REPUBLIQUE ALGERIENINE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Seddik Ben Yahia - Jijel

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Mathématiques

N d'ordre :
N de série :

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de : *Master*
Spécialité : *Mathématiques Appliquées*
Option : **EDP** *et* **Applications**

Thème

Introduction aux méthodes itératives

Présenté par :

Benchabane Hayat

Belhour Faiza

Devant le jury :

Président :	*S.Lounis*	*M.C.B Univ. Jijel*
Encadreur :	*I.Kecis*	*M.C.B Univ. Jijel*
Examinateur :	*S.Maarouf*	*M.C.B Univ. Jijel*

2016-2017

Remerciements

$\mathcal{N}$os remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il nous a donné pour terminer ce mémoire.

$\mathcal{N}$ous remercions vivement **Docteur Ilyas Kecis** , enseignant à l'université de Jijel, D'avoir voulu proposer le sujet et assurer la direction de ce mémoire, sa disponibilité, son soutien, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de ce travail nous ont beaucoup aidé. Nous tenons à lui exprimer ici toute notre reconnaissance et tout notre respect.

$\mathcal{N}$ous remercions vivement **Madame Sabrina Lounis** pour avoir accepté de présider le jury et évaluer ce mémoire.

$\mathcal{N}$ous adressons également nos sincères remerciements à **mademoiselle sara maarouf** pour avoir bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail.

$\mathcal{F}$inalement, nous tenons à remercier chaleureusement nos chéres familles pour leur soutien, leur patience, leurs encouragements et tout ce qu'elles ont fait pour nous tout au long de cette période.

$\mathcal{S}$ans oublier de remercier tous les enseignants du département de mathématiques qui de près ou de loin ont contribué à notre formation.

$\mathcal{M}$erci

Dédicace

Je remercie Dieu de m'avoir donnée la santé pour finir ce travail

Je dédie ce modeste travail :

*A ma mère **Rachida**, A la mémoire de mon père **Ahmed** qui a fait de moi ce que je suit aujourd'hui.*

A leur amour et leurs sacrifices.

*A mes frères :**Houssem,Mohammed,Karim** .*

*A mes sœurs **Adila,Safia** et son marié **Noro***

A toutes la famille benchabane sans exception

A mes amis : **Naima ,Nadjma,Faiza,Sara,Meriem,Saida,Houda,Zahra.**

Ainsi que tous les collègues de ma promotion

A tous qui m'ont aidé de prés ou de loin

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à maintenant.

Toxicologie de l'environnement année 2016-2017

Hayat

Dédicace

Je remercie dieu de m'avoir donnée la santé pour finir ce travail

Je dédié ce travail :

Celle pour laquelle je ne rendrais jamais assez ma très **chère mère.**

Celui qui représente pour moi l'exemple de courage de volonté et l'école de la patience mon très **chère père.**

A mon mari : **Imad.**

A mes frères : **Youcef, Abd Ennour.**

A mes sœurs : **Ranya, Imene .**

A mon binôme **Hayat** *qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail et à sa famille.*

Et à toute ma grande famille.

Tout mes amies : **Ines, Djahida, Sihem, Houda, Ilhem, Mofida.**

Tout la promotion : **MI 2016-2017.**
Et à tous qui ne sont chers.

Faiza

Table des matières

Introduction

Les méthodes itératives ont presque 200 ans. La première méthode itérative pour les systèmes des équations linéaires est due à Carl Friedrich Gauss [16]. Sa méthode des moindres carrés a conduit à un grand système des équations où la méthode de l'élimination de Gauss ne peut pas être appliquée. Vingt ans plus tard, Carl Gustav Jacobi [12] a décrit une méthode très similaire à celle de Gauss. En 1874, Philips Lundwig Seidel [13], un étudiant de Jacobi, a écrit également sur une méthode itérative pour résoudre des équations dues à la méthode des moindres carrées.

