

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel



Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématique

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Science

Filière : Mathématiques.

Spécialité : Recherche opérationnelle

Thème

Etude de quelques invariants de domination et de broadcast domination dans les graphes

Présenté par :
Ibrahim BOUFELGHA

Soutenue publiquement le 28/02/2024 devant le jury composé de :

Président	A. Bouchair	Professeur	Université de Jijel
Encadreur	M. Ahmia	M.C.A	Université de Jijel
Examineurs	M-S. Abdelouahab	Professeur	Centre universitaire de Mila
	B. Boudjedaa	Professeur	Centre universitaire de Mila
	A. Lemouari	Professeur	Université de Tamanrasset
	L. Menniche	M.C.A	Université de Jijel

Année universitaire : **2023/2024**

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie Dieu Tout-Puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour dépasser toutes les difficultés et terminer cette thèse.

Je remercie sincèrement mon directeur de thèse Moussa Ahmia pour sa disponibilité, son soutien, son aide et ses encouragements durant ces longues années de collaboration.

Un grand merci au professeur Abderrahmane Bouchair pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

J'adresse aussi mes vifs remerciements au professeur Mohammed Salah Abdelouahab et professeur Badredine Boudjedaa du centre universitaire de Mila, au professeur Ali Lemouari de l'université de Tamanrasset et à Menniche Linda de l'université de Jijel pour avoir accepté de faire partie du jury et de donner de leur temps pour examiner ce travail.

Ma reconnaissance et mes remerciements à Mourad Guettiche pour le travail qu'on a réalisé ensemble et pour son accueil.

Merci à tous les collègues et amis qui m'ont soutenu, conseillé et encouragé.

Je tiens à remercier plus personnellement ma grand mère, mes parents, ma femme, mes frères, mes sœurs et mes enfants pour le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont apportés durant toutes mes années d'études, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Table des matières

introduction	7
1 Préliminaires	10
1.1 Terminologie et définitions générales	11
1.2 Quelques classes de graphes	13
1.3 Quelques paramètres de graphes	15
1.4 Domination	16
1.4.1 Domination totale	18
1.4.2 Domination double	19
1.4.3 Ensemble stable	19
1.4.4 Ensemble efficace	19
1.4.5 Packing	20
1.4.6 Bornes sur le nombre de domination γ	21
1.5 Broadcasts dans les graphes	22
1.5.1 Notions et terminologies sur les broadcasts dans les graphes	22
1.5.2 Graphes présentant un faible nombre de broadcast domination	25
1.5.3 Autres variations et paramètres de broadcasts dans les graphes	26
1.5.4 Bornes sur le nombre de broadcast domination γ_b	32
1.6 Complexité algorithmique des problèmes d'optimisation combinatoire	34
1.7 Complexité algorithmique du problème de domination	36
1.8 Complexité algorithmique du problème de broadcast domination	37
2 Broadcast dominant global dans les graphes	40
2.1 Introduction	40
2.2 Domination globale dans les graphes	41
2.3 Broadcast dominant global dans les graphes	42
3 La 2-domination sécurisée	51
3.1 Introduction	51
3.2 Définitions et résultats antérieurs	52
3.2.1 2-domination dans les graphes	52
3.2.2 Domination sécurisée dans les graphes	52

3.3	Bornes et valeurs exactes pour la 2-domination sécurisée dans les graphes	53
3.4	Complexité algorithmique du problème de la 2-domination sécurisée	58
3.4.1	S2DOM pour les graphes bipartis	59
3.5	Conclusion	64
4	Broadcasts efficaces dans les chaines	65
4.1	Paramètres de domination et de broadcast domination dans les chaines	66
4.2	Broadcasts efficaces dans les chaines	67
4.2.1	Définition du paramètre	67
4.2.2	Etude du paramètre	68
	Conclusion générale	79
	Bibliographie	80

Table des figures

1.1	Graphes simples et multigraphe.	11
1.2	(a) La chaîne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est simple et élémentaire-(b) La chaîne $x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_7, x_9$ est simple mais non élémentaire	12
1.3	(a) Un graphe connexe-(b) un graphe non connexe.	12
1.4	Le cycle C_6	13
1.5	Le graphe complet K_5	14
1.6	Le graphe biparti complet $K_{3,2}$	14
1.7	Un arbre T , x_2 est un noeud interne et x_4 est une feuille.	15
1.8	$D = \{x_2, x_4, x_5\}$ est un ensemble dominant minimal et un stable maximal.	17
1.9	Un graphe G avec $\gamma(G)=1, \Gamma(G)=3$	18
1.10	L'ensemble $V_f^+ = \{x_3, x_5\}$	23
1.11	Broadcast dominant minimum dans G $\gamma_b(G) = 3$	24
1.12	$f(x_2) = rad(G)=2$	24
1.13	$\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$	27
1.14	Broadcasts stables sur P_5	28
1.15	Un broadcast stable qui n'est pas efficace.	30
1.16	Broadcasts efficaces sur le graphe P_5	31
1.17	Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal.	32
2.1	Ensemble dominant global $\{x, y, z\}$	41
2.2	Broadcast dominant et broadcast dominant global sur P_7 et $\overline{P_7}$	42
2.3	Broadcast dominant global sur P_5	46
3.1	Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum dans un graphe sans triangle	54
3.2	Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum	56
3.3	Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum dans une chaîne P_n	57
3.4	Réduction domination sécurisée \propto 2-domination sécurisée sur les graphes (les sommets noirs représentent le S2DS de G^*).	60
3.5	Un graphe parfait pour lequel la borne $\gamma_2^s(G) \leq (3\beta_0(G) + 1)/2$ n'est pas atteinte.	63
4.1	Broadcasts efficaces distincts dans P_7	67
4.2	Broadcasts efficaces symétriques dans P_7	68
4.3	Broadcasts efficaces distincts sur P_6 pour $ V_f^+ = 1$	69
4.4	Broadcasts efficaces distincts sur P_7 pour $ V_f^+ = 1$	70

4.5	Broadcasts efficaces distincts sur P_7 où $ V_f^+ = 2$	73
4.6	Broadcasts efficaces distincts sur P_8 où $ V_f^+ = 2$	73
4.7	Broadcasts efficaces sur P_8 pour $ V_f^+ = 3$	76
4.8	Broadcasts efficaces sur P_9 pour $ V_f^+ = 3$	76
4.9	Broadcasts efficaces sur P_7, P_8 pour lesquels $ V_f^+ = \lceil \frac{n}{3} \rceil$	78
4.10	Broadcasts efficaces sur P_9 pour lesquels $ V_f^+ = \lceil \frac{n}{3} \rceil$	78

Introduction

La théorie des graphes, un domaine des mathématiques discrètes, offre une représentation visuelle et abstraite des relations entre objets. Cette discipline, initiée par Euler au XVIII^e siècle, s'est rapidement développée pour devenir un outil fondamental dans de nombreux domaines, de l'informatique à la biologie en passant par la logistique et les réseaux sociaux, grâce aux travaux de Berge, Erdős,...

Les graphes servent à exprimer la configuration et les liens au sein d'un système complexe en représentant les interactions entre ses composants : que ce soit pour décrire un réseau de communication, une infrastructure routière, ou d'autres structures similaires. En tant qu'outil de représentation, les graphes offrent une approche permettant de modéliser une diversité de problèmes en les réduisant à l'examen des sommets et de arêtes.

Dans les années 1950 et 1960, plusieurs chercheurs ont contribué à définir et à développer des concepts clés dans la théorie des graphes. Berge, en 1958, a introduit ce qu'il a appelé *le coefficient de stabilité externe* [4], rebaptisé ultérieurement par Oré en 1962 [49] comme *le nombre de domination*. Ce dernier concept fait référence à un ensemble dominant dans un graphe, défini comme un sous-ensemble de sommets où chaque sommet qui n'en fait pas partie a au moins un voisin dans cet ensemble. Liu, en 1968 [43], a appliqué cette notion de domination dans les réseaux de communication. Il a notamment utilisé cet ensemble dominant pour modéliser un groupe de villes hébergeant des stations émettrices capables de couvrir l'ensemble des villes sur une carte donnée. Son modèle initial imposait une restriction : une station émettrice ne pouvait transmettre qu'à des villes ayant une frontière commune avec elle.

Cependant, quelques années après, Erwin a introduit un modèle alternatif [25], éliminant la contrainte de voisinage dans la transmission. Dans ce nouveau concept de *broadcast domination*, la réception dépendait du coût attribué à la station émettrice. En d'autres termes, il s'agissait de trouver une attribution de coût $f(v) \geq 0$ à chaque sommet v du graphe, de sorte que chaque sommet du graphe soit à une distance au plus égale à $f(v)$ à partir d'un certain sommet de coût non nul. Ce problème représentait ainsi une variante intéressante du problème initial de domination dans les graphes.

L'analyse des réseaux et des systèmes complexes repose sur des concepts clés tels que la domination et la broadcast domination dans les graphes. Ces concepts jouent un rôle crucial dans la compréhension et l'optimisation des structures interconnectées, qu'elles représentent des réseaux sociaux, des infrastructures informatiques ou des réseaux de capteurs. La domination classique identifie les nœuds essentiels permettant de contrôler un

réseau tout en minimisant les ressources nécessaires pour maintenir sa connectivité. D'autre part, la broadcast domination élargit cette vision en évaluant la capacité des nœuds à diffuser efficacement des informations à travers le réseau.

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de quelques invariants et paramètres de domination et de broadcast domination dans les graphes. Notre thèse comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux notions nécessaires pour la compréhension du mémoire. Nous rappelons l'essentiel des définitions de la théorie de graphes, puis de la domination et la broadcast domination, nous terminons ce chapitre par quelques invariants de la domination et de la broadcast domination qui ont été défini et étudié.

Au second chapitre, nous définissons un nouveau invariant de broadcast domination qui est le broadcast dominant global dans les graphes, ensuite, nous étudions le nouveau paramètre appelé nombre de broadcast dominant global. Nous déterminons des bornes pour des graphes quelconques et valeurs exactes pour quelques classes de graphes. Nous terminons le chapitre avec des relations entre le nouveau paramètre étudié et les autres paramètres de domination et de broadcast domination.

Au troisième chapitre, nous définissons et étudions un nouveau invariant de domination dans les graphes qui est la 2-domination sécurisée, ensuite, nous étudions le nouveau paramètre appelé nombre de 2-domination sécurisée. Nous déterminions des bornes et des valeurs exactes pour quelques classes de graphes, ensuite, nous étudions la complexité algorithmique de ce paramètre pour un graphe arbitraire et pour quelques classes de graphes.

Au quatrième chapitre, nous essayons de répondre à une perspective de recherche signalé dans [23] : que peut-on dire du nombre de broadcasts efficaces distincts dans une chaîne ?

Nous concluons cette introduction en attribuant nos publications et prépublications respectives aux différents chapitres de cette thèse. Le chapitre deux est spécifiquement lié à la référence [1], le troisième chapitre est concerné par la référence [2] et le quatrième chapitre par la référence [3].

Liste des publications originales de la thèse

- [1] I. Boufelgha, M. Ahmia, *Global dominating broadcast in graphs*. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, Vol. 15, No. 2. 2023.
- [2] I. Boufelgha, M. Ahmia, M. Guettiche, *Secure 2-domination in graphs*, Submitted to Journal of Discrete Mathematical sciences and Cryptography, 2023.
- [3] I. Boufelgha, M. Ahmia, *Efficient broadcasts in paths*, oral talk at the The Second Conference on Mathematics and Applications of Mathematics held on 28-29 September, 2022, Jijel, Algeria, Submitted, 2023.

1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous introduisons d'abord quelques définitions de la théorie des graphes qui nous seront utiles pour la compréhension de cette thèse, ensuite, nous rappelons l'essentiel des notions de la domination. Nous terminons ce chapitre par quelques notions de la broadcast domination. Pour une compréhension approfondie des fondements des graphes et des concepts de domination et pour référencier les définitions et les notions mentionnées dans ce chapitre, les travaux classiques de Leonard Euler, notamment sur les ponts de Königsberg, sont des incontournables. Claude Berge a formalisé le concept d'ensemble dominant dans son ouvrage de référence [4], détaillant les bases de la domination dans les graphes. Enfin, pour une perspective plus contemporaine, les travaux d'Erwin sur la broadcast domination, introduits dans sa thèse, *Cost Domination in Graphs* [24], offrent une extension novatrice des concepts de broadcast domination.

1.1 Terminologie et définitions générales

Un *graphe non orienté* $G = (V, E)$ est constitué de deux ensembles, un ensemble fini et non vide V de points appelés sommets et un ensemble E fini d'arêtes. Une *arête* $e \in E$ est un segment reliant deux sommets u et v , notée $e = uv$, et on dira dans ce cas que u et v sont les extrémités de e et sont *adjacents*, on dira aussi que l'arête (u, v) est *incidente* à u et à v .

On appelle un sommet *isolé* un sommet qui n'est adjacent à aucun sommet de G .

L'*ordre* d'un graphe G est le nombre de ses sommets, La *taille* d'un graphe G est le nombre de ses arêtes. Un graphe est *non trivial* s'il est d'ordre supérieur à 1.

Graphe simple et Multigraphe

On dit que le graphe G est *simple* s'il ne contient pas des boucles et des arêtes multiples.

Un *multigraphe* est un graphe dans lequel, il existe au moins deux sommets qui possèdent plusieurs arêtes entre eux. Tous les graphes étudiés dans cette thèse sont supposés non

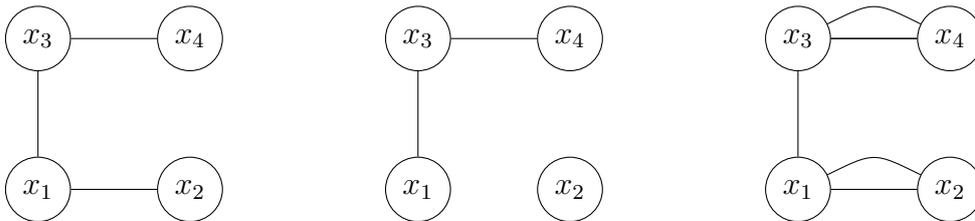


FIGURE 1.1 – Graphes simples et multigraphe.

orientés et simples.

Chaîne

Une *chaîne* P_n est une séquence finie de sommets x_1, x_2, \dots, x_n telle que toute paire de sommets (x_i, x_{i+1}) possède une arête, $i = \overline{1, n-1}$.

L'entier $n-1$ représente la *longueur* de P_n et les sommets x_1 et x_n sont appelés *extrémité initiale* et *extrémité finale* respectivement de la chaîne P_n .

une chaîne élémentaire est une séquence de sommets où chaque sommet apparaît exactement une fois.

Une chaîne est dite simple si toutes ses arêtes sont distinctes.

Exemple 1.1 *Le graphe illustré dans FIG.1.2-(a) représente une chaîne simple et élémentaire mais dans FIG.1.2-(b), la chaîne est simple mais non élémentaire.*

Connexité

Un graphe non orienté $G=(V,E)$ est dit *connexe* si tout sommet u du graphe G est relié à tous les autres sommets du graphes par une chaine. Une *composante connexe* d'un

1.1 Terminologie et définitions générales

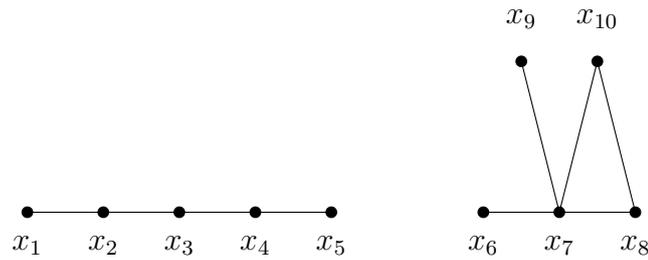


FIGURE 1.2 – (a) La chaîne x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 est simple et élémentaire-(b) La chaîne $x_6, x_7, x_8, x_{10}, x_7, x_9$ est simple mais non élémentaire

graphe G est un sous-graphe qui est connexe.

Exemple 1.2 Deux graphes sont présentés dans la Figure FIG.1.3 où (a) est un graphe connexe mais (b) n'est pas connexe.



FIGURE 1.3 – (a) Un graphe connexe-(b) un graphe non connexe.

Voisinage

Soit $G = (V, E)$ un graphe et v un sommet de V . Le *voisinage ouvert* du sommet v est l'ensemble de sommets adjacents à v , c'est l'ensemble $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$ et le *voisinage fermé* de v est l'ensemble $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Soit S un sous ensemble de V . Le *voisinage ouvert* de S est l'ensemble $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le *voisinage fermé* de S est l'ensemble $N[S] = N(S) \cup S$.

Degré d'un sommet, d'un graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe, le *degré* d'un sommet v , noté $d(v)$, est le nombre de sommets adjacents à v . On note par $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ le *degré maximum* du graphe G et par $\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d(v)$ le *degré minimum* de G . En particulier, les sommets isolés sont de degré égal à 0 et les sommets pendants sont les sommets de degré égal à 1.

1.2 Quelques classes de graphes

Sous-graphe

Pour un ensemble de sommets $S \subset V$, le sous-graphe de G induit par S est le graphe noté $G[S]$ ayant S pour ensemble de sommets. Les arêtes de $G[S]$ sont celles de E dont les deux extrémités sont dans S .

Complément d'un graphe

Le complément du graphe $G = (V, E)$ est un graphe $\overline{G} = (V, \overline{E})$ avec le même ensemble de sommets mais les arêtes de \overline{G} sont les arêtes non présentes dans G .

1.2 Quelques classes de graphes

Corde

Une *corde* désigne une arête reliant deux sommets non consécutifs au sein d'une chaîne. Une *chaîne minimale induite* de n sommets, notée P_n , est une séquence élémentaire qui ne comporte aucune corde.

Cycle

Un *cycle* est une chaîne dont l'extrémité initiale est égale à l'extrémité finale. Un *cycle élémentaire* C_n d'ordre n est un cycle pour lequel les sommets sont visités une seule fois. On dit que G est un graphe acyclique si G ne contient pas de cycle.

Exemple 1.3 *Le graphe de la figure FIG.1.4 est un cycle simple élémentaire d'ordre 6, $C_6 = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1$.*

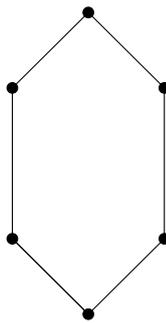


FIGURE 1.4 – Le cycle C_6 .

Graphe complet

Un graphe simple G d'ordre n est dit complet si chaque sommet v de G est relié avec tous les autres sommets de G . $\forall v \in G, d(v) = n - 1$

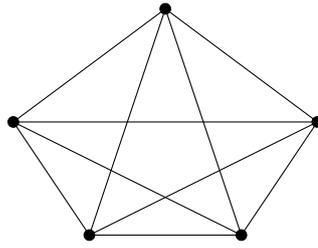


FIGURE 1.5 – Le graphe complet K_5 .

Grphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est qualifié de *biparti* lorsque l'ensemble de sommets V peut être divisé en deux sous-ensembles V_1 et V_2 de telle manière que les sous-graphes induits par V_1 (resp. V_2) ne contiennent aucune arête. Un graphe biparti est caractérisé par l'absence de cycles de longueur impaire. Un graphe est défini comme *biparti complet*, noté $K_{m,n}$, s'il existe deux sous-ensembles V_1 et V_2 avec $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$, et chaque sommet de V_1 est relié à chaque sommet de V_2 .

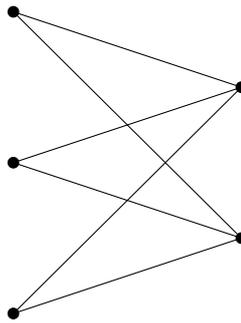


FIGURE 1.6 – Le graphe biparti complet $K_{3,2}$.

Clique

Une *clique* K est définie comme un ensemble de sommets où chaque paire de sommets est adjacente, créant ainsi un sous-graphe complet. Une p -clique se réfère spécifiquement à une clique dont la cardinalité est p .

Grphe triangulé

Un graphe G est un graphe *triangulé* s'il ne contient aucun cycle de longueur ≥ 4 et chaque cycle de longueur ≥ 4 possède une corde.

1.3 Quelques paramètres de graphes

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycle. Dans un arbre, il existe deux types de sommets ; Les feuilles sont les sommets de degré égal à 1 et les noeuds internes sont les sommets de degré supérieur à 1. On peut avoir la racine dans un arbre enraciné.

D'autres définitions équivalentes sont possibles pour qu'un graphe G d'ordre n soit un arbre :

- G est un graphe connexe avec $n - 1$ arêtes.
- G est un graphe acyclique, atteignant la taille maximale sous cette contrainte.
- G est un graphe connexe et minimal pour cette propriété.
- G est un graphe acyclique avec $n - 1$ arêtes.
- G est un graphe où, entre chaque paire de sommets, il existe une unique chaîne les reliant.

Chenille

Une chenille est un arbre T qui inclut une chaîne P , où chaque sommet de T est soit situé sur la chaîne P , soit adjacent à un sommet de la chaîne P .

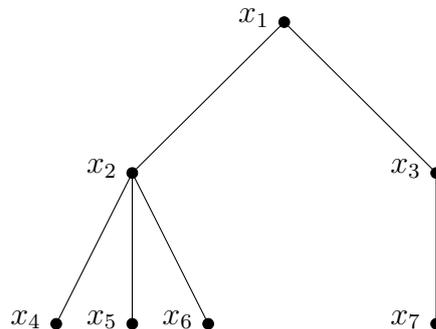


FIGURE 1.7 – Un arbre T , x_2 est un noeud interne et x_4 est une feuille.

1.3 Quelques paramètres de graphes

Distance entre deux sommets

La distance $d(u, v)$ entre deux sommets u et v d'un graphe G est la longueur de la plus courte chaîne qui les relie.

Excentricité d'un sommet

L'excentricité $e(u)$ d'un sommet u dans un graphe G est le maximum sur les distances entre le sommet u et les autres sommets du graphe G , $e(u) = \max_{v \in V} \{d(u, v)\}$.

