RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohammed Seddik Ben Yahia - Jijel

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'études
Présenté pour l'obtention du diplôme de

Master

Spécialité : Mathématiques Appliquées.
Option : EDP et applications.

Thème

Analyse numérique d'un écoulement de fluide non stationnaire modélisé par les équations de Darcy

Présenté par :

Amina Bensaci

Soumia Badache

Devant le jury :

Président :	W. Chikouche	MCA Univ. Jijel
Encadreur :	S. Maarouf	MCB Univ. Jijel
Examinateur :	H. Benhassine	MCB Univ. Jijel

Promotion 2016/2017

Remerciements

*T*out d'abord et avant tout, nous remercions **ALLAH** qui nous a donné la force, la volonté, la patience et le courage pour accomplir ce modeste travail.

*N*ous remercions vivement tous les enseignants qui ont participé à notre formation et particulièrement notre encadreur **S. Maarouf**. D'avoir voulu proposer et assurer la direction de ce mémoire, pour sa confiance et ses conseils judicieux et sa totale disponibilité.

*N*ous tenons à exprimer notre gratitude aux membres de jury qui ont accepté de jurer notre travail.

Enfin, tous les parents, membres de nos familles, connaissances et amis qui nous ont été d'un soutien moral tout au long de notre travail.

***M*erci**

Dédicace

Je dédie ce travail de fin d'études

À mes chèrs parents ⋆ Djamel et Nadjet ⋆ pour leur soutien moral

et pour leurs encouragements, que Dieu vous protège.

À mon fiancé Hicham

À mes frères : Walid, Youcef.

À mes soeurs : Amira, Radja.

À mes amis de ma promotion.

À tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Enfin, je dédie ce mémoire à ceux qui m'aiment et surtout ceux que j'aime.

Amina

Dédicace

À la mémoire de mon père ⋆ Nasserddine ⋆ qui nous a quitté pour toujours, nous ne n'oublierons jamais car il était un père exemplaire.

À ma mère ⋆ Saliha ⋆ qui ont fait de moi ce que je suis aujaurd'hui par son sacrifices et son bonté ainsi que ces conseils.

À mon frère Oussama .

À mes soeurs Soulef, Ines, et Selma.

À mes amis de ma promotion.

À tous qui mon aidé de prés ou de loin.

À tous mes enseignants du primaire à l'université.

Soumia

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Les écoulements de fluide à travers un milieu poreux se rencontrent dans des domaines très variés des sciences et techniques. À titre d'exemple, on peut citer les problèmes de purification de l'eau, de dépollution des sols, d'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes géophysiques,...

L'objectif de ce mémoire est d'effectuer une analyse numérique sur des équations aux dérivées partielles qui sont appelées les équations de milieux poreux sur un domaine plan régulier $\Omega\times]0, T[$,

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{u} + \nabla \cdot p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega\times]0, T[, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega\times]0, T[, \\ p = p_b & \text{sur } \partial\Omega\times]0, T[, \\ \boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

qui modélisent l'écoulement non stationnaire d'un fluide incompressible dans un milieu poreux occupant le domaine Ω. Ici les inconnues sont le champ de vecteur $\boldsymbol{u}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui représente la vitesse du fluide, et la fonction p qui représente sa pression. La fonction $\boldsymbol{f}$ est une densité de forces extérieures appliquées au fluide. Le coefficient α dépend de la perméabilité du milieu et de la viscosité du fluide. On s'intéresse ici au cas d'un milieu homogène : Le coefficient α est alors supposé constant positif. De plus, ces équations entre dans la classe plus générale des problèmes mixtes (ainsi que par exemple le problème de Stokes ou de l'élasticité), mais nous nous contentons dans ce mémoire d'étudier de façon détaillée la formulation variationnelle et sa discrétisation temporelle et spatiale.

Parmi les très nombreuses techniques utilisées pour la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques, nous avons choisi de présenter les méthodes spectrales. Elles ont été introduites pour la première fois par D. Gottlieb et S. Orszag [16, 20] et développées par C. Bernardi et Y. Maday [5, 6]. Elles reposent sur l'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles initialement par des séries de Fourier tronquées puis par des polynômes de haut degré et sur l'utilisation de bases tensorisées des espaces d'approximation. Les méthodes spectrales utilisent des formules de quadrature

numériques pour évaluer les intégrales obtenues dans la formulation variationnelle, le plus souvent la formule de Gauss-Lobatto, le problème est discrétisé en les noeuds de cette formule qui sont les racines de polynômes dérivées des polynômes de Legendre. De nombreux ouvrages ont été oubliés sur les méthodes spectrales nous citons par exemple [10, 13]. Les domaines où ces équations sont posées, se multiplient et se généralisent. Grâce aux produits de tensorisation sur les polynômes, la géométrie de base est soit un carré soit un cube. Nous pouvons trouver des extensions sur des trapèzes, cylindres ou même des cônes, par conséquent le champ d'applications des méthodes spectrales ne se limite plus aux géométrie simples mais s'étend aux situations complexes.
Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré aux définitions et théorèmes importants et quelques principales propriétés des espaces de Sobolev, les outils de la méthode spectrale ainsi que quelques concepts utilisés.

Au deuxième chapitre, nous commençons par la présentation du problème aux limites des équations de milieux poreux. Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'écriture de la formulation variationnelle équivalente et nous montrons une condition inf-sup et que le problème variationnel est bien posé.

Dans le troisième chapitre, nous proposons une semi-discrétisation en temps, par un schéma d'Euler implicite d'ordre un, c'est une méthode numérique pour résoudre par approximation des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale. Puis nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème semi-discret obtenu. Ensuite, nous établissons des estimations d'erreur a priori sur la vitesse puis sur la pression.

Au quatrième chapitre nous étudions le problème discrétisé en espace par les méthodes spectrales, nous introduisons à chaque fois les outils de la discrétisation. Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution du problème discret, puis nous prouvons des estimations d'erreur optimales.

Enfin, le dernier chapitre est dédié à l'écriture matricielle des équations de Darcy, en vue de la résolution numérique.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on rappelle les notions de base utilisées tout au long du mémoire. En particulier les définitions et les propriétés fondamentales des espaces de Sobolev et les outils de la méthode spectrale. Nous présentons aussi quelques concepts utilisés.

1.1 Espaces de Sobolev

Les notations utilisées dans ce mémoire pour les espaces de Sobolev sont classiques. Les démonstrations des propriétés indiquées figurent en particulier dans les ouvrages de références suivants : Adams [2], Dautray et Lions [12], Grisvard [17] et Lions et Magenes [19].

Dans ce qui suit, d est un entier positif représentant la dimension de l'espace dans lequel on se place. Le symbole ∂ suivi d'un nom d'ouvert, désigne sa frontière. Deux définitions sont nécessaires pour caractériser la géométrie des ouverts que l'on considère.

Définition 1.1.1. *En dimension $d \geq 2$, un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ est dit lipschitzien ou à frontière lipschitzienne si pour tout point x de $\partial\Omega$, il existe un système de coordonnées orthogonales $(y_1, ..., y_d)$, un hypercube $U^x = \prod_{i=1}^{d}]-a_i, a_i[$ et une application lipschitzienne Φ^x de $\prod_{i=1}^{d-1}]-a_i, a_i[$ dans $]-\frac{a_d}{2}, \frac{a_d}{2}[$ tels que :*

$$\Omega \cap U^x = \{(y_1, ..., y_d) \in U^x;\ \ y_d > \Phi^x(y_1, ..., y_{d-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap U^x = \{(y_1, ..., y_d) \in U^x;\ \ y_d = \Phi^x(y_1, ..., y_{d-1})\}.$$

Cette propriété signifie que la frontière coïncide localement avec le graphe d'une fonction lipschitzienne. Elle sera satisfaite par tous les ouverts considérés dans ce mémoire. Tout ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^d$ est également à frontière lipschitzienne (voir Grisvard [17, Corollaire 1.2.2.3]).

Dans la suite, on note Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. On note $\boldsymbol{x}$ le point générique de Ω, et $(x_1, ..., x_d)$ ses coordonnées. Finalement, on utilise la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, que l'on écrit soit $d\boldsymbol{x}$ soit $dx_1, ..., dx_d$.
On rappelle que $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω, et que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ désigne l'espaces des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. On introduit également $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ l'espaces des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$. On note maintenant $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions v mesurables telles que

$$\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \; < +\infty.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

On note $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ la norme

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega v^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait que l'espace $L^2(\Omega)$ contient les deux espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ comme sous-espaces denses, et que l'espace $L^2(\Omega)$ est contenu dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$. Le produit de dualité entre les espaces $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant alors une extension du produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. La théorie des distributions (voir Schwartz [22]) permet de définir, pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, des dérivées d'ordre quelconque à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 1.1.2. *Pour tout entier $m \geq 0$, on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ de la façon suivante :*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\, \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\, |\alpha| \leq m\},$$

muni de la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v)^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.3. *Soit m un entier positif. On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$.*

L'espace $H_0^m(\Omega)$ est donc un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$. On rappelle maintenant un résultat de base, connu sous le nom d'inégalité de Poincaré-Friedrichs (voir Adams [2, Thm 6.28]).

Corollaire 1.1.1. *La semi norme*

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_\Omega \sum_{j=1}^{d} \big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\big)^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Notation 1.1.2. *Soit E un espace de Banach séparable de norme $\|\cdot\|_E$. On notera $L^2(\Omega, E)$ l'espace des fonctions définies de Ω dans E telles que la fonction : $v \mapsto \|v\|_E$ appartienne à $L^2(\Omega)$. Pour tout entier $m \leq 0$, on désigne par $H^m(\Omega, E)$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega, E)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq m$ sont dans $L^2(\Omega, E)$, on définit $H_0^m(\Omega, E)$ comme l'adhérence dans $H^m(\Omega, E)$ des fonctions indéfiniment différentiables de Ω dans E à support compact dans Ω, et $H^{-m}(\Omega, E)$ comme son dual. Les espaces $H^m(\Omega, E)$ sont munis de la norme*

$$\|v\|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

et de la semi norme

$$|v|_{H^m(\Omega,E)} = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|= m} \|(\partial^\alpha v)(x)\|_E^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

La caractérisation des espaces $H_0^m(\Omega)$ s'effectue au moyen du théorème de traces, que l'on trouve démontré dans Grisvard [17]. On rappelle que l'ouvert Ω étant lipschitzien, il existe en presque tout point de la frontière $\partial\Omega$, un vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ et dirigé vers l'extérieur de Ω, que l'on note $\boldsymbol{n}$. Si les composantes de $\boldsymbol{n}$ s'écrivent $(n_1, ..., n_d)$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ l'opérateur de dérivée normale $n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + ... + n_d \frac{\partial}{\partial x_d}$.

Théorème 1.1.3. *L'application $\gamma_0 \,:\, u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On appelle l'opérateur γ_0 ainsi obtenu :* ***l'application de traces.***

l'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $L^2(\partial\Omega)$. L'image de γ_0 est un espace de Sobolev fractionnaire appelé $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et qui est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H^1(\Omega), \gamma_0 u = v\}.$$

Dans ces conditions, il existe un opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, dit de relèvement, qui vérifie $\gamma_0 \circ R_0 = Id_{\partial\Omega}$. De plus, il existe une constante positive c_0 telle que

$$\forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega), \quad \|R_0 v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega}.$$

Proposition 1.1.4. (***Formule de Green***) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et toute fonction v de $H^1(\Omega)$, on a la formule de Green :*

$$-\int_\Omega \Delta u(x) \cdot v(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(x) \cdot v(x) d\sigma. \tag{1.3}$$

Définition 1.1.4. *L'opérateur de divergence appliqué à un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ de composantes (v_{x_1}, v_{x_2}) en dimension $d = 2$ et $(v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3})$ en dimension $d = 3$, est défini lorsque $\boldsymbol{v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par la formule*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} \quad \text{en dimension } d = 2,$$

et

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial v_{x_3}}{\partial x_3} \quad \text{en dimension } d = 3.$$

Nous pouvons étendre la définition de la divergence à un élément quelconque $\boldsymbol{v}$ *de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *par les formules de dualité suivantes :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \varphi >= - < v_{x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > - < v_{x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} > \quad \text{en dimension } d = 2,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \varphi >= - < v_{x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} > - < v_{x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} > - < v_{x_3}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} > \quad \text{en dimension } d = 3.$$

1.2 Rappels sur le lemme de Lax-Milgram

On écrit tout de suite l'énoncé de ce lemme, dû à Lax-Milgram [18] qui est à la base de l'étude des équations aux dérivées partielles.

Lemme 1.2.1. *Soit* H *un espace de Hilbert réel de norme* $\|\cdot\|_H$. *On considère une forme bilinéaire* $a(\cdot,\cdot)$ *continue sur* $H \times H$ *i.e.*

$$\exists C > 0, \, \forall u, v \in H, \quad |a(u,v)| \leq C\|u\|_H \cdot \|v\|_H,$$

et on suppose qu'elle est elliptique sur H, *c'est-à-dire qu'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall v \in H, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2.$$

On considère ainsi, une forme linéaire continue $l(\cdot)$ *sur* H. *Alors, le problème :*

$$\begin{cases} Trouver \; u \; dans \; H \; tel \; que : \\ \quad \forall v \in H, \;\; a(u,v) = l(v), \end{cases} \tag{1.4}$$

admet une solution unique u *dans* H. *De plus cette solution vérifie*

$$\|u\|_H \leq \frac{\|l\|_{H'}}{\alpha}.$$

1.3 Rappels sur le théorème de Cauchy-Lipschitz

On réfère à [21, Thm 21.1], pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.3.1. *Supposons que* $[t_1, t_2]$ *est un intervalle compact d'intérieur non vide et que* f *est une application continue de* $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *qui vérifie la propriété suivante, il existe une constante* L *telle que*

$$\forall t \in [t_1, t_2], \forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad |f(t,v) - f(t,w)| \leq L|v - w|.$$

Ici $|\cdot|$ *désigne une norme quelconque sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors quel que soient* t_0 *dans* $[t_1, t_2]$ *et* u_0 *dans* $\mathbb{R}^n$, *il existe une unique fonction* u *continûment différentiable de* $[t_1, t_2]$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et qui vérifie*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

1.4 Problème variationnel et sa discrétisation

On rappelle maintenant un résultat de base (voir [14, 15]).