Un système linéaire de n équations et n inconnus x_i

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

s'écrit sous la forme $Ax = b$. Ces systèmes linéaires interviennent dans un grand nombre de problèmes numériques, par exemple

(a) L'approximation des solutions des EDP, que ce soit par les différences finies ou par les éléments finis. Le problème model se donne par l'équation de la chaleur. Dans ce cas, les systèmes linéaires sont des variantes discrètes de problèmes continus.

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y) \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

(b) les problèmes d'interpolation, lorsque l'on cherche à approcher une fonction connue seulement à un nombre fini de n points par un polynôme P_n. le Calcul de P_n revient à résoudre un système de n equations.

(c) Les problèmes d'optimisation qui utilisent les moindres carrées.

Les algorithmes de résolutions des systèmes linéaires se classent en trois grandes catégories : les méthodes directes (élémination de Gauss, factorisation de Cholesky, etc), les méthodes itératives (Jacobi, Gauss-seidel, etc) et les méthodes projectives (gradient conjugué, etc). Les méthodes directes sont les plus efficaces parce qu'elles fournissent la solution exacte en un nombre fini d'itérations. La stratégie est de transformer le système $Ax = b$ en deux systèmes dont les matrices sont triangulaires où la résolution est particulièrement simple. Les méthodes directes ont l'inconvénient de nécessiter une assez grande place de mémoire. elles deviennent coûteuses en temps et en mémoire lorsque la taille du système est élevée.

L'utilisation des méthodes itératives a tendance à s'imposer avec l'augmentation de la puissance des ordinateurs. Le principe consiste à construire une suite des solutions approchées convergent vers la solution exacte. Ces méthodes s'appliquent surtout aux systèmes dont la matrice est creuse (contient beaucoup de zéro) ce qu'est le cas dans les systèmes issus d'une discrétisation par éléments finis ou différences finies. En général, les méthodes itératives ne permettent pas d'obtenir la solution exacte, néanmoins, chaque itération donne une meilleure approximation de la solution. On s'arrête dés que la précision (condition d'arrêt) désirée est atteinte.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres :
On commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux du calcul matriciel ainsi que les notions et les théorèmes utilisés pour démontrer les résultats des autres chapitres. On aborde dans le deuxième chapitre les méthodes itératives linéaires en donnant les propriétés majeures notamment la consistance et la convergence. On présente également une étude détaillée sur les quatre itérations les plus fréquentes Richardson, Jacobi, Gauss-Seidel et la relaxation. L'ensemble des itérations linéaires forme un algèbre, sur lequel, plusieurs opérations sont définies. L'étude de ces opérations fait l'objet du chapitre 3. Le dernier chapitre est consacré à donner quelques critères de convergence sur les itérations linéaires qui possèdent certaines propriétés de positivité.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler les résultats fondamentaux de l'analyse matricielle que l'on va utiliser dans les autres chapitres. Selon les problèmes qui se posent plus tard, on est amené à utiliser un grand nombre d'outils différents **que l'on accepte sans démonstration.** Pour plus d'information on se réfère à [17, 18].

Notation

- $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- A^T, A^H respectivement, la matrice transposée et hermitienne de A.
- $A^{-T} = (A^T)^{-1}, A^{-H} = (A^H)^{-1}$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire.
- $\| \cdot \|_2$ norme euclidienne.
- $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$.
- $\| \cdot \|_A$ norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.
- $\| \cdot \|_\infty$ norme infini.
- $| \cdot |$ valeur absolue dans $\mathbb{R}$ (module dans $\mathbb{C}$).
- $\lambda_{\max}(A)$ plus grande valeur propre de A.
- $\lambda_{\min}(A)$ plus petite valeur propre de A.
- $\rho(A)$ rayon spectral de la matrice A.
- $\operatorname{spec}(A)$ spectre de la matrice A.
- $\operatorname{Cond}(A)$ conditionnement de A.
- $\mathcal{D}(\Phi)$ domaine de définition de l'itération Φ.
- $\det(A)$ determinant de A.
- $Re(z)$ partie réelle de $z \in \mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ l'espace des matrices.
- $\ker(A)$ noyau de A.
- $\mathcal{L}$ ensemble des itération linéaires et consistantes.
- $\mathcal{L}_{\text{pos}}$ ensemble des itérations définies positives.