1.4 Domination

Diamètre d'un graphe

Le *diamètre* du graphe G est la plus grande excentricité dans le graphe G , c'est à dire $diam(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Rayon d'un graphe

Le *rayon* du graphe G est l'excentricité minimum sur tous les sommets de G , c'est à dire $rad(G) = \min_{u \in V} e(u)$.

Nombre de stabilité

Un stable S dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de G tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes. $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$ est appelé nombre de stabilité de G .

Nombre de clique

Une clique K dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de G tel que $G[K]$ est un graphe complet. $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ est une clique de } G\}$ est appelé nombre de clique de G .

Le nombre chromatique

Le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs qu'on doit affecter aux sommets du graphe G , à condition que deux sommets adjacents sont de couleurs différentes.

1.4 Domination

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et terminologies sur la domination, des bornes sur le nombre de domination, des valeurs exactes pour ce paramètre et la relation entre ce paramètre et d'autres paramètres de domination.

Définition 1.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si tout sommet de $V \setminus D$ possède au moins un voisin dans D .

Ore [49] a montré l'existence d'un ensemble dominant pour tout graphe connexe :

1.4 Domination

Théorème 1.1 [49] *Tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$ contient un ensemble de sommets S tel que S et $V \setminus S$ sont des ensembles dominants.*

L'étude des ensembles minimaux et maximaux peut être importante dans la théorie des graphes. Elle permet de mieux comprendre les structures et les relations au sein du graphe, en identifiant les ensembles essentiels qui vérifient une propriété donnée. Sachant que tout ensemble T vérifie une propriété dans un graphe G , il peut exister un ensemble $S \subset T$ vérifie la même propriété, il devient alors intéressant d'étudier l'ensemble minimal et l'ensemble maximal pour certaine propriété.

Définition 1.2 *Un sous-ensemble S de sommets d'un graphe G est dit minimal pour une propriété P si S satisfait la propriété P et qu'aucun sous-ensemble strict \hat{S} (c'est-à-dire un sous-ensemble de S , mais pas égal à S) ne satisfait la propriété P . En d'autres termes, S est le plus petit sous-ensemble de sommets de G qui vérifie la propriété P .*

Ces notions sont couramment utilisées en théorie des graphes pour caractériser des ensembles de sommets qui satisfont des propriétés spécifiques, comme l'indépendance ou la domination. Cependant, pour donner une explication plus précise ou pour discuter d'un graphe particulier, il serait nécessaire de disposer d'une représentation ou d'une description plus détaillée de la Figure FIG.1.8, l'ensemble $D = \{x_2, x_4, x_5\}$ est maximal pour la propriété de l'indépendance et minimal pour la propriété de la domination.

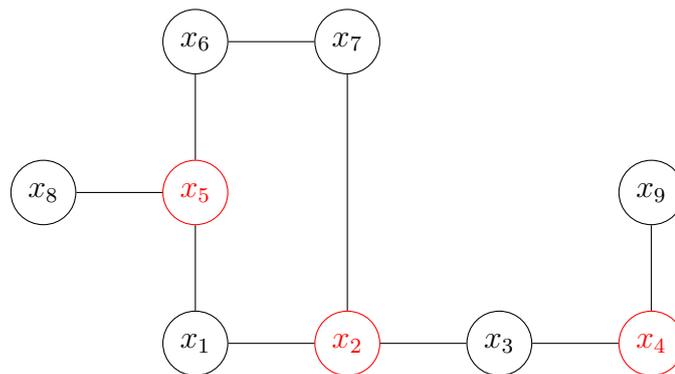


FIGURE 1.8 – $D = \{x_2, x_4, x_5\}$ est un ensemble dominant minimal et un stable maximal.

Définition 1.3 *Le cardinal d'un plus petit ensemble dominant de G est appelé nombre de domination, et est noté par $\gamma(G)$. Un ensemble dominant D de G avec $|D| = \gamma(G)$ est appelé un ensemble dominant minimum de G ou un γ -ensemble.*

Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal D de G est appelé nombre de

1.4 Domination

domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$.

Un ensemble dominant minimal D de G avec $|D| = \Gamma(G)$ est appelé un Γ -ensemble.

Dans le graphe représenté dans la Figure FIG.1.9, les paramètres du nombre de domination et du nombre de domination supérieur sont les suivants : $\gamma(G)$ égale à 1, tandis que $\Gamma(G)$ est de 3. Plus précisément, $\{x_2\}$ constitue un ensemble dominant minimal, désigné comme un γ -ensemble, et $\{x_1, x_3, x_4\}$ représente un ensemble dominant minimal maximum, appelé un Γ -ensemble.

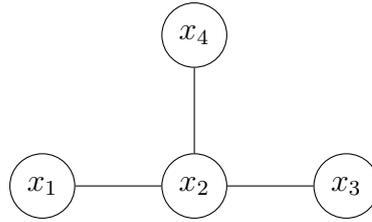


FIGURE 1.9 – Un graphe G avec $\gamma(G)=1$, $\Gamma(G)=3$.

1.4.1 Domination totale

Un ensemble S est considéré comme un ensemble dominant total si chaque sommet de l'ensemble V est adjacent à au moins un sommet de l'ensemble S , $V = N(S)$. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, correspond au cardinal minimum d'un tel ensemble dominant total. En revanche, le nombre de domination totale supérieur, noté $\Gamma_t(G)$, représente le cardinal maximum d'un ensemble dominant total minimal.

Il est à noter que pour tout graphe G , certains attributs spécifiques sont vérifiés :

$$\gamma(G) \leq \Gamma_t(G) \leq 2\gamma(G) \quad \text{et} \quad \gamma(G) \leq \gamma_t(G)$$

Nous souhaitons rappeler quelques résultats familiers concernant la domination totale dans le cas d'une chaîne et d'un cycle.

Proposition 1.1 [37] Pour $G \in \{P_n, C_n\}$ avec $n \geq 3$,

$$\gamma_t(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor.$$

Observation 1.1 [36] Pour deux entiers k, j avec $k > j \geq 2$,

$$\gamma_t(P_j) \leq \gamma_t(P_k) \leq \gamma_t(P_{k-1}) + 1.$$

1.4.2 Domination double

Un sous-ensemble S de l'ensemble de sommets V est qualifié de *dominant double* dans le graphe G si, pour chaque sommet $v \in V$, la condition suivante est satisfaite : soit le sommet v appartient à l'ensemble S et a au moins un voisin dans le même ensemble S , soit le sommet v n'appartient pas à l'ensemble S mais possède au moins deux voisins dans l'ensemble S . Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, représente le nombre minimum de sommets nécessaires pour former un ensemble *dominant double* dans le graphe G .

Théorème 1.2 [34] *Lorsque le graphe G ne contient pas de sommets isolés, $\gamma(G) + 1 \leq \gamma_{\times 2}(G)$*

1.4.3 Ensemble stable

Un ensemble de sommets S dans un graphe G est appelé un ensemble *stable* (ou *indépendant*) s'il n'existe pas d'arêtes reliant deux sommets quelconques de cet ensemble. Le nombre de domination stable $i(G)$ et le nombre de stabilité supérieur $\beta_0(G)$ correspondent respectivement à la plus petite cardinalité et à la plus grande cardinalité d'un ensemble stable maximal dans le graphe G .

Proposition 1.2 [34] *Un ensemble S est considéré comme maximal lorsqu'il est à la fois un ensemble stable et dominant.*

Observation 1.2 [29] *Pour une chaîne P_n ,*

- (1) $i(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, et
- (2) *Dans la chaîne P_n , il est possible de trouver un ensemble dominant D qui est à la fois stable et qui ne comprend aucune des extrémités de la chaîne P_n .*

Observation 1.3 [29]

- (1) *Si $G = P_n$ et $n \geq 2$, alors $i(G\overline{G}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$.*
- (2) *Si $G = K_{r,s}$ avec $2 \leq r \leq s$, alors $i(G\overline{G}) = r + 1$.*
- (3) *Si G est la subdivision de la star $K_{1,t}$, alors $i(G\overline{G}) = t + 1$.*

1.4.4 Ensemble efficace

Un ensemble dominant D dans le graphe G est qualifié d'*efficace* lorsque, pour chaque sommet $v \in V$, le nombre de voisins de v qui appartiennent à l'ensemble D est exactement

1.4 Domination

égal à 1. Le nombre de domination efficace du graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant efficace du graphe G , et il est noté $\gamma_e(G)$.

Observation 1.4 [36] *Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $\gamma(P_n)$ égale à $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ où $\gamma(P_n)$ représente le cardinal d'un ensemble dominant minimum dans la chaîne P_n .*

Si D est un ensemble minimum de sommets constituant un ensemble dominant de P_n et contenant une extrémité de la chaîne P_n , alors la cardinalité de D est égale à $\lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. De même, si D est un ensemble minimum de sommets constituant un ensemble dominant de P_n et contenant les deux extrémités de la chaîne P_n , alors $|D|$ est égal à $\lceil \frac{n+2}{3} \rceil$

1.4.5 Packing

Un ensemble S est défini comme un *packing* si, pour chaque sommet $v \in V$, la cardinalité de l'intersection de son voisinage $N[v]$ avec l'ensemble S est inférieure ou égale à 1. Le nombre de *packing* $P(G)$ est la cardinalité maximum d'un ensemble *packing* dans le graphe G , tandis que le nombre de *packing* inférieur $p(G)$ représente la cardinalité minimum d'un ensemble *packing* qui est maximal dans le graphe G . Il est important de noter qu'un ensemble dominant efficace est automatiquement un ensemble *packing*. En utilisant l'inégalité de chaîne 1.1, on peut conclure que si un graphe G contient un ensemble dominant efficace, alors cet ensemble est incontestablement un ensemble dominant minimal. Cependant, il est essentiel de noter que certains graphes, tels que les cycles impairs, ne possèdent pas d'ensemble dominant efficace.

Étant donné que tout ensemble dominant minimal est également un ensemble *packing* maximal dans le graphe G , cela conduit à la chaîne d'inégalités suivante [34] :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G). \quad (1.1)$$

Définition 1.4 *Un sous-ensemble P de sommets dans un graphe G est un *packing* ouvert lorsque les voisinages ouverts des sommets inclus dans P sont mutuellement disjoints. En d'autres termes, si P est un *packing* ouvert dans G , et que u et v appartiennent à P , alors l'intersection entre les voisinages de u et de v est vide. Autrement dit, si u et v sont deux sommets adjacents dans G , cela implique que la distance entre eux, notée $d(u, v)$, est supérieure ou égale à 3. Le "nombre de *packing* ouvert" de G , noté $\rho^0(G)$, correspond au cardinal maximum d'un ensemble *packing* ouvert dans le graphe G . Il est important de noter que tout ensemble dominant total de G doit contenir au moins un sommet de chaque voisinage ouvert. Étant donné qu'il y a exactement $\rho^0(G)$ voisinages ouverts, cela conduit*

1.4 Domination

à l'inégalité $\gamma_t(G) \geq \rho^0(G)$, car le nombre de sommets dans un ensemble dominant total doit être au moins aussi grand que le nombre de sommets dans un packing ouvert.

1.4.6 Bornes sur le nombre de domination γ

Dans cette section, nous exposons quelques résultats concernant le nombre de domination $\gamma(G)$, en relation avec divers paramètres du graphe G , notamment son ordre, sa taille, son degré minimum (ou maximum) et son diamètre.

Il est évident que le nombre de sommets n dans le graphe G constitue une borne supérieure pour $\gamma(G)$, et il est également évident qu'au moins un sommet est nécessaire pour dominer un graphe G . La borne supérieure de $\gamma(G)$, n , est atteinte si et seulement si G est un ensemble de sommets isolés, tandis que la borne inférieure est atteinte si G possède un sommet de degré $n - 1$. Si le graphe G ne contient pas de sommets isolés, alors la borne supérieure de $\gamma(G)$ est réduite de moitié.

Théorème 1.3 [49] *Pour un graphe G d'ordre n qui ne possède aucun sommet isolé, $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.*

La borne d'Oré peut être renforcée lorsque chaque sommet du graphe G a un degré d'au moins 3. Haynes et al. [33] ont établi une limite supérieure pour le nombre de domination $\gamma(G)$ dans cette situation.

Théorème 1.4 [33] *Pour un graphe G d'ordre n qui est connexe et où le degré minimum des sommets est supérieur ou égal à 3, alors le nombre $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à $\frac{3n}{8}$.*

La chaîne P_8 satisfait à l'équation $\gamma(P_8) = 3$, montrant ainsi que la limite énoncée dans le Théorème 1.4 peut être atteinte. Walikar, Acharya et Sampathkumar ont formulé une autre limite pour $\gamma(G)$ qui dépend de l'ordre n et du degré $\Delta(G)$.

Théorème 1.5 [56] *Pour tout graphe G d'ordre n ,*

$$\lceil \frac{n}{1 + \Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

Berge a avancé une limite inférieure qui gagne en pertinence lorsque la disparité entre l'ordre n et la taille m du graphe G est significative.

Théorème 1.6 [4] *Pour tout graphe G ,*

$$n - m \leq \gamma(G).$$

Haynes et al. ont établi une limite inférieure basée sur le diamètre pour le nombre de domination d'un graphe connexe et non trivial.

Théorème 1.7 [33] *Pour tout graphe connexe non trivial G*

$$\lceil \frac{\text{diam}(G) + 1}{3} \rceil \leq \gamma(G)$$

.

Pour les graphes ayant un diamètre de 2, Haynes et al. ont suggéré d'utiliser le degré minimum du graphe comme limite supérieure pour $\gamma(G)$.

Théorème 1.8 [33]

Lorsque G est un graphe avec un diamètre de 2, $\gamma(G) \leq \delta(G)$.

Voici quelques exemples de graphes G pour lesquels on observe que $\gamma(G)$ est inférieur ou égal à $\delta(G)$. Ces graphes incluent les graphes bipartis $K_{m,n}$ avec $m, n \geq 2$, la chaîne P_3 , et le cycle C_n pour $n = 4, 5, 6$. Une relation intrigante entre le diamètre d'un graphe G et le nombre de domination de son graphe complémentaire \overline{G} est démontrée dans l'étude menée par Brigham, Chinn et Dutton [11].

Théorème 1.9 [11] *Si $\gamma(\overline{G}) \geq 3$, alors $\text{diam}(G) \leq 2$.*

1.5 Broadcasts dans les graphes

1.5.1 Notions et terminologies sur les broadcasts dans les graphes

Considérons un graphe simple noté $G = (V, E)$.

Définition 1.5 *Une fonction $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$, où la valeur $f(v) \leq e(v)$ pour chaque sommet v de G , est désignée comme un broadcast sur G .*

Définition 1.6 *Soit f une fonction broadcast et $u \in V$, on appelle f -voisinage fermé du sommet u , l'ensemble défini par : $N_f[u] = \{v \in V / d(u, v) \leq f(u)\}$.*

Si $v \in N_f[u]$, on dit que v est un f -voisin de u .

Remarque 1.1 *Il est à noter qu'un sommet u est un voisin d'un sommet v si et seulement si v est un voisin de u . Cependant, il est possible que u soit un f -voisin de v sans que v le soit pour u . La réciprocity dans la relation de voisinage n'est pas garantie dans le contexte*

1.5 Broadcasts dans les graphes

des f -voisinages. Un exemple illustratif de cette non-réciprocité est visible dans le graphe représenté dans la FIG.1.10, où $f(x_3) = 1$ et $f(x_2) = 0$, ce qui montre que x_2 est un f -voisin de x_3 , tandis que x_3 n'est pas un f -voisin de x_2 .

Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est considéré comme un sommet de broadcast (ou sommet f -broadcast dominant, ou simplement un sommet f -dominant). L'ensemble des sommets f -dominants, noté $V_f^+(G) = \{v \in V : f(v) > 0\}$, est appelé un ensemble f -dominant (ou f -broadcast dominant).

Remarque 1.2 Un sommet f -dominant v domine tout sommet u pour lequel la distance entre u et v , notée $d(u, v)$, est inférieure ou égale à $f(v)$. En revanche, les sommets appartenant à l'ensemble $V^0 = V - V_f^+$ ne dominent aucun sommet de G en termes de f -domination.

On qualifie tout sommet $u \in V_f^+$ de sommet de broadcast. Lorsque $u \in V_f^+$ et $v \in V$ avec $d(u, v) \leq f(u)$, on dit que le sommet v a la capacité d'atteindre un broadcast à partir de u . L'ensemble des sommets que le sommet $v \in V$ est capable d'atteindre est défini par : $H(v) = \{u \in V_f^+ : d(u, v) \leq f(u)\}$

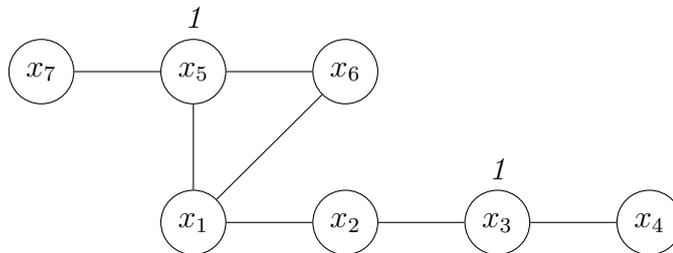


FIGURE 1.10 – L'ensemble $V_f^+ = \{x_3, x_5\}$.

Définition 1.7 Dans un graphe G , un broadcast dominant, noté f , assure que chaque sommet v est f -dominé par au moins un sommet appartenant à $V_f^+(G)$. En d'autres termes, pour chaque sommet v , il existe au moins un sommet u qui le f -domine.

Définition 1.8 Un broadcast f d'un certain type, qu'il s'agisse de domination ou autre, est qualifié de minimal s'il n'existe pas un autre broadcast $g \neq f$ tel que pour chaque sommet $u \in V$, $g(u) \leq f(u)$ (ou, respectivement, $g(u) \geq f(u)$).

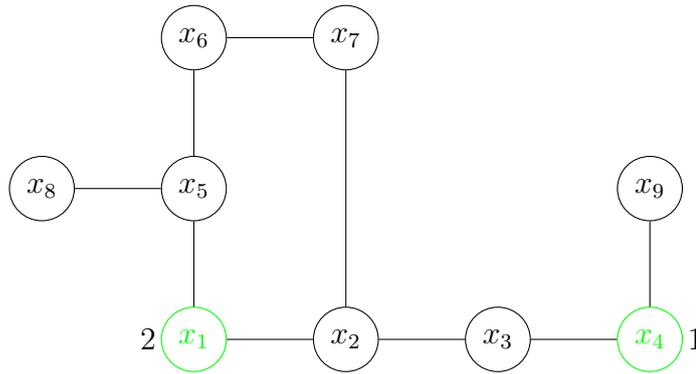


FIGURE 1.11 – Broadcast dominant minimum dans G $\gamma_b(G) = 3$.

Si un sommet v satisfait à $f(v) \geq \text{diam}(G)$, alors f est un broadcast dominant. C'est la raison pour laquelle il n'est pas requis de prendre en compte les broadcasts dominants avec des sommets dont les poids dépassent $\text{diam}(G)$.

Définition 1.9 *Un sommet u est considéré comme un f -voisin privé de v lorsque u est f -dominé exclusivement par v , où $v \in V_f^+$. L'ensemble de f -voisinage privé est noté $pnf[v]$ et regroupe les f -voisins privés de v . Si $v \in pnf[v]$, on le qualifie de son propre f -voisin. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V_f^+$, l'ensemble des f -voisins privés de S est défini comme*

$$PN_f[S] = N_f(S) - N_f[V_f^+ - S]$$

.

Proposition 1.3 [25] *Si f représente un broadcast dominant minimum dans un graphe connexe G , alors $V_f^+ = \{v\}$ si et seulement si $f(v) = e(v) = \text{rad}(G)$.*

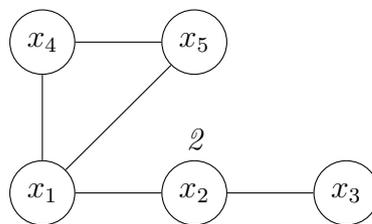


FIGURE 1.12 – $f(x_2) = \text{rad}(G)=2$.

Proposition 1.4 [25] *Soit G un graphe connexe et f un broadcast dominant minimum sur G . Si $v \in V_f^+$, alors $f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v] \rangle) = \text{rad}(\langle N_f[v] \rangle)$.*

Définition 1.10 Soit f un broadcast dans un graphe connexe G , avec $\rho(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ est défini comme la valeur minimum de $\rho(f)$ parmi tous les broadcasts dominants de G . Un broadcast dominant f dans G pour lequel $\rho(f) = \gamma_b(G)$ est appelé un broadcast dominant minimum dans G ou un γ_b -broadcast. Le nombre de broadcast domination supérieur $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un broadcast dominant minimal dans G .

Dans le graphe représenté dans la Figure FIG 1.12, le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ est de 2, tandis que le nombre de broadcast domination supérieur $\Gamma_b(G)$ est de 3. L'ensemble x_2 forme un γ_b -broadcast.

Théorème 1.10 [24] Pour un graphe connexe G , les conditions pour que $\gamma_b(G) = \gamma(G)$ sont les suivantes : il doit exister un broadcast dominant f de coût minimum dans G , et en même temps, V_f^+ doit former un ensemble dominant.

Considérons un graphe connexe non trivial $G = (V, E)$, et $f_s : V \rightarrow 0, 1$ comme la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$.

Remarque 1.3 1. La fonction caractéristique f_s d'un ensemble dominant minimal S est un broadcast dominant minimal, ce qui implique que $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.

2. Soit $u \in V$, et soit $f_u : V \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{diam}(G)\}$ la fonction définie par :

$$f_u(v) = \begin{cases} e(v) & \text{si } u = v, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le broadcast f_u est un broadcast dominant minimal, car f_u f -domine chaque sommet de G .

Définition 1.11 Si un sommet u se trouve au centre du graphe G , c'est-à-dire que $e(u) = \text{rad}(G)$, on qualifie le broadcast f_u de broadcast radial. En revanche, si $e(u) = \text{diam}(G)$, on le désigne comme broadcast diamétral.

