé, on peut prendre

$$x_{k+1}^n \in Proj_{C(t_{k+1}^n,x_k^n)}\Big(x_k^n + e_n g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big),$$

et observons que

$$x_{k+1}^n \in C\big(t_{k+1}^n, x_k^n\big).$$

D'après la Proposition 1.49, on peut écrire

$$x_{k+1}^n - x_k^n - e_n g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big) \in -N_{C(t_{k+1}^n,x_k^n)}(x_{k+1}^n).$$

En utilisant $(\mathcal{H}_2^C)$, (4.1) et (4.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq \Big\|x_{k+1}^n - \big(x_k^n + e_n g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\big)\Big\| + e_n\Big\|g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big\| \\
&= d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\big(x_k^n + e_n g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\big) + e_n\Big\|g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big\| \\
&\leq d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\big(x_k^n\big) + e_n\Big\|g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big\| + e_n\Big\|g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big\| \\
&\leq \Big|d_{C(t_{k+1}^n, x_k^n)}\big(x_k^n\big) - d_{C(t_k^n, x_{k-1}^n)}\big(x_k^n\big)\Big| + 2e_n\Big\|g\big(t_k^n, x_k^n, \frac{x_k^n - x_{k-1}^n}{e_n}\big)\Big\| \\
&\leq \Lambda_1|t_{k+1}^n - t_k^n| + 2\gamma e_n(2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| \\
&\leq \Lambda_1 e_n + 2\gamma e_n(2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\|.
\end{aligned}$$

Par induction, on trouve

$$\begin{aligned}
&\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq \Lambda_1 e_n + 2\gamma e_n(2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2\|x_k^n - x_{k-1}^n\| \\
&\leq \Lambda_1 e_n + 2\gamma e_n(2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2\Big(\Lambda_1 e_n + 2\gamma e_n(2 + \|x_{k-1}^n\|) + \Lambda_2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\|\Big) \\
&= \Lambda_1 e_n(1 + \Lambda_2) + 2\gamma e_n\Big((2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2(2 + \|x_{k-1}^n\|)\Big) + \Lambda_2^2\|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\| \\
&\leq \Lambda_1 e_n\Big(1 + \Lambda_2 + \Lambda_2^2\Big) + 2\gamma e_n\Big((2 + \|x_k^n\|) + \Lambda_2(2 + \|x_{k-1}^n\|) + \Lambda_2^2(2 + \|x_{k-2}^n\|)\Big) + \Lambda_2^3\|x_{k-2}^n - x_{k-3}^n\| \\
&= (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\Big(1 + \Lambda_2 + \Lambda_2^2\Big) + 2\gamma e_n\Big(\|x_k^n\| + \Lambda_2\|x_{k-1}^n\| + \Lambda_2^2\|x_{k-2}^n\|\Big) + \Lambda_2^3\|x_{k-2}^n - x_{k-3}^n\|,
\end{aligned}$$

ainsi, on déduit que

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\Big(1 + \Lambda_2 + \Lambda_2^2 + \ldots + \Lambda_2^{k-1}\Big) + 2\gamma e_n\Big(\|x_k^n\| + \Lambda_2\|x_{k-1}^n\| + \Lambda_2^2\|x_{k-2}^n\| \\
+ \ldots + \Lambda_2^{k-1}\|x_1^n\|\Big) + \Lambda_2^k\|x_1^n - x_0^n\|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité précédente et la relation (4.3), on trouve

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\Big(1 + \Lambda_2 + \Lambda_2^2 + \ldots + \Lambda_2^{k-1}\Big) + 2\gamma e_n\Big(\|x_k^n\| + \Lambda_2\|x_{k-1}^n\| + \Lambda_2^2\|x_{k-2}^n\| \\
&+ \ldots + \Lambda_2^{k-1}\|x_1^n\|\Big) + (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\Lambda_2^k + 2\gamma\Lambda_2^k e_n\|x_0^n\| \\
&= (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\Big(1 + \Lambda_2 + \Lambda_2^2 + \ldots + \Lambda_2^{k}\Big) + 2\gamma e_n\Big(\|x_k^n\| + \Lambda_2\|x_{k-1}^n\| + \Lambda_2^2\|x_{k-2}^n\| \\
&+ \ldots + \Lambda_2^{k}\|x_0^n\|\Big),
\end{aligned}$$

alors

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq (\Lambda_1 + 4\gamma)e_n\sum_{i=0}^{k}\Lambda_2^i + 2\gamma e_n\sum_{i=0}^{k}\Lambda_2^{k-i}\|x_i^n\|.$$

Puisque $\Lambda_2 \in [0, 1[$,

$$\|x_{k+1}^n - x_k^n\| \leq \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1 - \Lambda_2}e_n + 2\gamma e_n\sum_{i=0}^{k}\Lambda_2^{k-i}\|x_i^n\|. \tag{4.9}$$

De plus,

$$\|x_k^n\| \leq \|x_k^n - x_{k-1}^n\| + \|x_{k-1}^n - x_{k-2}^n\| + \ldots + \|x_1^n - x_0^n\| + \|x_0^n\|,$$

il vient donc par la relation (4.9) que

$$\begin{aligned}
\|x_k^n\| &\leq \|x_0^n\| + \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2} e_n + 2\gamma e_n \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_2^{k-i} \|x_i^n\| + \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2} e_n + 2\gamma e_n \sum_{i=0}^{k-2} \Lambda_2^{k-i} \|x_i^n\| \\
&+ \ldots + (\Lambda_1 + 4\gamma) e_n + 2\gamma e_n \|x_0^n\| \\
&\leq \|x_0^n\| + \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2} e_n (k-1) + 2\gamma e_n \|x_0^n\| \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_2^i + 2\gamma e_n \|x_1^n\| \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_2^i \\
&+ \|x_0^n\| + 2\gamma e_n \|x_2^n\| \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_2^i + \ldots + 2\gamma e_n \|x_{k-1}^n\| \sum_{i=0}^{k-1} \Lambda_2^i \\
&\leq \|x_0^n\| + T \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2} + \frac{2\gamma\, e_n}{1-\Lambda_2} \sum_{i=0}^{k-1} \|x_i^n\|.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.56 et pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on peut écrire

$$\|x_k^n\| \leq \left(\|x_0^n\| + T \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2} \right) \exp\left(\frac{2\gamma\, T}{1-\Lambda_2} \right) =: \Delta. \tag{4.10}$$

En utilisant les relations (4.9) et (4.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1}^n - x_k^n\| &\leq \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2}\, e_n + 2\gamma\, e_n \sum_{i=0}^{k} \Lambda_2^{k-i} \Delta \\
&= \frac{\Lambda_1 + 4\gamma}{1-\Lambda_2}\, e_n + 2\gamma\, e_n \Delta \sum_{i=0}^{k} \Lambda_2^{k-i}.
\end{aligned}$$

Puisque $\Lambda_2 \in [0, 1[$, on obtient

$$\frac{\|x_{k+1}^n - x_k^n\|}{e_n} \leq \frac{1}{1-\Lambda_2} \big(\Lambda_1 + 4\gamma + 2\gamma\Delta \big) =: \Theta. \tag{4.11}$$

Etape 2. Construction de la suite $\big(\mathbf{u_n}(\cdot)\big)_{\mathbf{n}}$.