Soient X et M deux espaces de Hilbert munis de normes $\|\cdot\|_X$ et $\|\cdot\|_M$ respectivement. On note X' et M' les espaces duals correspondants. On désigne par $<\cdot,\cdot>$ le produit dual de X et X' ou M et M'. On introduit les deux formes bilinéaires continues :

$$a(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}, \quad b(\cdot,\cdot) : X \times M \to \mathbb{R}.$$

On note V le noyau de la forme $b(\cdot,\cdot)$. On considère le problème variationnel suivant :
Étant donné f dans X' et g dans M', trouver le couple (u, p) dans $X \times M$ tel que :

$$\begin{aligned} &\forall v \in X, \qquad a(u, v) + b(v, p) =< f, v >, \\ &\forall q \in M, \qquad b(u, q) =< g, q > . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Théorème 1.4.1. *On suppose que la forme bilinéaire* $a(\cdot,\cdot)$ *est* $V-$*elliptique. Alors le problème* (1.5) *admet une solution unique si et seulement si la forme bilinéaire* $b(\cdot,\cdot)$ *satisfait la condition inf-sup suivante : il existe une constante positive* β *telle que*

$$\forall q \in M, \quad \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M.$$

Théorème 1.4.2. *Soit* l *appartient à* X' *tel que*

$$< l, \boldsymbol{v} >= 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{1.6}$$

Alors il existe une unique fonction p *dans* M *telle que*

$$(l, v) = b(v, p), \quad \forall v \in X. \tag{1.7}$$

Notons δ le paramètre de discrétisation. Pour chaque δ, on introduit les espaces discrets X_δ et M_δ, tels que $X_\delta \subset X$ et $M_\delta \subset M$. On introduit l'espace V_δ analogue à l'espace V comme suit :

$$V_\delta = \{v_\delta \in X_\delta, \quad b(v_\delta, q_\delta) = 0, \quad q_\delta \in M_\delta\}.$$

On propose une approximation au problème (1.5).

Trouver (u_δ, p_δ) dans $X_\delta \times M_\delta$ tel que :

$$\begin{aligned} &\forall v_\delta \in X_\delta, \qquad a(u_\delta, v_\delta) + b(v_\delta, p_\delta) =< f, v_\delta > \\ &\forall q_\delta \in M_\delta, \qquad b(u_\delta, q_\delta) =< g, q_\delta > . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Théorème 1.4.3. *On suppose que :*
i) il existe une constante $\alpha^* > 0$ telle que

$$\forall v_\delta \in V_\delta, \quad a(v_\delta, v_\delta) \geq \alpha^* \|v_\delta\|_X^2,$$

ii) il existe une constante $\beta^* > 0$ telle que

$$\forall q_\delta \in M_\delta, \quad \sup_{v_\delta \in X_\delta} \frac{b(v_\delta, q_\delta)}{\|v_\delta\|_{X_\delta}} \geq \beta^* \|q_\delta\|_{M_\delta}.$$

Alors, il existe une unique fonction p_δ dans M_δ telle que (u_δ, p_δ) est une solution unique du problème (1.8).

1.5 Outils de la méthode spectrale

On considère le domaine Ω égal au carré ou au cube $]-1,1[^d$, $d = 2$ ou 3.

Notation 1.5.1. *Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $\mathbb{P}_n$ comme l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. On note $\mathbb{P}_n(\Omega)$ l'espace des restrictions à Ω des polynômes à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq n$ par rapport à chaque variable.*

Définition 1.5.1. *On rappelle la formule de Gauss-Lobatto sur l'intervalle $]-1,1[$: il existe un unique ensemble de $N+1$ nœuds ξ_j, $0 \leq j \leq N$, avec $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$, et un unique ensemble de $N+1$ poids ρ_j, $0 \leq j \leq N$, tel que*

$$\forall \Phi \in \mathbb{P}_{2N-1}(-1,1), \quad \int_{-1}^{1} \Phi(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=0}^{N} \Phi(\xi_j)\rho_j. \tag{1.9}$$

Cette formule de quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{P}_{2N}(-1,1)$, donc elle n'est pas exacte pour la norme $L^2(-1,1)$ des polynômes de $\mathbb{P}_N(-1,1)$. En revanche, on a les relations suivantes (voir [8]) :

Proposition 1.5.2. *Pour tout φ_N dans $\mathbb{P}_N(-1,1)$, on a*

$$\|\varphi_N\|^2_{L^2(-1,1)} \leq \sum_{j=0}^{N} \varphi_N(\xi_j)^2 \rho_j \leq 3\|\varphi_N\|^2_{L^2(-1,1)}. \tag{1.10}$$

Définition 1.5.2. *La grille de Gauss-Lobatto est donnée par*

$$\Sigma_N = \begin{cases} \{\boldsymbol{x} = (\xi_i, \xi_j), \quad 0 \leq i,j \leq N\} & \text{pour } \ d = 2, \\ \{\boldsymbol{x} = (\xi_i, \xi_j, \xi_k), \ \ 0 \leq i,j,k \leq N\} & \text{pour } \ d = 3. \end{cases} \tag{1.11}$$

On définit le produit discret pour toutes fonctions continues u et v sur $\overline{\Omega}$ par

$$(u,v)_N = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j)v(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j & \text{si } \ d = 2, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} u(\xi_i,\xi_j,\xi_k)v(\xi_i,\xi_j,\xi_k)\rho_i\rho_j\rho_k & \text{si } \ d = 3. \end{cases} \tag{1.12}$$

La formule (1.10) entraîne que le produit discret est un produit scalaire sur $\mathbb{P}_N(\Omega)$ et on note $\|\cdot\|_N$ la norme associée à ce produit scalaire.

1.6 Erreur d'approximation et d'interpolation polynomiale

Les propriétés des opérateurs de projection orthogonale et d'interpolation polynomiale sont présentées et démontrées en détail dans [6, 8].

Notation 1.6.1. *On note* $\Pi_N^{1,0}$ *l'opérateur de projection orthogonale de* $H_0^1(\Omega)$ *sur* $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ *pour le produit scalaire associé à la norme* $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 1.6.2. *Pour tout entier* $m \geq 1$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *on ait*

$$|v - \Pi_N^{1,0} v|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{1-m} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.13}$$

Notation 1.6.3. *On note* $\mathcal{I}_N$ *l'opérateur d'interpolation sur la grille* Σ_N (1.11) *: pour toute fonction* v *continue sur* $\overline{\Omega}$, $\mathcal{I}_N v$ *appartient à* $\mathbb{P}_N(\Omega)$ *et vérifie*

$$(\mathcal{I}_N v)(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \Sigma_N. \tag{1.14}$$

Théorème 1.6.4. *Pour tout entier* $m \geq 2$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^m(\Omega)$, *on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{L^2(\Omega)} \leq c N^{-m} \|v\|_{H^m(\Omega)}. \tag{1.15}$$

On a également une estimation d'erreur dans l'espace $H^1(\Omega)$ (voir [6, Thm 14.2]).

Théorème 1.6.5. *Pour tout entier* $m \geq \frac{1}{2}$, *il existe une constante* c *positive ne dépendant que de* m *telle que, pour toute fonction* v *de* $H^{m+1}(\Omega)$, *on ait*

$$\|v - \mathcal{I}_N v\|_{H^1(\Omega)} \leq c N^{-m} \|v\|_{H^{m+1}(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Notation 1.6.6. *On note* $i_N^{\partial\Omega}$ *l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds de* $\Sigma_N \cap \overline{\partial\Omega}$ *à valeurs dans l'espace des traces des fonctions de* $\mathbb{P}_N(\Omega)$ *sur* $\partial\Omega$.

CHAPITRE 2

Analyse du problème continu

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 à frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ tel que T est un nombre strictement positif. L'écoulement d'un fluide visqueux instationnaire et incompressible dans un milieu poreux Ω est décrit par la loi de Darcy

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[,$$

avec la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[.$$

les inconnues sont le champs de vecteur $\boldsymbol{u}$ à valeur dans $\mathbb{R}^d$, qui représente la vitesse du fluide et la fonction scalaire p qui représente sa pression. La fonction $\boldsymbol{f}$ représente une densité de forces extérieures appliquée au fluide, le paramètre α est une constante positive dépendant de la perméabilité du milieu et la viscosité du fluide. On impose une condition aux limites de type Dirichlet sur le pression p et une condition initiale sur la vitesse $\boldsymbol{u}$. Le problème qu'on se propose de résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ p = p_b & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que p_b et $\boldsymbol{u}_0$ décrivent la condition aux limites et la condition initiale. Toutes ces fonctions sont des fonctions de la variable d'espace $\boldsymbol{x}$ dans Ω et de la variable du temps t dans $]0, T[$.

2.1 La formulation variationnelle

Désormais, on suppose que

• les données $(\boldsymbol{f}, p_b)$ sont des fonctions de $L^2(0, T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ et telles que la fonction

p_b admet un relèvement que l'on note $\tilde{p}_b$ et qui vérifie

$$\|\tilde{p}_b\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c_0 \|p_b\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} \tag{2.2}$$

• et que la donnée $\boldsymbol{u}_0$ appartient à $L^2(\Omega)^d$ et satisfait la condition d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{2.3}$$

En vue d'écrire la formulation variationnelle du problème (2.1), on introduit la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ pour toute couple mesurable sur Ω,

$$b(\boldsymbol{v}, q) = (\ \boldsymbol{v}, \nabla q).$$

Proposition 2.1.1. *Le problème* (2.1) *admet la formulation variationnelle suivante*

Trouver $(\boldsymbol{u}, p)$ *dans* $H^1(0,T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *tel que*

$$\boldsymbol{u}(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \tag{2.4}$$

et pour tout $t, \quad 0 \leq t \leq T$,

$$p(\cdot, t) = p_b(\cdot, t) \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \\ &\forall q \in H_0^1(\Omega), \quad b(\boldsymbol{u}, q) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Preuve. On multiplie la première ligne de (2.1) par une fonction test $\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d$ et on intègre sur Ω, on trouve la première ligne de (2.6). D'autre part, d'après la deuxième ligne de (2.1) $\boldsymbol{u}$ est à divergence nulle donc en multipliant par une fonction test q de $H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on obtient,

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u} q d\boldsymbol{x} = 0.$$

On applique la formule de Green on trouve

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u} q d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla q d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} q \boldsymbol{n} d\sigma = 0,$$

puisque q est nul sur $\partial\Omega$, on obtient la deuxième ligne de (2.6).

Théorème 2.1.2. *Pour toute donnée* $(\boldsymbol{f}, p_b)$ *dans* $L^2(0,T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, *les problèmes* (2.1) *et* (2.4),(2.5) *et* (2.6) *sont équivalents dans le sens où :*

i) toute solution du problème (2.1) *appartenant à* $H^1(0,T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *est solution du problème* (2.4),(2.5)*et*(2.6),

ii) toute solution du problème (2.4),(2.5) *et* (2.6) *est solution du problème* (2.1) *au sens des distributions.*

Preuve. On a montré dans la proposition précédente que si $(\boldsymbol{u}, p)$ est solution du problème (2.1) alors elle est aussi solution de (2.4),(2.5) et (2.6). Réciproquement, soit $(\boldsymbol{u}, p)$ solution de (2.4),(2.5) et (2.6), on prend $\boldsymbol{v} = \varphi$ un élément de $\mathcal{D}(\Omega)^d$ dans la première ligne de (2.6)

$$\int_\Omega \partial_t \boldsymbol{u} \cdot \varphi d\boldsymbol{x} + \alpha \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \varphi d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla p \cdot \varphi d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \varphi d\boldsymbol{x}.$$

On a $\boldsymbol{u}$ appartient à $H^1(0,T;L^2(\Omega)^d)$ et p appartient à $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ ainsi que $\boldsymbol{f}$ appartient à $L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)$ alors

$$\partial_t \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \ \ dans \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

D'autre part, d'après la deuxième ligne de (2.6) on a pour tout q dans $H_0^1(\Omega)$ la quantité $b(\boldsymbol{u}, q)$ est nulle, On dérive au sens des distributions

$$\forall q \in H_0^1(\Omega), \quad < \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, q >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq d,$$

tel que $< \cdot, \cdot >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$ désigne le produit de dualité.

$$\forall q \in H_0^1(\Omega), \qquad < \nabla \cdot \boldsymbol{u}, q >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0.$$

On déduit que $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ égale à zéro au sens des distributions. De (2.4) et (2.5) on conclut l'équivalence des deux problèmes (2.1) et (2.4),(2.5) et (2.6).

2.2 Résultat d'existence

Afin de montrer que le problème variationnel est bien posé, on commence par présenter quelques propriétés. On prouve une propriété supplémentaire de la forme $b(\cdot, \cdot)$.

Proposition 2.2.1. *La forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$ est continue sur $L^2(\Omega)^d \times H^1(\Omega)$ et vérifie la condition inf-sup suivante :*

$$\forall q \in H_0^1(\Omega), \qquad \sup_{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\| \boldsymbol{v} \|_{L^2(\Omega)^d}} = | \, q \, |_{H^1(\Omega)} . \tag{2.7}$$

Preuve. La continuité de $b(\cdot, \cdot)$ est évidente. On montre l'égalité (2.7). On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur l'expression de $b(\cdot, \cdot)$, on trouve

$$b(\boldsymbol{v}, q) \quad \leq \quad \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla q\|_{L^2(\Omega)^d}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).$$

D'où

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}} \leq |q|_{H^1(\Omega)}, \ \forall q \in H_0^1(\Omega).$$

D'autre part, on a pour $\boldsymbol{v} = \nabla q$ dans $L^2(\Omega)^d$,

$$|q|_{H^1(\Omega)} = \frac{b(\nabla q, q)}{\|\nabla q\|_{L^2(\Omega)^d}} \quad \leq \quad \sup_{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d} \frac{b(\boldsymbol{v}, q)}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$

On obtient l'égalité désirée.