1.5.2 Graphes présentant un faible nombre de broadcast domination

Il est évident que, pour un graphe connexe non trivial G , le nombre de domination $\gamma(G)$ est égal à 1 si et seulement si le rayon $\text{rad}(G)$ est égal à 1. Les graphes ayant un nombre

de broadcast domination égal à 1 bénéficient de la même caractérisation. Ce résultat a été démontré par Erwin dans sa thèse [25].

Proposition 1.5 [25] *Pour un graphe connexe non trivial G , le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ est égal à 1 si et seulement si le rayon $rad(G)$ est égal à 1.*

Les graphes dont le nombre de broadcast domination est égal à 2 possèdent une caractérisation similaire à ceux avec un nombre de broadcast domination égal à 1.

Théorème 1.11 [25] *Pour un graphe connexe G , la condition $\gamma_b(G) = 2$ est vérifiée si et seulement si le minimum entre le rayon de G et le nombre $\gamma(G)$ est égal à 2.*

Proposition 1.6 [25] *Si G est un graphe connexe avec un nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ égal à 2, alors soit :*

1. *Le rayon de G est égal à 2,*
2. *Ou le rayon de G est égal à 3 et le nombre $\gamma(G)$ est égal à 2.*

Une autre implication du Théorème 1.11 se manifeste de la manière suivante :

Proposition 1.7 [25] *Si G est un graphe connexe et que le minimum entre le rayon et le nombre de domination, c'est-à-dire $\min\{rad(G), \gamma(G)\}$, est égal à 3, alors le nombre de broadcast domination $\gamma_b(G)$ est également égal à 3.*

Les résultats de la Proposition 1.5, du Théorème 1.11 et de la Proposition 1.7 nous permettent de conclure que si G est un graphe connexe et que $\min\{rad(G), \gamma(G)\}$ appartient à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, alors $\gamma_b(G)$ appartient également à $\min\{rad(G), \gamma(G)\}$. Cependant, cette affirmation ne tient pas lorsque $\min\{rad(G), \gamma(G)\}$ est égal à 4. Pour illustrer ce point, examinons le graphe présenté dans la Figure FIG. 1.13 :

1.5.3 Autres variations et paramètres de broadcasts dans les graphes

Une théorie concernant les broadcasts dans les graphes a été élaborée de manière analogue à celle de la domination dans les graphes.

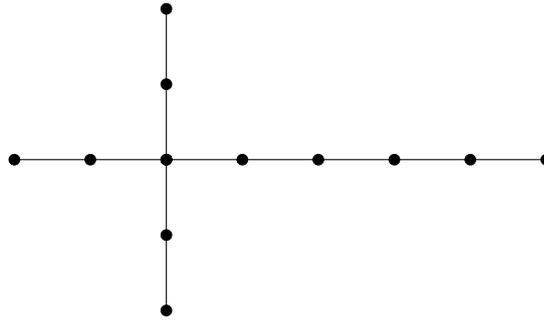


FIGURE 1.13 – $\gamma_b(G) = 3$ et $\min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$.

Broadcast stable

Un broadcast f est considéré *stable* lorsqu'il remplit la condition selon laquelle, pour chaque sommet $v \in V^+$, l'intersection de son voisinage dans le broadcast f , notée $N_f[v]$, avec l'ensemble des sommets broadcasts V^+ , est réduite à l'ensemble contenant uniquement v . Le nombre de broadcast stabilité d'un graphe G , noté $\beta_b(G)$, correspond au coût maximum d'un broadcast satisfait cette condition de stabilité. D'autre part, le nombre de broadcast stabilité inférieur, noté $i_b(G)$, équivaut au coût minimum requis pour obtenir un broadcast stable maximal dans G . Il est important de noter que pour tout graphe G , un ensemble d'inégalités lié au nombre de broadcast stabilité a été établi par Dunbar et al. [23] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G).$$

Considérons un sous-ensemble de sommets M dans le graphe G qui présente la caractéristique suivante : pour chaque paire de sommets u et v dans M , la distance entre eux, notée $d(u, v)$, est égale au diamètre du graphe G . Désignons par $\mu(G)$ la cardinalité maximum de tels ensembles dans le graphe G . Dunbar et al. [23] ont observé que cette propriété fournit une borne inférieure pour le nombre de broadcast stabilité, $\beta_b(G)$.

Proposition 1.8 [23] *Pour tout graphe G ,*

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

.

Il est à noter que la fonction caractéristique f_S d'un ensemble stable maximal dans un graphe G est un broadcast stable, ce qui implique que :

$$i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$$

. Il convient de noter que f_S n'est pas nécessairement un broadcast stable maximum. Pour illustrer cette affirmation, prenons par exemple la chaîne $P_4 : (v_1, v_2, v_3, v_4)$ représentée

1.5 Broadcasts dans les graphes

dans la figure FIG. 1.14. Lorsque nous attribuons des poids aux sommets : $f(v_1) = f(v_4) = 1$ et $f(v_2) = f(v_3) = f(v_5) = 0$, alors f représente la caractéristique d'un ensemble stable maximal. Cependant, il est important de noter que cette fonction n'est pas un broadcast stable maximal. Pour le montrer, nous pouvons définir une autre fonction, notée g , comme suit : $g(v_1) = g(v_4) = 2$ et $g(v_2) = g(v_3) = f(v_5) = 0$, et nous constatons que g satisfait l'inégalité $gu \geq fu$.

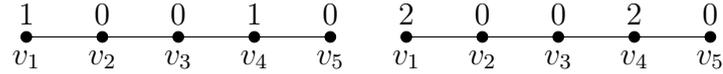


FIGURE 1.14 – Broadcasts stables sur P_5 .

Il est évident que ni le paramètre $\gamma(G)$ ni le paramètre $i(G)$ ne sont comparables à $i_b(G)$ ($\gamma(G) \diamond i_b(G)$ et $i(G) \diamond i_b(G)$). Par exemple, on peut constater facilement que pour le graphe P_6 , on a $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2$, ce qui est inférieur à 3, lequel est égal à $i_b(P_6)$. Ainsi, en prenant le graphe $S(K_{1,t})$, nous observons que $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t$, ce qui est supérieur à 2, en contraste avec $i_b(S(K_{1,t}))$.

Il est intéressant d'explorer une comparaison entre les invariants de domination et de stabilité d'un graphe et les invariants de broadcast. Dunbar et al. [23] ont montré que :

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G).$$

Cela suscite la question de savoir si une série d'inégalités similaires existe pour les invariants de broadcast domination :

$$\gamma_b(G) \quad ?? \quad i_b(G) \leq \beta_b(G) \quad ?? \quad \Gamma_b(G).$$

La relation entre les deux invariants $\gamma_b(G)$ et $i_b(G)$ est énoncée dans le Théorème 1.12.

Pour un sommet $v \in V_f^+$, définissons $d^+(v)$ comme étant le minimum parmi les distances $d(u, v)$, où $u \in V_f^+ - \{v\}$.

Théorème 1.12 [25] *Considérons un broadcast stable f sur un graphe G . Si l'ensemble V^+ se réduit à un seul sommet, c'est-à-dire $V^+ = \{v\}$, alors f atteint son maximum si et seulement si $f(v)$ est égal à $e(v)$. En d'autres termes, lorsque $|V_f^+|$ est supérieur ou égal à 2, le broadcast f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. f est dominant et,
2. pour tout sommet $v \in V_f^+$, $f(v) = d^+(v) - 1$.

Par conséquent, Dunbar et al. ont pu établir que $\gamma_b(G)$ est inférieur ou égal à $i_b(G)$. Cependant, il est important de noter que $\beta_b(G)$ et $\Gamma_b(G)$ ne peuvent pas être comparés

directement, car $\beta_b(P_4)$ est égal à 4, ce qui est supérieur à $\Gamma_b(P_4)$ qui est égal à 3. De même, pour le graphe de Peterson PG , on a $\beta_b(PG)$ égal à 4, ce qui est inférieur à 5, la valeur de $\Gamma_b(PG)$. Dunbar et al. [23] établissent une corrélation entre β_0 et le nombre de broadcasts stables.

Proposition 1.9 [23] *Pour tout graphe G ,*

$$i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$$

.

Étant donné que $\gamma_b(G)$ est inférieur ou égal à $i_b(G)$, nous pouvons conclure directement que :

Corollaire 1.1 [23] *Si dans un graphe G , le rayon $\text{rad}(G)$ est égal au $\gamma_b(G)$, alors $i_b(G)$ est égal au rayon de G .*

Broadcast dominant stable

Un broadcast f est qualifié de *dominant stable* s'il satisfait simultanément les conditions de domination et de stabilité. On désigne respectivement par $\Gamma_{ib}(G)$ et $\gamma_{ib}(G)$ le coût maximum et minimum d'un broadcast dominant stable minimal sur G . Étant donné que la fonction caractéristique de tout ensemble stable maximal constitue un broadcast dominant stable minimal, nous en concluons que :

$$\gamma_{ib}(G) \leq i(G) \quad \text{et} \quad \Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$$

.

Remarque 1.4 *Il est important de remarquer que si f est un broadcast dominant stable minimal, alors pour tout autre broadcast g différent de f qui satisfait $g \leq f$, g est stable, mais cela ne garantit pas nécessairement que g soit également un broadcast dominant.*

Théorème 1.13 [24] *Dans le cas où f est un broadcast dominant mais non stable sur un graphe G , cela implique l'existence d'un autre broadcast g sur G qui est à la fois dominant et stable, et qui vérifie $g(V) \leq f(V)$, et $V_g^+ \subset V_f^+$.*

Ce théorème établit une relation entre ces deux propriétés.

Corollaire 1.2 [24] *Pour tout graphe G , il existe un γ_b -broadcast qui présente la propriété de stabilité.*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G).$$

En ce qui concerne le nombre de broadcast domiation stable, nous avons :

Proposition 1.10 [12] *Pour tout graphe G ,*

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq \min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}$$

Les paramètres $\Gamma_{ib}(G)$ et $\Gamma(G)$ ne peuvent pas être directement comparés. En effet, pour le graphe en forme de chaîne P_{10} , on a $\Gamma(P_{10})$ égal à 5, ce qui est inférieur à 9, le diamètre de P_{10} , mais supérieur ou égal à $\Gamma_{ib}(P_{10})$. D'autre part, le graphe de Peterson a $\Gamma_{ib}(PG)$ égal à 4, ce qui est inférieur à $\Gamma(PG)$, qui vaut 5.

Broadcast efficace

Un broadcast f est *efficace* lorsque chaque sommet est f-dominé par un seul sommet broadcast. Le coût maximum d'un tel broadcast efficace est appelé le *nombre de broadcast efficace supérieur* et est noté $\Gamma_{eb}(G)$. En revanche, le *nombre de broadcast efficace* $\gamma_{eb}(G)$ correspond au coût minimum d'un broadcast efficace. À titre d'exemple, il est possible de mentionner que la fonction de broadcast définie sur le graphe P_6 illustré dans la Figure FIG. 1.15 est broadcast stable mais n'est pas efficace.

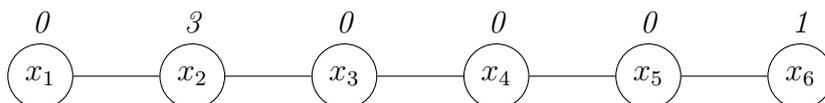


FIGURE 1.15 – Un broadcast stable qui n'est pas efficace.

Exemple 1.4 *La Figure FIG.1.16 présente 5 broadcasts efficaces différents sur la chaîne P_5 , où $\gamma_{eb}(P_5) = 2$ et $\Gamma_{eb}(P_5) = 4$.*

Le théorème suivant aborde l'existence d'un broadcast efficace pour tout graphe.

Théorème 1.14 [23] *Un γ_b -broadcast efficace existe pour tout graphe G .*

Corollaire 1.3 [23] *Pour tout graphe G , il existe un γ_b -broadcast tel que la distance entre n'importe quelle paire de sommets broadcast u et v soit supérieure à la somme de leurs valeurs respectives dans la fonction de broadcast.*



FIGURE 1.16 – Broadcasts efficaces sur le graphe P_5 .

Par définition, Nous pouvons établir que $\gamma_b(G)$ est inférieur ou égal à $\gamma_{eb}(G)$. En conséquence, le Théorème 1.14 indique que $\gamma_b(G)$ est égal à $\gamma_{eb}(G)$. D'un côté, $\gamma_{eb}(G)$ est inférieur ou égal au minimum parmi $\beta_b(G)$, $\Gamma_b(G)$, et $\Gamma_{ib}(G)$, pour tout graphe G , car chaque broadcast dominant efficace est à la fois stable et dominant minimal. D'autre part, il convient de noter que chaque broadcast diamétral est également un broadcast dominant efficace. En résulte la série d'inégalités du Corollaire 1.4.

Corollaire 1.4 [23] *Pour tout graphe G ,*

$$\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Proposition 1.11 [23] *Tout broadcast efficace se caractérise par un broadcast dominant stable minimal et un broadcast dominant minimal.*

Définition 1.12 *Pour un sommet v appartenant à l'ensemble V et un entier positif p , la boule $B_G(v, p)$ (abrégée en $B(v, p)$) représente l'ensemble des sommets situés à une distance inférieure ou égale à p du sommet v dans le graphe G .*

Définition 1.13 *Supposons que f est un broadcast dominant efficace sur G . Le graphe de domination, noté G_f , est défini comme suit :*

$$G_f = (V_f, \{uv \setminus N_G(B(u, f(u))) \cap B(v, f(v)) \neq \emptyset\}).$$

G_f est l'ensemble des sommets f -dominants, et pour toute paire de sommets u et v dans V_f , il existe une arête (u, v) dans E_f s'il existe une arête dans G entre un sommet de $B(u, f(u))$ avec un sommet de $B(v, f(v))$.

On peut considérer le graphe de domination comme une transformation de G dans laquelle chaque boule $B(v, f(v))$ est fusionnée en un sommet unique v , tout en conservant les relations de voisinage. Étant donné que G est un graphe connexe et que la fonction f est dominante, le graphe G_f demeure lui aussi connexe. Si le graphe G_f est un graphe simple (c'est-à-dire sans arêtes multiples ni boucles), alors cela signifie que f est un broadcast radial.

Broadcast packing

Un *broadcast packing* f est une fonction broadcast sur l'ensemble de sommets dans un graphe G , dans laquelle chaque nœud est f -dominé par au plus un sommet broadcast. Le coût maximum associé à un *broadcast packing* dans le graphe G est dénommé *nombre de broadcast packing* et est représenté par $P_b(G)$. Le coût minimum d'un *broadcast packing* maximal est appelé *nombre de broadcast packing minimal* et est noté $p_b(G)$.

Il convient de noter que la fonction caractéristique f_S d'un *packing* maximal ne correspond pas nécessairement à un *broadcast packing* maximal. Cela peut être illustré en prenant l'exemple de la chaîne P_5 . En prenant le centre c de la chaîne P_5 comme exemple, le packing $S = \{c\}$ illustré dans la Figure FIG.1.17 est maximal, mais la fonction caractéristique f_S n'est pas un *broadcast packing* maximal. En effet, la valeur $f_S = 1$ peut être augmentée à 2 pour obtenir le *broadcast packing* maximal.

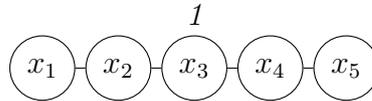


FIGURE 1.17 – Un packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal.

Remarque 1.5 *Il est important de noter que les invariants $p(G)$ et $p_b(G)$ ne peuvent pas être comparés directement. En effet, pour la chaîne P_5 , nous avons $p(P_5) < p_b(P_5)$. D'un autre côté, pour l'arbre binaire complet T de hauteur 5, qui comporte 31 sommets, l'inégalité est inverse. Le broadcast radial de T constitue un broadcast packing maximal avec un coût de 4, tandis que $p(T) = 6$. De plus, il est important de noter que ni le broadcast radial ni le broadcast diamétral ne sont des broadcast packing, mais chaque broadcast packing est un broadcast stable.*

1.5.4 Bornes sur le nombre de broadcast domination γ_b

La chaîne d'inégalité pour le nombre de broadcast domination γ_b et le nombre de broadcast domination supérieur Γ_b s'applique à tout graphe connexe G . suivante :

$$\gamma_b(G) \leq \min\{\gamma(G), rad(G)\} \leq \max\{\Gamma(G), diam(G)\} \leq \Gamma_b(G). \quad (1.2)$$

Dans [25], il est démontré que pour une chaîne P_n , les valeurs de $\gamma(P_n)$ et $\gamma_b(P_n)$ sont égales à $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. En outre, pour tout entier k supérieur ou égal à 0, on peut définir le graphe k -subdivisé de G , noté $S_k(G)$, en insérant k sommets le long de chaque arête de G . Si l'on considère un graphe T équivalent à $S(K_{1,t})$, il est possible de montrer que $\gamma_b(T)$ est au moins égal à 2, car aucun sommet de T ne domine l'ensemble total du graphe T . Par ailleurs, un broadcast radial peut dominer T , ce qui implique que $\gamma_b(T)$ est inférieur ou

égal à $rad(T)$, qui est en l'occurrence inférieur ou égal à 2. Ainsi, nous pouvons établir l'inégalité suivante :

$$\gamma_b(G) = \min\{\gamma(G), rad(G)\}.$$

Cependant, il est également démontré dans [25] que la différence entre $\min\{\gamma(G), rad(G)\}$ et $\gamma_b(G)$, ainsi que la différence entre $\gamma_b(G)$ et $\max\{\Gamma(G), diam(G)\}$, peuvent être considérablement importantes.

De plus, pour tout entier k supérieur à 0 et t supérieur à 3, le graphe $S_{k,t}$ est défini comme étant le k -subdivisé de l'étoile $K_{1,t}$. Le centre de $S_{k,t}$ est un unique sommet c dans $S_{k,t}$ avec une excentricité $e(c)$ égale à $rad(S_{k,t})$ et égale à $k + 1$. Un graphe G est qualifié de γ_b -radial si et seulement si $\gamma_b(G)$ équivaut à $rad(G)$.

En 2001, dans [24], il a été démontré que le graphe $S_{k,t}$ est γ_b -radial pour $k > 0$ et $t > 5$. En outre, il a formulé la conjecture selon laquelle ce résultat reste valide pour t appartenant à l'ensemble $\{3, 4\}$.

Dans [50], R. Sahbi a démontré la propriété de γ_b -radialité pour l'ensemble des étoiles $S_{k,t}$ et les arbres complets t -aires.

Théorème 1.15 [50] *Pour tous entiers $k \geq 1, t \geq 2$, On a*

$$\gamma_b(A_{k,t}) = rad(A_{k,t}) = k$$

Et pour $t \geq 3$,

$$\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k + 1$$

.

Considérons P comme une chaîne diamétrale d'un arbre T . Un ensemble M d'arêtes de P est appelé une P -partition si les sommets d'extrémité de chaque arête dans M sont de degré 2 dans T .

Le problème de caractérisation des arbres radiaux a été formulé par Dunbar, Erwin, Haynes et Hedetniemi dans [23], mais il a récemment été résolu par Herke et Mynhardt :

Théorème 1.16 [39, 40] *Un arbre T est considéré radial si et seulement si T ne possède aucun ensemble de partitions non vide.*

Seager, dans son article [54], a fourni une caractérisation des chenilles pour lesquelles γ_b est égal à γ . De plus, Cockayne, Herke et Mynhardt ont établi une caractérisation des arbres T pour lesquels $\gamma_b(T)$ équivaut à $\gamma(T)$.

La borne inférieure applicable au nombre de domination est également valable pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 1.17 [25] *Si G est un graphe connexe non trivial, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diam(G)+1}{3} \rceil.$$

1.6 Complexité algorithmique des problèmes d'optimisation combinatoire

Pour tout graphe connexe G d'ordre n , la valeur $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ représente une borne supérieure pour son nombre de broadcast domination.

Corollaire 1.5 [25] *Pour tout graphe connexe G d'ordre n , $\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Bresar et Spacapan ont fourni une borne inférieure en termes de rayon pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 1.18 [10] *Si G est un graphe connexe, alors*

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil.$$

1.6 Complexité algorithmique des problèmes d'optimisation combinatoire

La complexité algorithmique est un domaine de l'informatique qui étudie la performance des algorithmes, notamment en termes de temps d'exécution et de ressources nécessaires. Elle vise à évaluer la difficulté des problèmes et à concevoir des algorithmes efficaces pour les résoudre. Les principales notations de complexité, telles que la notation O (grand O), T (thêta) et Ω (oméga), permettent de caractériser le comportement des algorithmes en fonction de la taille de l'entrée. En général, on cherche à concevoir des algorithmes dont la complexité est la plus faible possible pour résoudre un problème donné, en minimisant le temps de calcul ou l'utilisation de la mémoire. Cela implique souvent des compromis entre la rapidité de l'algorithme et la qualité de la solution obtenue. La complexité algorithmique est essentielle pour l'optimisation des processus informatiques et la résolution efficace des problèmes dans de nombreux domaines, y compris l'intelligence artificielle, la cryptographie, la recherche opérationnelle, et bien d'autres.

On peut classer certains problèmes d'optimisation combinatoire dans différentes classes selon leurs difficultés intrinsèques.

Classe P

Un problème est classé dans la classe P s'il peut être résolu en un temps polynomial, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme dont le temps d'exécution augmente de manière raisonnable par rapport à la taille de l'entrée. Les problèmes de la classe P sont souvent qualifiés de *faciles* en informatique théorique, car ils peuvent être résolus efficacement. Cela signifie que, bien que la taille de l'entrée puisse varier, le temps nécessaire pour trouver une solution n'augmente pas de manière exponentielle. En d'autres termes, les problèmes de classe P sont solubles en un temps raisonnable, ce qui les distingue des problèmes NP-difficiles.