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathcal{I}_k^n$, $1 \leq k \leq n-1$, on définit

$$u_n(t) = x_k^n + \big(t - t_k^n\big) \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}.$$

Donc,

$$u_n(t_k^n) = x_k^n + \big(t_k^n - t_k^n\big) \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n} = x_k^n;$$

et

$$u_n(t_{k+1}^n) = x_k^n + \big(t_{k+1}^n - t_k^n\big) \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n} = x_{k+1}^n.$$

Clairement que u_n est absolument continue sur chaque intervalle $\mathcal{I}_k^n$. De plus, pour presque tout $t \in]t_k^n, t_{k+1}^n[$,

$$\dot{u}_n(t) = \frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}. \tag{4.12}$$

Par (4.11) et (4.12), on a

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \Theta. \tag{4.13}$$

Maintenant, on définit deux fonctions δ_n, η_n de $\mathcal{I}$ à $\mathcal{I}$ par

$$\delta_n(t) = \begin{cases} t_k^n & \text{si} \quad t \in [t_{k-1}^n, t_{k+1}^n[, \\ t_{n-1}^n & \text{si} \quad\quad t = T. \end{cases} \tag{4.14}$$

$$\eta_n(t) = \begin{cases} t_{k+1}^n & \text{si} \quad t \in [t_{k-1}^n, t_{k+1}^n[, \\ t_n^n & \text{si} \quad\quad t = T. \end{cases} \tag{4.15}$$

Donc, pour tout $t \in \mathcal{I}$

$$\lim_{n\to+\infty} \big|\delta_n(t) - t\big| = \lim_{n\to+\infty} \big|\eta_n(t) - t\big| = 0. \tag{4.16}$$

En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} |\eta_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t_{k+1}^n - t) \leq \lim_{n\to+\infty} (t_{k+1}^n - t_k^n) = \lim_{n\to+\infty} e_n = 0,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} |\delta_n(t) - t| = \lim_{n\to+\infty} (t - t_k^n) \leq \lim_{n\to+\infty} (t_{k+1}^n - t_k^n) = \lim_{n\to+\infty} e_n = 0.$$

En combinant (4.5), (4.6), (4.12), (4.14) et (4.15), il en résulte que

$$u_n\big(\eta_n(t)\big) \in C\big(\eta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big) \;\; \forall \;\; t \in \mathcal{I}, \tag{4.17}$$

et

$$\dot{u}_n(t) - g\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)), \dot{u}_n(t)\big) \in -N_{C(\eta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\,\big(u_n(\eta_n(t))\big) \text{ p.p. } t \in \mathcal{I}. \tag{4.18}$$

De plus, pour tout $t \in \mathcal{I}$, nous avons

$$\|m\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big)\| \leq \alpha(1 + \Delta), \tag{4.19}$$

$$\|h\big(\delta_n(t), \dot{u}_n(t)\big)\| \leq \beta, \tag{4.20}$$

et

$$\|g\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)), \dot{u}_n(t)\big)\| \leq \gamma(2 + \Delta). \tag{4.21}$$

Etape 3. La convergence des suites.

Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathcal{I}$, par la définition de $u_n(\cdot)$ et les relations (4.13) et (4.16) on a

$$\begin{aligned}
\big\|u_n(\eta_n(t)) - u_n(t)\big\| &= \Big\|x_k^n + \big(\eta_n(t) - t_k^n\big)\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n} - x_k^n\big(t - t_k^n\big)\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\Big\| \\
&= \Big\|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\big(\eta_n(t) - t_k^n - t + t_k^n\big)\Big\| \\
&= \Big\|\frac{x_{k+1}^n - x_k^n}{e_n}\big(\eta_n(t) - t\big)\Big\| \\
&= \|\dot{u}_n(t)\||\eta_n(t) - t| \\
&\leq \Theta|\eta_n(t) - t|.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on trouve

$$\big\|u_n(\eta_n(t)) - u_n(t)\big\| \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \to +\infty \tag{4.22}$$

De la même manière, on aura

$$\big\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\big\| \leq \|\dot{u}_n(t)\||\delta_n(t) - t| \leq \Theta|\delta_n(t) - t|,$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \big\|u_n(\delta_n(t)) - u_n(t)\big\| = 0. \tag{4.23}$$

En outre, puisque $\|u_n(t)\| - \|u_n(\eta_n(t))\| \leq \big\|u_n(\eta_n(t)) - u_n(t)\big\|$, on aura

$$\|u_n(t)\| - \|u_n(\eta_n(t))\| \leq \Theta\big(\eta_n(t) - t\big) \leq \Theta(T - T_0),$$

alors, on a $\big($tenant en compte la relation (4.10)$\big)$

$$\|u_n(t)\| \leq \Theta(T - T_0) + \|u_n(\eta_n(t))\| \leq \Theta(T - T_0) + \Delta,$$

c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathcal{I}$, $(u_n(t))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$.

D'autre part, pour tous $t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ tel que $t_1 \leq t_2$, on a

$$\big\|u_n(t_2) - u_n(t_1)\big\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \big\|\dot{u}_n(s)\big\|\, ds \leq \Theta(t_2 - t_1).$$

Alors, $(u_n(\cdot))_n$ est équi-continue. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.16), $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$. Puisque

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \Theta \quad p.p.\ t \in \mathcal{I},$$

par la conséquence du théorème d'Ascoli-Arzelà (Théorème 1.17), on conclut qu'il existe une sous suite (notée à nouveau par $(u_n(\cdot))_n$) convergeant vers une fonction absolument

continue $u(\cdot)$ dans le sens où, $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ dans $C_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ et $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma\big(L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ vers $z(\cdot) \in L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$.
Puisque $u_n(\cdot)$ est une fonction absolument continue, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \big(u_n(t) - u_0\big) = \lim_{n\to+\infty} \int_{T_0}^t \dot{u}_n(s)\, ds = \int_{T_0}^t z(s)\, ds.$$

Alors,

$$u(t) = u_0 + \int_{T_0}^t z(s) \ \ \forall t \in \mathcal{I}.$$

Donc, la fonction $u(\cdot)$ est absolument continue sur $\mathcal{I}$ avec $z = \dot{u}$ p.p. La fonction $u(\cdot)$ est même lipschitzienne sur $\mathcal{I}$ de rapport Θ car $\|z(t)\| \leq \Theta$ p.p.
Soit $\big(\rho_n(\cdot)\big)_n = \Big(h\big(\delta_n(\cdot), \dot{u}_n(\cdot)\big)\Big)_n$. Puisque $\big(\dot{u}_n(\cdot)\big)_n$ converge $\sigma\big(L^1_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{I}), L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})\big)$ vers $\dot{u}(\cdot)$, $(\delta_n(\cdot))_n$ converge vers t et $h(\delta_n(\cdot), \dot{u}_n(\cdot))$ est continue, alors que $(\rho_n(\cdot))_n$ converge foretement vers $\rho(\cdot)$.
Soit maintenant $\big(\varpi_n(\cdot)\big)_n = \Big(m\big(\delta_n(\cdot), u_n(\delta_n(\cdot))\big)\Big)_n$. On a

$$\|\varpi_n(t)\| \leq \alpha(1+\Delta) \quad \forall\, t \in \mathcal{I},$$

donc, $(\varpi_n(\cdot))_n$ est bornée dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$, alors on peut extraire une sous suite (notée aussi $(\varpi_n(\cdot))_n$) qui converge faiblement dans $L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers une fonction $\varpi(\cdot) \in L^\infty_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$. Ce qui implique que $(\varpi_n(\cdot))_n$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers une fonction $\varpi(\cdot)$ telle que

$$\|\varpi(t)\| \leq \alpha(1+\Delta) \quad \forall\, t \in \mathcal{I}.$$

Etape 4. Montrons que

$$\mathbf{\dot{u}(t) + h\big(t, \dot{u}(t)\big) \in -N_{C(t,u(t))}\big(u(t)\big) + H\big(t, u(t)\big) \ p.p.\ \ t} \in \mathcal{I}.$$