Définition 2.2.1. *On définit le noyau de* $b(\cdot,\cdot)$ *par :*

$$V(\Omega) = \{\ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega), \quad b(\boldsymbol{v}, q) = 0\}.$$

Proposition 2.2.2. *Le noyau* $V(\Omega)$ *est caractérisé par :*

$$V(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad dans \quad \Omega\}.$$

Preuve. On note

$$W(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad dans \quad \Omega\},$$

et on montre que l'espace $V(\Omega)$ donné dans la définition 2.2.1 est égal à $W(\Omega)$. L'inclusion de $W(\Omega)$ dans $V(\Omega)$ est évidente. Il suffit de montrer que $V(\Omega)$ est inclus dans $W(\Omega)$. Soit $\boldsymbol{v}$ dans $V(\Omega)$ donc la quantité $b(\boldsymbol{v}, q)$ est égale à 0 pour tout q dans $H_0^1(\Omega)$. En appliquant la formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} q d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{v} \quad q\boldsymbol{n} d\sigma = 0, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega).$$

Puisque la fonction q est nulle sur la frontière $\partial\Omega$ alors

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} q d\boldsymbol{x} = 0, \qquad \forall q \in H_0^1(\Omega).$$

Comme q est une fonction quelconque dans $H_0^1(\Omega)$, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ est égal à 0. On conclut l'égalité entre les deux espaces $V(\Omega)$ et $W(\Omega)$.

Proposition 2.2.3. *Pour tout* $(\boldsymbol{u}, p)$ *dans* $H^1(0,T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *solution du problème* (2.4),(2.5) *et* (2.6), *il existe une fonction* p^* *dans* $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ *telle que le couple* $(\boldsymbol{u}, p^*)$ *vérifie* (2.4) *et on ait pour tout* t, $0 \leq t \leq T$

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p^*) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b), \\ \forall q \in H_0^1(\Omega), \quad b(\boldsymbol{u}, q) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Preuve. On pose $p^* = p - \widetilde{p}_b$, en remplaçant dans (2.6) on aura

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p^* + \widetilde{p}_b) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}),$$

Ceci donne la première ligne de (2.8).

Remarque 2.2.1. *Si on prend la fonction test* $\boldsymbol{v}$ *dans* $V(\Omega)$ *dans* (2.8) *on obtient le problème variationnel réduit*

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega), \quad (\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (f, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b). \tag{2.9}$$

Lemme 2.2.4. *Les problèmes variationnels* (2.4),(2.5) *et* (2.6) *et* (2.4),(2.9) *sont équivalents.*

Preuve. Il est clair que si $(\boldsymbol{u}, p)$ est une solution de (2.4),(2.5) et (2.6) alors $\boldsymbol{u}$ est une solution de (2.4) -(2.9). Réciproquement, soit $\boldsymbol{u}$ dans $H^1(0,T;V(\Omega))$ solution de (2.4) -(2.9). On définit l'application L_t pour tout $\boldsymbol{v}$ dans $L^2(\Omega)^d$ comme suit

$$L_t(\boldsymbol{v}) = \int_0^t [(\boldsymbol{f}(\cdot,s),\boldsymbol{v}) - \alpha(\boldsymbol{u}(\cdot,s),\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v},\widetilde{p}_b(s))]ds - (\boldsymbol{u}(\cdot,t),\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}).$$

Pour tout t appartient à [0,T], L_t est une fonction linéaire continue sur $L^2(\Omega)^d$ et selon (2.4)-(2.9) elle disparaît sur $V(\Omega)$. D'après le Théorème 1.4.2, pour tout t il existe une unique fonction $P(t) \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$L_t(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, P(t)), \quad \forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d.$$

D'autre part,

$$b(\boldsymbol{v}, P(t)) = \int_0^t [((\boldsymbol{f},s),\boldsymbol{v}) - \alpha(\boldsymbol{u}(.,s),\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v},\widetilde{p}_b(s))]ds - (\boldsymbol{u}(\cdot,t),\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{v}) \tag{2.10}$$

on dérive (2.10) par rapport à t on obtient,

$$b(\boldsymbol{v}, \frac{dP(\cdot,t)}{dt}) = (\boldsymbol{f}(\cdot,t),\boldsymbol{v}) - \alpha(\boldsymbol{u}(\cdot,t),\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v},\widetilde{P_b}(t)) - (\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}(\cdot,t),\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d,$$

donc si nous posons

$$p^* = \frac{dP}{dt},$$

on obtient (2.6) avec $p = p^* + \widetilde{p}_b$.

Nous montrons dans la proposition suivante une estimation a priori pour la solution du problème (2.4),(2.5) et (2.6).

Proposition 2.2.5. *Supposons que les données $(\boldsymbol{f}, p_b)$ appartiennent à $L^2(0,T;L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ et que la vitesse initiale $\boldsymbol{u}_0$ appartient à $L^2(\Omega)^d$ alors l'estimation a priori suivante pour la solution $(\boldsymbol{u}, p)$ du problème (2.4),(2.5) et (2.6) est satisfaite pour tout $t \in [0,T]$*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} \leq c(\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}), \tag{2.11}$$

et

$$\|p\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq c(\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}), \tag{2.12}$$

tel que c est une constante qui ne dépend que de Ω et de α.

Preuve. Pour montrer (2.11) on prend $\boldsymbol{v}$ égal à $\boldsymbol{u}$ dans (2.9) on trouve

$$(\partial_t \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{u}, p^*) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u}) - b(\boldsymbol{u}, \widetilde{p}_b).$$

Ceci est équivalent à

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}\nabla\widetilde{p_b}d\boldsymbol{x}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}|_{H^1(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d},$$

puis on utilise la formule de Young,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{2\epsilon}\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\epsilon}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2\epsilon}|\widetilde{p_b}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\epsilon}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d},$$

en choisissant $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$, on aura

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\alpha}(\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}|^2_{H^1(\Omega)}).$$

On intègre entre 0 et t on trouve

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\int_0^1 \|\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)^d}ds \leq \|\boldsymbol{u}(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t \|\boldsymbol{f}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)^d}ds + \frac{2}{\alpha}\int\limits_0^t |\widetilde{p_b}(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds. \tag{2.13}$$

Pour α strictement positif, on obtient

$$\max_{0\leq t\leq T}\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{2}{\alpha}\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \frac{2}{\alpha}\|\widetilde{p_b}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.2) on obtient l'estimation (2.11). Maintenant pour estimer (2.12), on a besoin d'une majoration de $\|\partial_t\boldsymbol{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}$. Pour cela on prend $\boldsymbol{v}$ égal à $\partial_t\boldsymbol{u}$ dans (2.9) on trouve

$$\|\partial_t\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f}\partial_t\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} \partial_t\boldsymbol{u}\nabla\widetilde{p_b}d\boldsymbol{x}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\|\partial_t\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\partial_t\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}|_{H^1(\Omega)}\|\partial_t\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

L'inégalité de Young pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ donne

$$\frac{1}{2}\|\partial_t\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq (\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}|^2_{H^1(\Omega)}).$$

On intègre entre 0 et t on trouve

$$\int_0^t \|\partial_t\boldsymbol{u}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)^d}ds + \alpha\big(\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big) \leq 2\Big(\int_0^t \|\boldsymbol{f}(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)^d}ds + \int_0^t |\widetilde{p_b}(\cdot,s)|^2_{H^1(\Omega)}ds\Big),$$

En combinant avec (2.2) on déduit que

$$\|\partial_t\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} \leq 2\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + 2c_0\|p_b\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} + \alpha\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^d}. \tag{2.14}$$

Similairement, pour montrer l'estimation (2.12) on choisit $\boldsymbol{v}$ égal à ∇p dans la première ligne de (2.6) on trouve

$$\|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{f} \nabla p d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \partial_t \boldsymbol{u} \nabla p d\boldsymbol{x} - \alpha \int\limits_\Omega \boldsymbol{u} \nabla p d\boldsymbol{x}.$$

L'inégalité de Cauchy- Schwarz et la formule de Young donnent

$$\|\nabla p\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq 4(\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\partial_t \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}).$$

En intégrant entre 0 et t on obtient

$$\|\nabla p\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} \leq 2\|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + 2\|\partial_t \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + 2\sqrt{\alpha}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}.$$

En combinant cette inégalité avec (2.13) et (2.14) on obtient l'estimation désirée.

Finalement, on démontre l'existence et l'unicité de la solution de la formulation variationnnelle (2.4),(2.5) et (2.6) énoncée dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.6. *Supposons que les données* $(\boldsymbol{f}, p_b)$ *appartiennent à* $L^2(0,T;L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *et que la vitesse initiale* $\boldsymbol{u}_0$ *appartient à* $L^2(\Omega)^d$ *et satisfait* (2.3)*, alors le problème* (2.4),(2.5) *et* (2.6) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}, p)$ *dans l'espace*

$$H^1(0,T;L^2(\Omega)^d) \times L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

De plus, cette solution satisfait l'estimation a priori

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \|\nabla p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} \leq \; c(\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \|p_b\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}). \quad (2.15)$$

Preuve. Grâce à l'équivalence des problèmes (2.4),(2.5) et (2.6) et (2.4)-(2.9) (voir lemme 2.2.4), pour prouver l'existence de $(\boldsymbol{u}, p)$ solution de (2.4),(2.5) et (2.6) il suffit de prouver l'existence de $\boldsymbol{u}$ solution de (2.4)-(2.9). Notons que l 'application affine

$$F : (t, \boldsymbol{u}) \mapsto \boldsymbol{f} - \alpha \boldsymbol{u} - \nabla \widetilde{p_b}$$

est continue et lipschitzienne par rapport à $\boldsymbol{u}$ avec la constante de Lipschitz α, en effet

$$\|F(t, \boldsymbol{u}_1) - F(t, \boldsymbol{u}_2)\|_{L^2(\Omega)^d} = \|\boldsymbol{f} - \alpha \boldsymbol{u}_1 - \nabla \widetilde{p_b} - (\boldsymbol{f} - \alpha \boldsymbol{u}_2 - \nabla \widetilde{p_b})\|_{L^2(\Omega)^d} = \alpha \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{L^2(\Omega)^d},$$

Soit $(\mathbb{H}_n)_n$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $V(\Omega)$ telle que $\cup_n \mathbb{H}_n$ est dense dans $V(\Omega)$. On en déduit le problème suivant, pour tout $n > m$

$$\begin{aligned}
&\text{Trouver } \boldsymbol{u}_n \in \mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}_n) \text{ tel que} \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{u}_n(\cdot, 0) = \boldsymbol{u}_0, \\
&\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_m, \quad \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} + \alpha \int_\Omega \boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \boldsymbol{v} \nabla \widetilde{p_b} \, d\boldsymbol{x},
\end{aligned} \quad (2.16)$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.3.1), cette équation admet une solution unique $\boldsymbol{u}_n$ dans $\mathcal{C}^0(0,T;\mathbb{H}_n)$. La solution $\boldsymbol{u}_n$ vérifie (2.11), donc il existe une sous-suite que l'on note encore $(\boldsymbol{u}_n)_n$ pour simplifier, qui converge faiblement vers $\boldsymbol{u}$ dans $L^2(0,T;V(\Omega))$. La fonction $\boldsymbol{u}$ est solution de (2.9) pour tout $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}_m$ et donc pour tout $\boldsymbol{v} \in V(\Omega)$ par densité. Comme $\boldsymbol{u}$ satisfait (2.13) et (2.14), on a ainsi l'existence de $\boldsymbol{u}$ dans $H^1(0,T;V(\Omega))$. De plus, si $\boldsymbol{u}^1$ et $\boldsymbol{u}^2$ sont deux solutions de l'équation (2.4)-(2.9) et soit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^1 - \boldsymbol{u}^2$, $\boldsymbol{u}$ est solution du problème (2.4)-(2.9) tel que $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ et p_b sont égaux à zéro, on déduit alors de (2.13) que $\boldsymbol{u}$ est nul. Ceci prouve l'unicité de la solution.

CHAPITRE 3

Discrétisation temporelle du problème de Darcy

On s'intéresse dans ce chapitre à la discrétisation du problème de Darcy par un schéma d'Euler implicite en temps. Pour un entier m positif, nous introduisons une partition de l'intervalle $[0,T]$ en sous intervalles $[t_{m-1}, t_m], 1 \leq m \leq M$, avec $0 = t_0 < t_1 < ...t_m = T$. On désigne par τ_m le pas du temps $t_m - t_{m-1}$, et par τ les M-uplets $(\tau_1, ..., \tau_m)$ et tel que $|\tau| = \max_{1 \leq m \leq M} \tau_m$.

3.1 Problème semi-discret en temps

On cherche une approximation $\boldsymbol{u}^m(\boldsymbol{x}) \simeq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_m)$ de la solution exacte au point t_m, en discrétisant la dérivée partielle en temps par un schéma d'Euler implicite ce qui donne

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t_m) \simeq \frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_m) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_{m-1})}{\tau_m} \simeq \frac{\boldsymbol{u}^m(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{m-1}(\boldsymbol{x})}{\tau_m}.$$

On suppose les fonctions $(\boldsymbol{f}, p_b)$ dans $\mathcal{C}^0(0,T; L^2(\Omega)^d) \times \mathcal{C}^0(0,T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, et $\boldsymbol{u}_0$ dans $L^2(\Omega)^d$ le problème semi-discret s'écrit :
Trouver $(\boldsymbol{u}^m)_{0 \leq m \leq M} \in (L^2(\Omega)^d)^{M+1}$ et $(p^m)_{1 \leq m \leq M} \in (H^1(\Omega))^M$, tels que

$$\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}_0 \quad dans \quad \Omega, \tag{3.1}$$

et pour tout m, $1 \leq m \leq M$,

$$p^m = p_b^m \quad sur \quad \partial\Omega, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \tau_m b(\boldsymbol{v}, p^m) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}), \\ &\forall q \in H_0^1(\Omega), \quad b(\boldsymbol{u}^m, q) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{f}^n = \boldsymbol{f}(\cdot, t_m)$ et $p_b^m = p_b(\cdot, t_m)$. En effet, on utilise le schéma d'Euler implicite dans (2.6), on trouve

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \left(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{v}\right) + \alpha(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p^m) = (\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}),$$

et on multiplie par τ_m.

Remarque 3.1.1. *Comme dans le chapitre précédent, on définit* $\widetilde{p}_b^m$ *le relèvement de la fonction* $p_b^m, 0 \leq m \leq M$ *et qui vérifie*

$$\|\widetilde{p}_b{}^m\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \parallel p_b^m \parallel_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}, \tag{3.4}$$

avec la même constante c_0 *que dans* (2.2).