Il est important de souligner que l'absence de connaissance d'un algorithme polynomial pour résoudre un problème donné ne signifie pas nécessairement qu'il n'appartienne pas à la classe P.

Classe NP

La classe NP (Non-deterministic Polynomial time) est une classe de problèmes de décision. Un problème appartient à la classe NP s'il existe un algorithme de vérification polynomial qui permet de vérifier si une solution proposée est correcte en temps polynomial. En d'autres termes, pour un problème de la classe NP, on peut vérifier rapidement si une solution potentielle est valide, mais il n'est pas nécessaire de pouvoir trouver cette solution en temps polynomial. La classe NP contient de nombreux problèmes pour lesquels il est difficile de trouver une solution, mais une fois que vous avez une solution potentielle, vous pouvez rapidement vérifier sa validité. Cela contraste avec la classe P, où les problèmes peuvent être résolus en temps polynomial. La question centrale en informatique théorique est de savoir si P est égal à NP, c'est-à-dire si chaque problème dont la solution peut être vérifiée rapidement peut également être trouvé rapidement. Cette question est l'un des problèmes les plus célèbres de l'informatique théorique, connu sous le nom de conjecture $P = NP$.

Réduction polynomiale (au sens de Turing)

Si l'on considère deux problèmes de décision, nommés P_1 et P_2 , on peut dire que P_1 se réduit polynomialement à P_2 si l'on peut concevoir un algorithme pour résoudre P_1 qui inclut, en tant que sous-programme, un algorithme de résolution de P_2 . De plus, cet algorithme de résolution pour P_1 doit fonctionner en temps polynomial, même si l'on considère que la résolution de P_2 est une opération de base comptabilisée dans le temps d'exécution.

Classe des problèmes NP-complets

La classe des problèmes NP-complets (NP-Completeness) est une classe de problèmes de décision en informatique théorique. Un problème est NP-complet s'il remplit deux conditions :

- Il appartient à la classe NP, ce qui signifie qu'une solution proposée peut être vérifiée rapidement.
- Il est aussi difficile que le problème le plus difficile de la classe NP, au sens où s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème NP-complet, alors il existe un algorithme polynomial pour résoudre tous les problèmes de la classe NP.

En d'autres termes, un problème NP-complet est considéré comme étant parmi les problèmes les plus difficiles de la classe NP. Si vous trouvez un algorithme polynomial pour résoudre un problème NP-complet, vous trouveriez essentiellement un algorithme polynomial pour résoudre tous les problèmes de la classe NP, ce qui serait une avancée majeure en informatique théorique. La classe NP-complet a été introduite par Stephen Cook en 1971. Un problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP-complet est dit NP-dur.

1.7 Complexité algorithmique du problème de domination

Dans cette section, nous aborderons les concepts et les conclusions liés à la complexité algorithmique du problème de la domination pour diverses catégories de graphes. Ensuite, nous examinerons les résultats concernant la complexité algorithmique de certains invariants de domination. Pour une analyse plus approfondie de la théorie de la complexité algorithmique de la domination dans les graphes, vous pouvez consulter les articles [13, 42, 57].

Chang a donné des résultats sur les graphes scindés, les graphes complets et les graphes bipartis.

Théorème 1.19 [13] *Le problème de domination est NP-complet pour les graphes scindés.*

Corollaire 1.6 [13] *Le problème de domination totale et domination connexe sont NP-complet pour les graphes scindés.*

Théorème 1.20 [13] *Le problème de domination est NP-complet pour les graphes complets.*

Corollaire 1.7 [13] *Le problème de domination totale et domination connexe sont NP-complet pour les graphes bipartis.*

Dans les deux théorèmes suivants, Chang a présenté la complexité algorithmique pour le problème de la domination dans les chaînes et les graphes triangulés.

Théorème 1.21 [13] *Le problème de domination est NP-complet pour les graphes chaînes non orientées.*

Théorème 1.22 [13] *Le problème de domination stable pondérée est NP-complet pour les graphes triangulés.*

Lan et al. ont présenté la complexité algorithmique pour le problème de la k-domination dans les graphes scindés.

Théorème 1.23 [42] *Pour tout entier positif fixé k , k -domination est NP-complet pour les graphes scindés.*

Théorème 1.24 [57] *La domination sécurisée est NP-complet pour les graphes avec degré 4.*

1.8 Complexité algorithmique du problème de broadcast domination

Dans cette section, nous synthétisons les concepts et les conclusions concernant la complexité algorithmique liée à la recherche du nombre de broadcast domination. Pour une analyse plus approfondie de la théorie de la complexité algorithmique dans le contexte de broadcast domination, vous pouvez vous référer aux articles [14, 28, 52].

Problème de broadcast domination

Pour un graphe $G = (V, E)$ avec un ensemble de sommets de cardinalité n et un entier positif k donné, la question se pose de savoir si un broadcast dominant f sur le graphe peut être trouvé de manière à ce que la somme des valeurs associées à chaque sommet, notée $f(V)$, soit inférieure ou égale à k . Existe-t-il un broadcast dominant f sur G tel que $f(V(G)) = \sum_{v \in V} f(v) \leq k$?

Théorème 1.25 [45] *Le problème de broadcast domination optimale est polynomial et de complexité $O(n^6)$.*

Problème de broadcast domination restreint

Le problème du *broadcast domination optimal restreint* se pose de la manière suivante : Étant donné un graphe $G = (V, E)$, ainsi que deux entiers positifs k et m tels que m soit inférieur ou égal au diamètre de G , la question est de déterminer si un broadcast dominant f peut être trouvé pour G , tout en respectant deux contraintes. D'une part, la somme des valeurs associées à chaque sommet, notée $f(v)$ pour v appartenant à V , doit être inférieure ou égale à k . D'autre part, la valeur maximale parmi toutes les valeurs associées aux sommets, notée $\max f(v)$ pour v appartenant à V , doit être inférieure ou égale à m .

Théorème 1.26 [41] *Le problème de broadcast domination restreint est NP-complet.*

Formulation du problème de broadcast domination

Horton et al., comme décrit dans l'article de référence [41], ont présenté deux formulations du problème de broadcast domination optimal sous forme de programmes linéaires en nombres entiers. La première formulation est un programme linéaire en nombres entiers mixtes, tandis que la seconde est un programme linéaire en nombres entiers avec des variables bivalentes.

Programmation linéaire en nombres entiers mixte

Considérons un graphe $G = (V, E)$ avec n sommets et une fonction broadcast f associée. Pour chaque sommet i appartenant à l'ensemble V , nous utilisons la variable x_i pour représenter le poids du sommet i , qui est la variable de décision associée à $f(i)$. Il est important de noter que ces variables x_i sont des nombres entiers. De plus, pour chaque paire de sommets i et j dans l'ensemble V , nous introduisons une variable binaire y_{ij} . Cette variable prend la valeur 1 si le sommet i f -domine le sommet j , sinon elle prend la valeur 0. Enfin, nous définissons d_{ij} comme la distance entre les sommets i et j . En utilisant ces variables, nous pouvons formuler le problème comme suit :

$$\min \sum_{i \in V} x_i$$

$$\begin{cases} x_j + \sum_{i \neq j} y_{ij} \geq 1, & \forall j \in V \text{ [contraintes de domination]} \\ x_i \geq y_{ij} d_{ij} & \forall i, j \in V, i \neq j \text{ [contraintes de chaînage]} \\ y_{ij} \in \{0, 1\} & y_{ii} = 0 \quad \forall i, j \in V \\ x_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

Les contraintes de domination imposent que chaque sommet soit broadcast dominant ($x_j \geq 1$) ou bien f -dominé par au moins un autre sommet. D'autre part, les contraintes de chaînage autorisent la valeur de y_{ij} à être égale à 1 uniquement lorsque le poids associé à x_i est suffisamment grand pour que le sommet i f -domine le sommet j .

Le nombre total de contraintes se compose de n contraintes de domination et de $n^2 - n$ contraintes de chaînage, ce qui donne un total de n^2 contraintes. En termes de variables, il y a $n^2 - n$ variables binaires et n variables entières. Bien que cette formulation ne requière pas de borne supérieure explicite sur les x_i , il est généralement bénéfique d'en inclure une, comme suggéré par Horton et al [41]. Le rayon du graphe peut être une borne naturelle, car un sommet central ayant ce poids peut potentiellement f -dominer l'ensemble de sommets du graphe.

Programmation linéaire en nombres binaires

Le problème de broadcast domination peut également être exprimé sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers avec des variables bivalentes. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit f un broadcast sur G . Nous définissons la variable x_{ik} comme étant égale à 1 si le sommet i a un poids de k , et 0 sinon. L'ensemble des valeurs possibles pour k , à l'exception de 0, est défini comme $K = \{1, 2, \dots, rad(G)\}$ avec $x_{i0} = 1$ (ce qui indique que le sommet i a un poids nul). Enfin, les y_{ij} sont définis de la même manière que dans la formulation mixte du paragraphe précédent. Ainsi, la formulation du problème peut être énoncée comme suit :

1.8 Complexité algorithmique du problème de broadcast domination

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{k \in K} k x_{ik}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k \in K} y_{jk} + \sum_{i \neq j} y_{ij} \geq 1, & \forall j \in V \text{ [contraintes de domination]} \\ \sum_{k \in K} k \cdot x_{ik} \geq y_{ij} d_{ij} & \forall i, j \in V, i \neq j \text{ [contraintes de chaînage]} \\ \sum_{k \in K \cup \{0\}} x_{ik} = 1 & \forall i \in V \\ y_{ij}, x_{ik} \in \{0, 1\} & y_{ii} = 0 \quad \forall i, j \in V, k \in \{1, 2, 3, \dots\} \end{array} \right.$$

2

Broadcast dominant global dans les graphes

2.1 Introduction

L'étude de la domination dans les graphes s'est développée à la fin des années 1950 et 1960, et commencée par Claude Berge [4]. Depuis cette publication, la domination dans les graphes a été largement étudiée et plusieurs articles de recherche ont été publiés sur ce sujet. En 1989, E. Sampathkumar [53] a introduit le concept de domination globale dans les graphes. La littérature contient plusieurs invariants de domination dans les graphes, voir par exemple [2, 16, 21, 34, 35, 36, 51].

Le concept de broadcast domination dans les graphes a été étudié pour la première fois

2.2 Domination globale dans les graphes

en 2001 par D. J. Erwin dans sa thèse [24]. Il s'agit d'une variante de domination où il est permis aux sommets d'avoir une valeur positive (pas nécessairement égale à 0 ou 1 comme dans la domination) et de dominer les sommets à des distances variables.

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept de broadcast dominant global dans les graphes. Nous définissons le nombre de broadcast domination global. Ensuite, nous établissons des bornes, des valeurs exactes et nous déterminons le nombre de broadcast domination global pour certaines classes de graphes. Enfin, nous présentons des relations entre ce paramètre et d'autres paramètres de domination et de broadcast domination.

2.2 Domination globale dans les graphes

Le concept de domination globale a été introduit par E. Sampathkumar [53] en 1989. Il a été défini dans [53] qu'un ensemble dominant S de G est un ensemble dominant global de G si S est aussi un ensemble dominant du complément \overline{G} de G . Le nombre de domination global $\gamma_g = \gamma_g(G)$ de G est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant global.

Soit un graphe G où l'ensemble $\{x, y, z\}$ est un ensemble dominant global.

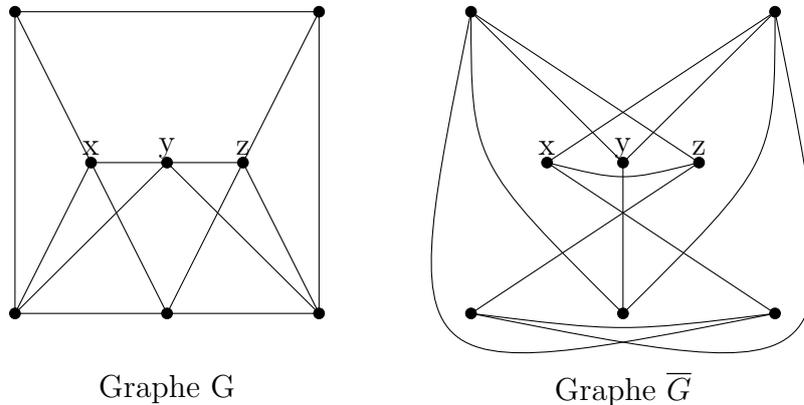


FIGURE 2.1 – Ensemble dominant global $\{x, y, z\}$.

Le nombre de domination globale des graphes bipartis, des chaînes et des cycles a été donné par Sampathkumar.

Proposition 2.1 [53] *Pour un graphe G d'ordre n ,*

- (i) $\gamma_g(k_{m,n}) = 2$ pour tous $m, n \geq 1$,
- (ii) $\gamma_g(P_n) = 2$ pour $n = 2, 3$ et $\gamma_g(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour $n \geq 4$,
- (iii) $\gamma_g(C_4) = 2$, $\gamma_g(C_5) = 3$ et $\gamma_g(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour $n \geq 6$.

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Quelques relations sont également données par Sampathkumar.

Proposition 2.2 [53] *Pour tout graphe G ,*

- (i) $\gamma_g(G) = \gamma_g(\overline{G})$,
- (ii) $\gamma(G) \leq \gamma_g(G)$,
- (iii) $\frac{\gamma(G) + \gamma(\overline{G})}{2} \leq \gamma_g(G) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G})$.

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Dans cette section, nous définissons et étudions un nouveau invariant de broadcast dans les graphes que nous appelons broadcast dominant global. Un broadcast dominant f dans G est un broadcast dominant global dans G si f est aussi un broadcast dominant du complément \overline{G} de G . Le nombre de broadcast domination global $\gamma_{bg} = \gamma_{bg}(G)$ de G est le coût minimum $f(V)$ d'un broadcast dominant global f sur G .

On note par $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ le complément du graphe G et pour un sommet u de G , soit \bar{u} le sommet correspondant dans \overline{G} . Pour un ensemble $X \subseteq V$, soit \overline{X} l'ensemble correspondant de sommets dans \overline{V} .

Commençons par un exemple où nous marquons les valeurs de la fonction de broadcast domination pour chaque graphe par chiffre normal et les valeurs de la fonction de broadcast dominant global par chiffre en gras.

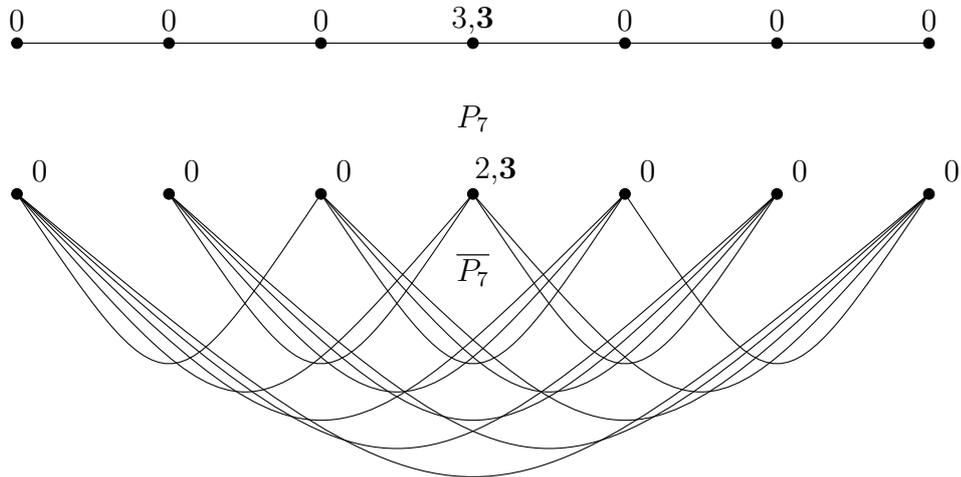


FIGURE 2.2 – Broadcast dominant et broadcast dominant global sur P_7 et $\overline{P_7}$.

Nous considérons quelques propriétés de base de $\gamma_{bg}(G)$.

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Proposition 2.3 *Soit G un graphe, un broadcast dominant f dans G est un Broadcast dominant global dans G si et seulement si, pour tout sommet $v \in V-V^+$, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *Si le sommet v est f -dominé par un sommet u tel que $d(u, v) = 1$ et $f(u) = 1$, alors il existe $w \in V^+$ tel que $d(v, w) \geq 2$ ou il existe $w \in V^+$ tel que $d(v, w) = 1$ et $f(w) \geq 2$ et $f(w) \geq d(\bar{v}, \bar{w})$.*
- *Si le sommet v est f -dominé par un sommet u tel que $d(u, v) = 1$ et $f(u) \geq 2$, alors il existe $w \in V^+$ tel que $d(v, w) \geq 2$ ou $f(u) \geq d(\bar{u}, \bar{v})$.*
- *Si le sommet v est f -dominé par un sommet u tel que $d(u, v) \geq 2$ and $f(u) \geq 2$, alors le sommet \bar{v} doit être f -dominé par le sommet \bar{u} dans \bar{G} .*

Proposition 2.4 *Pour tout graphe G ,*

- (i) $\gamma_{bg}(G) = \gamma_{bg}(\bar{G})$,
- (ii) $\gamma_b(G) \leq \gamma_{bg}(G)$.

Preuve (i) *Est évident. (ii) S'ensuit puisque chaque broadcast dominant global dans G est un Broadcast dominant dans G , d'autre part, un broadcast dominant n'est pas nécessairement un broadcast dominant global.*

D. J. Erwin a trouvé une valeur exacte pour le nombre de broadcast domination d'une chaîne et d'un cycle.

Proposition 2.5 [24]

- (i) *Pour tout entier $n \geq 2$, $\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*
- (ii) *Pour tout entier $n \geq 3$, $\gamma_b(C_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Dans la proposition suivante, nous déterminons des valeurs exactes pour quelques classes de graphes.

Proposition 2.6 *Pour un graphe G d'ordre n ,*

- (i) $\gamma_{bg}(k_{m,n}) = 2$ pour tous $m, n > 1$,
- (ii) $\gamma_{bg}(P_n) = 2$ pour $n = 2, 3$ et $\gamma_{bg}(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour $n \geq 4$,

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

(iii) $\gamma_{bg}(C_n) = 2$ pour $n = 4, 5$ et $\gamma_{bg}(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ pour $n \geq 6$.

Preuve Nous commençons par (i), nous savons que $k_{m,n}$ peut être écrit $k_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ tels que V_1 et V_2 sont deux sous ensembles, chacun est un ensemble stable et $\forall v \in V_1, N(v) = V_2$ et $\forall u \in V_2, N(u) = V_1$. $\bar{k}_{m,n} = (\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2, \bar{E})$ tels que les sous graphes induits par V_1 et V_2 dans $\bar{k}_{m,n}$ sont deux cliques. Alors la fonction f qui attribue une valeur 1 à un seul sommet dans V_1 et à un seul sommet dans V_2 est une fonction broadcast dominant global et $\gamma_{bg}(k_{m,n}) = \gamma_{bg}(\bar{k}_{m,n}) \leq 2$. D'autre part, c'est prouvé dans [24] que $\gamma_b(k_{m,n}) = 2$ et nous obtenons $\gamma_b(G) \leq \gamma_{bg}(G)$ de la Proposition 2.4, d'où $\gamma_{bg}(G) \geq 2$. Finalement, $\gamma_{bg}(k_{m,n}) = \gamma_{bg}(\bar{k}_{m,n}) = 2$. Concernant (ii) et (iii), le résultat découle de la Proposition 2.5 et la fonction broadcast dominante sur P_n est aussi une fonction broadcast dominante sur \bar{P}_n .

De la Proposition 2.1, Proposition 2.6 et la Proposition 2.5, nous remarquons que les chaînes et les cycles sont deux classes de graphes G qui ont les paramètres suivants : le nombre de domination, le nombre de broadcast domination, le nombre de domination globale et le nombre de broadcast domination global sont égaux.

Nous donnons une relation entre le nombre de broadcast domination global γ_{bg} et le nombre de domination globale γ_g pour un graphe G .

Si S est un ensemble dominant global et $f_S : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble S défini par :

$$f_S(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f_S est une fonction broadcast dominante globale. Ainsi, $\gamma_{bg}(G) \leq \gamma_g(G)$.

Proposition 2.7 Pour tout graphe G , $\gamma_{bg}(G) \leq \gamma_g(G)$.

Le résultat suivant fournit une condition générale pour que le nombre de domination globale et le nombre de broadcast domination global pour un graphe soient égaux.

Théorème 2.1 Soit G un graphe connexe. Alors $\gamma_{bg}(G) = \gamma_g(G)$ si et seulement s'il existe une fonction broadcast dominante globale minimum f sur G telle que V^+ est un ensemble dominant global.

Preuve On suppose d'abord que $\gamma_{bg}(G) = \gamma_g(G)$. Soit S un ensemble dominant global minimum de G et f la fonction caractéristique associée à S . Depuis S est un ensemble

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

dominant global minimum, il découle de l'hypothèse que $\gamma_{bg}(G) = \gamma_g(G)$ que f est une fonction broadcast dominante globale minimum. De plus, $S = V^+$. Nous supposons maintenant qu'il existe une fonction broadcast dominante globale minimum f sur G pour laquelle V^+ est un ensemble dominant global. Alors $\gamma_g(G) \leq |V^+| \leq \gamma_{bg}(G)$ et le résultat découle de la Proposition 2.7.

Nous établissons une borne inférieure pour le nombre de broadcast domination global γ_{bg} pour un graphe G , la borne est atteinte. Supposons qu'il existe un graphe $G = (V, E)$ pour lequel $\gamma_{bg}(G) = 1$. Il existe un sommet x dans V tel que $N[x] = V$ et $N[\bar{x}] = V$ alors $e(x) = e(\bar{x}) = 1$, c'est une contradiction.

Proposition 2.8 *Soit G un graphe non trivial. Alors $\gamma_{bg}(G) \geq 2$.*

Pour la caractérisation des graphes dont la borne inférieure est atteinte, on donne une relation entre le rayon d'un graphe G et celui de son complémentaire \bar{G} .