- $\mathcal{L}_{\text{semi}}$ ensemble des itérations semi-définies positives.
- $\mathcal{L}_{\text{sym}}$ ensemble des itérations symétriques.
- $\mathcal{L}_{>0}$ ensemble des itérations directement définies positives
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- resp. : respectivement.
- $\mathbb{P}_n$ ensemble des polynôme dont le degré $\leq n$.

1.1 Quelques définitions et propriétés sur les matrices

Dans tous les chapitres $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), p, q \in \mathbb{N}$ est l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de taille p (lignes) $\times q$ (colonnes), à éléments dans $\mathbb{K}$. Dans les cas où les corps des scalaires peut être choisi indifféremment égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le désignera par $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.1 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, on définit la transposée et l'adjointe de A respectivement par*

$$A^T := (a_{ji})_{ji}, \quad A^H := (\overline{a_{ji}})_{ji}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $A^H = A^T$.

Lemme 1.1.2 *les propriétés suivantes ont lieu*

$$\begin{aligned}
(A^T)^T &= A, & (A+B)^T &= A^T + B^T, (\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{K} \\
(AB)^T &= B^T A^T, & (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \\
(A+B)^H &= A^H + B^H, & (\lambda A)^H &= \overline{\lambda} A^H, \lambda \in \mathbb{K} \\
(AB)^H &= B^H A^H, & (A^{-1})^H &= (A^H)^{-1}
\end{aligned}$$

la définition suivante donne les classes des matrices très couramment utilisées que ce soit dans l'analyse numérique ou dans l'algèbre.

Définition 1.1.3

(a) Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est dite :

(1) diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$. Dans ce cas, on note $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$,

(2) identité si elle est diagonale et $a_{ii} = 1, \forall i$. On la note $I_N = diag(1, 1, \ldots, 1)$,

(3) triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$,

(4) triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$,

(5) symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = A^T$,

(7) hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A = A^H$,

(8) orthogonale si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $AA^T = A^T A = I_N$,

(9) unitaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et* $AA^H = A^H A = I_N$,

(10) Normale si $AA^H = A^H A$.

(b) les matrices A *et* B *commutent si*

$$AB = BA.$$

(c) Les matrices A, $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ *sont dites semblable s'il existe une matrice régulière* T, *telle que*

$$A = T^{-1} B T.$$

Si T *est unitaire, les matrices* A *et* B *sont dites unitairement semblables.*

Définition 1.1.4 *L'application* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ *définie par*

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} y^T x = \sum_{i=1}^N x_i y_i & si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ y^H x = \sum_{i=1}^N x_i \overline{y_i} & si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

est appelée produit scalaire euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et hermitien si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *On a aussi*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^H y \rangle.$$

Matrice inversible

Définition 1.1.5 *On dit que la matrice carrée* A *de taille* N *est inversible ou régulière s'il existe une matrice* B *de taille* N *telle que* $AB = BA = I_N$. *La matrice* B *est appelée inverse de* A *et on note* A^{-1}. *De plus*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, (A^H)^{-1} = (A^{-1})^H.$$

Théorème 1.1.6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, *les propriétés suivantes sont équivalentes*

(a) A *est régulière (inversible),*

(b) $\operatorname{rang}(A) = N$,

(c) $det(A) \neq 0$,

(d) $Ax = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,

(e) pour tout $b \in \mathbb{K}^N$: $Ax = b$ *possède une unique solution.*

(e) $\ker A = \{0\}$.