3.2 Résultat d'existence pour la solution semi-discrète

Dans cette section, nous vérifions que le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) est bien posé.

Proposition 3.2.1. *Si* $(\boldsymbol{u}^m, p^m)$ *est une solution de* (3.1)-(3.2)-(3.3), *la suite* $(\boldsymbol{u}^m)_{0\leq m\leq M}$ *appartient à* $V(\Omega)^{M+1}$, *satisfait* (3.1) *et telle que pour tout* $1 \leq m \leq M$

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega), \quad (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}) - \tau_m b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b{}^m). \tag{3.5}$$

Preuve . Prenant p^{m*} égal à $p^m - \widetilde{p}_b{}^m$ dans la première ligne de (3.3), on trouve

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \tau_m b(\boldsymbol{v}, p^{m*} + \widetilde{p}_b{}^m) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}),$$

alors

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \tau_m b(\boldsymbol{v}, p^{m*}) + b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b{}^m) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}).$$

Si l'on prend $\boldsymbol{v}$ dans $V(\Omega)$, on obtient

$$\forall \boldsymbol{v} \in V(\Omega), \quad (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}) - \tau_m b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b{}^m).$$

Proposition 3.2.2. *Le problème* (3.1)-(3.5) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}^m)_{0\leq m\leq M}$ *dans l'espace* $V(\Omega)^{M+1}$.

Preuve . Nous utilisons le Lemme de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses avec les notations, pour $0 \leq m \leq M$:

$$a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})$$

et

$$F^m(\boldsymbol{v}) = \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}^{m-1}, v) - \tau_m b(\boldsymbol{v}, \widetilde{p}_b{}^m)$$

1. La bilinéarité de $a(\cdot,\cdot)$ provient de la linéarité des dérivées et intégrales.
2. La continuité de $a(\cdot,\cdot)$ est évidente, en effet : soient $\boldsymbol{u}^m \in L^2(\Omega)^d, \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d$

$$|a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})| \leq |(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})| + |\alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d},$$

alors

$$|a(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v})| \leq (1 + \alpha\tau_m)\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

3. La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est coercive, en effet : pour tout $\boldsymbol{v}$ dans $L^2(\Omega)^d$
$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}), = (1+\alpha\tau_m)\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$
4. F^m est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)^d$, en effet :
$$|F^m(\boldsymbol{v})| \leq |\tau_m(\boldsymbol{f}^n,\boldsymbol{v})| + |(\boldsymbol{u}^{m-1},\boldsymbol{v})| + |\tau_m b(\boldsymbol{v},\widetilde{p_b}^m)|.$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne
$$|F^m(\boldsymbol{v})| \leq (\tau_m\|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} + \tau_m\|\nabla\widetilde{p_b}^m\|_{L^2(\Omega)^d})\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$
Comme $L^2(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert on déduit du lemme de Lax-Milgram que le problème (3.1)-(3.5) admet une solution unique $(\boldsymbol{u}^m)_{0\leq m\leq M} \in (V(\Omega))^{M+1}$.

Proposition 3.2.3. *Si* $(\boldsymbol{u}^m)_{0\leq m\leq M}$ *est une solution de* (3.1)-(3.5) *l'application*
$$L_m(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}^n,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v},\widetilde{p_b}^m) - \frac{1}{\tau_m}(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1},\boldsymbol{v}) - \alpha(\boldsymbol{u}^m,\boldsymbol{v}),$$
est linéaire continue sur $L^2(\Omega)^d$ *qui disparait sur* $V(\Omega)$ *et satisfait*
$$\forall\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^d,\quad L_m(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v},p^{m*}), \tag{3.6}$$
$$|p^{m*}|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^d}\frac{L_m(\boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}}. \tag{3.7}$$

Preuve. La linéarité de L_m provient de la linéarité des intégrales. En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz la fonction L_m est continue.
$$\begin{aligned}|L_m(\boldsymbol{v})| &= |(\boldsymbol{f}^n,v) - b(\boldsymbol{v},\widetilde{p_b}^m) - \frac{1}{\tau_m}(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1},\boldsymbol{v}) - \alpha(\boldsymbol{u}^m,\boldsymbol{v})|,\\ &\leq (\|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla\widetilde{p_b}^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\tau_m}\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\tau_m}\|\boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d})\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$
On a de (3.5) la fonction L_m s'annule dans $V(\Omega)$, alors grâce à la condition inf- sup (2.7) et d'après le Théorème 1.4.2, il existe une unique fonction p^{m*} dans $H^1_0(\Omega)$ telle que
$$\forall\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^d,\quad L_m(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v},p^{m*}),$$
et on a
$$|p^{m*}|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)^d}\frac{b(\boldsymbol{v},p^{m*})}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(\Omega)^d}}.$$
Conséquemment à la proposition précédente on a le résultat suivant.

Lemme 3.2.4. *Les problèmes* (3.1)-(3.2)-(3.3) *et* (3.1)-(3.2)-(3.5) *sont équivalents.*

On conclut du Lemme 3.2.4 et la Proposition 3.2.2 le résultat d'existence et d'unicité de $(\boldsymbol{u}^m,p^m)$.

Proposition 3.2.5. *Supposons* $(\boldsymbol{f},p_b)$ *dans* $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)^d)\times\mathcal{C}^0(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *et que la vitesse initiale* u_0 *appartient à* $L^2(\Omega)^d$ *et satisfait* (3.2), *alors le problème* (3.1)-(3.2)-(3.3) *admet une solution unique* $(\boldsymbol{u}^m,p^m)$, *tel que*
$$\boldsymbol{u}^m\in L^2(\Omega)^d,\quad 0\leq m\leq M\quad \textit{et}\quad p^m\in H^1(\Omega),\quad 1\leq m\leq M. \tag{3.8}$$

3.3 Propriété de stabilité de la solution

Proposition 3.3.1. *On suppose que les données* $(\boldsymbol{f}, p_b)$ *appartiennent à* $\mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)^d)\times\mathcal{C}^0(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ *et la vitesse initiale* $\boldsymbol{u}_0$ *appartient à* $L^2(\Omega)^d$ *et satisfait* (3.2)*. La suite des vitesses* $(\boldsymbol{u}^m)_{1\le m\le M}$ *vérifie :*

$$\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \le \|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k(\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + c_0^2\|p_b^k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)})\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Preuve. Si l'on choisit $\boldsymbol{v}$ égal à $\boldsymbol{u}^m$ dans (3.5), on trouve

$$(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}^m) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}^m) = (\boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{u}^m) + \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{u}^m) - \tau_m b(\boldsymbol{u}^m, \widetilde{p_b}^m).$$

Ceci est équivalent à

$$(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{u}^m) + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{u}^m) - \tau_m(\boldsymbol{u}^m, \nabla\widetilde{p_b}^m).$$

On utilise l'identité

$$(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2),$$

on obtient,

$$\frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big) + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{u}^m) - \tau_m(\boldsymbol{u}^m, \nabla\widetilde{p_b}^m).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}) + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le \tau_m(\|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}|\widetilde{p_b}^m|_{H^1(\Omega)}).$$

On utilise la relation de Young $ab \le \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$, en prenant $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$, on trouve

$$\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}) + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le \tau_m(\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{f}^n\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{4}\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\alpha}|\widetilde{p_b}^m|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\alpha}{4}\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}),$$

alors

$$\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}) + \frac{\alpha}{2}\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le \tau_m(\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{f}^n\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\alpha}|\widetilde{p_b}^m|^2_{H^1(\Omega)}).$$

En sommant cette inégalité sur m, on trouve

$$\sum_{k=1}^m \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \sum_{k=1}^m \|\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{k=1}^m \|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} \le \frac{2}{\alpha}\sum_{k=1}^m \tau_k(\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}),$$

alors

$$\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{k=1}^{m} \|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha \sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} \tau_k (\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}).$$

On en déduit que,

$$\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{k=1}^{m} \|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha \sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} \tau_k (\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}) + \|\boldsymbol{u}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d}. \tag{3.10}$$

On a les quantités $\sum_{k=1}^{m} \|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ et $\alpha \sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ sont positives donc,

$$\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{m} \tau_k (\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}) + \|\boldsymbol{u}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

Ceci achève la démonstration.

Proposition 3.3.2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, La suite des vitesses* $(\boldsymbol{u}^m)_{1\leq m\leq M}$ *satisfait la majoration suivante :*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\alpha}\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + \sqrt{2}\Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k (\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + c_0^2 \|p_b^k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)})\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

Preuve. Prenant $\boldsymbol{v}$ égal à $\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}$ dans (3.5), on trouve

$$(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}, \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) = \tau_m(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) - \tau_m b(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}, \widetilde{p_b}^m),$$

En divisant par τ_m, on aura

$$\frac{1}{\tau_m}\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha(\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) = (\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) - b(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}, \widetilde{p_b}^m).$$

On utilise l'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$, ainsi que - l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient,

$$\frac{1}{\tau_m}\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha}{2}(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d})$$
$$\leq \|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}|\widetilde{p_b}^m|_{H^1(\Omega)}.$$

La relation de Young $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$, avec $\epsilon = 2\tau_m$, entraîne

$$\frac{1}{\tau_m}\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha(\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d})$$
$$\leq 2\tau_m(\|\boldsymbol{f}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + |\widetilde{p_b}^m|^2_{H^1(\Omega)}).$$

En sommant sur m, on trouve

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\tau_k}\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\alpha\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\alpha\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{u}^{k-1}-\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}-\alpha\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq 2\sum_{k=1}^{m}\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+|\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}),$$

alors

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\tau_k}\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\alpha\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}-\alpha\|\boldsymbol{u}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\alpha\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq 2\sum_{k=1}^{m}\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+|\widetilde{p_b}^k|^2_{H^1(\Omega)}).$$

Comme les quantités $\alpha\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ et $\alpha\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ sont positives on en déduit l'estimation souhaitée.

Proposition 3.3.3. *Sous les hypothèses de la Proposition 3.3.1, la suite de pressions $(p^m)_{1\leq m\leq M}$ vérifie*

$$\Big(\sum_{k=1}^{m}\tau_k|p^k|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\leq c_1\Big(\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^{m}\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|p_b^k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)})\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

Preuve. Similairement aux preuves précédentes, on choisit $\boldsymbol{v}$ égal à ∇p^m dans la première ligne de (3.3) et on effectue les mêmes étapes, commençons par utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}\tau_m\|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} &= -(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1},\nabla p^m)-\alpha\tau_m(\boldsymbol{u}^m,\nabla p^m)+\tau_m(\boldsymbol{f}^n,\nabla p^m),\\ &\leq \|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}+\alpha\tau_m\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}\\ &\quad+\tau_m\|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d},\end{aligned} \tag{3.13}$$

on utilise la formule de Young avec $\epsilon=\frac{3}{\tau_m}$, on aura

$$\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}\leq\frac{3}{2\tau_m}\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{\tau_m}{6}\|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

Encore une fois la formule de Young nous donne pour $\epsilon=3$

$$\alpha\|\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^n\|_{L^2(\Omega)^d}\|\nabla p^m\|_{L^2(\Omega)^d}\leq\frac{3}{2}\|\boldsymbol{f}^n\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{1}{6}\|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\frac{3\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{\alpha}{6}\|\nabla p^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

En combinant les deux dernières inégalités avec (3.13), on obtient

$$\frac{1}{2}\tau_m|p^m|^2_{H^1(\Omega)}\leq\frac{3}{2}\tau_m\|\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{3\tau_m}{2}\|\boldsymbol{f}^n\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\frac{3\alpha\tau_m}{2}\|\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

En sommant cette dernière ligne sur les m, et grâce aux relations (3.10) et (3.11) on conclut l'estimation cherchée.

3.4 Estimation d'erreur

Dans ce qui suit, on va estimer l'erreur due à la discrétisation en temps.

Remarque 3.4.1. *On déduit l'équation de l'erreur en soustrayant* (3.3) *de* (2.6) *à l'instant* $t = t_m$, *telle que la solution* $\boldsymbol{e}^m$ *est définie par* $\boldsymbol{e}^m = \boldsymbol{u}(\cdot, t_m) - \boldsymbol{u}^m$ *vérifiant* $\boldsymbol{e}^0 = 0$ *et pour tout* m, $1 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad (\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{v}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{v}) + \tau_m b(\boldsymbol{v}, p(.,t_m) - p^m) = (\boldsymbol{e}^{m-1}, \boldsymbol{v}) + \tau_m(\varepsilon^m, \boldsymbol{v}), \\ &\forall q \in H_0^1(\Omega), \quad b(\boldsymbol{e}^m, q) = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

où l'erreur de consistance ε^m *est donnée par*

$$\varepsilon^m = \frac{\boldsymbol{u}(\cdot, t_m) - \boldsymbol{u}(\cdot, t_{m-1})}{\tau_m} - (\partial_t \boldsymbol{u})(\cdot, t_m).$$

Proposition 3.4.1. *Supposons que la vitesse* $\boldsymbol{u}$ *de la solution* $(\boldsymbol{u}, p)$ *du problème* (2.4),(2.5) *et* (2.6) *appartient à l'espace* $H^2(0,T; L^2(\Omega)^d)$. *Alors, on a l'estimation suivante,*

$$\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \sqrt{\frac{\tau_m}{3}} \|\boldsymbol{u}\|_{H^2(t_{m-1},t_m;L^2(\Omega)^d)}. \tag{3.15}$$

Preuve. On fait appel à la formule de Taylor

$$\boldsymbol{u}(\cdot, t_m) - \boldsymbol{u}(\cdot, t_{m-1}) = \tau_m(\partial_t \boldsymbol{u})(\cdot, t_m) - \int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1})\partial_{tt}^2 \boldsymbol{u}(\cdot, t) dt,$$

donc

$$\varepsilon^m = -\frac{1}{\tau_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1})\partial_{tt}^2 \boldsymbol{u}(\cdot, t) dt.$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\varepsilon^m \leq \frac{1}{\tau_m} \Big(\int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1})^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_{m-1}}^{t_m} (\partial_{tt}^2 \boldsymbol{u}(\cdot, t))^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Or

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} (t - t_{m-1})^2 dt = \frac{1}{3}(t - t_{m-1})^3 \Big|_{t_{m-1}}^{t_m} = \frac{\tau_m^3}{3}.$$

Par conséquent,

$$\varepsilon^m \leq \sqrt{\frac{\tau_m}{3}} \Big(\int_{t_{m-1}}^{t_m} (\partial_{tt}^2 \boldsymbol{u}(\cdot, t))^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En passant à la norme de $L^2(\Omega)^d$, on obtient

$$\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{\tau_m}{3} \|\partial_{tt}^2 \boldsymbol{u}\|_{L^2(t_{m-1},t_m;L^2(\Omega)^d)}^2,$$

d'où

$$\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{\tau_m}{3} \|\boldsymbol{u}\|_{H^2(t_{m-1},t_m;L^2(\Omega)^d)}^2.$$

Ceci achève la démonstration.