Théorème 2.2 *Soit G un graphe connexe.*

- (i) *Si $rad(G) = 1$, alors $rad(\bar{G})$ est infini.*
- (ii) *Si $rad(G) = 2$, alors $rad(\bar{G}) = 2$.*

Preuve *Soit G un graphe. Supposons que $rad(G) = 1$, alors il existe un sommet x d'excentricité $e(x) = 1$, alors le sommet x est un sommet isolé dans \bar{G} . Supposons maintenant que $rad(G) = 2$, alors il existe un sommet x d'excentricité $e(x) = 2$. Tous les sommets qui sont à une distance 2 du sommet x dans G seront à une distance 1 du sommet \bar{x} dans \bar{G} . Pour des sommets distants 1 du sommet x dans G , pour chaque sommet y dans G avec $d(x, y) = 1$, il existe un sommet z dans G tel que $d(y, z) > 1$ sinon $rad(G) = 1$. Où tous les sommets qui sont à une distance 1 du sommet x dans G seront à une distance égale à 2 du sommet \bar{x} dans \bar{G} , alors $rad(\bar{G}) = 2$, avec le même sommet central.*

Nous caractérisons les graphes pour lesquels $\gamma_{bg}(G) = 2$.

Théorème 2.3 *Soit G un graphe non trivial. Alors $\gamma_{bg}(G) = 2$ si et seulement si $rad(G) = rad(\bar{G}) = 2$ ou $\gamma_g(G) = 2$.*

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Preuve Certainement, si $\text{rad}(G) = \text{rad}(\overline{G}) = 2$ ou $\gamma_g(G) = 2$ alors $\gamma_{bg}(G) = 2$. Supposons alors que $\gamma_{bg}(G) = \gamma_{bg}(\overline{G}) = 2$. Alors l'ensemble V^+ doit contenir au plus deux sommets et nous aurons deux cas. Premièrement, si $V^+ = \{x\}$, alors soit x le seul sommet de V^+ , et soit $f_x : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ soit défini par $f_x(x) = 2$; $f_x(v) = 0$, si $v \neq x$. Alors la fonction broadcast f_x est une fonction broadcast dominante de G et de \overline{G} si et seulement si $\text{rad}(G) = \text{rad}(\overline{G}) = 2$. Dans le second cas, $V^+ = \{y, z\}$, et soit $f_{y,z} : V \rightarrow \{0, 1\}$ défini par $f_{y,z}(y) = f_{y,z}(z) = 1$, $f_{y,z}(v) = 0$, si $v \neq y, z$. Alors la fonction broadcast $f_{y,z}$ est une fonction broadcast dominante de G et de \overline{G} si et seulement si V^+ est un ensemble dominant global, où $\gamma_{bg}(G) = \gamma_g(G) = 2$.

Dans la Figure 2.3 nous donnons un exemple où nous avons $\gamma_{bg}(P_5) = \text{rad}(P_5) = \text{rad}(\overline{P_5}) = \gamma_{bg}(\overline{P_5})$.

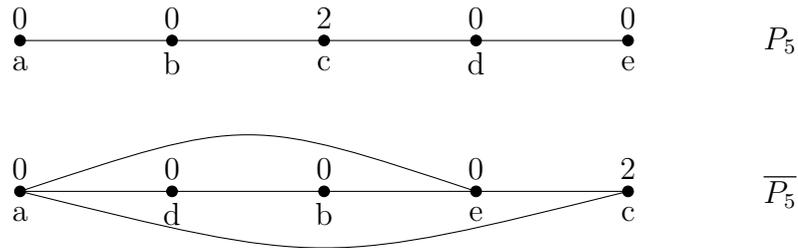


FIGURE 2.3 – Broadcast dominant global sur P_5 .

Soit f une fonction broadcast définie sur G , pour tout sommet $v \in V$, $f(v) = 1$. Alors $\gamma_{bg}(G) \leq f(V) = f(\overline{V}) = n$.

Proposition 2.9 Pour un graphe G d'ordre n , $\gamma_{bg}(G) \leq n$ et cette borne est atteinte.

Ensuite, nous caractérisons les graphes pour lesquels la borne supérieure de la Proposition 2.9 est atteinte.

Proposition 2.10 Pour un graphe G d'ordre n , $\gamma_{bg}(G) = n$ si et seulement si $G = K_n$ (un graphe complet) ou $G = \overline{K}_n$ (un ensemble stable).

Preuve Clairement, nous avons $\gamma_{bg}(K_n) = \gamma_{bg}(\overline{K}_n) = n$. Maintenant, supposons que $\gamma_{bg}(G) = n$ et $G \neq K_n, \overline{K}_n$. Alors G a au moins une arête uv et un sommet w non

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

adjacent à, disons v . Alors la fonction broadcast f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq v, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction broadcast globale et $\gamma_{bg}(G) = f(V) = f(\bar{V}) = n - 1$.

Théorème 2.4 *Pour tout graphe G , si $\text{rad}(G) \geq 3$, alors $\text{diam}(\bar{G}) \leq 2$.*

Preuve *Supposons que $\text{rad}(G) \geq 3$. On peut montrer que $\text{diam}(\bar{G}) \leq 2$, donc on prend deux sommets \bar{u} et \bar{v} de \bar{G} .*

Soit \bar{u} et $\bar{v} \in V(\bar{G})$. Si $d(u, v) \geq 2$ alors $d(\bar{u}, \bar{v}) = 1$. Soit maintenant $d(u, v) = 1$.

Puisque $\text{rad}(G) \geq 3$, alors tous les sommets de G ont une excentricité supérieure ou égale à 3. En particulier $e(u) = \max_{w \in V(G)} d(u, w) \geq 3$ et il existe $w \in V(G) : d(u, w) \geq 3$. Or $d(v, w) \geq 2$ car sinon $d(u, w) = d(u, v) + d(v, w) = 2$. Dans \bar{G} , on a \bar{w} est adjacent à \bar{u} et à \bar{v} autrement dit $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{u}, \bar{w}) + d(\bar{w}, \bar{v}) = 2$. Enfin, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V(\bar{G}), d(\bar{u}, \bar{v}) \leq 2$ qui implique $\text{diam}(\bar{G}) \leq 2$.

Théorème 2.5 [23] *Tout graphe G possède un γ_b -broadcast qui est efficace.*

Théorème 2.6 *Pour tout graphe G , il existe un broadcast dominant efficace optimal f sur G tel que f est un broadcast dominant sur \bar{G} si et seulement si G n'est pas γ_b -radial ou G est γ_b -radial avec $\text{rad}(\bar{G}) \leq \text{rad}(G)$.*

Preuve *Soit G un graphe, et f un broadcast efficace sur G . f est un broadcast dominant tel que chaque sommet reçoit exactement un broadcast. Si G est γ_b -radial avec $\text{rad}(G) \geq \text{rad}(\bar{G})$, alors f est un broadcast dominant également pour \bar{G} . On suppose maintenant que G n'est pas γ_b -radial, alors $|V^+| \geq 2$. Puisque f est un broadcast efficace, pour chaque sommet v n'est pas dans V^+ , il existe un sommet x dans V^+ tel que x ne soit pas dans $H(v)$, alors x sera dans $H(v)$ dans \bar{G} . Ainsi, f est également un broadcast dominant dans \bar{G} .*

On dit que le graphe G a la propriété X si pour chaque arête xy (ie., paire de sommets adjacents x et y), il existe un sommet z tel que z soit n'est adjacent ni à x ni à y .

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Proposition 2.11 [32] *Si le graphe G a la propriété X , alors $\text{diam}(\overline{G}) = 2$.*

Pour deux entiers quelconques m et n tels que $2 \leq m \leq n$, il est montré que pour les graphes des grilles $G_{m,n}$ on a,

$$\gamma_b(G_{m,n}) = \text{rad}(G_{m,n}),$$

où $\text{rad}(G_{2,n}) = \text{rad}(G_{3,n}) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ et $\text{rad}(G_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Proposition 2.12 *Pour deux entiers quelconques m et n , $2 \leq m \leq n$, $\gamma_{bg}(G_{m,n}) = \gamma_b(G_{m,n}) = \text{rad}(G_{m,n})$.*

Preuve *On voit facilement que $\text{diam}(G_{m,n}) = m + n - 2$, et $\text{diam}(\overline{G}_{m,n}) = 2$ de la Proposition 2.11 car $G_{m,n}$ a la propriété X . Pour deux entiers quelconques m et n , $2 \leq m \leq n$, on a $\text{diam}(\overline{G}_{m,n}) \leq \text{diam}(G_{m,n})$ et le graphe de grille est un graphe γ_b -radial alors le résultat de ce théorème découle du Théorème 2.6.*

Notre prochain résultat découle directement du Théorème 2.4 et du Théorème 2.6.

Corollaire 2.1 *Soit G un graphe.*

- (i) *Si $\gamma_b(G) = \gamma_b(\overline{G})$, alors $\gamma_{bg}(G) = \gamma_b(G)$.*
- (ii) *Si $\gamma_b(G) \neq \gamma_b(\overline{G})$, alors $\gamma_{bg}(G) = \max\{\gamma_b(G), \gamma_b(\overline{G})\}$.*

Un arbre T est un graphe connexe sans cycle, plusieurs articles ont été publiés sur la domination et la broadcast domination dans les arbres. Dans le théorème suivant, nous donnons un résultat sur le nombre de broadcast domination global des arbres.

Proposition 2.13 *Pour tout arbre T d'ordre n ,*

- (i) *Si $n \leq 3$, alors $\gamma_{bg}(T) = \gamma_b(\overline{T})$.*
- (ii) *Si $n \geq 4$ et T est une étoile S_{n-1} , alors $\gamma_{bg}(T) = \gamma_b(\overline{T})$.*
- (iii) *Si $n \geq 4$ et T n'est pas une étoile S_{n-1} , alors $\gamma_{bg}(T) = \gamma_b(T)$.*

Preuve *Soit T un arbre d'ordre n . Si $n \leq 3$, alors T est une chaîne d'ordre 2 ou 3 et $\gamma_{bg}(P_2) = \gamma_{bg}(P_3) = 2 = \gamma_b(\overline{P}_2) = \gamma_b(\overline{P}_3) \neq \gamma_b(P_2) = \gamma_b(P_3) = 1$. Maintenant si $n \geq 4$, alors on considère deux cas selon la forme de cet arbre.*

Premier cas *T est une étoile S_{n-1} ou un graphe biparti $K_{1,n-1}$, alors $\gamma_b(T) = 1$ et $\gamma_b(\overline{T}) = 2, \max\{\gamma_b(T), \gamma_b(\overline{T})\} = 2$. Donc $\gamma_{bg}(T) = \gamma_b(\overline{T})$.*

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

Deuxième cas T n'est pas une étoile S_{n-1} ni un graphe biparti $K_{1,n-1}$. On remarque facilement que $\text{diam}(T) \geq \text{diam}(\overline{T}) = 2$ de la proposition 2.11 car T dans ce cas a la Propriété X pour $n \geq 4$. Donc le résultat du Théorème découle du Théorème 2.6 et le Corollaire 2.1.

Dans le corollaire suivant, Erwin a prouvé que le nombre de broadcast domination et le nombre de broadcast domination stable sont égaux.

Corollaire 2.2 [24] *Tout graphe G a un broadcast γ_b qui est stable, c'est-à-dire que pour tout graphe G , $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$.*

Dans l'observation et le corollaire suivants, Dunbar et al. ont donné les relations entre le nombre de broadcast domination et d'autres paramètres de broadcast domination.

Observation 2.1 [23] *Pour tout graphe G , $\gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \text{rad}(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$.*

Corollaire 2.3 [23] *Pour chaque graphe G , $p_b(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}$.*

Les résultats que nous utilisons pour établir une relation entre le nombre de broadcast domination global et d'autres paramètres.

Corollaire 2.4 *Pour tout graphe G ,*

- (i) $p_b(G) \leq \gamma_{bg}(G)$,
- (ii) $\gamma_{eb}(G) \leq \gamma_{bg}(G)$,
- (iii) $\gamma_{ib}(G) \leq \gamma_{bg}(G)$.

Il découle de l'Observation 2.1 et du Corollaire 2.3 que $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$ et $\gamma_b(G) \leq \gamma_{bg}(G)$. Cela nous amènerait à nous demander si $\gamma_{bg}(G)$ est comparable à $i_b(G)$.

Si on reprend le graphe de la Figure 2.2, il est simple de montrer que $\gamma_{bg}(\overline{P_7}) = 3$ et $i_b(\overline{P_7}) = 2$ donc $i_b(\overline{P_7}) \leq \gamma_{bg}(\overline{P_7})$. Par contre, $\gamma_{bg}(P_7) = 3$ et $i_b(P_7) = 4$ donc $\gamma_{bg}(P_7) \leq i_b(P_7)$. Par conséquent, $\gamma_{bg}(G)$ n'est pas comparable à $i_b(G)$ c'est-à-dire $\gamma_{bg}(G) \diamond i_b(G)$. De plus, nous observons que ni $\beta_0(G)$ ni $\beta_b(G)$ ne sont comparables à $\gamma_{bg}(G)$. Par exemple, toujours avec la Figure 2.2, il est simple de montrer que $\gamma_{bg}(\overline{P_7}) = 3$, $\beta_0(\overline{P_7}) = 2$ et $\beta_b(\overline{P_7}) = 2$ donc $\beta_0(\overline{P_7}) = \beta_b(\overline{P_7}) \leq \gamma_{bg}(\overline{P_7})$. Par contre, $\gamma_{bg}(P_7) = 3$, $\beta_0(P_7) = 4$ et $\beta_b(P_7) = 6$ donc $\gamma_{bg}(P_7) \leq \beta_0(P_7) \leq \beta_b(P_7)$. Par conséquent, nous pouvons voir que ni $\beta_0(G)$ ni $\beta_b(G)$ sont comparables à $\gamma_{bg}(G)$. Ainsi,

Observation 2.2 *Pour tout graphe G ,*

2.3 Broadcast dominant global dans les graphes

- (i) $\gamma_{bg}(G) \diamond i_b(G)$,
- (ii) $\gamma_{bg}(G) \diamond \beta_0(G)$,
- (iii) $\gamma_{bg}(G) \diamond \beta_b(G)$.

3

La 2-domination sécurisée

3.1 Introduction

En théorie des graphes, le concept de domination a été introduit pour la première fois comme "coefficient de stabilité externe" par Claude Berge [4] en 1958. Oré en 1962 l'a introduit comme "nombre de domination". Une application de la domination a été donnée par Liu dans son livre [43] en 1968, l'auteur a discuté du concept de domination dans les réseaux de communication. Ensuite, la domination a été intensivement étudiée et plusieurs paramètres connexes ont été définis, parmi ces paramètres, Fink et Jacobson [26] ont introduit le concept de k -domination, dont la 2-domination est un cas particulier. Le concept de domination sécurisée a été introduit par Cockayne et al. [19] et étudié dans une série d'articles [17, 15, 30, 48].

Dans ce chapitre, motivés par ces travaux, nous allons coupler les deux concepts de domination sécurisée et de 2-domination pour former la base de ce travail, nous définissons et étudions un nouveau paramètre de domination dans les graphes, qui est l'ensemble 2-dominant sécurisé. Nous commençons, dans la Section 3.2, par introduire les concepts de base et les résultats précédents. Dans la Section 3.3, nous établissons d'abord des bornes inférieures et supérieures pour ce paramètre pour les graphes généraux et également pour les graphes sans triangle, puis nous fournissons les valeurs exactes du paramètre pour les chaînes et les cycles. Dans la Section 3.4, nous calculons la complexité de calcul du problème de 2-domination sécurisée, tout en fournissant des bornes supérieures du nombre

de 2-domination sécurisée en termes de nombre de cliques et de nombre de stabilité pour les graphes parfaits.

3.2 Définitions et résultats antérieurs

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sommet $v \in V$ et un ensemble $S \subset V$, S est 2-dominant si chaque sommet de $V \setminus S$ a au moins deux voisins dans S . Le nombre de 2-domination $\gamma_2(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un ensemble 2-dominant. Un ensemble dominant sécurisé S d'un graphe G est un ensemble dominant avec la propriété que tout sommet u dans $V \setminus S$ est adjacent à un sommet $v \in S$ tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant. Le nombre de domination sécurisée $\gamma_s(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un ensemble dominant sécurisé.

Dans ce travail, nous définissons un nouvel invariant de domination des graphes que nous appelons la 2-domination sécurisée dans les graphes. Un ensemble 2-dominant S est 2-dominant sécurisé si pour chaque sommet u dans $V \setminus S$, $\exists v \in (S \cap N(u))$ tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble 2-dominant. Le nombre de 2-domination sécurisée $\gamma_2^s(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un ensemble 2-dominant sécurisé. On considère des graphes simples non triviaux d'ordre $n \geq 3$.

Avant de présenter nos résultats, nous présentons quelques résultats qui ont été obtenus pour les deux paramètres $\gamma_2(G)$ et $\gamma_s(G)$.

3.2.1 2-domination dans les graphes

Proposition 3.1 [7] *Si G est un graphe avec $\delta(G) \geq 2$, alors $\gamma_2(G) \leq \beta_0(G)$.*

Théorème 3.1 [7] *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq i(T)$.*

Théorème 3.2 [6] *Pour tout arbre non trivial T , $\gamma_2(T) \geq \beta_0(T)$, avec égalité si et seulement si T a un unique $\gamma_2(T)$ -ensemble qui est aussi un $\beta_0(T)$ -ensemble.*

3.2.2 Domination sécurisée dans les graphes

Théorème 3.3 [19] *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n ,*

$$\gamma_s(P_n) = \gamma_s(C_n) = \lceil \frac{3n}{7} \rceil.$$

Théorème 3.4 [47] *Pour tout graphe G , $\gamma_s(G) \leq \gamma(G) + \beta_0(G) - 1$.*

Théorème 3.5 [47] *Pour tout graphe connexe sans triangle G , $\gamma_s(G) \leq \frac{3}{2}\beta_0(G)$.*

Corollaire 3.1 [47] *Pour tout arbre T , $\gamma_s(T) \leq \beta_0(T)$.*

3.3 Bornes et valeurs exactes pour la 2-domination sécurisée dans les graphes

Dans cette section, après avoir fourni la définition du paramètre, nous établissons quelques bornes et des valeurs exactes.

Définition 3.1 *Un ensemble 2-dominant S est sécurisée (S2DS, pour faire court) si pour tout sommet u dans $V \setminus S$, $\exists v \in (S \cap N(u))$ tel que $(S \setminus \{v\}) \cup \{u\}$ est un ensemble 2-dominant. Le nombre de 2-domination sécurisée $\gamma_2^s(G)$ est égal à la cardinalité minimum d'un ensemble 2-dominant sécurisé.*

Nous établissons quelques propriétés de S2DS. Pour $w \in V \setminus X$, $v \in X$ est un X -voisin privé interne de w (X -ipn de w , pour faire court) si $N(v) \cap V \setminus X = \{w\}$. Soit $P(w, X)$ l'ensemble de tous les X -ipn de w .

Le théorème suivant fournit la borne inférieure de $\gamma_2^s(G)$ en terme de n , l'ordre du graphe G , pour un graphe sans triangle.

Théorème 3.6 *Si G est un graphe sans triangle d'ordre n , alors*

$$\gamma_2^s(G) \geq \frac{n+2}{2}.$$

Preuve *Soit X un ensemble 2-dominant sécurisé. Soit X_I l'ensemble des sommets de $\bigcup_{w \in V \setminus X} P(w, X)$, $X_m = X \setminus X_I$, et $C = V \setminus X$. Soit $|X_I| = x_I$, $|X_m| = x_m$ et $|C| = c$. Alors*

$$V = X_I \cup X_m \cup C \quad (\text{Union disjointe}).$$

Donc

$$\begin{aligned} n &= x_I + x_m + c, \\ c &= n - x_I - x_m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

En comptant $e(C, X)$, le nombre d'arêtes de C à X , on obtient

$$\begin{aligned} 2c &\leq e(C, X) \leq x_I + \Delta x_m, \\ x_I + \Delta x_m &\geq 2c. \end{aligned}$$

3.3 Bornes et valeurs exactes pour la 2-dominaton sécurisée dans les graphes

Nous utilisons (3.1) pour éliminer c de cette inégalité et obtenir

$$x_I + \Delta x_m \geq 2n - 2x_I - 2x_m,$$

$$3x_I + (\Delta + 2)x_m \geq 2n.$$

Puisque G est un graphe sans triangle alors pour chaque sommet $w \in V \setminus X$, $|P(w, X)| \geq 1$ et $|X_m| \geq 2$.

$$x \geq c + 2,$$

$$3x_I + (\Delta + 2)x_m \geq 2n, \tag{3.2}$$

$$x_I + x_m \geq c + 2. \tag{3.3}$$

La valeur minimum de $x_I + x_m$ soumise aux contraintes (3.2) et (3.3) et $x_I, x_m \geq 0$ est $\frac{(n+2)}{2}$. Alors

$$\gamma_2^s(G) \geq \frac{n+2}{2}.$$

Nous donnons un exemple pour lequel $\gamma_2^s(G) = \frac{n+2}{2}$:

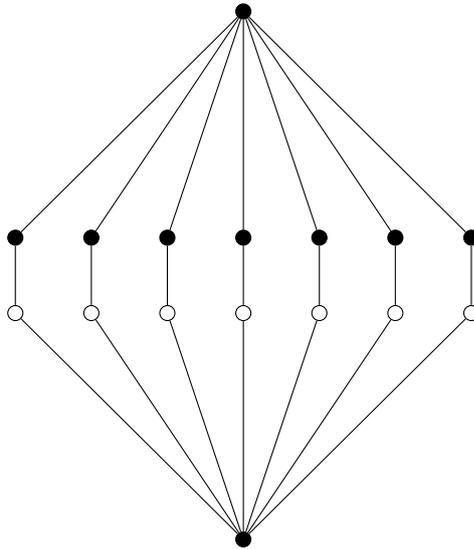


FIGURE 3.1 – Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum dans un graphe sans triangle

Le deuxième théorème fournit la borne inférieure de $\gamma_2^s(G)$ en terme de n , l'ordre du graphe G , pour tout graphe.