Pour tout $t \in \mathcal{I}$, nous avons $u(t) \in C\big(t, u(t)\big)$. En effet, par $(\mathcal{H}_2^C)$ et (4.17), on a

$$\begin{aligned}
d_{C(t,u(t))}\big(u_n(t)\big) &\leq d\big(u_n(t), u_n(\eta_n(t))\big)\big) + d_{C(t,u(t))}\big(u_n(\eta_n(t))\big) \\
&= \|u_n(t) - u_n(\eta_n(t))\| + d_{C(t,u(t))}\big(u_n(\eta_n(t))\big) \\
&\leq \|u_n(t) - u_n(\eta_n(t))\| + \Big|d_{C(t,u(t))}\big(u_n(\eta_n(t))\big) - d_{C(\eta_n(t),u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\eta_n(t))\big)\Big| \\
&\leq \|u_n(t) - u_n(\eta_n(t))\| + \Lambda_1|t - \eta_n(t)| + \Lambda_2\big\|u(t) - u_n(\delta_n(t))\big\|.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.16), (4.22), (4.23) et par passage à limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$d\big(u(t), C\big(t, u(t)\big)\big) = 0.$$

Puisque $C\big(t, u(t)\big)$ est fermé on trouve,

$$u(t) \in C\big(t, u(t)\big) \quad \forall\, t \in \mathcal{I}.$$

D'autre part, par (4.13) et (4.21), on a

$$\big\|\dot{u}_n(t) + \rho_n(t) - \varpi_n(t)\big\| \leq \Theta + \gamma(2+\Delta) =: \ell,$$

qui donne

$$\dot{u}_n(t) + \rho_n(t) - \varpi_n(t) \in \ell\mathbb{B}. \tag{4.24}$$

Donc, par les relations (4.18) et (4.24), on arrive à

$$\dot{u}_n(t) + \rho_n(t) - \varpi_n(t) \in -N_{C(\eta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\,\big(u_n(\eta_n(t))\big) \cap \ell\mathbb{B}, \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I},$$

utilisant la Proposition 1.49, il resulte que

$$\dot{u}_n(t) + \rho_n(t) - \varpi_n(t) \in -\ell\partial d_{C(\eta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\eta_n(t))\big) \text{ p.p. } \ t \in \mathcal{I}. \tag{4.25}$$

De plus, pour tout $t \in \mathcal{I}$, on a

$$\varpi_n(t) \in H\big(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t))\big). \tag{4.26}$$

Comme $\big(\dot{u}_n(\cdot) + \rho_n(\cdot) - \varpi_n(\cdot), \varpi_n(\cdot)\big)_n$ converge faiblement dans $L^1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ (d'après l'étape 3) vers $\big(\dot{u}(\cdot) + \rho(\cdot) - \varpi(\cdot), \varpi(\cdot)\big)$, donc par le lemme de Mazur il existe une suite $\big(\omega_n(\cdot), \zeta_n(\cdot)\big)_n$ qui converge fortement dans $L^1_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}(\mathcal{I})$ vers $\big(\dot{u}(\cdot) + \rho(\cdot) - \varpi(\cdot), \varpi(\cdot)\big)$, avec

$$\omega_n(\cdot) \in co\{\dot{u}_k(\cdot) + \rho_k(\cdot) - \varpi_k(\cdot) : \ \ k \geq n\}, \forall\, n \geq 0,$$

et

$$\zeta_n(\cdot) \in co\{\varpi_k(\cdot) : \ \ k \geq n\}, \forall\, n \geq 0.$$

On peut extraire une sous suite de $(\omega_n(\cdot), \zeta_n(\cdot))_n$ qui converge presque partout vers $\big(\dot{u}(\cdot) + \rho(\cdot) - \varpi(\cdot), \varpi(\cdot)\big)$. Alors, il existe un ensemble Lebesgue négligeable $\mathcal{N} \subset \mathcal{I}$ tel que pour chaque $t \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{N}$,

$$\dot{u}(t) + \rho(t) - \varpi(t) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{\omega_k(t) : \ k \geq n\}} \subset \bigcap_{n \geq 0} \overline{co}\{\dot{u}_k(t) + \rho_k(t) - \varpi_k(t) : \ k \geq n\} \tag{4.27}$$

et

$$\varpi(t) \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{\varpi_k(t) : \ \ k \geq n\}} \subset \bigcap_{n \geq 0} \overline{co}\{\varpi_k(t) : \ \ k \geq n\}. \tag{4.28}$$

D'où, pour tout $t \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{N}$ et $\mu \in \mathbb{R}^n$, les relations (4.25) et (4.27) donnent

$$\Big\langle \mu, \dot{u}(t) + \rho(t) - \varpi(t) \Big\rangle \leq \limsup_{n \to +\infty} \delta^*\Big(\mu, -\ell\partial d_{C(\eta_n(t), u_n(\delta_n(t)))}\big(u_n(\eta_n(t))\big)\Big).$$

Par la Proposition 1.54, on trouve

$$\Big\langle \mu, \dot{u}(t) + \rho(t) - \varpi(t) \Big\rangle \leq \delta^*\Big(\mu, -\ell\partial d_{C(t, u(t))}\big(u(t)\big)\Big).$$

Puisque $t \mapsto -\ell \partial d_{C(t,u(t)}\big(u(t)\big)$ est à valeurs convexes et fermées, on conclut que

$$\dot{u}(t) + \rho(t) - \varpi(t) \in -\ell \partial d_{C(t,u(t)}\big(u(t)\big)\big) \subset -N_{C(t,u(t))}(u(t)). \tag{4.29}$$

De plus, par (4.26), (4.28) et la semi continuité supérieure de H, on a pour tout $t \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{N}$

$$\begin{aligned} \Big\langle \mu, \varpi(t) \Big\rangle &\leq \limsup_{n \to +\infty} \delta^* \Big(\mu, H(\delta_n(t), u_n(\delta_n(t)))\Big) \\ &\leq \delta^* \Big(\mu, H(t, u(t))\Big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Puisque H est à valeurs convexes fermées, on obtient

$$\varpi(t) \in H\big(t, u(t)\big), \quad \forall\, t \in \mathcal{I} \backslash \mathcal{N}.$$

On conclut par (4.29) et (4.30), que

$$\dot{u}(t) + h\big(t, \dot{u}(t)\big) \in -N_{C(t,u(t))}(u(t)) + H\big(t, u(t)\big) \quad \text{p.p.} t \in \mathcal{I}.$$

■

Dans la proposition suivante, nous prouvons la compacité de l'ensemble admissible pour le problème $(\mathfrak{I})$, qui sera utilisé plus tard pour résoudre le problème de temps minimal.