Proposition 3.4.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 3.4.1, on a l'estimation d'erreur a priori suivante pour tout* $1 \leq m \leq M$

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot, t_m) - \boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}|\tau|\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}. \tag{3.16}$$

Preuve. On applique les mêmes arguments de (3.9) au problème (3.14). Pour $\boldsymbol{v}$ égal à $\boldsymbol{e}^m$ dans la première ligne de (3.14), on trouve

$$(\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{e}^m) + \tau_m \alpha(\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{e}^m) + b(\boldsymbol{e}^m, p(., t_m) - p^m) = (\boldsymbol{e}^{m-1}, \boldsymbol{e}^m) + \tau_m(\varepsilon^m, \boldsymbol{e}^m).$$

Comme $p(\cdot, t_m) - p^m$ est nul sur $\partial\Omega$, on obtient

$$(\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}, \boldsymbol{e}^m) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{e}^m) = \tau_m(\varepsilon^m, \boldsymbol{e}^m).$$

L'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule de Young $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ avec $\varepsilon = \alpha$ nous donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\|\boldsymbol{e}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{e}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \sum_{k=1}^m \|\boldsymbol{e}^{k-1} - \boldsymbol{e}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big) + \alpha\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{e}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\ \leq \frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{e}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2\alpha}\sum_{k=1}^m \tau_k\|\varepsilon^k\|^2_{L^2(\Omega)^d},\end{aligned}$$

Puisque $\|\boldsymbol{e}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d} = 0$, on déduit de (3.15) l'estimation d'erreur (3.16).

Corollaire 3.4.3. *Si les hypothèses de la proposition* 3.4.2 *sont satisfaites, on a les estimations d'erreur a priori suivantes*

$$\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{(\boldsymbol{u}(\cdot, t_k) - \boldsymbol{u}^k) - (\boldsymbol{u}(\cdot, t_{k-1}) - \boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|\tau|\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}, \tag{3.17}$$

$$\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k|p(\cdot, t_k) - p^k|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|\tau|\|\boldsymbol{u}\|_{H^2(0,t_m;L^2(\Omega)^d)}. \tag{3.18}$$

Preuve. On applique les mêmes arguments de (3.11) et (3.12) au problème (3.14).

1. Dans une première étape, on prend $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}$ dans l'équation (3.14), en notant que $b(\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}, p(\cdot, t_m) - p_m) = 0$, pour tout $0 \leq m \leq M$, on aura

$$(\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}, \boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}) + \alpha\tau_m(\boldsymbol{e}^m, \boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}) = \tau_m(\varepsilon^m, \boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}).$$

On utilise l'identité $(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|a-b\|^2 - \|b\|^2)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{\alpha\tau_m}{2}(\|\boldsymbol{e}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d})\\ \leq \tau_m\|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

On utilise encore l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, on trouve

$$\|\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\tau_m(\|\boldsymbol{e}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{e}^m - \boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \|\boldsymbol{e}^{m-1}\|^2_{L^2(\Omega)^d}) \leq \tau_m^2\|\varepsilon^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

En divisant par τ_m et en sommant sur m, on trouve

$$\sum_{k=1}^{m}\tau_k\Big\|\frac{\boldsymbol{e}^{k-1} - \boldsymbol{e}^k}{\tau_k}\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\tau_m\|\boldsymbol{e}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \alpha\sum_{k=1}^{m}\tau_k\|\boldsymbol{e}^{k-1} - \boldsymbol{e}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \sum_{k=1}^{m}\tau_k\|\varepsilon^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

On a les quantités $\alpha\tau_m\|\boldsymbol{e}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ et $\alpha\sum\limits_{k=1}^{m}\tau_k\|\boldsymbol{e}^{k-1} - \boldsymbol{e}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$ sont positives et en vertu de la relation (3.15), on déduit l'inégalité (3.17).

2. Dans une deuxième étape, pour prouver l'estimation (3.17) on choisit $\boldsymbol{v} = \nabla(p(\cdot,t_m) - p^m)$ dans (3.14), on obtient

$$|p(\cdot,t_m) - p^m|^2_{H^1(\Omega)} = (\varepsilon^m, p(\cdot,t_m) - p^m).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|p(\cdot,t_m) - p^m|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}|p(\cdot,t_m) - p^m|_{H^1(\Omega)},$$

alors

$$|p(\cdot,t_m) - p^m|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varepsilon^m\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

En multipliant le carré de cette inégalité par τ_m et en sommant sur m, on trouve

$$\sum_{k=1}^{m}\tau_k|p(\cdot,t_k) - p^k|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m}\tau_k\|\varepsilon^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

On utilise la relation (3.15) pour conclure.

CHAPITRE 4

Discrétisation spatiale du problème de Darcy

Dans ce chapitre on s'intéresse à la discrétisation par la méthode spectrale du problème (2.1) en espace en utilisant la méthode de Galerkin avec intégration numérique. Désormais, on considère Ω le carré ou le cube $]-1,1[^d$, $d=2$ ou 3. On désigne par N le paramètre de discrétisation.

4.1 Problème discret

On introduit les espaces discrets suivants

$$\mathbb{X}_N = \mathbb{P}_N(\Omega)^d \quad \text{et} \quad \mathbb{Y}_N = \mathbb{P}_N(\Omega),$$

et on approche l'espace $H_0^1(\Omega)$ par

$$\mathbb{Y}_N^0 = \mathbb{Y}_N \cap H_0^1(\Omega).$$

On suppose les données f, p_b continues respectivement sur $\overline{\Omega} \times [0,T], \overline{\partial\Omega} \times [0,T]$ et $\boldsymbol{u}_0$ continue sur $\overline{\Omega}$. Le problème discret construit par la méthode de Galerkin avec intégration numérique s'écrit

Trouver $(\boldsymbol{u}_N^m)_{0\le m\le M}$ dans $(\mathbb{X}_N)^{M+1}$, $(p_N^m)_{1\le m\le M}$ dans $(\mathbb{Y}_N)^M$ tels que

$$\boldsymbol{u}_N^0 = \mathcal{I}_N \boldsymbol{u}^0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{4.1}$$

et pour tout $m, 1 \le m \le M$,

$$p_N^m = i_N^{\partial\Omega} p_b^m \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{Y}_N, \quad a_N^m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N) + \tau_m b_N(\boldsymbol{v}_N, p_N) = \tau_m(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_N)_N + (\boldsymbol{u}_N^{m-1}, \boldsymbol{v}_N)_N, \\ &\forall q_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad b_N(\boldsymbol{u}_N^m, q_N) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où les formes bilinéaires $a_N^m(\cdot,\cdot)$ et $b_N(\cdot,\cdot)$ sont données par

$$a_N^m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N)_N = (\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N)_N + \alpha\tau_m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N)_N,$$

et

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = (\boldsymbol{v}_N, \nabla q_N)_N.$$

L'analyse numérique du problème (4.1)-(4.2)-(4.3) repose sur les propriétés des formes bilinéaires $a_N^m(\cdot,\cdot)$ et $b_N(\cdot,\cdot)$.

Proposition 4.1.1. *Pour tout $0 \leq m \leq M$, la forme bilinéaire $a_N^m(\cdot,\cdot)$ satisfait les propriétés de continuité*

$$\forall \boldsymbol{u}_N^m \in \mathbb{X}_N,\ \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad a_N^m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N) \leq (1+\alpha\tau_m)3^d \|\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}, \tag{4.4}$$

et d'ellipticité

$$\exists \beta_0 > 0,\ \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad a_N^m(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N) \geq \beta_0 \|\boldsymbol{v}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}, \tag{4.5}$$

Preuve. Ces propriétés sont une conséquence du Corollaire 1.5.2. En effet, pour la continuité il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la deuxième inégalité de (1.10),

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{u}_N^m \in \mathbb{X}_N,\ \forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N, \quad a_N^m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N) &\leq (1+\alpha\tau_m)(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m)_N^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N)_N^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1+\alpha\tau_m)3^d \|\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

Quant à la coercivité de $a_N^m(\cdot,\cdot)$, pour tout $\boldsymbol{v}_N$ dans $\mathbb{X}_N$ on a

$$a_N^m(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N) = (1+\alpha\tau_m)(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N)_N.$$

La première inégalité de (1.10) entraîne

$$a_N^m(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N) \geq (1+\alpha\tau_m)\|\boldsymbol{v}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}.$$

Proposition 4.1.2. *La forme bilinéaire $b_N(\cdot,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$ et vérifie la condition inf-sup suivante*

$$\forall q_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad \sup_{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N} \frac{b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N)}{\|\ \boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}} \geq \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{4.6}$$

Preuve Il est évident que $b_N(\cdot,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{X}_N \times \mathbb{Y}_N$. En effet, soient $q_N \in \mathbb{Y}_N$ et $\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aura

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) \leq (\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_N)_N^{\frac{1}{2}}(\nabla q_N, \nabla q_N)_N^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à la propriété (1.10), on obtient

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) \leq 3^d \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Pour prouver la condition inf-sup, pour tout q_N dans $\mathbb{Y}_N$, on note que ∇q_N appartient à $\mathbb{X}_N$. En prenant $\boldsymbol{v}_N$ égal à ∇q_N, on obtient en utilisant une fois de plus (1.10)

$$b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) \geq \|\nabla q_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}, \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d} = \|\nabla q_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Définition 4.1.1. *On définit le noyau de $b_N(\cdot,\cdot)$ par*

$$\mathbf{V}_N(\Omega) = \{\boldsymbol{v}_N \in \mathbb{X}_N, \forall q_N \in \mathbb{Y}_N^0, \quad b_N(\boldsymbol{v}_N, q_N) = 0\}.$$

On note que, pour toute solution $(\boldsymbol{u}_N^m, p_N^m)$ du problème (4.1)-(4.2)-(4.3), la vitesse $\boldsymbol{u}_N^m$ appartient à $\mathbf{V}_N(\Omega)$, pour tout $1 \leq m \leq M$ et vérifie

$$\forall \boldsymbol{v}_N \in \mathbf{V}_N(\Omega), \quad a_N^m(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N) = (\boldsymbol{u}_N^{m-1}, \boldsymbol{v}_N)_N + \tau_m(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{v}_N)_N - \tau_m b_N(\boldsymbol{v}_N, \mathcal{I}_N \widetilde{p}_b^m), \tag{4.7}$$

tel que $\widetilde{p}_b^m$ est le relèvement de p_b^m défini dans la Remarque 3.1.1.

On est en position d'énoncer le théorème d'existence de la solution discrète.

Théorème 4.1.3. *Pour toutes données $\boldsymbol{f}, p_b$ continues respectivement sur $\overline{\Omega} \times [0,T], \overline{\partial\Omega} \times [0,T]$, le problème* (4.1)-(4.2)-(4.3) *admet une solution unique.*

Preuve. On combine les résultats des Propositions 4.1.1 et 4.1.2, on déduit d'après le Théorème 1.4.3 l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.2)-(4.3).

Par les mêmes arguments que pour les Propositions 3.3.1 et 3.3.3, on déduit la propriété de stabilité suivante.

Théorème 4.1.4. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la solution du problème vérifie*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\nabla p_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c\Big(\|\mathcal{I}_N \boldsymbol{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d} + (\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\mathcal{I}_N \boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\imath_N^{\partial\Omega} p_b^k\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)})^{\frac{1}{2}}\Big).
\end{aligned}$$

4.2 Estimation d'erreur a priori

Proposition 4.2.1. *Pour tout entier $N \geq 2$, on suppose la partie $\boldsymbol{u}^m$ de $(\boldsymbol{u}^m, p^m)$ solution du problème* $(3.1)-(3.2)-(3.3)$, *dans $H^s(\Omega)^d$, pour tout $s \geq 1$ et les données $\boldsymbol{f}^m$ dans $H^\sigma(\Omega)^d$ et p_b dans $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ pour tout $\sigma > \frac{d-2}{2}$. Alors, la partie $\boldsymbol{u}_N^m$ de $(\boldsymbol{u}_N^m, p_N^m)$ solution du problème discret* $(4.1)-(4.2)-(4.3)$ *vérifie la majoration d'erreur suivante,*

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \leq cN^{-s}\Big(\|\boldsymbol{u}^m\|_{H^s(\Omega)^d} + \Big(\sum_{j=0}^{m} \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big) \\
+ cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)\frac{1}{2} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^{m} \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Preuve. Pour tout $1 \leq m \leq M$, pour tout polynôme $\boldsymbol{v}_N^m$ dans $\mathbf{V}_N(\Omega)$, on a

$$\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N + \alpha\big(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N + b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, p_N^m) = \big(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N,$$

alors

$$\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N - \left(\frac{\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N + \alpha\big(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N + b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, p_N^m)$$
$$= \big(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - \alpha\big(\boldsymbol{v}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - \left(\frac{\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N.$$

On retranche des deux côtés $b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)$, on voit que $b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, p_N^m - \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m) = 0$, ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) - (\boldsymbol{u}_N^{m-1} - \boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N + \alpha\big(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N$$
$$= \big(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - \left(\frac{\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N - \alpha\big(\boldsymbol{v}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m).$$

On utilise l'identité

$$(a, a-b) = \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2),$$

on obtient,

$$\frac{1}{2\tau_m}\big(\|\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\|_N^2 - \|\boldsymbol{u}_N^{m-1} - \boldsymbol{v}_N^{m-1}\|_N^2 + \|(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) - (\boldsymbol{u}_N^{m-1} - \boldsymbol{v}_N^{m-1})\|_N^2\big) + \alpha\|\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\|_N^2$$
$$= \big(\boldsymbol{f}^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - \left(\frac{\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\right)_N - \alpha\big(\boldsymbol{v}_N^m, \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m\big)_N - b_N(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m). \quad (4.9)$$