3.3 Bornes et valeurs exactes pour la 2-dominaton sécurisée dans les graphes

Théorème 3.7 *Si G est un graphe d'ordre n , alors*

$$\gamma_2^s(G) \geq \frac{n+1}{2}.$$

Preuve *Soit X un ensemble 2-dominant sécurisé. Soit X_I l'ensemble des sommets de $\bigcup_{w \in V \setminus X} P(w, X)$, $X_m = X \setminus X_I$, et $C = V \setminus X$. Soit $|X_I| = x_I$, $|X_m| = x_m$ et $|C| = c$. Alors*

$$V = X_I \cup X_m \cup C \quad (\text{Union disjointe}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} n &= x_I + x_m + c, \\ c &= n - x_I - x_m. \end{aligned} \tag{3.4}$$

En comptant $e(C, X)$, le nombre d'arêtes de C à X , on obtient

$$\begin{aligned} 2c &\leq e(C, X) \leq x_I + \Delta x_m, \\ x_I + \Delta x_m &\geq 2c. \end{aligned}$$

Nous utilisons (3.4) pour éliminer c de cette inégalité et obtenir

$$\begin{aligned} x_I + \Delta x_m &\geq 2n - 2x_I - 2x_m, \\ 3x_I + (\Delta + 2)x_m &\geq 2n. \end{aligned}$$

Puisque G est un graphe qui peut avoir un triangle, alors pour chaque sommet $w \in V \setminus X$, w peut être dans un triangle, alors

$$\begin{aligned} x &\geq c + 1, \\ 3x_I + (\Delta + 2)x_m &\geq 2n, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$x_I + x_m \geq c + 1. \tag{3.6}$$

La valeur minimum de $x_I + x_m$ soumise aux contraintes (3.5) et (3.6) et $x_I, x_m \geq 0$ est $\frac{(n+1)}{2}$. Alors

$$\gamma_2^s(G) \geq \frac{n+1}{2}.$$

Nous donnons un exemple pour lequel $\gamma_2^s(G) = \frac{n+1}{2}$:

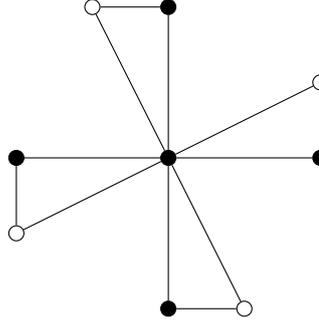


FIGURE 3.2 – Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum

Maintenant, nous fournissons des valeurs exactes de $\gamma_2^s(G)$ pour les chaînes et les cycles.

Proposition 3.2 *Pour la chaîne P_n et le cycle C_n ,*

$$\gamma_2^s(P_n) = \begin{cases} 3\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1 & , \text{ si } n \equiv 0 \pmod{5}, \\ n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor & , \text{ si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{5}, \\ n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1 & , \text{ si } n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Et

$$\begin{aligned} \gamma_2^s(C_n) &= \begin{cases} \gamma_2^s(P_n) - 1 & , \text{ si } n \equiv 0, 3 \pmod{5}, \\ \gamma_2^s(P_n) & , \text{ si } n \equiv 1, 2, 4 \pmod{5}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3\lfloor \frac{n}{5} \rfloor & , \text{ si } n \equiv 0 \pmod{5}, \\ n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor & , \text{ si } n \equiv 1, 2 \pmod{5}, \\ n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1 & , \text{ si } n \equiv 3 \pmod{5}, \\ n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1 & , \text{ si } n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve Soit P_n une chaîne d'ordre n et soit la séquence de sommets de P_n (u_1, u_2, \dots, u_n).

Soit $n = 5k + r$, où $k \geq 0$ et $r \in \{1, 3, 4\}$. Définissons $Y = \bigcup_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1} \{u_{5k+1}, u_{5k+3}, u_{5k+4}\}$ et

$$Z = \begin{cases} \{u_n\}, & n \equiv 0 \pmod{5}, \\ \{u_n\}, & n \equiv 1 \pmod{5}, \\ \{u_{n-1}, u_n\}, & n \equiv 2 \pmod{5}, \\ \{u_{n-2}, u_{n-1}, u_n\}, & n \equiv 3 \pmod{5}, \\ \{u_{n-3}, u_{n-1}, u_n\}, & n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Alors $X = Y \cup Z$ est un ensemble 2-dominant sécurisé minimum de taille $3\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1$ si $n \equiv 0 \pmod{5}$, $n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ si $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{5}$, et $n - 2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1$ si $n \equiv 4 \pmod{5}$.

3.3 Bornes et valeurs exactes pour la 2-dominat on sécurisée dans les graphes

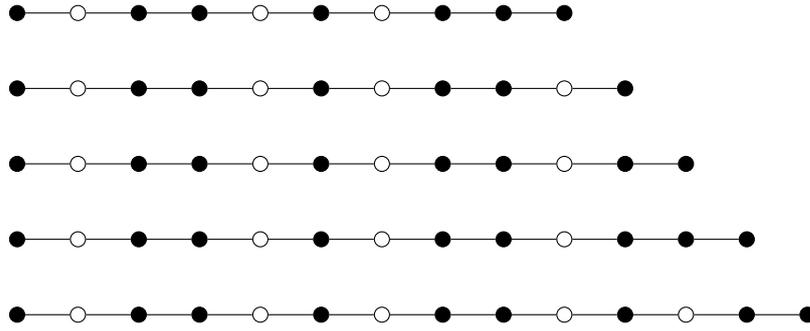


FIGURE 3.3 – Un ensemble 2-dominant sécurisé minimum dans une chaine P_n .

Maintenant, soit S un ensemble 2-dominant sécurisé. Pour chaque sommet u qui n'est pas dans S , u doit avoir au moins deux voisins v et w dans S , de sorte que S est 2-dominant dans G . Maintenant, pour que S soit 2-dominant sécurisé dans G , l'un des deux sommets v , w a au moins un autre voisin dans S ou v et w sont adjacents dans S , donc u , v et w forment un triangle dans S , mais la chaine P_n est un graphe sans triangle donc au moins un des deux sommets v , w ont au moins un autre voisin dans S . Par conséquent, S est l'ensemble 2-dominant sécurisé minimum. Pour le cycle C_n , on considère d'abord la chaine P_n puis on met une arête entre le sommet u_1 et le sommet u_n . On distingue deux cas selon la valeur de n modulo 5.

1^{er} **Cas** : si $n \equiv 0, 3 \pmod{5}$.

Dans ce cas l'ajout d'une arête sur P_n génère une chaine induite $(u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_1)$ tel que les quatre sommets $u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, u_1$ sont dans S , donc retirer u_{n-1} de S n'a aucun effet sur la 2-dominat on sécurisée de S sur G . Dans ce cas $\gamma_2^s(C_n) = \gamma_2^s(P_n) - 1$.

2^{ème} **Cas** : si $n \equiv 1, 2, 4 \pmod{5}$.

Dans ce cas l'ajout d'une arête sur P_n génère une chaine induite (u_{n-1}, u_n, u_1) tel que les trois sommets u_{n-1}, u_n, u_1 sont dans S . La suppression d'un sommet de la chaine induite fait perdre la 2-dominat on sécurisée de S sur G donc $\gamma_2^s(C_n) = \gamma_2^s(P_n)$.

Après avoir fourni des bornes et des valeurs exactes pour γ_2^s . Dans la section suivante, nous mettrons en évidence la complexité du problème associé.

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-domination sécurisée

Dans cette section, nous prouvons que le problème de 2-domination sécurisé (S2DOM, en abrégé) est un problème NP-complet pour les graphes généraux, ce qui se réduit au problème de domination sécurisée (SDOM, en abrégé) qui est connu pour être un NP-complet [55].

Pour cela, nous devons fournir la version décisionnelle des problèmes connexes suivants :

1) Le problème de décision pour le problème de domination sécurisée (SDOM) d'un graphe est connu pour être NP-complet [55] :

Problème de domination sécurisée (SDOM)

Instance : Un graphe non orienté et connexe G et un entier positif k .

Question : Est-ce que $\gamma_s(G) \leq k$?

2) Formulé comme un problème de décision, nous définissons le problème de 2-domination sécurisée, noté S2DOM, comme suit :

Problème de 2-Domination sécurisée (S2DOM)

Instance : Un graphe non orienté et connexe G^* et un entier positif k^* .

Question : Est-ce que $\gamma_2^s(G) \leq k^*$?

Le problème de NP-Complétude du problème de 2-domination sécurisée est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.8 *Le problème de 2-domination sécurisée est NP-complet pour les graphes généraux.*

Preuve *Pour prouver le théorème, on utilise une réduction au problème de domination sécurisée, avec la version de décision donnée ci-dessus, et connue pour être NP-complète [55].*

*Clairement, S2DOM est un membre de NP, puisqu'on peut vérifier en temps polynomial, qui ne dépasse pas $O(k^*n^*)$, si oui ou non un ensemble donné S^* , $|S^*| \leq k^*$ de sommets est un S2DS de G^* , où n^* est de l'ordre de G^* .*

Maintenant, montrons comment un algorithme en temps polynomial pour S2DOM pourrait être utilisé pour résoudre SDOM en temps polynomial.

*Etant donné un graphe G d'ordre n et un entier positif k , on construit un graphe G^**

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-dominatión sécurisée

en attachant à chaque sommet $u \in V(G)$ un sommet x_u (voir, Figure 3.4). Il convient de signaler que $G^* = (V^*, E^*)$ tel que $V^* = V \cup \{x_u, \forall u \in V\}$ et $E^* = E \cup \{ux_u, \forall u \in V\}$ peut être construit à partir de G en temps polynomial.

Ensuite, nous montrerons que G admet un ensemble dominant sûr SD avec $|SD| \leq k$ si et seulement si G^* admet un ensemble 2-dominant sécurisé $S2SD$ avec $|S2SD| \leq k^* = k + n$.

Soit SD un ensemble 2-dominant sécurisé de taille au plus k , soit $S2SD = SD \cup \{x_u, \forall u \in V\}$. Ainsi, par définition d'un ensemble dominant sécurisé, il existe, pour chaque sommet $v \in V(G) \setminus SD$, un sommet $u \in SD$ tel que $(SD \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ est aussi un ensemble dominant pour G . Par la suite $(S2SD \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ est un ensemble 2-dominant de G^* , comme on le souhaite. Considérons maintenant un ensemble 2-dominant sécurisé ($S2SD^*$) de G^* tel que $|S2SD^*| \leq k^*$ alors on a i) $\{\forall u \text{ dans } V, x_u \in S2SD^*\}$ car sinon, x_u devient dominé par au plus un sommet qui est u , contradiction puisque $S2SD^*$ est supposé un ensemble 2-dominant pour G^* . ii) $SSD^* = S2SD^* \cap V$ est un ensemble dominant sécurisé pour G car s'il existe un sommet v tel que $\{\forall u \in SSD^*, (SSD^* \setminus \{u\}) \cup v\}$ n'est pas un ensemble dominant alors $\{\forall w \in S2SD^*, (S2SD^* \setminus \{w\}) \cup v\}$ ne sera pas un ensemble 2-dominant pour G^* , contradiction, puisque $S2SD^*$ est un $S2SD$ pour G^* .

En conséquence, $SSD^* = S2SD^* \cap V$ est un ensemble dominant sécurisé avec :

$$SSD^* = |S2SD^*| - n \leq k^* - n = k.$$

Ensuite, un algorithme en temps polynomial utilisé pour résoudre le problème de domination sécurisée sur G peut être utilisé pour résoudre la 2 domination sécurisée sur G^* , et vice versa. Par conséquent, le problème de 2-dominatión sécurisée est NP-complet.

3.4.1 S2DOM pour les graphes bipartis

La proposition suivante montre la NP-complétude du problème de 2-dominatión sécurisée pour les graphes bipartis.

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-dominaton sécurisée

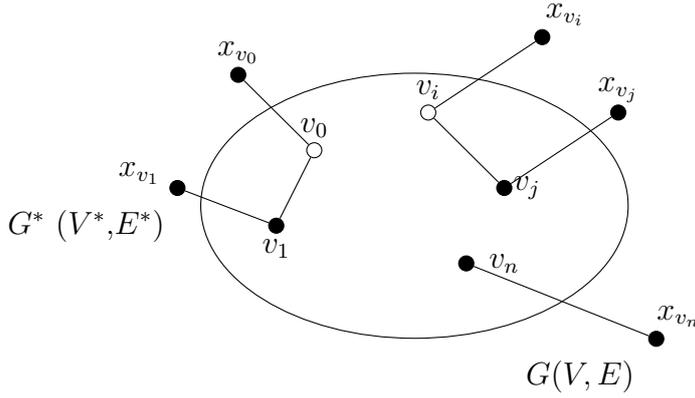


FIGURE 3.4 – Réduction domination sécurisée \propto 2-dominaton sécurisée sur les graphes (les sommets noirs représentent le S2DS de G^*).

Proposition 3.3 *Le problème de 2-dominaton sécurisée est NP-complet pour les graphes bipartis.*

Preuve *Pour prouver la proposition à partir d'un graphe biparti donné $G = (X, Y, E)$ avec des ensembles stables X et Y , on fait la même construction aux graphes généraux en attachant un sommet x_u à chaque sommet en $u \in X \cup Y$. Il est clair que le résultat est aussi un graphe biparti $G^* = (X^*, Y^*, E^*)$ avec des ensembles $X^* = X \cup \{x_u : \forall u \in Y\}$, $Y^* = Y \cup \{x_u, \forall u \in X\}$.*

Ainsi, nous pouvons en déduire que S2DOM est aussi un problème NP-complet même pour les graphes bipartis, de la même manière que dans la section précédente, puisque SDOM est aussi NP-complet pour la classe de graphes bipartis [47].

Le théorème suivant montre que la 2-dominaton sécurisée reste un problème NP-complet même pour les graphes scindés.

Théorème 3.9 *Le problème de 2-dominaton sécurisée est NP-complet pour les graphes scindés.*

Preuve *Pour les graphes scindés, nous utilisons aussi une réduction au problème de domination sécurisée qui est connu pour être NP-complet même pour les graphes scindés [47].*

Considérons un graphe scindé $G = (V, E)$ avec clique Q et stable I , dans lequel on construit un graphe scindé $G^ = (V^*, E^*)$, en attachant un sommet supplémentaire x à*

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-dominat on sécurisée

chacun de V . Donc G^* a $Q^* = Q \cup \{x\}$ comme clique et $I^* = I$ comme stable et $E^* = E \cup (\{x_u : \forall u \in V\})$. Il est clair que G^* peut ˆtre construit à partir de G en temps polynomial. Considérons que G a un ensemble dominant sécurisé tel que $|SD| \leq k$, et le but est de montrer si le graphe G^* a un ensemble 2-dominant sécurisé de cardinalité au plus $k^* = k + 1$. L'ensemble $S2SD = SD \cup \{x\}$ est un S2DS pour G^* comme suit, pour chaque $v \in (V \setminus SD)$, $\exists u \in SD : SD^* = (SD - v) \cup \{u\}$ est un ensemble dominant, et donc $SD^* \cup \{x\}$ est un ensemble 2-dominant de G^* . Ainsi $S2SD = SD \cup \{x\}$ est un ensemble 2-dominant sécurisé pour G^* avec $|S2SD| \leq k + 1$. Considérons maintenant un ensemble de 2-dominat on sécurisé SSD^* pour G^* avec $|SSD^*| < k^*$, et le but est de montrer si le graphe G a un ensemble dominant sécurisé SD tel que $|SD| \leq k^* - 1 = k$. Ainsi $SD = SSD^* - x$ est un ensemble dominant sécurisé pour G avec $|SD| \leq k^* - 1 = k$. Car s'il existe un sommet $v \in V(G)$ tel que $\forall u \in SD, (SD - u) \cup \{v\}$, n'est pas un ensemble dominant, alors $\forall w \in SSD^*, (SSD^* - w) \cup \{v\}$ ne sera pas un ensemble de 2-dominant, contradiction.

Par conséquent, le problème de 2-dominat on sécurisée est NP-complet mˆme pour les graphes scindés.

Après avoir montré que le problème de 2-dominat on sécurisée est NP-Complet mˆme pour les classes de graphes scindés et bipartis. Dans ce qui suit, nous établissons une borne supérieure pour le nombre de 2-dominat on sécurisé γ_2^s , en termes de nombre d'indépendance β_0 , pour la classe de graphes parfaits, la super-classe qui inclut à la fois des classes de graphes scindés et bipartis. Pour cela, nous avons besoin des définitions supplémentaires suivantes.

Définition 3.2 Un graphe parfait est un graphe G tel que pour tout sous-graphe induit de G , le nombre de cliques est égal au nombre chromatique, c'est-à-dire $\omega(G) = \chi(G)$.

Définition 3.3 Le nombre de cliques couvrants $\theta(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de cliques dans G nécessaires pour couvrir l'ensemble des sommets de G , le nombre de cliques couvrants est également donné par $\theta(G) = \chi(\overline{G})$, avec \overline{G} est le complément de graphe G .

Lemme 3.1 Pour tout graphe parfait G , $\theta(G) = \beta_0(G)$.

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-dominance sécurisée

Preuve Par Définition 3.3, pour tout graphe G on a

$$\theta(G) = \chi(\overline{G}).$$

Et par Définition 3.2, pour tout graphe parfait G on a

$$\chi(G) = \omega(G).$$

Donc, pour tout graphe parfait, on obtient

$$\theta(G) = \omega(\overline{G}).$$

Ainsi,

$$\theta(G) = \beta_0(G),$$

comme $\beta_0(G) = \omega(\overline{G})$ pour tout graphe G .

Le théorème suivant énonce cette borne supérieure de γ_2^s , en termes de nombre de stabilité β_0 , pour les graphes parfaits.

Théorème 3.10 Pour tout graphe parfait G , on a $\gamma_2^s(G) \leq 2\beta_0(G)$.

Preuve Considérons un graphe parfait G , pour chaque clique nous avons besoin de deux sommets, comme un ensemble 2-dominant sécurisé pour la clique, donc nous pouvons obtenir un ensemble 2-dominant ne dépassant pas $2\theta(G)$. Par conséquent, nous avons $\gamma_2^s(G) \leq 2\theta(G)$. Cela implique que $\gamma_2^s(G) \leq 2\beta_0(G)$, puisque le graphe est parfait.

Remarque 3.1 Notez que la borne est atteinte pour les graphes complets, pour lesquels nous avons, $\gamma_2^s(G) = 2\beta_0(G) = 2$.

Dans ce qui suit, nous réduisons à nouveau les bornes précédentes pour les graphes d'intervalles propres¹. Etant donné cela, un graphe d'intervalle approprié est un graphe parfait (sans C_4 , sans griffe). .

1. Un graphe G est un graphe d'intervalles si l'ensemble de sommets V peut être mis en correspondance biunivoque avec un ensemble d'intervalles I sur la droite réelle, sans intervalle dans I en contient proprement un autre, tel que deux sommets sont adjacents dans G si et seulement si leurs intervalles correspondants ont une intersection non vide

3.4 Complexité algorithmique du problème de la 2-dominance sécurisée

Théorème 3.11 *Pour tout graphe d'intervalle propre G , on a $\gamma_2^s(G) \leq (3\beta_0(G) + 1)/2$.*

Preuve *Un graphe $G = (V, E)$ est un graphe d'intervalle propre si et seulement si G a un ordre consécutif [44]. Etant donné que (v_1, v_2, \dots, v_n) est un ordre consécutif de G si et seulement si $i < j < k$ et $v_i v_k \in E(G)$ implique $v_i v_j \in E(G)$ et $v_j v_k \in E(G)$.*

Supposons que l'ordre consécutif des sommets d'un graphe d'intervalle propre G soit donné comme suit : $(v_0, v_2, \dots, v_{n-1})$, nous construisons donc un ensemble 2-dominant sécurisé $S2SD$ comme suit : Il est clair que $G[v_0, \dots, v_i]$, avec v_i étant l'ordre maximum parmi les sommets adjacents à v_0 , est une clique maximum. Nous avons aussi $G[v_i, \dots, v_j]$, v_j est le sommet d'ordre maximum parmi les sommets adjacents à v_i , est au maximum un. L'ensemble $\{v_1, v_i, v_j\}$ est un ensemble 2-dominant sécurisé pour $G[v_1, \dots, v_j]$. Nous répétons le processus pour le graphe restant après avoir ajouté les sommets de l'arbre à $S2SD$ et supprimé le sous-graphe induit par les deux cliques maximum en question, jusqu'à ce que v_{n-1} soit atteint. Cependant, si le nombre de cliques est impair, nous devons ajouter deux sommets supplémentaires pour le dernier. On obtient ainsi $S2SD \leq \frac{3}{2}\theta(G) + 2$ et donc $\gamma_2^s(G) \leq \frac{3}{2}(\theta(G) + 1) = \frac{3}{2}(\beta_0(G) + 1)$, comme on le souhaite.

Remarque 3.2 *La borne n'est pas assurée pour tous les graphes parfaits (voir Figure 3.5), dès lors que l'ordre consécutif n'existe pas. Dans la Figure 3.5, on a $\beta_0(G) = 4$ et $\gamma_2^s(G) = 7 \geq (3\beta_0 + 1)/2$, comme discuté.*

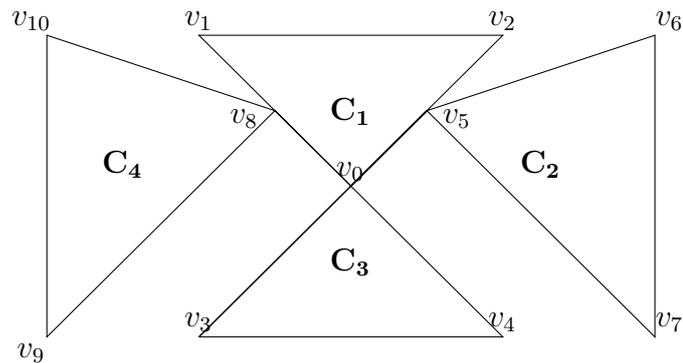


FIGURE 3.5 – Un graphe parfait pour lequel la borne $\gamma_2^s(G) \leq (3\beta_0(G) + 1)/2$ n'est pas atteinte.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit et étudié le problème de 2-domination sécurisée à travers la définition du paramètre, la détermination des valeurs exactes, les bornes et le calcul de la complexité du problème associé, pour ce dernier, nous avons prouvé que le problème correspondant est NP-complet pour des cas et même pour les graphes scindés et bipartis.