Proposition 4.2.
Sous les hypothèses du Théorème 4.1, et si H est à valeurs bornées, on a pour tout $u_0 \in C(T_0, u_0)$, l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(t)$ du problème $(\mathfrak{I})$ est compact, pour $t \in \mathcal{I}$ fixé.

Preuve.
a) Montrer que l'ensemble que $S_t(u_0)$, pour tout $t \in \mathcal{I}$ est compact.
Par le Théorème 4.1, le problème $(\mathfrak{I})$ admet une solution lipschitzienne, donc $S_t(u_0)$ est non vide. Soit $(u_n)_n \subset S_t(u_0)$, Donc, pour tout $n \geq 0$, u_n est une solution lipshitzienne du problème $(\mathfrak{I})$ telle que

$$\big\|\dot{u}_n(\tau)\big\| \leq \Theta \;\; p.p.\; \tau \in [T_0, t] \tag{4.31}$$

et

$$\|u_n(\tau)\| \leq \|u_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{u}_n(s)\, ds\| \leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{\tau} \|\dot{u}_n(s)\|\, ds \leq \|u_0\| + \int_{T_0}^{\tau} \Theta\, ds \leq \|u_0\| + (\tau - T_0)\Theta.$$

Alors, $(u_n(\tau))_n$ est relativement compacte dans $\mathbb{R}^n$.

De plus, $(u_n(\cdot))_n$ équi-continue. En effet, soit $\tau_1, \tau_2 \in [T_0, \tau]$ tels que $\tau_1 \leq \tau_2$, alors par (4.31)

$$\begin{aligned}
\|u_n(\tau_1) - u_n(\tau_2)\| &= \Big\| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{u}_n(s)\, ds \Big\| \\
&\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|\dot{u}_n(s)\|\, ds \\
&\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Theta\, ds \\
&= \Theta(\tau_2 - \tau_1),
\end{aligned}$$

ceci implique que $(u_n(\cdot))_n$ équi-continue. Donc, par Théorème d'Arzelà-Ascoli, $(u_n(\cdot))_n$ est relativement compacte dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, t])$. Alors par la conséquence du Théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut extraire une sous suite de $(u_n(\cdot))_n$ (notée par $(u_n(\cdot))_n$) qui converge vers une fonction absolument continue $u(\cdot) : [T_0, t] \to \mathbb{R}^n$ au sens suivant

- $(u_n(\cdot))_n$ converge uniformément vers $u(\cdot)$ dans $C_{\mathbb{R}^n}([T_0, t])$;
- $(\dot{u}_n(\cdot))_n$ converge $\sigma\big(L^1_{\mathbb{R}^n}([T_0, t]), L^\infty_{\mathbb{R}^n}([T_0, t])\big)$ vers $\dot{u}(\cdot)$ telle que

$$\|\dot{u}(\tau)\| \leq \Theta \quad \text{p.p. } \tau \in [T_0, t].$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
u(\tau) &= \lim_{n \to +\infty} u_n(\tau) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \big(u_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{u}_n(s)\, ds\big) \\
&= u_0 + \lim_{n \to +\infty} \int_{T_0}^{\tau} \dot{u}_n(s)\, ds \\
&= u_0 + \int_{T_0}^{\tau} \dot{u}(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Pour la suite de la démonstration, on peut suivre la même démarche dans la preuve du Théorème 4.1 pour obtenir

$$\dot{u}(\tau) + h\big(\tau, \dot{u}(\tau)\big) \in -N_{C(\tau, u(\tau))}\big(u(\tau)\big) + H\big(\tau, u(\tau)\big) \quad \text{p.p. } \tau \in [T_0, t].$$

Alors, on en déduit que $S_t(u_0)$ est compact.

b) Pour montrer que l'ensemble admissible $Acc_{u_0}(t)$, pour tout $t \in \mathcal{I}$ est compact il suffit répéter même étape de démonstration du Théorème 2.1. Par conséquent, $Acc_{u_0}(t)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$. ■

4.3) Existence de solutions avec une perturbation à valeurs presque convexes

Maintenant, nous donnons un résultat d'existence pour le problème autonome $(\mathfrak{AI})$, lorsque nous affaiblissons la condition de convexité et de la semi-continuité supérieurement.

Théorème 4.3.
Soit $C : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application à valeurs non vides fermées tells que :

$(\mathcal{G}_1)$ *pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble $C(x)$ est equi-uniformément sous lisse ;*

$(\mathcal{G}_2)$ *il existe une constante $\Lambda_2 \in [0, 1[$ telle que, pour tous $x, y, u \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left|d_{C(x)}(u) - d_{C(y)}(u)\right| \leq \Lambda_2 \left\|x - y\right\|.$$

Soit H une multi-application mesurable à valeurs non vides compactes et presque convexes satisfaisant :

$(\mathcal{G}_3)$ *la multi-application $co(H(\cdot))$ est semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}^n$;*

$(\mathcal{G}_4)$ *pour un réel $\alpha \geq 0$,*

$$d_{co(H(x))}(0) \leq \alpha(1 + \|x\|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et linéaire telle que :

$(\mathcal{G}_5)$ *pour un réel $\beta \geq 0$,*

$$\left\|h(y)\right\| \leq \beta \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors, pour chaque $u_0 \in C(u_0)$, le problème $(\mathfrak{AI})$ admet au moins une solution.

Preuve.
Puisque $co(H)$ est une fonction semi-continue supérieurement à valeurs compactes, donc d'après le Théorème 4.1, il existe une solution $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ du problème convexifié

$$(\mathfrak{SI}) \quad \begin{cases} \dot{u}(t) + h\big(\dot{u}(t)\big) \in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + co\Big(H\big(u(t)\big)\Big) \quad \text{p.p. } t \in \mathcal{I}, \\ u(t) \in C(u(t)) \quad \forall\, t \in \mathcal{I}, \\ u(T_0) = u_0. \end{cases}$$

Considérons l'ensemble fermé

$$\mathcal{Q} = \Big\{t \in \mathcal{I} : m_{co}(x(t)) = 0\Big\},$$

où $m_{co}(x(t)) = Proj_{co(F(x(t)))}(0)$. Nous avons deux possibilités

• Si $\mathcal{Q} = \varnothing$, dans ce cas $\lambda_1(t) > 0$, alors on peut appliquer l'étape (a) dans le Théorème 2.3 à l'intervalle $\mathcal{I}$. On pose la fonction absolument continue θ définie par

$$\theta(t) = T_0 + \int_{T_0}^{t} \dot{\theta}(s)\, ds$$

qui est croissante. Nous avons,

$$\theta(T_0) = T_0 \quad \text{et} \quad \theta(T) = T.$$

Soit la fonction $\nu : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ définie par

$$\begin{aligned} \nu(\cdot) : \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{I} \\ t &\longmapsto \nu(t) = \theta^{-1}(t) \end{aligned}$$

où $\theta^{-1}(\cdot)$ réprésent la fonction inverse de $\theta(\cdot)$, alors

$$\nu(T_0) = T_0 \quad \text{et} \quad \nu(T) = T.$$

Comme

$$\frac{d}{dt}\theta(\nu(t)) = \dot{\theta}\big(\nu(t)\big)\, \dot{\nu}(t) = 1,$$

alors on peut écrire

$$\dot{\nu}(t) = \frac{1}{\dot{\theta}\big(\nu(t)\big)} = \lambda_1\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_1\big(\nu(t)\big) + \lambda_2\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_2\big(\nu(t)\big).$$