1.2 Valeurs et vecteurs propres

Définition 1.2.1

(a) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de* A *s'il existe* $x \neq 0$ *tel que* $Ax = \lambda x$. *Le*

vecteur x est le vecteur propre associé à λ. L'ensemble de toutes les valeurs propres est appelé le spectre de A noté par $\operatorname{spec}(A)$. *On a*

$$\operatorname{spec}(A^T) = \operatorname{spec}(A) \quad et \quad \operatorname{spec}(A^H) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}.$$

(b) Le rayon spectral de A que l'on note $\rho(A)$ se donne par

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$$

Le rayon spectral vérifié les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}
\rho(\zeta A) &= |\zeta|\rho(A) \quad \forall \zeta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\\
\rho(A^k) &= (\rho(A))^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \ et\ , \forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\\
\rho(A) &= \rho(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\\
\rho(A) &= \rho(A^H) = \rho(A^T) \quad \forall A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\\
\rho(AB) &= \rho(BA) \forall A \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{NM}(\mathbb{K}).
\end{aligned}$$

Théorème 1.2.2

(a) Les valeurs propres des matrices semblables A et B coïncident

$$\operatorname{spec}(A) = \operatorname{spec}(B).$$

(b) Soit $P_n \in \mathbb{P}_n$, alors

$$\operatorname{spec}(P_n(A)) = \{P_n(\lambda) : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}.$$

Décomposition de Schur

Pour une matrice arbitraire, on peut prouver qu'elle est unitairement semblable à une matrice triangulaire, comme l'affirme le résultat suivant.

Théorème 1.2.3 *(voir [17])*

(a) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, il existe une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire supérieure R telles que

$$A = URU^H$$

Les élément diagonaux de R sont les valeurs propres de A.

(b) Si A est normale alors, il existe D diagonale et U unitaire telles que $A = UDU^H$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i), \lambda_i \in \operatorname{spec}(A)$.

(c) Si de plus, A est hermitienne alors, on a la même décomposition que (b) avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.2.4 *Soient A, B deux matrices normales alors, A et B commutent si et seulement si il existe une matrice unitaire Q telle que*

$$Q^H AQ = \mathrm{diag}\,\{\lambda_i\}, \quad Q^H BQ = \mathrm{diag}\,\{\mu_i\}. \tag{1.1}$$

où $\lambda_i \in \mathrm{spec}\,(A)$ et $\mu_i \in \mathrm{spec}\,(B)$.

1.3 Normes matricielles

Définition 1.3.1 *Une norme matricielle est une application $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{K})$ on a*

(1) $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$,

(2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

(3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité triangulaire),

(4) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, A \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{K}), BA \in \mathcal{M}_{MP}(\mathbb{K})$(norme multiplicative).

Définition 1.3.2 *On dit qu'une norme matricielle $\|\cdot\|$ est compatible ou consistante avec une norme vectorielle $\|\cdot\|_*$ si*

$$\|Ax\|_* \leq \|A\|\|x\|_*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall x \in \mathbb{K}^M, A \in \mathcal{M}_{NM}(\mathbb{K})$$

Proposition 1.3.3 *L'application $\|\cdot\|$ définie sur $\mathcal{M}_{NM}(\mathbb{K})$ par*

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^M - \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|_*} = \sup_{\|v\|_* \leq 1} \|Av\| = \sup_{\|v\|_* = 1} \|Av\|,$$

est une norme matricielle appelée la norme matricielle subordonnée ou induite par la norme vectoriel.

Lemme 1.3.4

(a) Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.

(b)

$$\mathrm{spec}\,(A^H A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Preuve.

Soient $\lambda \in \mathrm{spec}\,(A^H A)$ et $x \neq 0$ le vecteur propre associé à λ.

(a)

$$\begin{aligned} \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^H x\rangle = \langle x, Ax\rangle &\Rightarrow \langle \lambda x, x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle \\ &\Rightarrow \lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2 \\ &\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b)

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^H Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0.$$

Proposition 1.3.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. On a*

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\rho(AA^H)} = \|A^H\|_2,$$
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Conditionnement

Définition 1.3.6 *Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle subordonnée. Pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on appelle conditionnement de A relativement à la norme matricielle $\|\cdot\|$ le nombre*

$$cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|.$$

Théorème 1.3.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ une matrice inversible, nous avons les propriétés suivantes*