Les travaux futurs dans ce sujet pourraient conduire à généraliser le paramètre en introduisant un problème de k -domination sécurisée. Il est également intéressant de caractériser des graphes et/ou des arbres avec des nombres de 2-domination sécurisée et de 2-domination égaux dans une main et avec des nombres de 2-domination sécurisée et de domination sécurisée égaux dans l'autre. Enfin, il peut être utile de comparer le paramètre de 2-domination sécurisée avec le paramètre de domination 2-sécurisée, un paramètre nouvellement introduit [22]. Ceci conduit à une relation réalisée qui permet de calculer l'un des paramètres en fonction de l'autre, au moins pour certaines classes de graphes.

4

Broadcasts efficaces dans les chaines

Dans ce chapitre, nous déterminons des broadcasts efficaces distincts dans les chaines, répondant ainsi à une question soulevée dans [23] que peut-on dire du nombre des broadcasts efficaces distincts dans les chaines ?

4.1 Paramètres de domination et de broadcast domination dans les chaines

Dans cette section, nous présentons quelques résultats obtenus concernant les paramètres de domination et de broadcast domination dans les chaines. Le nombre de broadcast domination a été donné par Erwin dans [24].

Proposition 4.1 [24]

Pour tout entier positif $n \geq 3$ et une chaine P_n , $\gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Bouchouika et al [8] ont donné des valeurs exactes et des bornes.

Théorème 4.1 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 2$ et une chaine P_n , $\Gamma_b(P_n) = IR_b(P_n) = Diam(P_n) = n - 1$.

Théorème 4.2 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 2$ et une chaine P_n , $i_b(P_n) = \lceil \frac{2n}{5} \rceil$.

Lemme 4.1 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 3$, les formules suivantes sont valides.

- 1) Si f est un broadcast irréductant maximal dans P_n , alors $H_f(v_2) \neq \emptyset$ et $H_f(v_{n-1}) \neq \emptyset$.
- 2) Il existe ir_b -broadcast f dans P_n tel que $H_f(v_1) \neq \emptyset$ et $H_f(v_n) \neq \emptyset$.

Théorème 4.3 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 2$,

$$ir_b(P_n) = \gamma_b(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Pour le nombre de packing dans les chaines.

Théorème 4.4 [8]

Pour tout $n \geq 2$,

$$P_b(P_n) = diam(P_n) = n - 1.$$

Et pour tout $n \geq 3$,

$$P_b(C_n) = diam(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Lemme 4.2 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 2$, il existe p_b -broadcast f dans P_n tel que $f(v_i) = 1$ et pour tout sommet f -broadcast v_i .

Théorème 4.5 [8]

Pour tout entier positif $n \geq 2$,

$$p_b(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{8}, \\ 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 1 & \text{si } n \equiv 1, 2, 3 \pmod{8}, \\ 2\lfloor \frac{n}{8} \rfloor + 2 & \text{si } n \equiv 4, 5, 6, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

4.2.1 Définition du paramètre

Toute chaine P_n d'ordre n ($n \geq 2$) peut admettre des broadcasts différents efficaces, la Figure 4.1 illustre 12 broadcasts efficaces distincts dans la chaine P_7 où $\gamma_{eb}(P_7) = 3$ et $\Gamma_{eb}(P_7) = 6$.

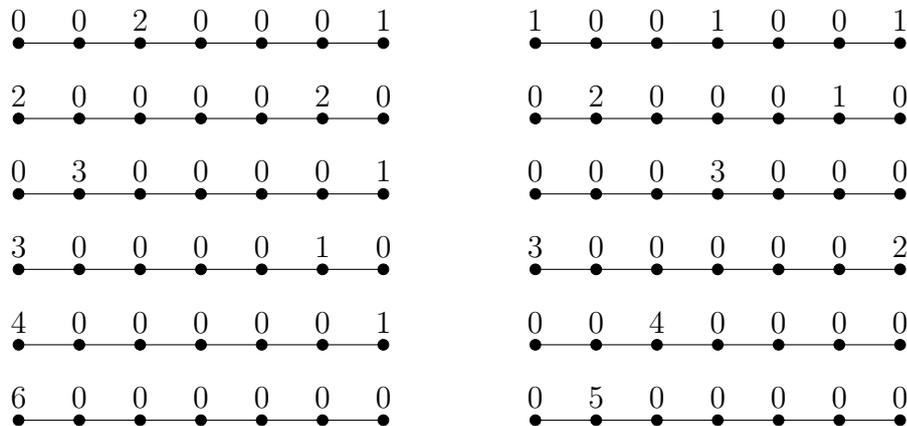


FIGURE 4.1 – Broadcasts efficaces distincts dans P_7 .

Nous allons d'abord définir le paramètre que nous allons étudier dans ce travail, qui est le nombre de broadcasts efficaces distincts, nous le notons $N_{eb}(G)$. Les cas symétriques ne seront pas pris en compte. Dans l'exemple suivant, les broadcasts sur la colonne (a) sont symétriques aux broadcasts sur la colonne (b).

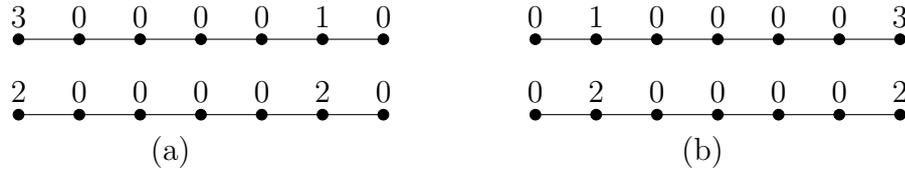


FIGURE 4.2 – Broadcasts efficaces symétriques dans P_7 .

4.2.2 Etude du paramètre

On considère $N_{eb}^k(G)$ le nombre de broadcasts efficaces distincts pour $|V_f^+| = k$, c'est-à-dire que la fonction broadcast efficace sur les sommets du graphe G a exactement k valeurs strictement positives, alors :

Théorème 4.6 *Pour tout entier positif $n \geq 2$,*
 $N_{eb}(P_n) = N_{eb}^1(P_n) + N_{eb}^2(P_n) + \dots + N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n)$.

Preuve *Pour pouvoir calculer $N_{eb}(P_n)$ nous devons calculer $N_{eb}^k(P_n)$ pour chaque cas $|V_f^+| = k$.*

Les broadcasts efficaces que nous pouvons affecter à une chaîne peuvent être regroupés selon la cardinalité de l'ensemble V_f^+ . Ces nombres élémentaires de broadcasts efficaces distincts notés $N_{eb}^k(P_n)$ où l'indice k commence par $k = 1$ pour lesquels une seule valeur positive est affectée aux sommets du graphe P_n . La valeur maximum de k est $k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ car avoir un nombre maximum de $|V_f^+|$ dans P_n , les valeurs positives de la fonction de broadcast efficace ne doivent pas dépasser 1 (pour minimiser la cardinalité de l'ensemble de voisinage de chaque sommet broadcast), alors la fonction broadcast efficace est définie comme suit :

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3t + 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots$$

d'où le nombre de sommets broadcast dans ce cas est :

$$|V_f^+| \leq \left\lfloor \frac{\text{diam}(P_n)}{3} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Nous calculons, par la suite, le nombre $N_{eb}^k(P_n)$ pour chaque cas selon $|V_f^+|$. Nous commençons par $|V_f^+| = 1$.

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

Proposition 4.2 Soit P_n une chaine d'ordre $n \geq 2$,

$$N_{eb}^1(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Preuve Montrons que $N_{eb}^1(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ pour tout $n \geq 2$.

Soit $P_n = x_1 x_2 \dots x_n$ une chaine d'ordre n . Nous supposons que les sommets x_1, x_2, \dots, x_n de P_n sont numérotés de 1 à n de la gauche à la droite. Dans ce cas $|V_f^+| = 1$, c'est à dire l'ensemble des sommets broadcasts contient un seul sommet, un seul sommet qui porte une valeur strictement positive qu'on le note v_b .

La fonction broadcast efficace doit être définie comme suit :

$$f_i(v) = \begin{cases} n - i & \text{si } v = v_b \text{ tel que } i = 1, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i est l'ordre du sommet v_b dans P_n . Si le sommet v_b est à la position numéro 1 de la chaine P_n , la fonction broadcast devient :

$$f_1(v) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } v = v_b. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont efficaces et dominantes c'est à dire sont efficaces est maximales pour l'efficacité pour chaque position.

Maintenant selon la position i du sommet broadcast v_b tel que i allant de 1 à $n - \text{rad}(P_n)$, on aura $(n - \text{rad}(P_n))$ fonctions broadcasts efficaces maximales différentes, d'où $N_{eb}^1(P_n) = n - \text{rad}(P_n) = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.



FIGURE 4.3 – Broadcasts efficaces distincts sur P_6 pour $|V_f^+| = 1$.

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines



FIGURE 4.4 – Broadcasts efficaces distincts sur P_7 pour $|V_f^+| = 1$.

Proposition 4.3 *For every positive integer $n \geq 2$,*

$$N_{eb}^2(P_n) = \sum_{j=1}^{n-3} \left\lceil \frac{n-j-1}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + \sum_{i=2}^{\lceil \frac{n-1}{4} \rceil} - \lfloor \frac{n-4i+2}{2} \rfloor + \sum_{j=i-1}^{n-3i+1} \left\lceil \frac{n-j-3i+2}{2} \right\rceil.$$

Preuve Soit $P_n = x_1x_2 \dots x_n$ une chaine d'ordre n . On suppose que les sommets x_1, x_2, \dots, x_n de P_n sont numérotés de la gauche vers la droite. Dans ce cas, $|V_f^+| = 2$, c'est à dire l'ensemble de sommets broadcasts contient deux sommets qui portent des valeurs strictement positives, notés v_a et v_b , ordonnés de la gauche à la droite. Soit f une fonction broadcast efficace sur P_n avec deux sommets broadcast alors, chaque sommet broadcast f domine une partie de la chaine P_n . Cette partie constitue une boule qu'on a noté $b(x_i)$. Supposons que i est la position du sommet v_i . Le sommet v_a peut se déplacer de la position $i = 1$ jusqu'à la position $\lceil \frac{n-1}{4} \rceil$. Si $f(x_a) = j$ alors le sommet x_b peut se déplacer de la position $j + i + 1 + \text{rad}(P_{n-j-i}) = \lfloor \frac{n+j+i+2}{2} \rfloor$ à la position $n - i + 1$. Alors que j prend des valeurs de $i-1$ à $n-3i+1$ pour $i = 2$ à $\lceil \frac{n-1}{4} \rceil$.

A partir de la formule de déplacement des deux sommets broadcasts, nous pouvons avoir la valeur du nombre de broadcasts efficaces lorsque nous avons deux sommets broadcasts

$$N_{eb}^2(P_n) = \sum_{j=1}^{n-3} \left\lceil \frac{n-j-1}{2} \right\rceil - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + \sum_{i=2}^{\lceil \frac{n-1}{4} \rceil} - \lfloor \frac{n-4i+2}{2} \rfloor + \sum_{j=i-1}^{n-3i+1} \left\lceil \frac{n-j-3i+2}{2} \right\rceil.$$

Pour éliminer les cas symétriques, nous devons supprimer $\lfloor \frac{n-4i+2}{2} \rfloor$ broadcasts efficaces de chaque cas correspondants à la position i . Puis on essaie de simplifier la formule selon n .

Premier cas :

Le sommet x_a est à la position 1, dans ce cas, on obtient $(n+1) - \lfloor \frac{n+j+3}{2} \rfloor = \lceil \frac{n-j-1}{2} \rceil$ broadcasts efficaces pour $j = 1, \dots, (n-3)$ en réduisant les cas symétriques, alors le nombre

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

de broadcasts efficaces est :

$$N_{eb_1}^2(P_n) = -\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + \sum_{j=1}^{n-3} \lceil \frac{n-j-1}{2} \rceil$$

Si n est impair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-3} \lceil \frac{n-j-1}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-2}{2} \rceil + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + \lceil \frac{n-4}{2} \rceil + \dots + 1. \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-4}{2} \rceil + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil - 1. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil) + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil - 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$N_{\gamma_{eb_1}}^2(P_n) = (N_{\gamma_{eb}}^1 - 1)^2 - \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor.$$

Si n est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-3} \lceil \frac{n-j-1}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-2}{2} \rceil + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + \lceil \frac{n-4}{2} \rceil + \dots + 1. \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-4}{2} \rceil + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil + \lceil \frac{n-2}{2} \rceil - 1. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-3}{2} \rceil) - 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$N_{\gamma_{eb_1}}^2(P_n) = (N_{\gamma_{eb}}^1)^2 - N_{\gamma_{eb}}^1 - \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$$

deuxième cas :

Le sommet v_a est à la position $i = 2$ et le sommet v_b peut se déplacer de la position $j + 3 + \text{rad}(P_{n-j-2}) = \lfloor \frac{n+j+4}{2} \rfloor$ à la position $n - 1$, alors le nombre de broadcasts efficaces dans ce cas est :

$$\begin{aligned} N_{eb_2}^2(P_n) &= -\lfloor \frac{n-5}{2} \rfloor + \sum_{j=1}^{n-5} n - \lfloor \frac{n+j+4}{2} \rfloor \\ &= -\lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor + \sum_{j=1}^{n-5} \lceil \frac{n-j-4}{2} \rceil \end{aligned}$$

avec $j = 1, 2, \dots, n - 5$.

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

Si n est impair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-5} \lceil \frac{n-j-4}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-5}{2} \rceil + \lceil \frac{n-6}{2} \rceil + \lceil \frac{n-7}{2} \rceil + \dots + 1 + 1. \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-7}{2} \rceil + \lceil \frac{n-6}{2} \rceil + \lceil \frac{n-5}{2} \rceil. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-6}{2} \rceil). \end{aligned}$$

Alors :

$$N_{eb_2}^2(P_n) = (N_{eb}^1 - 2)^2 - (N_{eb}^1 - 2) - \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor.$$

Si n est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-5} \lceil \frac{n-j-4}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-5}{2} \rceil + \lceil \frac{n-6}{2} \rceil + \lceil \frac{n-7}{2} \rceil + \dots + 1 + 1. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-7}{2} \rceil) + \lceil \frac{n-5}{2} \rceil. \end{aligned}$$

Alors : $N_{eb_2}^2(P_n) = (N_{eb}^1 - 2)^2 - \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor.$

Troisième cas :

Le sommet v_a est à la position $i = 3$ et le sommet v_b peut se déplacer de la position $j + 4 + \text{rad}(P_{n-j-3}) = \lfloor \frac{n+j+5}{2} \rfloor$ à la position $n - 2$, alors le nombre de broadcasts efficaces dans ce cas est :

$$\begin{aligned} N_{eb_3}^2(P_n) &= -\lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor + \sum_{j=2}^{n-8} n - \lfloor \frac{n+j+7}{2} \rfloor \\ &= -\lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor + \sum_{j=2}^{n-8} \lceil \frac{n-j-7}{2} \rceil \end{aligned}$$

with $j = 2, \dots, n - 8.$

If n est impair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-8} \lceil \frac{n-j-7}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-9}{2} \rceil + \lceil \frac{n-10}{2} \rceil + \lceil \frac{n-11}{2} \rceil + \dots + 1 + 1. \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-11}{2} \rceil + \lceil \frac{n-10}{2} \rceil + \lceil \frac{n-9}{2} \rceil. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-10}{2} \rceil). \end{aligned}$$

Alors :

$$N_{eb_3}^2(P_n) = (N_{eb}^1 - 4)^2 - (N_{eb}^1 - 4) - \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor.$$

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

Si n est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-8} \lceil \frac{n-j-7}{2} \rceil &= \lceil \frac{n-9}{2} \rceil + \lceil \frac{n-10}{2} \rceil + \lceil \frac{n-11}{2} \rceil + \dots + 1 + 1. \\ &= 2 * (1 + 2 + 3 + \dots + \lceil \frac{n-11}{2} \rceil) + \lceil \frac{n-9}{2} \rceil. \\ &= (N_{\gamma_{eb}}^1 - 4)^2 \end{aligned}$$

$$N_{eb_3}^2(P_n) = (N_{eb}^1 - 4)^2 - \lfloor \frac{n-10}{2} \rfloor.$$

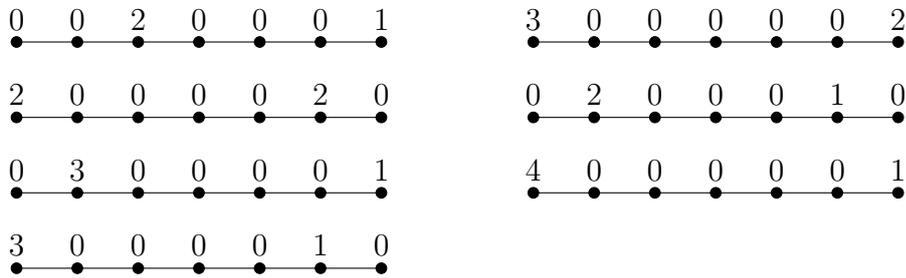


FIGURE 4.5 – Broadcasts efficaces distincts sur P_7 où $|V_f^+| = 2$.

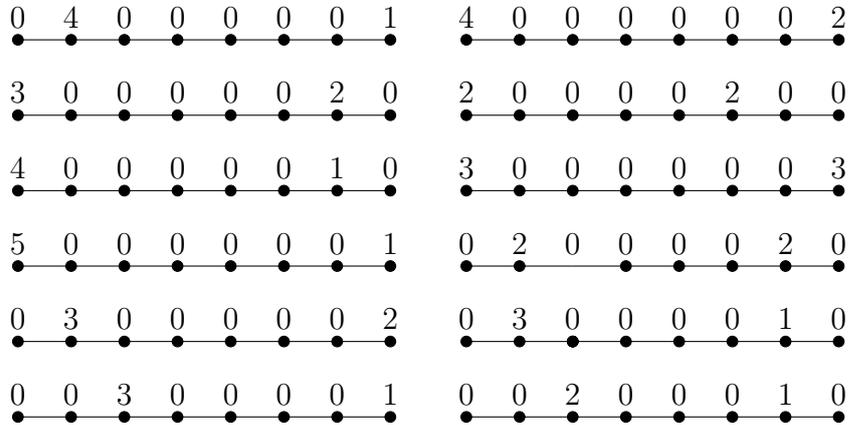


FIGURE 4.6 – Broadcasts efficaces distincts sur P_8 où $|V_f^+| = 2$.

Proposition 4.4 Soit P_n une chaine d'ordre $n \geq 2$,

$$N_{eb}^3(P_n) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} N_{eb}^2(P_{2i+1}) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} N_{eb}^2(P_{2i}) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

Preuve Soit $P_n = x_1 x_2 \dots x_n$ une chaine d'ordre n . On suppose que les sommets x_1, x_2, \dots, x_n de P_n sont numérotés de la gauche vers la droite. Dans ce cas, $|V_f^+| = 3$, c'est-à-dire que l'ensemble des sommets broadcasts contient trois sommets qui portent des valeurs strictement positives, notées v_a, v_b et v_c ordonnés de la gauche vers la droite.

Premier cas : si n est impair, soit f une fonction broadcast efficace optimale dans la chaine P_n . On note par S_i le nombre de broadcasts efficaces distincts tel que $f(v_b) = i$ et $H(v_b) = 2 \times i + 1, \forall i = 1, \dots, \text{rad}(P_{n-4}), (\text{rad}(P_{n-4}) = \text{rad}(P_n) - 2 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2)$. Les sommets v_a et v_c peuvent avoir différentes positions et valeurs. On obtient $N_{eb}^3(P_n) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$.

On décompose la chaine P_n en trois chaines induites : P_{2i+1} est la chaine induite par l'ensemble $(v_b \cup N_f(v_b))$. les deux autres chaines, P^a et P^c , sont induites par le reste du côté droit et du côté gauche, chacun de ces deux chaines contient l'un des deux sommets v_a et v_c .

Pour l'étude des broadcasts efficaces, P^a et P^c peuvent être considérées comme une chaine induite d'ordre $n - (2i + 1)$, on trouve donc que

$$S_1 = N_{eb}^2(P_{n-3}),$$

$$S_2 = N_{eb}^2(P_{n-5}),$$

$$S_3 = N_{eb}^2(P_{n-7}),$$

jusqu'à

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} = N_{eb}^2(P_4) = 1.$$

Alors,

$$N_{eb}^3(P_n) = N_{eb}^2(P_{n-3}) + N_{eb}^2(P_{n-5}) + N_{eb}^2(P_{n-7}) + \dots + N_{eb}^2(P_4).$$

Donc

$$N_{eb}^3(P_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} N_{eb}^2(P_{n-2i-1}) = \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} N_{eb}^2(P_{2i}).$$

Comme illustration :

$$N_{eb}^3(P_7) = 1, N_{eb}^3(P_9) = 5 + 1, N_{eb}^3(P_{11}) = 12 + 5 + 1,$$

$$N_{eb}^3(P_{13}) = 24 + 12 + 5 + 1.$$

Deuxième cas :

Si n est pair, soit f une fonction broadcast efficace optimale dans la chaine P_n . On note

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

par S_i le nombre de broadcasts efficaces distincts tel que $f(v_b) = i$ et $H(v_b) = 2 \times i + 1$
 $\forall i = 1, \dots, \text{rad}(P_{n-5})$, $(\text{rad}(P_{n-5}) = \left\lfloor \frac{n-5}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3)$.