Soit la fonction $\tilde{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\tilde{x}(t) = x\big(\nu(t)\big) \quad \forall\, t \in \mathcal{I},$$

donc

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}\big(\nu(t)\big)\dot{\nu}(t) \quad \forall\, t \in \mathcal{I}, \tag{4.32}$$

alors

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}\big(\nu(t)\big)\Big(\lambda_1\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_1\big(\nu(t)\big) + \lambda_2\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_2\big(\nu(t)\big)\Big).$$

On obtient par la preuve du Théorème 4.1 que

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in \Big(-N_{C(x(\nu(t)))}x\big(\nu(t)\big) + m_{co}\big(x(\nu(t))\big) - h\big(\dot{x}(\nu(t))\big)\Big)\Big(\lambda_1\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_1\big(\nu(t)\big) + \lambda_2\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_2\big(\nu(t)\big)\Big),$$

d'après la propriété du cône normal on trouve,

$$\dot{\tilde{x}}(t) \in -N_{C(x(\nu(t)))}x\big(\nu(t)\big) + m_{co}\big(x(\nu(t))\big)\Big(\lambda_1\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_1\big(\nu(t)\big) + \lambda_2\big(\nu(t)\big)\, \mathbb{1}_2\big(\nu(t)\big)\Big)$$

$$-h\big(\dot{x}(\nu(t))\big)\Big(\lambda_1\big(\nu(t)\big)\,\mathbb{1}_1\big(\nu(t)\big)+\lambda_2\big(\nu(t)\big)\,\mathbb{1}_2\big(\nu(t)\big)\Big),$$

d'où,

$$\dot{\tilde{x}}(t)+\dot{\nu}(t)h\big(\dot{x}(\nu(t))\big)\in -N_{C(x(\nu(t)))}(x(\nu(t)))+H\big(x(\nu(t))\big).$$

En utilisant la linéarité de la fonction h et la relation (2.47) dans le Lemme 2.2, on obtient

$$\dot{\tilde{x}}(t)+h\big(\dot{x}(\nu(t))\dot{\nu}(t)\big)\in -N_{C(x(\nu(t)))}(x(\nu(t)))+H\big(x(\nu(t))\big).$$

Par la relation (4.32), on trouve pour tout $t\in\mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t)+h\big(\dot{\tilde{x}}(t)\big) &\in -N_{C(x(\nu(t)))}\big(x(\nu(t))\big)+H\big(x(\nu(t))\big)\\ &= -N_{C(\tilde{x}(t))}\big(\tilde{x}(t)\big)+H\big(\tilde{x}(t)\big).\end{aligned}$$

Donc, $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathfrak{AI})$.

• Si $\mathcal{Q}\neq\varnothing$. Soit $\tau=\sup\mathcal{Q}$, puisque l'ensemble $\mathcal{Q}$ est fermé relativement à $\mathcal{I}$, alors $\tau\in\mathcal{Q}$ et le complémentaire de $\mathcal{Q}$ est un ouvert de $\mathcal{I}$. Donc il consist d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts $]a_i,b_i[$, à l'exception possible de l'une des formes $[\tau,b_{i_i}[$. Pour chaque i, appliquons le l'étape 1 dans le Thèorème 2.1 à l'intervalle $]a_i,b_i[$, pour déduire l'existence de deux sous ensembles mesurables de $]a_i,b_i[$ avec les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{i,1}(\cdot)$ et $\mathbb{1}_{i,2}(\cdot)$ telles que

$$\mathbb{1}_{i,1}(\cdot)+\mathbb{1}_{i,2}(\cdot)=\mathbb{1}_{]a_i,b_i[}(\cdot).$$

Soit $\theta:]a_i,b_i[\longrightarrow]a_i,b_i[$ une fonction croissante absolument continue telle que

$$\dot{\theta}(t)=\frac{1}{\lambda_1(t)}\,\mathbb{1}_{i,1}(t)+\frac{1}{\lambda_2(t)}\,\mathbb{1}_{i,2}(t),$$

on obtient

$$\int_{a_i}^{b_i}\dot{\theta}(t)dt=b_i-a_i.$$

Sur $[T_0,\tau]$, posons

$$\dot{\theta}(t)=\frac{1}{\lambda_2(t)}\,\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}(t)+\sum_i\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)}\,\mathbb{1}_{i,1}(t)+\frac{1}{\lambda_2(t)}\,\mathbb{1}_{i,2}(t)\Big),$$

telle que la somme est sur tous les intervalles $(]a_i,b_i[)_i$ contenus dans $[T_0,\tau]$, puisque

$$\lambda_2(t)\geq 1 \quad \text{et} \quad \int_{a_i}^{b_i}\dot{\theta}(t)dt=b_i-a_i$$

on obtient,

$$\int_{T_0}^{\tau}\dot{\theta}(t)dt=p\leq\tau-T_0.$$

Possons la fonction inversible $\theta(\cdot):[T_0,\tau]\longrightarrow[T_0,p]$ définie par

$$\theta(t)=T_0+\int_{T_0}^{t}\dot{\theta}(t)dt.$$

Maintenant, on définie $\nu = \nu(t)$ de $[T_0, p]$ à $[T_0, \tau]$ comme étant l'inverse de la fonction $\theta(\cdot)$. On définie Le prolongement absolument continue $\tilde{\nu}(\cdot)$ sur $[T_0, \tau]$ de la manière suivante

$$\tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \nu(t) & \text{si } t \in [T_0, p], \\ \tau & \text{si } t \in]p, \tau]. \end{cases}$$

On peut prouver que la fonction $\tilde{x}(t) = x(\tilde{\nu}(t))$ est une solution du problème $(\mathfrak{AI})$ sur l'intervalle $[T_0, \tau]$ satisfaisant $\tilde{x}(\tau) = x(\tau)$.
Pour tout $t \in [T_0, p]$, $\tilde{\nu}(t) = \nu(t)$ qui est inversible et sa dérivée est donnée par

$$\dot{\nu}(t) = \lambda_2(\nu(t))\, 1\!\!1_{\mathcal{Q}}(\nu(t)) + \sum_i \big(\lambda_1(\nu(t)) 1\!\!1_{i,1}(\nu(t)) + \lambda_2(\nu(t)) 1\!\!1_{i,2}(\nu(t))\big). \tag{4.33}$$