Maintenant en prenant $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m$ dans (3.5), on aura

$$\int_\Omega (\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} + \alpha\tau_m \int_\Omega \boldsymbol{u}^m \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x}$$
$$= \tau_m \int_\Omega \boldsymbol{f}^m \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} - \tau_m b(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \widetilde{p}_b^m),$$

ou encore

$$\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega (\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v}_N^m + \boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1} + \boldsymbol{v}_N^{m-1} - \boldsymbol{u}^{m-1}).(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} + \alpha \int_\Omega (\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v}_N^m + \boldsymbol{v}_N^m).(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{f}^m \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} - b(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \widetilde{p}_b^m),$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v}_N^m) - (\boldsymbol{u}^{m-1} - \boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m} \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} + \alpha \int_\Omega (\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{v}_N^m) \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{f}^m \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \frac{\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m} \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} - \alpha \int_\Omega \boldsymbol{v}_N^m \cdot (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m) d\boldsymbol{x} - b(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{v}_N^m, \widetilde{p}_b^m).$$

Insérons cette dernière équation dans (4.9), on obtient

$$\frac{1}{2\tau_m}\big(\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2-\|\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1}\|_N^2+\|(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)-(\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1})\|_N^2\big)+\alpha\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2$$
$$=\int_\Omega\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m)-(\boldsymbol{u}^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\alpha\int_\Omega(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m)\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}$$
$$+\alpha\big(\int_\Omega\boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N\big)+b(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)$$
$$+\int_\Omega\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N$$
$$-\int_\Omega\boldsymbol{f}^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\big)_N.$$

On majore les quatre termes suivants

$$\begin{aligned}E_1&=\int_\Omega\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N,\\E_2&=\int_\Omega\boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N,\\E_3&=b(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m),\\E_4&=\int_\Omega\boldsymbol{f}^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\big)_N.\end{aligned}$$

1. On commence par majorer E_1. On déduit de la propriété d'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto

$$\int_\Omega\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N$$
$$=\int_\Omega\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big)\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}$$
$$-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}),\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\int_\Omega\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N$$
$$\le\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\Big(\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}),\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big)_N^{\frac12}(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N^{\frac12}.$$

Combinons ceci avec (1.10), on obtient

$$\int_\Omega\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N\le c\Big(\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_N(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}\Big)\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}$$

Par une inégalité triangulaire on déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega &\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m}\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1}}{\tau_m},\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\Big)_N\\ &\le c\Big(\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}\Big\|_{L^2(\Omega)^d}+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_N(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}\\ &\qquad+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}\Big)\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}$$

2. Évaluons E_2. D'après l'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto on a

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N=\int_\Omega(\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m)\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega \boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N &\le \|\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\\ &+\big(\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m,\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m\big)_N^{\frac12}(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N^{\frac12}.\end{aligned}$$

Là encore grâce à la propriété (1.10), on obtient

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N\le c\|\boldsymbol{v}_N^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Et l'inégalité triangulaire entraîne,

$$\int_\Omega \boldsymbol{v}_N^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}_N^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)_N\le c(\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d})\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}$$

3. Dans cette étape, on majore E_3. On rappelle que

$$b(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)=(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\nabla\widetilde{p}_b^m)-(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\nabla\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)_N$$

On a de la formule de quadrature (1.9),

$$b(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)=(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\nabla\widetilde{p}_b^m-\nabla\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)-(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\nabla\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m-\nabla\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)_N.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec la propriété (1.10)

$$\begin{aligned}b(&\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)\\ &\le c\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}(\|\nabla(\widetilde{p}_b^m-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\nabla(\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m-\widetilde{p}_b^m)\|_{L^2(\Omega)^d}).\end{aligned}\tag{4.10}$$

4. Il reste à majorer que E_4. toujours d'après la formule (1.9) et la relation (1.10), on voit que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \boldsymbol{f}^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\big)_N\\ &=\int_\Omega(\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m)\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\big)_N,\\ &\le c\big(\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\big)\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}.\end{aligned}\tag{4.11}$$

On obtient donc la majoration,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_m}\big(\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2-\|\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1}\|_N^2+\|(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)-(\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1})\|_N^2\big)+\alpha\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2\\
&\le c\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\Big(\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}\Big\|_{L^2(\Omega)^d}+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_N(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\|\nabla(\widetilde{p}_b^m-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\nabla(\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m-\widetilde{p}_b^m)\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}\Big).
\end{aligned}$$

On utilise la relation de Young $ab\le\frac{\epsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\epsilon}b^2$, en prenant $\epsilon=\frac12$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_m}\big(\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2-\|\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1}\|_N^2+\|(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)-(\boldsymbol{u}_N^{m-1}-\boldsymbol{v}_N^{m-1})\|_N^2\big)+\alpha_0\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2\\
&\le c\Big(\Big\|\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}-\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_N(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1})}{\tau_m}-\mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\|\nabla(\widetilde{p}_b^m-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\nabla(\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m-\widetilde{p}_b^m)\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^m-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big).
\end{aligned}$$

Puis on multiplie par τ_m et en sommant de 1 à m, on en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_N^2-\|\boldsymbol{u}_N^0-\boldsymbol{v}_N^0\|_N^2+\sum_{k=1}^m\|(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k)-(\boldsymbol{u}_N^{k-1}-\boldsymbol{v}_N^{k-1})\|_N^2+\alpha\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}_N^k-\boldsymbol{v}_N^k\|_N^2\\
&\le c\Big(\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k)-(\boldsymbol{u}^{k-1}-\boldsymbol{v}_N^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})-\mathcal{I}_{N-1}(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)})\\
&\qquad+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})\Big).
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique, d'une part

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}\le c\inf_{\boldsymbol{v}_N^k\in\mathbb{X}_N}&\Big(\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}_N^0-\boldsymbol{v}_N^0\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k)-(\boldsymbol{u}^{k-1}-\boldsymbol{v}_N^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)\\
&+c'\Big(\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_{N-1}(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\\
&+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}\\
&+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})\Big),
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\alpha\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\le c\inf_{\boldsymbol{v}_N^k\in\mathbb{X}_N}\Big(\|\boldsymbol{u}_N^0-\boldsymbol{v}_N^0\|^2_N$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k)-(\boldsymbol{u}^{k-1}-\boldsymbol{v}_N^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{v}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)$$
$$+c'\Big(\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_{N-1}(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})\Big),$$

Comme $\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^m$ est dans $\mathbb{X}_N$ et on a

$$\inf_{\boldsymbol{v}_N^m\in\mathbb{X}_N}\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{v}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\le\|\boldsymbol{u}^m-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d},$$

on déduit du Théorème 1.6.4 que

$$\|\boldsymbol{u}^m-\boldsymbol{u}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}\le c\Big(\|\boldsymbol{u}^m-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\|\boldsymbol{u}^0-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^0\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^k)-(\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)$$
$$+c'\Big(\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_{N-1}(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)})+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})\Big),$$

et

$$\alpha\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\le c\Big(\|\boldsymbol{u}_N^0-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^0\|^2_N$$
$$+\sum_{k=1}^m\left\|\frac{(\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^k)-(\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)$$
$$+c'\Big(\sum_{k=1}^m\tau_k\left\|\frac{\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1}-\mathcal{I}_{N-1}(\boldsymbol{u}^k-\boldsymbol{u}^{k-1})}{\tau_k}\right\|^2_{L^2(\Omega)^d}+\sum_{k=1}^m\tau_k\|\boldsymbol{u}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)}+\|\widetilde{p}_b^k-\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^k\|^2_{H^1(\Omega)})+\sum_{k=1}^m\tau_k(\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^2}+\|\boldsymbol{f}^k-\mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|^2_{L^2(\Omega)^d})\Big).$$

Grâce à l'estimation (1.16), on obtient

$$\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d} \le cN^{-s}\Big(\|\boldsymbol{u}^m\|_{H^s(\Omega)^d} + (\|\boldsymbol{u}^0\|^2_{H^s(\Omega)^d} + (\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d})^{\frac{1}{2}}\Big)$$
$$+ cN^{-s}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le cN^{-s}\Big(\|\boldsymbol{u}^m\|_{H^s(\Omega)^d} + (\sum_{j=0}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d})^{\frac{1}{2}}\Big)$$
$$+ cN^{-s}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.12}$$

et

$$\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_N^k\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} \le cN^{-s}\Big(\sum_{j=0}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-s}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + cN^{-\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Ceci termine la démonstration.

Proposition 4.2.2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la solution du problème* (4.3), $\big(\boldsymbol{u}_N^m, p_N^m\big)$ *vérifie la majoration d'erreur suivante, pour tout* $1 \le m \le M$

$$\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}) - (\boldsymbol{u}_N^k - \boldsymbol{u}_N^{k-1})}{\tau_k}\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le cN^{-s}\Big\{\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{j=0}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$
$$+ cN^{-\sigma}\Big\{\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}. \tag{4.14}$$

Preuve. Pour tout m, $0 \le m \le M$, pour tout $\boldsymbol{v}_N^m$ dans $\mathbf{V}_N(\Omega)$ on note $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}$, $\delta\boldsymbol{u}_N = \boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}$ et $\delta\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1}$ et en prend $\boldsymbol{v}_N = \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N$ dans (4.7), on trouve

$$\Big(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\Big)_N + \alpha(\boldsymbol{u}_N^m, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N)_N = \big(\boldsymbol{f}^m, (\delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\big)_N - b_N(\delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N, \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m),$$

alors

$$\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\right)_N - \left(\frac{(\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\right)_N + \alpha(\boldsymbol{u}_N^m, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N)_N$$
$$= \big(\boldsymbol{f}^m, (\delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\big)_N - b_N(\delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N, \mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m) - \left(\frac{(\boldsymbol{v}_N^m - \boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m}, \delta\boldsymbol{u}_N - \delta\boldsymbol{v}_N\right)_N,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m},\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\Big)_N+\alpha(\boldsymbol{u}_N^m,\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)_N\\
&\qquad=\big(\boldsymbol{f}^m,(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\big)_N-b_N(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)-\Big(\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m},\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\Big)_N.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_m}\|\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\|_N^2+\alpha(\boldsymbol{u}_N^m,\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)_N\\
&\qquad=\big(\boldsymbol{f}^m,(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\big)_N-b_N(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m)-\Big(\frac{(\boldsymbol{v}_N^m-\boldsymbol{v}_N^{m-1})}{\tau_m},\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\Big)_N. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Maintenant on prend $\boldsymbol{v}=\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N$ dans la première ligne de (3.5), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}+\alpha\tau_m\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}\\
&\qquad=\int_\Omega \boldsymbol{u}^{m-1}.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}+\tau_m\int_\Omega \boldsymbol{f}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-\tau_m b(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\widetilde{p}_b^m),
\end{aligned}$$

On peut écrire,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega(\delta \boldsymbol{u}-\delta \boldsymbol{v}_N).(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}+\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega\delta \boldsymbol{v}_N.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}\\
&\qquad+\alpha\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}=\int_\Omega \boldsymbol{f}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-b(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\widetilde{p}_b^m).
\end{aligned}$$

Insérons cette dernière équation dans (4.15), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau_m}\|\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\|_N^2\\
&\quad=\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega(\delta \boldsymbol{u}-\delta \boldsymbol{v}_N).(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}+\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega\delta \boldsymbol{v}_N.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m},\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\Big)_N\\
&\quad+\alpha\big(\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{u}_N^m,\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)_N\big)-\int_\Omega \boldsymbol{f}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m,(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\big)_N\\
&\quad+b(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Il en résulte quatre termes à majorer :

$$\begin{aligned}
E_1&=\alpha\big(\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{u}_N^m,\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)_N\big),\\
E_2&=\frac{1}{\tau_m}\int_\Omega\delta \boldsymbol{v}_N.(\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N)d\boldsymbol{x}-\Big(\frac{\delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m},\delta \boldsymbol{u}_N-\delta \boldsymbol{v}_N\Big)_N,\\
E_3&=b(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\widetilde{p}_b^m)-b_N(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m,\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m),\\
E_4&=\int_\Omega \boldsymbol{f}^m\cdot(\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m)d\boldsymbol{x}+\big(\boldsymbol{f}^m,\boldsymbol{u}_N^m-\boldsymbol{v}_N^m\big)_N.
\end{aligned}$$

On a majoré dans la preuve précédente E_3 et E_4, (4.11) et (4.10). Il reste à estimer E_1 et E_2. On effectue les mêmes techniques utilisées dans la preuve précédente.