Les sommets v_a et v_c peuvent avoir différentes positions et valeurs. On obtient $N_{eb}^3(P_n) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3}$.

On décompose la chaine P_n en trois chaines induites : P_{2i+1} est la chaine induite par l'ensemble $(v_b \cup N_f(v_b))$. Les deux autres chaines P^a et P^c sont induites par le reste du côté droit et du côté gauche, chacun de ces deux chaines contient l'un des deux sommets v_a et v_c .

Pour l'étude des broadcasts efficaces, P^a et P^c peuvent être considérées comme une chaine induite d'ordre $n - (2i + 1)$, on trouve donc que

$$S_1 = N_{eb}^2(P_{n-3}),$$

$$S_2 = N_{eb}^2(P_{n-5}),$$

$$S_3 = N_{eb}^2(P_{n-7}),$$

jusqu'à

$$S_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} = N_{eb}^2(P_5) = 2.$$

Alors,

$$N_{eb}^3(P_n) = N_{eb}^2(P_{n-3}) + N_{eb}^2(P_{n-5}) + N_{eb}^2(P_{n-7}) + \dots + N_{eb}^2(P_5).$$

Donc

$$N_{eb}^3(P_n) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 3} N_{eb}^2(P_{n-2i-1}) = \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} N_{eb}^2(P_{2i+1}).$$

Comme illustration :

$$N_{eb}^3(P_8)=2, N_{eb}^3(P_{10})=2+7, N_{eb}^3(P_{12}) = 16 + 7 + 2, N_{eb}^3(P_{14})=30+16+7+2.$$

Donc

$$N_{eb}^3(P_n) = \begin{cases} \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2} N_{eb}^2(P_{2i+1}) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} N_{eb}^2(P_{2i}) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines



FIGURE 4.7 – Broadcasts efficaces sur P_8 pour $|V_f^+| = 3$.

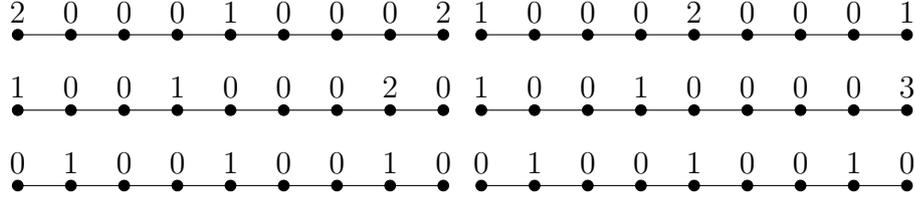


FIGURE 4.8 – Broadcasts efficaces sur P_9 pour $|V_f^+| = 3$.

Proposition 4.5 Soit P_n une chaine d'ordre $n \geq 4$ et $t \geq 1$ un entier positif, on a :

$$N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3t + 1, \\ 2 & \text{si } n = 3t + 2, \\ \lceil \frac{n}{6} \rceil + 4 & \text{si } n = 3t. \end{cases}$$

Preuve Soit $P_n = x_1x_2 \dots x_n$ une chaine d'ordre n . On suppose que les sommets x_1, x_2, \dots, x_n de P_n sont numérotés de la gauche vers la droite.

Dans ce cas, $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, c'est-à-dire que l'ensemble des sommets broadcasts contient $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ sommets qui portent des valeurs strictement positives.

On distingue 3 cas selon la valeur de n en fonction de $3t$, $t \in \mathbb{Z}^+$.

Premier cas : $n = 3t + 1$.

Pour $n = 4$, $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_4) = 1$.

Maintenant, on suppose que pour toute chaine P_n d'ordre $n = 3t + 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ($t \geq 2$) et $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, on définit la fonction broadcast efficace suivante :

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = v_{3i+1}, i = 0, \dots, \lceil \frac{n}{3} \rceil, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est une fonction broadcast efficace dans P_n alors $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \geq 1$.

Montrons maintenant que $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \leq 1$.

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

- Si nous déplaçons le premier 1 du premier sommet, nous perdons un sommet broadcast et le graphe n'est pas complètement f -dominé.
- Si la fonction broadcast efficace contient une valeur supérieure à 1, on perd un sommet broadcast et la cardinalité de l'ensemble des sommets broadcasts ne peut pas atteindre $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Alors pour atteindre $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. La seule fonction broadcast efficace dont on dispose est f d'où $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) = 1$ pour tout $n = 3t + 1$, $t = 0, \dots, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Deuxième cas : $n = 3t + 2$.

On suppose que pour toute chaine P_n d'ordre $n = 3t + 2$, $k \in Z^+(t \geq 2)$ et $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ $n = 3t + 2 = (3t + 1) + 1$, pour partir de $3t+1$ et aller à $3t+2$ on ajoute un sommet à une chaine du premier cas, on garde la même fonction f définie précédemment, on sais que f est une fonction broadcast efficace car le sommet rajouté est f -dominé par le sommet v_{n-1} . On définit la fonction g comme suit :

$$g(v_i) = \begin{cases} f(v_i) & \text{pour } i = 0, \dots, n - 3, \\ 2 & \text{si } v_i = v_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est une fonction broadcast efficace différente de f alors $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \geq 2$.

Maintenant toutes les fonctions broadcasts efficaces différentes de f et g que l'on peut définir sur la chaine P_n nous font diminuer $|V_f^+|$ et nous font perdre la propriété $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ d'où $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) = 2$.

Troisième cas : $n = 3t$ $t \in Z^+$. Pour atteindre $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ sommets.

Soit f une fonction broadcast efficace sur P_n , alors le nombre maximum de sommets f -dominés par le sommet v_i est $(2f_i + 1)$.

Si $\forall v_i \in V$, $f(v_i) \in \{0, 1\}$ alors il n'y a qu'une seule fonction broadcast efficace f telle que :

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3t + 2, t = 1, \dots, \lceil \frac{n}{3} \rceil, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \geq 1$.

Si'il existe $f(v_i) = 2$ pour une valeur i alors i ne peut prendre que les positions 1 ou $i =$

4.2 Broadcasts efficaces dans les chaines

$t+3, t=0, \dots, \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ mais la fonction broadcast efficace n'accepte qu'un seul sommet v_i tel que $f(v_i)=2$ sinon $|V_f^+| < \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Alors $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \geq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 3$.

Si $f(v_1) = 3$, ce sommet f -domine les quatre premiers sommets alors si on supprime ces quatre sommets, on a une chaine P_{n-4} d'ordre $n-4 = 3t-4 = 3t'+2, t, t' \in \mathbb{Z}^+$, et comme nous l'avons déjà prouvé dans le deuxième cas $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_{3t'+2}) = 2$ mais une seule fonction peut être acceptée avec $f(v_1) = 3$, alors $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) \geq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 4$. Un sommet v_i avec $f(v_i) \geq 4$ ou $f(v_i) = 3$ et $i > 1$ ne peut pas exister dans une fonction broadcast efficace dans une chaine d'ordre $n=3t$, sinon $|V_f^+| < \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Dans le troisième cas $N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_{3t}) = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 4$. Donc

$$N_{eb}^{\lceil \frac{n}{3} \rceil}(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3t + 1, \\ 2 & \text{si } n = 3t + 2, \\ \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 4 & \text{si } n = 3t. \end{cases}$$

Dans la figure 4.10 il y a un exemple pour chaque cas.

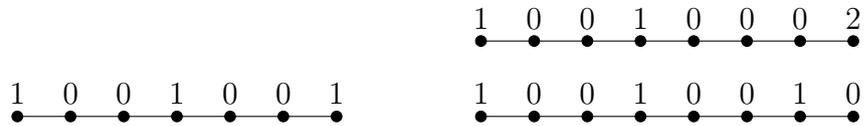


FIGURE 4.9 – Broadcasts efficaces sur P_7, P_8 pour lesquels $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

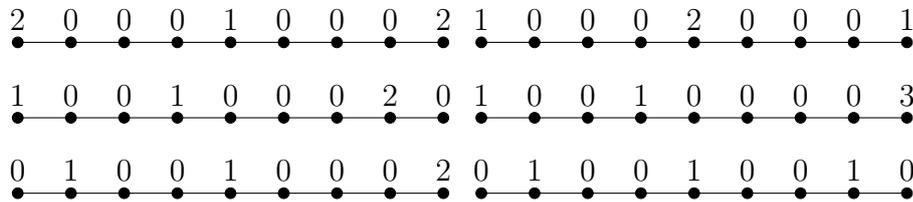


FIGURE 4.10 – Broadcasts efficaces sur P_9 pour lesquels $|V_f^+| = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Conclusion générale

Le travail présenté dans cette thèse est consacré à l'étude de quelques paramètres de domination et de broadcast domination dans les graphes. En effet, nous avons défini et étudié un nouveau paramètre de broadcast domination que nous avons noté nombre de broadcast domination global, pour lequel nous avons établi des bornes supérieures et des bornes inférieures et nous avons déterminé des valeurs exactes pour quelques classes de graphes.

Ensuite, nous avons défini et étudié un nouveau paramètre de domination dans les graphes que nous avons noté nombre de 2-domination sécurisée. Dans ce stade, nous avons déterminé des valeurs exactes pour les chaînes et les cycles, ensuite nous avons établi des bornes pour ce paramètre en fonction de son ordre, après nous avons fait une étude algorithmique pour ce paramètre, dans laquelle nous avons prouvé que la recherche du nombre de 2-domination sécurisé est NP-complet pour un graphe quelconque et pour des classes spéciales de graphes.

Finalement, nous nous sommes intéressés au nombre de broadcast domination efficace dans la classe des chaînes, d'abord nous avons déterminé une formule pour ce paramètre en fonction de la cardinalité de l'ensemble de sommets broadcasts, ensuite, nous avons caractérisé ce paramètre pour quelques valeurs 1,2,3,4 et $\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Comme perspectives de recherche, nous envisageons d'étudier les points suivants :

- Etude du nombre des broadcasts efficaces pour les autres cas.
- Etude du nombre des broadcasts efficaces dans les cycles.
- Choisir une autre classe de graphe pour l'étude du nombre des broadcasts efficaces.
- Etude de l'aspect algorithmique et la complexité du nombre des broadcasts efficaces.

Bibliographie

- [1] N. Alon, J. H. Spencer. *The probabilistic Method*, John Wiley and Sons, Inc. 1992.
- [2] J. Amjadi, S. Nazari-Moghaddam, S. M. Sheikholeslami, *Global total Roman domination in graphs*, Discrete Math. Algorithms Appl. 2007.
- [3] V. M. Arnautov. *Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices*, Russian Prikl. Math. Vyp. 1974.
- [4] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1958.
- [5] J.R.S. Blair, P. Heggernes, S. Horton, F. Manne, *Broadcast Domination Algorithms for Interval Graphs, Series-Parallel Graphs, and Trees*, Congressus Numerantium, 2004, 55-77.
- [6] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*. Australas. J. Combin 33 : 317-327. 2005.
- [7] M. Blidia , M. Chellali, L. Volkmann, *Bounds on the 2-domination number of graphs*, Utilitas Math 71 : 209-216, 2006.
- [8] S. Bouchouika, I. Bouchemakh, E. Sopena, *Broadcasts on Paths and Cycles*, Discrete Applied Mathematics, Elsevier, 2020.
- [9] I. Boufelgha, M. Ahmia, *Global dominating broadcast in graphs*. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications. 2023.
- [10] B. Bresar, S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University Maribor, Slovenia. March 12, 2006.
- [11] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton. *Vertex domination-critical graphs*. Networks, 18 :173-179. 1988.
- [12] Y. Caro, Y. Roditty. *A note in the k -domination number of a graph*. Internat. J Math. Sci. 13 :205-206. 1990.
- [13] G. J. Chang, *Algorithmic aspects of domination in graphs*. HANDBOOK OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION . 1998.
- [14] I. Charon, A. Germa, O. Hurdy, *Méthodes d'optimisation combinatoire*, Masson, 1996.
- [15] E. J. Cockayne, *Irredundance, secure domination and maximum degree in trees*, Discrete Math 307 : 12-17, 2007.
- [16] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, S. T. Hedetniemi, *Total Domination in Graphs*, Networks, 1980.

BIBLIOGRAPHIE

- [17] E.J. Cockayne, O. Favaron, C.M. Mynhardt, *Secure domination, weak Roman domination and forbidden subgraphs*, Bull. Inst. Combin. Appl, 39 : 87-100, 2003.
- [18] E. J. Cockayne, S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi, *A linear algorithm for the domination number of a tree*, Inform. Process. Lett. 4 :41-44, 1975.
- [19] E. J. Cockayne, P.J.P. Grobler, W.R. Grundlingh, J. Munganga, J.H. van Vuuren, *Protection of a graph*, Util. Math 67 : 19-32, 2005.
- [20] E. J. Cockayne, S. Herke, C. M. Mynhardt, *Broadcasts and domination in trees*, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Discrete Mathematics, 2009.
- [21] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, L. Vaughan, *Double Domination in Complementary Prisms*, Util. Math, 2013.
- [22] L. Devendra, P. Venkata Subba Reddy, J. Pavan Kumar, *Complexity issues of variants of secure domination in graphs*, Elect. Not. in Disc. Math 63 : 77-84, 2017.
- [23] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S.M.Hedetniemi, S.T.Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Appl. Math. 154 :59-75, 2004.
- [24] D. Erwin, *Cost domination in graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.
- [25] D. Erwin, *Dominating broadcasts in graphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. 2004.
- [26] J.F. Fink, M.S. Jacobson, *n-Domination in graphs*, Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science, John Wiley and Sons, New York , 283-300, 1985.
- [27] P. Flach, L. Volkmann. *Estimations for the domination number of a graph*. Discrete Math., 80 :154-151, 1990.
- [28] M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability : A Guide to the Theory of NP-completeness*, W. H. Freeman, 1979.
- [29] J. A. Gongora, T. W. Haynes, E. Jum, *Independent domination in complementary prism*. East Tennessee State University. 2009.
- [30] P. J. P. Grobler, C. M. Mynhardt, *Secure domination critical graphs*, Discrete Math 309 : 5820-5827, 2009.
- [31] M. Guettiche, H. Kheddouci, *Critical links detection in stochastic networks : application to the transport networks*. International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics, 2018.
- [32] I. Gutman, J. Lu, M. A. Boutiche, *On distance in complements of graphs*, Scientific publications of the state university of Novi Nazari, 2016.
- [33] T. W. Haynes. *The complementary Product of Two Graphs*, East Tennessee State University, USA. 2007.
- [34] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [35] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Domination in Graphs*, Advanced Topics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.
- [36] T. W. Haynes, Michael A. Henning. *Domination and Total Domination in Complementary prisms*, East Tennessee State University, USA. 2008.

BIBLIOGRAPHIE

- [37] M. A. Henning, *Graphs with large total domination number*, J graph theory, 2000..
- [38] P. Heggenes, D. Lokshatanov, *Optimal broadcast domination in polynomial time*, Discrete Mathematics, 2006.
- [39] S. Herke, *Dominating broadcasts in graphs*, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.
- [40] S. Herke, C. M. Mynhardt, *Radial trees*, Discrete Math. 309 :5950-5962, 2009.
- [41] S. B. Horton, *On Some Problems Related to Dominating Set*. Preprint.
- [42] James K. Lan, Gerard Jennhwa Chang, *Algorithmic aspects of the k -domination problem in graphs*. Discrete applied mathematics. 2013.
- [43] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, NewYork, NY, 1968.
- [44] P.J. Looges , S. Olariu, *Optimal greedy algorithms for indifference graphs*, Comput. Math. Appl 25(7) : 15-25, 1993.
- [45] D. G. Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1973.
- [46] D. Meierling, F. Protti, D. Rautenbach, A. R. D. Almeida, *Cycles in complementary Prisms*, Indtitute of Optimization and Operation Research, Ulm University Oct, 2013.
- [47] H. B. Merouane, M. Chellali, *On secure domination in graphs*, Information processing letters 786-790, 2015.
- [48] C. M. Mynhardt, H. C. Swart, Ungerer, *Excellent trees and secure domination*, Util. Math 67 : 255-267, 2005.
- [49] O. Ore. *Theory of Graphs*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, American. Mathematical Society Publications. AMS, Providence, 1962.
- [50] R. Sahbi, *Nombre de broadcast domination dans les arbres*. Mémoire de magister, US-THB. 2009.
- [51] I. Sahul Hamid, M. Rajeswari, *Global dominating sets in minimum coloring*, Discrete Math. Algorithms Appl. 2014.
- [52] M. Sakarovitch, *Optimisation Combinatoire*, Graphes et Programmation Linéaire, Hermann, 1984.
- [53] E. Sampathkumar, *The global Domination number of a graph*, Math. Phys. Sci, 377–385, 1989.
- [54] S. M. Seager, *Dominating broadcasts of caterpillars*, Ars Combin. 88 :307-319, 2008.
- [55] A. P. De Villiers, *Edge criticality in secure graph domination*, Doctoral dissertation, Stellenbosch : Stellenbosch University, 2014.
- [56] H. B. Walikar, B. D. Acharya, E. Sampathkumar, *Recent developments in the theory of domination in graphs*, In MRI Lecture Notes in Math, Matha Research Instit. Allahabad, volume 1, 1979.
- [57] H. Wang, Y. Zhao, Y. Deng, *The complexity of secure domination problem in graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory,2018.

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Dans notre thèse, Nous définissons et étudions un nouveau paramètre de domination dans les graphes, c'est le nombre de 2-dominantion sécurisée $\gamma_2^s(G)$. Tout d'abord, nous établissons des bornes inférieures et supérieures sur $\gamma_2^s(G)$ d'un graphe et d'un graphe sans triangle. Ensuite, nous déterminons le nombre de 2-dominantion sécurisée $\gamma_2^s(G)$ des chaînes et des cycles. Ensuite, nous étudions la complexité du problème de 2-dominantion sécurisée en prouvant que la détermination de la valeur de ce paramètre est NP-complète, également pour les graphes divisés et bipartis. Enfin, nous fournissons une borne supérieure du paramètre en termes de nombre de cliques et de nombre de stabilité pour les graphes parfaits.

Nous définissons et étudions un nouvel invariant de broadcast domination dans les graphes, appelé le broadcast dominant global. Nous commençons par déterminer le nombre de broadcast dominant global des graphes bipartites, des chaînes, des cycles, des graphes en grille et des arbres. Ensuite, nous établissons des bornes inférieures et supérieures sur le nombre de broadcast dominant global d'un graphe. Enfin, nous établissons des relations entre le nombre de broadcast dominant global et d'autres paramètres.

Différents paramètres de domination et de broadcast domination ont été définis, l'un de ces paramètres est le broadcast efficace. Dans cette thèse, nous déterminons des broadcasts efficaces distincts dans les chaînes, répondant ainsi à une question soulevée dans [23] : que peut-on dire du nombre de broadcasts efficaces distincts dans une chaîne ?

Mots clés : Domination, domination sécurisée, 2-dominantion, 2-dominantion sécurisée, broadcast domination, broadcast dominant global, broadcast efficace.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. In our thesis, we define and study a new domination parameter in graphs, which is the secure 2-domination number $\gamma_2^s(G)$. First, we establish lower and upper bounds on $\gamma_2^s(G)$ for a graph and a graph without triangles. Then, we determine the secure 2-domination number $\gamma_2^s(G)$ for paths and cycles. After that, we study the complexity of the secure 2-domination problem by proving that determining the value of this parameter is NP-complete, also for split and bipartite graphs. Finally, we provide an upper bound for the parameter in terms of the number of cliques and the stability number for perfect graphs.

We define and study a new broadcast domination invariant in graphs, called the global broadcast domination. We start by determining the global dominating broadcast number in bipartite graphs, paths, cycles, grid graphs, and trees. Then, we establish lower and upper bounds on the global dominating broadcast number of a graph. Finally, we establish relationships between the global dominating broadcast number and other parameters.

Various domination and broadcast domination parameters have been defined, one of which is the efficient broadcast. In this thesis, we determine distinct efficient broadcasts in paths, thus addressing a question raised in [23] : what can be said about the number of distinct efficient broadcasts in a path ?

Keywords : Domination, secure domination, 2-domination, secure 2-domination, broadcast domination, global broadcast domination, efficient broadcast.

ملخص

ليكن $G=(V,E)$ بيانا بسيطاً. في أطروحتنا، قمنا بتعريف ودراسة معامل سيطرة جديد في البيانات، وهو رقم السيطرة الثنائي الآمن γ_2^S . أولاً، نقوم بوضع الحدود الدنيا والعليا على γ_2^S للبيان و البيان بدون مثلثات. بعد ذلك، نحدد رقم السيطرة الثنائي الآمن γ_2^S للسلاسل والحلقات. بعد ذلك، قمنا بدراسة مدى تعقيد مشكلة السيطرة الثنائية الآمنة γ_2^S من خلال إثبات أن تحديد قيمة معاملته هو NP-Complete، أيضاً للبيانات المنقسمة والثنائية. وأخيراً، نقدم حدًا أعلى للمعامل من حيث عدد النقرات ورقم الثبات للحصول على بيانات مثالية. قمنا بتعريف ودراسة سيطرة بث جديدة في البيانات، والتي تسمى سيطرة البث العامة في البيانات. نبدأ بتحديد رقم البث العام المسيطر في البيانات الثنائية و السلاسل والحلقات و البيانات الشبكية والأشجار. بعد ذلك، نقوم بإنشاء الحدود الدنيا والعليا على رقم البث العام المسيطر للبيان. أخيراً، نقوم بإنشاء علاقات بين رقم البث العام المسيطر والمعاملات الأخرى. تم تحديد العديد من معاملات السيطرة وسيطرة البث، أحدها هو البث الفعال. في هذه الأطروحة، نحدد عدد عمليات بث فعالة متميزة في السلاسل، وبالتالي نجيب على السؤال المطروح في [23] ما الذي يمكن قوله عن عدد عمليات البث الفعالة متميزة في السلاسل؟