Puisque

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\tilde{\nu}}(t)\, \dot{x}(\tilde{\nu}(t)) = \dot{\nu}(t)\, \dot{x}(\nu(t)),$$

par la relation (4.33) et la démonstration du Théorème 4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) \in & \Big(\lambda_2(\nu(t))\, 1\!\!1_{\mathcal{Q}}(\nu(t)) + \sum_i \big(\lambda_1(\nu(t)) 1\!\!1_{i,1}(\nu(t)) + \lambda_2(\nu(t)) 1\!\!1_{i,2}(\nu(t))\big)\Big) \\ & \Big(-N_{C(x(\nu(t)))}\big(x(\nu(t))\big) + m_{co}\big(x(\nu(t))\big) - h\big(\dot{x}(\nu(t))\big)\Big) \end{aligned}$$

d'après la propriété du cône normal on aura,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) \in & -N_{C(x(\nu(t)))}\big(x(\nu(t))\big) + m_{co}\big(x(\nu(t))\big)\Big(\lambda_2(\nu(t))\, 1\!\!1_{\mathcal{Q}}(\nu(t)) + \sum_i \big(\lambda_1(\nu(t)) 1\!\!1_{i,1}(\nu(t)) \\ & + \lambda_2(\nu(t)) 1\!\!1_{i,2}(\nu(t))\big)\Big) - \Big(\lambda_2(\nu(t))\, 1\!\!1_{\mathcal{Q}}(\nu(t)) + \sum_i \big(\lambda_1(\nu(t)) 1\!\!1_{i,1}(\nu(t)) \\ & + \lambda_2(\nu(t)) 1\!\!1_{i,2}(\nu(t))\big)\Big) h\big(\dot{x}(\nu(t))\big) \\ & = -N_{C(x(\nu(t)))}\big(x(\nu(t))\big) + m_{co}\big(x(\nu(t))\big)\Big(\lambda_2(\nu(t))\, 1\!\!1_{\mathcal{Q}}(\nu(t)) + \sum_i \big(\lambda_1(\nu(t)) 1\!\!1_{i,1}(\nu(t)) \\ & + \lambda_2(\nu(t)) 1\!\!1_{i,2}(\nu(t))\big)\Big) - \dot{\nu}(t) h\big(\dot{x}(\nu(t))\big) \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.47) et linéairité da la fonction h pour trouver

$$\dot{\tilde{x}}(t) + h\big(\dot{\nu}(t)\dot{x}(\nu(t))\big) \in -N_{C(x(\nu(t)))}\big(x(\nu(t))\big) + H\big(x(\nu(t))\big)$$

donc

$$\dot{\tilde{x}}(t) + h\big(\dot{\tilde{x}}(t)\big) \in -N_{C(\tilde{x}(t))}\big(\tilde{x}(t)\big) + H\big(\tilde{x}(t)\big).$$

D'où, $\tilde{x}$ est une solution du problème $(\mathfrak{AI})$ sur l'intervalle $[T_0, p]$.
Pour $t \in]p, \tau]$, $\nu(p) = \tau$ et $\dot{\tilde{\nu}}(t) = 0$, donc on trouve

$$\tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}(\tau) = \tilde{\nu}(p) = \nu(p),$$

alors

$$\tilde{x}(p) = x(\tilde{\nu}(p)) = x(\nu(p)) = x(\tilde{\nu}(t)) = \tilde{x}(t),$$

donc $\tilde{x}(\tau) = x(\tau)$ et $\tilde{x}$ est constante sur $]p, \tau]$ ce qui signifie que

$$\dot{\tilde{x}}(t) = h(\dot{\tilde{x}}(t)) = 0,$$

comme

$$m_{co}\big(\tilde{x}(t)\big) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \in -N_{C(\tilde{x}(t))}\big(\tilde{x}(t)\big),$$

on en déduit que pour tout $t \in]p, \tau]$

$$\dot{\tilde{x}}(t) + h\big(\dot{\tilde{x}}(t)\big) \in -N_{C(\tilde{x}(t))}\big(\tilde{x}(t)\big) + m_{co}\big(\tilde{x}(t)\big) \subset -N_{C(\tilde{x}(t))}\big(\tilde{x}(t)\big) + H\big(\tilde{x}(t)\big).$$

Sur $]\tau, T]$, $\mathcal{Q} = \varnothing$ et $\lambda_1(t) > 0$, alors on peut répéter les arguments de la partie (a) dans le Théorème 2.1. Nous concluons que $\tilde{x}$ est une solution du problème ($\mathfrak{AI}$).

$\blacksquare$

4.4) Application du temps minimal

Dans le corollaire suivant, nous prouvons l'existence de solutions du problème de temps minimum $(\mathfrak{OP})$ sous l'hypothèse de la presque convexité.

Corollaire 4.4.
Supposons que les hypothèses $(\mathcal{G}_1)$, $(\mathcal{G}_2)$ et $(\mathcal{G}_5)$ dans le Théorème 4.3 sont vérifiées. Soit $Z : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs compactes et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que pour $\alpha > 0$,

$$\|f(x,y)\| \leq \alpha(1+\|x\|) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Supposons que $H : \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ est une multi-application mesurable à valeurs compactes et presque convexes telles que

$$H(x) = \{f(x,z)\}_{z \in Z(x)} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit u_0, u_1 deux points de $\mathbb{R}^n$ tel que $u_0 \in C(u_0)$ et pour un certain $t \in \mathcal{I}$, $u_1 \in Acc_{u_0}(t)$. Alors, le problème d'atteindre u_1 de u_0 dans un temps minimal admet une solution.

Preuve.
1. Nous montrons premièrement que pour tout $t \in \mathcal{I}$, l'ensemble admissible du problème $(\mathfrak{AI})$ à t, $Acc_{u_0}(t)$ coïncide avec $Acc^{co}_{u_0}(t)$, l'ensemble admissible à t du problème convexifié. Pour tout $t \in \mathcal{I}$, l'ensemble admissible à t, $Acc_{u_0}(t)$ est contenu dans $Acc^{co}_{u_0}(t)$ l'ensemble admissible à t du problème convexifié. En effet, soit $u(t) \in Acc_{u_0}(t)$, pour tout $t \in \mathcal{I}$, alors, $u(\cdot)$ est une solution du problème

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) + h\big(\dot{u}(t)\big) &\in -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + H\big(u(t)\big) \\ &\subset -N_{C(u(t))}\big(u(t)\big) + co\big(H(u(t))\big) \ \ \text{p.p. } t \in [T_0, t] \end{aligned}$$

donc, $u(\cdot)$ est une solution du problème convexifié. Alors pour tout $t \in \mathcal{I}$, $u(t) \in Acc^{co}_{u_0}(t)$. D'où

$$Acc_{u_0}(t) \subset Acc^{co}_{u_0}(t). \tag{4.34}$$

Maintenant, on prouve l'inclusion inverse. Soit $u(t) \in Acc^{co}_{u_0}(t)$. Alors, $u(\cdot)$ est une solution du problème $(\mathfrak{GI})$ dans $[T_0, t]$. La preuve du Théorème 4.3 peut être répétée sur $[T_0, t]$ pour trouver une solution $\tilde{u}(\cdot) : [T_0, t] \to \mathbb{R}^n$ du problème $(\mathfrak{AI})$ tel que