1. Évaluons E_1. Grâce à l'exactitude de la formule de quadrature on a

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^m \cdot \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m} d\mathbf{x} - \Big(\boldsymbol{u}_N^m, \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m}\Big)_N$$
$$= \int_\Omega (\boldsymbol{u}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^m) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m} d\boldsymbol{x} - \Big(\mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m, \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m}\Big)_N.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1.10) nous donnent

$$\int_\Omega \boldsymbol{u}^m \cdot \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m} d\boldsymbol{x} - \Big(\boldsymbol{u}_N^m, \frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m}\Big)_N$$
$$\leq c\big(\|\boldsymbol{u}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}\big) \Big\|\frac{\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N}{\tau_m}\Big\|_{L^2(\Omega)^d}. \tag{4.17}$$

2. Majorons E_2. Là encore grâce à la formule de quadrature (1.9), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété (1.10), on obtient

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{v}_N \cdot (\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N) dx - (\delta \boldsymbol{v}_N, \delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N)_N$$
$$= \int_\Omega (\delta \boldsymbol{v}_N - \mathcal{I}_{N-1}\delta \boldsymbol{u}) \cdot (\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N) d\mathbf{x} - (\delta \boldsymbol{v}_N - \mathcal{I}_{N-1}\delta \boldsymbol{u}, \delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N)_N$$
$$\leq c\|\delta \boldsymbol{v}_N - \mathcal{I}_{N-1}\delta \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d}\|\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Par une inégalité triangulaire, on en déduit

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{v}_N \cdot (\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N) d\mathbf{x} - (\delta \boldsymbol{v}_N, \delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N)_N$$
$$\leq c\big(\|\delta \boldsymbol{u} - \mathcal{I}_{N-1}\delta \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}\big)\|\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On insère ces estimations dans (4.16) et on utilise la formule de Young, on voit que

$$\frac{1}{\tau_m}\|\delta \boldsymbol{u}_N - \delta \boldsymbol{v}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq c\Big(\frac{1}{\tau_m}\|\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{v}_N\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_m\|\boldsymbol{u}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \tau_m\|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{\tau_m}\|\delta \boldsymbol{u} - \mathcal{I}_{N-1}\delta \boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$+ \tau_m\big(\|\nabla(\widetilde{p}_b^m - \mathcal{I}_{N-1}\widetilde{p}_b^m)\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla(\mathcal{I}_N\widetilde{p}_b^m - \widetilde{p}_b^m)\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}^m - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\boldsymbol{f}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m\|^2_{L^2(\Omega)^d}\big)\Big).$$

On somme sur les m, et grâce à (1.16) et (4.13) on déduit que

$$\sum_{k=1}^m \tau_k\Big\|\frac{\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{u}_N}{\tau_k}\Big\|^2_{L^2(\Omega)^d}$$
$$\leq cN^{-2s}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k\Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d} + \sum_{j=0}^m \tau_k\|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)$$
$$+ cN^{-2\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big) + cN^{-2\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k\|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big). \tag{4.18}$$

Proposition 4.2.3. *Pour tout entier $N \geq 2$, on suppose la solution $(\boldsymbol{u}^m, p^m)$ du problème (3.1) – (3.2) – (3.3), dans $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$, pour tout $s \geq 1$ et les données $\boldsymbol{f}^m$ dans $H^\sigma(\Omega)^d$ et p_b dans $H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ pour tout $\sigma > \frac{d-2}{2}$. Alors, la solution $(\boldsymbol{u}_N^m, p_N^m)$ du problème discret (4.1) – (4.2) – (4.3) vérifie la majoration d'erreur*

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p^k - p_N^k\|^2_{H^1(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq cN^{-s}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^m \tau_k \|\boldsymbol{u}^k\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|^2_{H^s(\Omega)^d}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p^k\|^2_{H^{s+1}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\} \\
&+ cN^{-\sigma}\Big\{\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|\boldsymbol{f}^k\|^2_{H^\sigma(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^m \tau_k \|p_b^k\|^2_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Preuve. Pour évaluer l'erreur sur la pression, on prend $\boldsymbol{v}_N = \nabla(p_N^m - q_N^m)$ dans (4.3), on trouve

$$\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\right)_N + \alpha(\boldsymbol{u}_N^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N + b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), p_N^m) = (\boldsymbol{f}^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N,$$

On ajoute et on soustrait le terme $b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_N^2 = &-\left(\frac{(\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\right)_N \\
&- \alpha(\boldsymbol{u}_N^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) + (\boldsymbol{f}^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N.
\end{aligned}$$

D'autre part, si l'on prend $\boldsymbol{v} = \nabla(p_N^m - q_N^m)$ dans la première ligne de (3.3), on voit que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \boldsymbol{u}^m.((\nabla(p_N^m - q_N^m)))d\boldsymbol{x} + \alpha\tau_m \int_\Omega \boldsymbol{u}^m.(\nabla(p_N^m - q_N^m))d\boldsymbol{x} + \tau_m b(\nabla(p_N^m - q_N^m), p^m - q_N^m) \\
&\quad = \int_\Omega \boldsymbol{u}^{m-1}.(\nabla(p_N^m - q_N^m))d\boldsymbol{x} + \tau_m \int_\Omega \boldsymbol{f}^m.(\nabla(p_N^m - q_N^m))d\boldsymbol{x} - b(\nabla(p_N^m - q_N^m, q_N^m).
\end{aligned}$$

En combinant les deux dernières expressions, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_N^2 = &\int_\Omega \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m)d\boldsymbol{x} - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N \\
&+ b(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) \\
&+ \alpha\Big(\int_\Omega \boldsymbol{u}^m \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m)d\boldsymbol{x} - \big(\boldsymbol{u}_N^m, \nabla(p_N^m - q_N^m)\big)_N\Big) \\
&- \int_\Omega \boldsymbol{f}^n.(\nabla(p_N^m - q_N^m))d\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{f}^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N \\
&+ b(\nabla(p_N^m - q_N^m), p^m - q_N^m). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

On a à estimer les quantités suivantes

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_\Omega \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N, \\
E_2 &= b(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m), \\
E_3 &= \int_\Omega \boldsymbol{u}^m \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} - \big(\boldsymbol{u}_N^m, \nabla(p_N^m - q_N^m)\big)_N \\
E_4 &= -\int_\Omega \boldsymbol{f}^n.(\nabla(p_N^m - q_N^m)) d\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{f}^m, \nabla(p_N^m - q_N^m))_N.
\end{aligned}$$

Les majorations de E_3 et E_4 sont effectuées dans (4.17) et (4.11). Il suffit donc de majorer E_1 et E_2.

1. Évaluons E_1. En vertu de l'exactitude de la propriété de la formule de Gauss-Lobatto on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N \\
&\qquad = \int_\Omega \Big(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big) \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} \\
&\qquad\quad - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}).\nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N.
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété (1.10), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N \\
&\quad \leq \Big\| \frac{(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) - (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m} \Big\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\qquad + 3^d \Big\| \frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}) \Big\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

On déduit par une inégalité triangulaire que,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} \cdot \nabla(p_N^m - q_N^m) d\boldsymbol{x} - \Big(\frac{\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1}}{\tau_m}, \nabla(p_N^m - q_N^m)\Big)_N \\
&\quad \leq c\Big(\Big\| \frac{(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) - (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m} \Big\|_{L^2(\Omega)^d} \\
&\qquad + \Big\| \frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m}) \Big\|_{L^2(\Omega)^d} \Big) \|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

2. Similairement, pour estimer E_2 on utilise la formule de Gauss-Lobatto puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec (1.10) et une inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned}
&b(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m) = \\
&\qquad b(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m - \mathcal{I}_{N-1} p^m) - b_N(\nabla(p_N^m - q_N^m), q_N^m - \mathcal{I}_{N-1} p^m) \\
&\qquad \leq (\|\nabla(q_N^m - p^m)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla(p^m - \mathcal{I}_{N-1} p^m)\|_{L^2(\Omega)^d}) \|\nabla(p^m - q_N^m)\|_{L^2(\Omega)^d}.
\end{aligned}$$

Insérant les majorations de E_1, E_2, E_3, E_4 dans (4.20) et on utilise la formule de Young, on obtient la majoration

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(p_N^m - q_N^m)\|_N^2 \\
&\le c\Big(\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}) - (\boldsymbol{u}_N^m - \boldsymbol{u}_N^{m-1})}{\tau_m}\Big\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \Big\|\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}^{m-1}}{\tau_m})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&+ \|\boldsymbol{u}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\boldsymbol{u}^m - \boldsymbol{u}_N^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla(q_N^m - p^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla(p^m - \mathcal{I}_{N-1}p^m)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&+ \|\boldsymbol{f}^m - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\boldsymbol{f}^m - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2\Big)\Big).
\end{aligned}$$

On multiplie par τ_m et en sommant sur m et

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m \tau_k\|\nabla(p_N^k - q_N^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&\le c\sum_k^m\Big(\tau_k\Big\|\frac{(\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}) - (\boldsymbol{u}_N^k - \boldsymbol{u}_N^{k-1})}{\tau_m}\Big\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_k\Big\|\frac{\boldsymbol{u}_N^k - \boldsymbol{u}_N^{k-1}}{\tau_k} - \mathcal{I}_{N-1}(\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k})\Big\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&+ \tau_k\|\boldsymbol{u}^k - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{u}^k\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_k\|\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}_N^k\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_k\|\nabla(p^k - q_N^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_k\|\nabla(p^k - \mathcal{I}_{N-1}p^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \\
&+ \tau_k\|\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_N\boldsymbol{f}^k\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \tau_k\|\boldsymbol{f}^k - \mathcal{I}_{N-1}\boldsymbol{f}^k\|_{L^2(\Omega)^d}^2\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Par une inégalité triangulaire on voit que

$$\sum_{k=1}^m \tau_k\|\nabla(p^k - p_N^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \le c\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k\|\nabla(p^k - q_N^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{k=1}^m \tau_k\|\nabla(p_N^k - q_N^k)\|_{L^2(\Omega)^d}^2\Big).$$

On choisit q_N^m l'image de p^m par l'opérateur de projection orthogonale de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathbb{Y}_N$. En utilisant les Théorèmes 1.6.2, 1.6.4 et les estimations (4.13) et (4.18) on déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \tau_k\|p^k - p_N^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \le cN^{-2s}\Big(\sum_{j=0}^m \tau_k\|\boldsymbol{u}^k\|_{H^s(\Omega)^d}^2 + \sum_{k=1}^m \tau_k\Big\|\frac{\boldsymbol{u}^k - \boldsymbol{u}^{k-1}}{\tau_k}\Big\|_{H^s(\Omega)^d}^2 + \sum_{k=1}^m \tau_k\|p^k\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2\Big) \\
+ cN^{-2\sigma}\Big(\sum_{k=1}^m \tau_k\|\boldsymbol{f}^k\|_{H^\sigma(\Omega)}^2 + \sum_{k=1}^m \tau_k\|p_b^k\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2\Big).
\end{aligned}$$

Ceci donne l'estimation désirée.

CHAPITRE 5

Mise en œuvre

On se propose dans ce chapitre d'écrire le système correspondant au problème (4.1)-(4.2)-(4.3). Ceci nous permet de mieux visualiser le type de système matriciel obtenu par notre méthode de discrétisation et donc de mieux appréhender sa résolution. On suppose que Ω est le carré $]-1,1[^2$.

5.1 Algorithme de résolution du problème de Darcy

On suppose connues les valeurs de la fonction $\boldsymbol{f}$ aux points $\Sigma_N \cap \Omega$, les valeurs de la fonction p_b aux points de $\Sigma_N \cap \partial\Omega$. Nous faisons appel aux polynômes de Lagrange ℓ_j, $0 \leq j \leq N$, associés aux points ξ_j, c'est -à-dire les polynômes de $\mathbb{P}_N(-1,1)$ qui valent 1 en ξ_j et s'annulent en ξ_m,$0 \leq m \leq N$, $m \neq j$. Les polynômes ℓ_j,$0 \leq j \leq N$, forment une base de $P_N(-1,1)$. Alors une base de $P_N(\Omega)$ est donnée par

$$\{\ell_i(x)\ell_j(y) \quad ,0 \leq i,j \leq N\}.$$

La frontière de Ω est donnée par

$$\partial\Omega = \{(-1,y); -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,-1); -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(1,-y); -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x,1); -1 \leq x \leq 1\}.$$

Le vecteur vitesse s'écrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{u}_N^m = (u_N^{m^x}, u_N^{m^y}),$$

où

$$u_N^{m^x}(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} \ell_i(x)\ell_j(y) \quad avec \quad u_{ij}^{m^x} = u_N^{m^x}(\xi_i,\xi_j), \tag{5.1}$$

$$u_N^{m^y}(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} \ell_i(x)\ell_j(y) \quad avec \quad u_{ij}^{m^y} = u_N^{m^y}(\xi_i,\xi_j), \tag{5.2}$$

et la pression p_N^m s'écrit :

$$p_N^m(x,y) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^m \ell_i(x)\ell_j(y) \quad avec \quad p_{ij}^m = p_N^m(\xi_i,\xi_j), \tag{5.3}$$

alors

$$\begin{aligned} p_N^m(x,y) = & \sum_{j=1}^{N-1} p_{0j}^m \ell_0(x)\ell_j(y) + \sum_{i=0}^{N} p_{i0}^m \ell_i(x)\ell_0(y) \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} p_{Nj}^m \ell_N(x)\ell_j(y) + \sum_{i=0}^{N} p_{iN}^m \ell_i(x)\ell_N(y) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^{m^y} \ell_i(x)\ell_j(y). \end{aligned}$$

On décompose $\boldsymbol{v}_N$ comme suit :

$$\boldsymbol{v}_N = (v_N^x, v_N^y),$$

on obtient alors

$$(\boldsymbol{u}_N^m, \boldsymbol{v}_N)_N = (u_N^{m^x}, v_N^x)_N + (u_N^{m^y}, v_N^y)_N.$$

En utilisant ces décompositions, le problème (4.1)-(4.2)-(4.3) devient :

$$\begin{cases} (1+\alpha\tau_m)(u_N^{m^x}, v_N^x)_N + \tau_m b_N(v_N^x, p_N^m) = (u_N^{m-1^x}, v_N^x)_N + \tau_m (f^{m^x}, v_N^x)_N, \\ (1+\alpha\tau_m)(u_N^{m^y}, v_N^y)_N + \tau_m b_N(v_N^y, p_N^m) = (u_N^{m-1^y}, v_N^y)_N + \tau_m (f^{m^y}, v_N^y)_N, \\ b_N(u_N^m, q_N) = 0. \end{cases}$$

On commence par traiter la première équation, d'après (5.1) on trouve

$$(1+\alpha\tau_m)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} (\ell_i \otimes \ell_j, v_N^x)_N + \tau_m \Big(v_N^x, \frac{\partial p_N^m}{\partial x}\Big)_N = (u_N^{m-1^x}, v_N^x)_N + \tau_m (f^{m^x}, v_N^x)_N,$$

alors d'après (5.3), on obtient

$$(1+\alpha\tau_m)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} (\ell_i \otimes \ell_j, v_N^x)_N + \tau_m \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^m (v_N^x, \ell_i' \otimes \ell_j)_N = (u_N^{m-1^x}, v_N^x)_N + \tau_m (f^{m^x}, v_N^x)_N.$$

Concernant la deuxième équation, on a d'après (5.2)

$$(1+\alpha\tau_m)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} (\ell_i \otimes \ell_j, v_N^y)_N + \tau_m \Big(v_N^y, \frac{\partial p_N^m}{\partial y}\Big)_N = (u_N^{m-1^y}, v_N^y)_N + \tau_m (f^{m^y}, v_N^y)_N,$$

alors d'après (5.3), on obtient

$$(1+\alpha\tau_m)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} (\ell_i \otimes \ell_j, v_N^y)_N + \tau_m \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^m (v_N^y, \ell_i \otimes \ell_j')_N = (u_N^{m-1^y}, v_N^y)_N + \tau_m (f^{m^x}, v_N^y)_N.$$