$$\tilde{u}(t) = u(t) \in Acc_{u_0}(t).$$

D'où,

$$Acc^{co}_{u_0}(t) \subset Acc_{u_0}(t). \tag{4.35}$$

On conclut par (4.34) et (4.35) que

$$Acc^{co}_{u_0}(t) = Acc_{u_0}(t) \;\; \forall\, t \in \mathcal{I}.$$

2. Sous les hypothèses sur Z et f, Proposition 1.24 $H(\cdot)$ est semi-continue supérieurement, et d'après la Proposition 1.23 $co(H(\cdot))$ est semi-continue supérieurement et

$$d_{co(H(x))}(0) \leq \alpha(1 + \|x\|) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le Théorème 4.3, le problème $(\mathfrak{OP})$ admet au moins une solution. Soit

$$\mathcal{D} = \big\{\tau \in [T_0, t] \;:\; u_1 \in Acc_{u_0}(t)\big\}$$

et soit $\bar{t} = \inf \mathcal{D}$, alors il existe une suite décroissante $(\bar{t}_n)_n$ dans $[T_0, t]$ qui converge vers $\bar{t}$, et une suite des fonctions $(u_n(\cdot))_n$ solution du problème

$$\dot{x}(t)+h\big(\dot{x}(t)\big) \in -N_{C(x(t))}\big(x(t)\big)+H\big(x(t)\big) \subset -N_{C(x(t))}\big(x(t)\big)+co\big(H(x(t))\big) \quad \text{p.p.} \;\; t \in [T_0, \bar{t}_n];$$

telle que, $u_n(\bar{t}_n) = u_1$. Soit $\xi_n(\cdot)$ la suite des fonctions définie par

$$\xi_n(t) = u_n(t) \;\; \forall\, t \in [T_0, \bar{t}].$$

$\xi_n(\cdot) \in S_{\bar{t}}(u_0)$, par la preuve de la Proposition 4.2, cet ensemble est compact. Alors, on exrtaire une sous suite $(\xi_n(\cdot))_n$ qui converge vers $\xi(\cdot) \in S_{\bar{t}}(u_0)$. D'autre part, nous avons $u_1 = u_n(\bar{t}_n) \in Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}_n)$. Par le Thèorème 2.1 (3), la multi-application $Acc^{co}_{u_0}(\cdot)$ est semi-continue supérieurement à valeurs non vides compactes. Donc on obtient,

$$\limsup_{n\to+\infty} Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}_n) = Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}).$$

D'où,

$$u_1 \in Acc^{co}_{u_0}(\bar{t}) = Acc_{u_0}(\bar{t}).$$

Par conséquent, $\xi(\cdot)$ est la solution optimale en temps minimal et $\bar{t}$ est la valeur du temps minimal. ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons prouvé l'existence de solutions pour le processus de la rafle du premier ordre en dimension finie, où l'ensemble mobile est équi-uniformément sous lisse et la perturbation est une multi-application à valeurs convexes, non nécessairement bornées. Par la suite, nous avons établi la compacité de l'ensemble admissible. Dans le deuxième chapitre, nous avons examiné l'existence de solutions pour le problème autonome, où la multi-application est à valeurs presque convexes, où dans le dernier chapitre, nous avons démontré l'existence de solutions pour le problème du temps optimal.

Au cours des deux derniers chapitres, nous avons étendu la généralisation du problème antérieur en traitant la perturbation comme la combinaison d'une multi-application et d'une application univoque.

Bibliographie

[1] S. Adly, F. Nacry and L. Thibault, *Discontinuous sweeping process with prox-regular sets*, Esaim : Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 23, no. 4, pp. 1293–1329, (2017).

[2] K. Addi, B. Brogliato et D. Goeleven, *A qualitative mathematical analysis of a class of linear variational inequalities via semi-complementarity problems : applications in electronics*, Mathematical Programming, vol. 126, pp. 31–67, (2011),.

[3] D. Affane, M. Aissous and M. F. Yarou, *Almost mixed semi-continuous perturbation of moreau's sweeping process*, Evolution Equations and Control Theory, vol. 9, no. 1, pp. 27, (2020).

[4] D. Affane, M. Aissous and M. F. Yarou, *Existence results for sweeping process with almost convex perturbation*, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, vol. 61, no. 2, pp. 119–134, (2018).

[5] D. Affane and D. Azzam-Laouir, *Almost convex valued perturbation to time optimal control sweeping processes*, Esaim : Control, Optimisation and Calculus of Variations, vol. 23, no. 1, pp. 1–12, (2017).

[6] D. Affane and L. Boulkemh, *First order sweeping process with subsmooth sets*, Miskolc Mathematical Notes, vol. 23, no. 1, pp. 13–27, (2022).

[7] D. Affane and L. Boulkemh, *Topological properties for a perturbed first order sweeping process*, Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica, vol. 13, no. 1, pp. 1–22, (2021).

[8] D. Affane and M. F. Yarou, *Almost convex valued perturbation to second order sweeping process*, Mathematical Analysis and its Contemporary Applications, vol. 5, no. 2, pp. 61–72, (2023).

[9] D. Affane and M. F. Yarou, *Perturbed second-order state-dependent Moreau's sweeping process*, Mathematical Analysis and its Contemporary Applications, vol. 4, no. 1, pp. 9–23, (2022).

[10] D. Affane and M. F. Yarou, *Perturbed First Order State Dependent Moreau's Sweeping Process*, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, vol. 12, no. 1, pp. 605–615, (2021).

[11] D. Affane and M. F. Yarou, *General second order functional differential inclusion driven by the sweeping process with subsmooth sets*, Journal of Nonlinear Functional Analysis, vol. 2183, pp. 1, (2019).

[12] D. Affane and M. F. Yarou, *Second order sweeping process with almost convex perturbation*, AIP Conference Proceedings, vol. 2183, pp. 1, (2019).

[13] D. Affane and M. F. Yarou, Unbounded perturbation for a class of variational inequalities, Discusiones Mathematicae Differential Inclusion Control and Optimization, vol. 37, pp. 83–99, (2017)

[14] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions : Set-valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, (1984).

[15] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin, (1990).

[16] D. Aussel, A. Danilis and L. Thibault, *Subsmooth sets : functional characterizations and related concepts*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 357, no. 4, pp. 1275–1301, (2005).

[17] H. Benabdellah, *Existence of solutions to the nonconvex sweeping process,* Journal of Differential Equations, vol. 164, no. 2, pp. 286–295, (2000).

[18] N. Boudjerida, D. Affane and M. F. Yarou, *Non-convex perturbation to evolution problems involving Moreau's sweeping process*, Annals of West University of Timisoara-Mathematics and Computer Science, vol. 59, no. 1, pp. 151–175, (2023).

[19] L. Boulkemh and D. Affane, *Perturbed state-dependent sweeping processes*, Advanced Studies : Euro-Tbilisi Mathematical Journal, vol. 16, no. 3, pp. 117–131, (2023).

[20] M. Bounkhel, *Regularity concepts in nonsmooth analysis : Theory and Applications*, vol. 59. Springer Science and Business Media, (2011).

[21] M. Bounkhel and M. F. Yarou, *Existence results for first and second order nonconvex sweeping process with delay*, Portugaliae mathematica, vol. 61, no. 2 pp. 207–230, (2004).

[22] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou, *Some contributions to nonconvex sweeping process*, Journal of nonlinear and convex analysis, vol. 10, no. 1, pp. 1–20, (2009).

[23] C. Castaing, A. G. Ibrahim and M. Yarou, *Existence problem in second order evolution inclusion : discretization and variational approach*, Taiwanese Journal of mathematics. vol. 12, no. 6, pp. 1433-1475, (2008).

[24] C. Castaing and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Note in Mathematics, 580, Springer-Varlage, Berlin, (1977).

[25] A. Cellina and A. Ornelas, *Existence of solution to differential inclusion and the time optimal control problems in the autonomous case*, Siam : journal on control and optimization, vol. 42, no. 1, pp. 260–265, (2003).

[26] N. Chemetov and M. D. P. Monteiro Marques, *Nonconvex quasivariational differential inclusions,* Set-Valued Analysis, vol. 15, no. 3, pp. 209–221, (2007).

[27] M. Chraibi Kaadoud, *Etude théorique et numérique de problèmes d'évolution en présence de liaisons unilaterales et de frottement.* Thèse de 3ème Cycle, USTL, Montpellier (1987).

[28] F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, (1998).

[29] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, (1983).

[30] Ş. Cobzaş, R. Miculescu and A. Nicolae, *Lipschitz functions*, Springer International Publishing, (2019).

[31] G. Colombo et V. V. Goncharov, *The sweeping processes without convexity*, Set-Valued Analysis, vol. 7, pp. 357–374, (1999).

[32] G. Colombo, R. Henrion, N. D Hoang et B. Sh. Mordukhovich, *Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets*, Journal of Differential Equations, vol. 260, no. 4, pp. 3397–3447, (2016).

[33] G. Colombo, R. Henrion, N. D Hoang et B. Sh. Mordukhovich, *Discrete approximations of a controlled sweeping process*, Set-Valued and Variational Analysis, vol. 23, no. 1, pp. 69–86 (2015).

[34] G. Colombo and L. Thibault, *Prox-regular sets and applications*, in Handbook of Nonconvex Analysis and Applications, International Press Somerville, MA, pp. 99–81, (2010).

[35] A. Geletu, *Introduction to topological spaces and set-valued maps (Lecture notes)*, Ilmenau, Germany : Institute of Mathematics, Department of Operations Research and Stochastics, Ilmenau University of Technology, (2006).

[36] D. Goeleven, *Complementarity and Variational Inequalities in Electronics, Mathematical Analysis and its Applications*, Academic Press, London, 2017.

[37] T. Haddad, J. Noel and L. Thibault, *Perturbed sweeping process with a subsmooth set depending on the state*, Linear and Nonlinear Analysis, vol. 2, no. 1, pp. 155–174, (2016).

[38] J. M. Holte, *Discrete Gronwall lemma and applications*, MAA-NCS meeting at the University of North Dakota, vol. 24, pp. 1–7, (2009).

[39] M. Kisielewicz, *Differential inclusions and optimal control*, PWN-Polish scientific publishers, (1991).

[40] M. Kunze and M. D. P. Marques, *An Introduction to Moreau's Sweeping Process*, In : Impacts in Mechanical Systems : Analysis and Modelling. Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–60, (2000).

[41] M. Kunze and M. D. P. Monteiro Marques, *On parabolic quasi-variational inequalities and state-dependent sweeping processes*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 12, pp. 179–191, (1998).

[42] B. S. Mordukhovich and Y. Shao, *Nonsmooth sequential analysis in asplund space*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 348, no. 4, pp. 1235–1280, (1996).

[43] J. J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, Nonsmooth Mechanics and Applications 302 in CISM, Courses and Lectures, Springer Vienna, pp. 1–82, (1988).

[44] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with amoving convex set in a Hilbert Space*, Journal of Differential Equations, vol. 26, no. 3, pp. 347–374, (1977).

[45] J. J. Moreau, *Rafle par un convexe variable, II. Séminaire d'Analyse Convexe*, Convexe, Montpellier, Exposé 3 (1972).

[46] J. J. Moreau, *Rafle par un convexe variable I.* Séminaire d'Analyse Convexe Montpellier, exposé 15 (1971).

[47] J. Noel, *Inclusions différentielles d'évolution associées à des ensembles sous lisses*, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, (2013).

[48] N. S. Papageorgiou, *On the attainable set of differential inclusions and control systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 125, no. 2, pp. 305–322, (1987).

[49] V. Recupero, *Sweeping processes and rate independence*, Journal of Convex Analysis, vol. 23, no. 3, pp. 921–946, (2016).

[50] V. Recupero, *BV continuous sweeping processes,* Journal of Differential Equations, vol. 259, no. 8, pp. 4253–4272, (2015).

[51] V. Recupero, *A continuity method for sweeping processes*, Journal of Differential Equations, vol. 251, no. 8, pp. 2125–214, (2011).

[52] V. Recupero and F. Santambrogio, *Sweeping processes with prescribed behavior on jumps*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, vol. 197, no. 4, pp. 1311–1332, (2018).

[53] Hu. Shouchuan and N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis*, Theory published by Kluwer Academic Publishers, vol. 1, (1997).

[54] J. V. Tiel, *Convex analysis*, An introductory text, Wiley, New York, (1984).
d'Anal. Convexe, Montpellier, exposé no. 9, (1988).

ملخص

تتمحور هذه الأطروحة حول دراسة نتائج وجود حلول لعملية الكنس من الدرجة الأولى حسب الزمن والحالة متعلقة باضطرابات محدبة ومحدبة تقريبا . هذه الاضطرابات لها قيم ليست بالضرورة محدودة. نقدم ثلاث نتائج لوجود عملية الكنس ، النتيجة الأولى مع اضطراب متعدد القيم والثانية مضطربة بمجموع متعدد القيم و تطبيق، أما النتيجة الثالثة مضطربة بمجموع متعدد القيم و تطبيق متعلق بالزمن و بالسرعة. و نتطرق أيضا لبعض الخصائص الطبولوجية للمجموعات المؤهلة من أجل تطبيقها في حل اشكالية التحكم الأمثل.

Abstract

The work of this thesis focuses on the study of the results of the existence of solutions for sweeping process of the first order governed by subsmooth sets depending on time and the state with convex and almost convex perturbations. These perturbations are not necessarily bounded values. We assumed three problems, the first result with a set-valued mapping perturbation, the second perturbed by the sum of a set-valued mapping and a single-valued and the third disturbed of a sum of a single-valued mapping depends on time and a velocity and a set-valued mapping. Topological properties of the attainbale set are established in order to solve an optimal control problem.

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur l'étude des resultats d'existences de solutions de processus de la rafle du premier order, gouvernées par des ensembles sous lisses dépendant du temps et de l'état, avec des perturbations convexes et presque convexes. Les perturbations considérées sont à valeurs non nécessairement bornées. On a supposé trois problèmes, le premier avec une perturbation multivoque, et le deuxième perturbée par la somme d'une multi-application et une application et le troisième perturbée par une multi-application et une fonction dépendant du temps et de la vitesse. Des propriétés topologiques des l'ensembles admissibles sont étudiées dans le but d'appliquer ces résultats à des problèmes de contrôle optimal.