Finalement, la troisième équation s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} \Big(\ell_i \otimes \ell_j, \frac{\partial q_N^m}{\partial x}\Big)_N + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} \Big(\ell_i \otimes \ell_j, \frac{\partial q_N^m}{\partial y}\Big)_N = 0.$$

En choisissant les fonctions tests v_N^x, v_N^y égal à la fonction $\ell_r \otimes \ell_s$, $0 \leq r, s \leq N$ et q_N égal à la fonction $\ell_r \otimes \ell_s$, $1 \leq r, s \leq N-1$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} &(1+\alpha\tau_m) \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} (\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \tau_m \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_j)_N \\ &\qquad\qquad = (u_N^{m-1^x}, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \tau_m (f^{m^x}, \ell_r \otimes \ell_s)_N, \\ &(1+\alpha\tau_m) \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} (\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \tau_m \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} p_{ij}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i \otimes \ell_j')_N \\ &\qquad\qquad = (u_N^{m-1^y}, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \tau_m (f^{m^x}, \ell_r \otimes \ell_s)_N, \\ &\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} (\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r' \otimes \ell_s)_N + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y} (\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s')_N = 0. \end{aligned} \right. \tag{5.4}$$

On a la condition aux limites

$$p^N = p_b^m \quad sur \quad \partial\Omega,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} p_N^m(x,y) = &\sum_{i=0}^{N} p_{bi0}^m \ell_i(x)\ell_0(y) + \sum_{j=1}^{N-1} p_{bNj}^m \ell_N(x)\ell_j(y) \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1} p_{b0j}^m \ell_0(x)\ell_j(y) + \sum_{i=0}^{N} p_{biN}^m \ell_i(x)\ell_N(y) + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m \ell_i(x)\ell_j(y). \end{aligned}$$

La première ligne de (5.4) devient alors

$$\begin{aligned} &(1+\alpha\tau_m) \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^x} (\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_j)_N \\ &\quad = u_N^{m-1^x}(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s + \tau_m f^{m^x}(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{i=0}^{N} p_{bi0}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_0)_N \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N-1} p_{bNj}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_N' \otimes \ell_j)_N - \sum_{j=1}^{N-1} p_{b0j}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_0' \otimes \ell_j)_N - \sum_{i=0}^{N} p_{biN}^m (\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_N)_N. \end{aligned}$$

5.2 Description du système linéaire

Nous allons au total obtenir l'équation matricielle suivante :

$$A_1^m U^{m^x} + B_1^m P^m = F_1^m.$$

La matrice A_1^m a pour coefficients les termes

$$a_1^m(i,j,r,s) = (1+\alpha\tau_m)(\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N, 0 \leq i,j,r,s \leq N,$$

et la matrice B_1^m a pour coefficients les termes

$$b_1^m(i,j,r,s) = \tau_m(\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_j)_N, \quad 0 \leq, r, s \leq N, \quad 1 \leq i,j \leq N-1.$$

Le vecteur F_1^m a pour composante

$$u_N^{m-1^x}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s + \tau_m f^{m^x}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{i=0}^{N} p_{bi0}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i'\otimes\ell_0)_N$$
$$- \sum_{j=1}^{N-1} p_{bNj}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_N'\otimes\ell_j)_N - \sum_{j=1}^{N-1} p_{b0j}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_0'\otimes\ell_j)_N - \sum_{i=0}^{N} p_{biN}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i'\otimes\ell_N)_N.$$

Concernant la deuxième équation de (5.4) :

$$(1+\alpha\tau_m)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}^{m^y}(\ell_i\otimes\ell_j,\ell_r\otimes\ell_s)_N \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i\otimes\ell_j')_N$$
$$= u_N^{m-1^y}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s + \tau_m f^{m^y}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{i=0}^{N} p_{bi0}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i\otimes\ell_0')_N - \sum_{j=1}^{N-1} p_{bNj}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_N\otimes\ell_j')_N$$
$$- \sum_{j=1}^{N-1} p_{b0j}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_0\otimes\ell_j')_N - \sum_{i=0}^{N} p_{biN}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i\otimes\ell_N')_N.$$

Ceci mène à l'équation matricielle suivante

$$A_2^m U^{m^y} + B_2^m P^m = F_2^m.$$

La matrice A_2^m a pour coefficients les termes

$$a_2^m(i,j,r,s) = (1+\alpha\tau_m)(\ell_i\otimes\ell_j,\ell_r\otimes\ell_s)_N, 0\le i,j,r,s\le N,$$

et la matrice B_2^m a pour coefficients les termes

$$b_2^m(i,j,r,s) = \tau_m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i\otimes\ell_j')_N, 0\le r,s\le N, 1\le i,j\le N-1.$$

Le vecteur F_2^m a pour composante

$$u_N^{m-1^y}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s + \tau_m f^{m^y}(\xi_r,\xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{i=0}^{N} p_{bi0}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i'\otimes\ell_0)_N$$
$$- \sum_{j=1}^{N-1} p_{bNj}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_N'\otimes\ell_j)_N - \sum_{j=1}^{N-1} p_{b0j}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_0'\otimes\ell_j)_N - \sum_{i=0}^{N} p_{biN}^m(\ell_r\otimes\ell_s,\ell_i\otimes\ell_N')_N.$$

Finalement, la forme matricielle de dernière équation de (5.4) s'écrit

$$C_1^m U^{m^x} + C_2^m U^{m^y} = 0,$$

les matrices C_1^m et C_2^m ont pour coefficients les termes successivement

$$C_1^m(i,j,r,s) = (\ell_i\otimes\ell_j,\ell_r'\otimes\ell_s)_N, 0\le i,j\le N,\ 1\le r,s\le N-1,$$

et

$$C_2^m(i,j,r,s) = (\ell_i\otimes\ell_j,\ell_r\otimes\ell_s')_N, 0\le i,j\le N, 1\le r,s\le N-1.$$

On remarque que

$$C_1^m = B_1^{mT} \quad \text{et} \quad C_2^m = B_2^{mT}.$$

En recombinant tous les systèmes linéaires obtenues, on aura :

$$\begin{cases} A_1^m U^{m^x} + B_2^m P^m = F_1^m, \\ A_2^m U^{m^y} + B_2^m P^m = F_2^m, \\ B_1^{mT} U^{m^x} + B_2^{mT} U^{m^y} = 0. \end{cases}$$

Donc le système linéaire à résoudre s'écrit, comme suit :

$$\begin{cases} AU^m + BP^m = F, \\ B^T U^m = 0, \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} A_1^m & 0 \\ 0 & A_2^m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1^m \\ B_2^m \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} B_1^{mT} \\ B_2^{mT} \end{pmatrix}, U^m = \begin{pmatrix} U^{m^x} \\ U^{m^y} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_1^m \\ F_2^m \end{pmatrix}.$$

Détermination de la matrice A_1^m

La matrice A_1^m est diagonale, ses coefficients s'écrivent alors sous la forme

$$\begin{aligned} (1+\alpha\tau_m)(\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)_N &= (1+\alpha\tau_m)\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} \ell_i \otimes \ell_j(\xi_k, \xi_n)\rho_k\rho_n \ell_r \otimes \ell_s(\xi_k, \xi_n)\rho_k\rho_n, \\ &= (1+\alpha\tau_m)\ell_r(\xi_i)\ell_s(\xi_j)\rho_i\rho_j, \\ &= (1+\alpha\tau_m)\delta_{ri}\delta_{sj}\rho_i\rho_j, \end{aligned}$$

où δ_{ri} désigne le symbole de Kronecker.

Détermination de la matrice B_1^m

l'expression de la matrice B_1^m est donnée par

$$\begin{aligned} \tau_m(\ell_r \otimes \ell_s, \ell_i' \otimes \ell_j)_N &= (1+\alpha\tau_m)\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} \ell_r \otimes \ell_s(\xi_k, \xi_n)\rho_k\rho_n(\ell_i' \otimes \ell_j)(\xi_k, \xi_n)\rho_k\rho_n, \\ &= \tau_m(\ell_i' \otimes \ell_j)(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s, \\ &= \tau_m\ell_i'(\xi_r)\delta_{js}\rho_r\rho_s. \end{aligned}$$

5.3 L'algorithme d'Uzawa

Le problème discret (4.3) est équivalent à un système linéaire carré de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^m \\ P^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On notera que la matrice A est carré et symétrique. De plus, elle est diagonale, donc facile à inverser. L'algorithme habituellement utilisé pour résoudre les systèmes de type (5.5), s'appelle l'algorithme d'Uzawa, qui consiste à éliminer la vitesse à partir de la première ligne ce qui donne :

$$U^m = A^{-1}(F - BP^m).$$

On est donc amené à résoudre successivement les deux systèmes découplés

$$B^T A^{-1} B P^m = B^T A^{-1} F, \quad A U^m = (F - B P^m), \tag{5.5}$$

le fait, que dans notre cas, la matrice A soit le plus souvent diagonale rend la résolution de ces systèmes particulièrement facile.

Remarque 5.3.1. *La résolution du premier système dans* (5.5) *peut s'effectuer soit par méthodes directes soit par méthodes itératives. Comme la matrice* $B^T A^{-1} B$ *est symétrique, la méthode du gradient conjuguée semble parfaitement appropriée pour résoudre ce système.*

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des équations de Darcy instationnaires rencontrés en milieu poreux munies de conditions aux limites de Dirichlet portant sur la pression.
Tout d'abord, l'analyse du problème continu a été présenté où le paramètre physique de perméabilité est constant. Nous avons montré que ce problème admet une solution.
Ensuite, la discrétisation de ces équations a été faite à l'aide du schéma d'Euler implicite d'ordre un en temps et des méthodes spectrales en espace. Ces méthodes sont basés sur la méthode de Galerkin avec une intégration numérique dans des espaces de fonctions de type polynomial. Nous avons montré que les problèmes semi discret et discret admettent une solution unique. Nous avons donné des estimations de l'erreur entre la solution semi discrète (en temps) et la solution continue et entre la solution discrète (en espace et en temps) et la solution semi discrète.
Nous avons montré comment ces résultats peuvent être vérifiés numériquement en écrivant les systèmes matriciels équivalents au problème discret. Nous avons explicité les matrices entrant en jeu et nous avons décrit le système linéaire obtenu.

Appendice

1. Formule de Taylor

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n.

Théorème 1.1 (théorème de Taylor avec reste intégral)

Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout h appartient à $\mathbb{R}$ tel que x_0+h appartienne à I on a

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)dt.$$

Le reste intégral admet une autre expression. Plus précisément, on a l'égalité

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)dt = \int_{x_0}^{x_0+th} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

2. Schéma d'Euler implicite

On note t_n les termes d'une subdivision à n pas de l'intervalle $[t_0, t_0+T]$, Le $n^{ième}$ pas est noté $h_n = t_{n+1} - t_n$. Le shéma d'Euler implicite est de la forme

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné}, \\ h_n = t_{n+1} - t_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, h_n, y_n, y_{n+1}). \end{cases}$$

3. Polynôme de Lagrange

Définition 3.1 *Soient n un entier naturel, $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ point distincts de l'intervalle $]a,b[$. Il existe une et une seule famille, notée $(\ell_i)_{0\leq i\leq n}$, de $(n+1)$ polynôme de degré au plus n vérifiant, pour tout $0 \leq i \leq n$,*

$$\ell_i(x_j) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

De plus, pour tout $0 \leq i, j \leq n$, $h_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Proposition 3.1 *La famille $(\ell_i)_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{P}_n(]a,b[)$.*

4. Quelques inégalités

4.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace préhilbertien. Pour tous x et y de E, on ait

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}.$$

4.2 Inégalité de Young

Soit ϵ un nombre réel strictement positif. Pour tous réels a et b positifs on a

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel. *A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations.* Numer. Math., 96(1) :17–42, 2003.

[2] R.A. Adams, J. Fournier. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 2003.

[3] G. Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation*, Ecole Polytechnique, Novembre 2007.

[4] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, C. Bernardi, N. Chorfi. *Spectral discretization of Darcy's equations with pressure dependent porosity.* Appl. Math. Comput., 217(5) :1838–1856, 2010.

[5] C. Bernardi and Y. Maday. *Approximations Spectrales de Problèmes aux Limites Elliptiques*, volume 10 of *Mathématiques & Applications.* Springer-Verlag, Paris, 1992.

[6] C. Bernardi and Y. Maday. *Spectral Methods.* In Handbook of Numerical Analysis, Vol. V, 209 − 485. North-Holland, Amsterdam, 1997.

[7] C. Bernardi, V. Girault, K. Rajagopal. *Discretization of an unsteady flow through porous solid modeled by Darcy's equations.* Math. Models Methods Appl. Sci., 18(12) :2087–2123, 2008.

[8] C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti. *Discrétisations Variationnelles de Problèmes aux Limites Elliptiques*, volume 45 of Mathématiques & Applications. Springer-Verlag, Paris, 2004.

[9] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications.* Collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", Masson, 1983.

[10] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1988.

[11] M. Crouzeix, A. L. Mignot. *Analyse Numérique des Équations Différentielles.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984.

[12] R. Dautray, J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques. Vol. 1.* Masson, Paris, 1987.

[13] D. Funaro. *Polynomial Approximation of Differential Equations*, volume 8 of *Lecture Notes in Physics. New Series m : Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] V. Girault, P.-A. Raviart. *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, volume 749 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[15] V. Girault, P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[16] D. Gottlieb, S. A. Orszag. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1977. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 26.

[17] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[18] P. D. Lax, A. N. Milgram. *Parabolic equations*. Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, no. 33, pages 167–190. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[19] J.-L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications, Vol. 1*. Dunod, Paris, 1968.

[20] S. A. Orszag. *Comparison of pseudospectral and spectral approximation*. Studies in Applied Mathematics, 51(3) :253, 1972.

[21] M. Schatzman. *Analyse Numérique. Cours et Exercices pour la Licence*. InterEditions, Paris, 1991.

[22] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris, 1966.