(a) $\mathrm{Cond}\,(A) = \mathrm{Cond}\,(A^{-1})$ *et* $\mathrm{Cond}\,(\alpha A) = \mathrm{Cond}\,(A)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$,

(b) Si A est une matrice normale, on a

$$\mathrm{Cond}_2(A) = \lambda_{\max}(A)/\lambda_{\min}(A).$$

Proposition 1.3.8 *Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme consistante, alors*

(a)

$$\rho(A) \le \|A\|. \tag{1.2}$$

(b)

$$\lim_{m\to+\infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}} = \rho(A). \tag{1.3}$$

(c) Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme matricielle consistante $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ (dépendant de ε) telle que

$$\|A\|_{A,\varepsilon} \le \rho(A) + \varepsilon \tag{1.4}$$

Ainsi, pour une tolérance fixée aussi petite que voulue, il existe toujours une norme matricielle telle que la norme de A soit arbitrairement proche du rayon spectral de A, c'est-à-dire

$$\rho(A) = \inf_{\|\cdot\|} \|A\|.$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble de toutes les normes consistantes.

Théorème 1.3.9 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, alors*

$$\lim_{m\to\infty} \|A^m\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(A) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\sum_{k=0}^{n} A^k\right) \textit{ converge et } \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

1.4 Matrices définies positives

Définition 1.4.1

Une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est dite

(a) *définie positive, si $A = A^H$ et $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^N - \{0\}$,*

(b) *semi-définie positive, si $A = A^H$ et $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}^N$,*

(c) *définie négative, si $-A$ est définie positive*

(d) *semi-définie négative, si $-A$ est semi-définie négative.*

Notation

On écrit $A > 0$ pour toute matrice définie positive A. On écrit également $A \geq 0, A < 0$ et $A \leq 0$ respectivement, pour exprimer les définitions (b)-(d).
Les termes (semi) définie positive et (semi) définie négative (semi-définie négative) définissent un ordre partial sur l'ensemble des matrices hermitiennes. Ce qui justifie la définition suivante

Définition 1.4.2

Pour toutes matrices hermitiennes A et B, on définit

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0 \Leftrightarrow A - B \text{ est définie positive .}$$

$A \geq B, A < B$ et $A \leq B$ sont définies de façon similaire. Toute inégalité de la forme $A > B$ implique implicitement que les deux matrices A et B sont hermitiennes.

Lemme 1.4.3 *(voir Lemme C2 [5])*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, les propriétés suivantes ont lieu

$$A > 0 \Leftrightarrow CAC^H > 0 \quad \forall C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \textit{ régulière },\tag{1.5}$$

$$A > B \Leftrightarrow CAC^H > CBC^H \quad \forall C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \textit{ régulière },\tag{1.6}$$

$$A \geq 0 \Leftrightarrow CAC^H \geq 0 \quad \forall C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\tag{1.7}$$

$$A \geq B \Leftrightarrow CAC^H \geq CBC^H \quad \forall C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\tag{1.8}$$

$$A \geq B \Leftrightarrow C^H AC \geq C^H BC \quad \forall C \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),\tag{1.9}$$

$$A, B \geq 0 \Rightarrow A + B \geq 0,\tag{1.10}$$

$$A, B \geq 0 \Rightarrow A + B > 0 \quad \textit{ si } A > 0 \textit{ ou } B > 0,\tag{1.11}$$

$$A > 0 \Leftrightarrow \zeta A > 0 \quad \forall \zeta > 0,\tag{1.12}$$

$$\zeta I \leq A \leq \xi I \Leftrightarrow \operatorname{spec}(A) \subset [\zeta, \xi] \quad \textit{ si } A \textit{ hermitienne },\tag{1.13}$$

$$-\xi \leq A \leq \xi \Leftrightarrow \|A\|_2 \leq \xi \quad \textit{ si } A \textit{ hermitienne },\tag{1.14}$$

$$A \geq B > 0 \Leftrightarrow 0 < A^{-1} \leq B^{-1}.\tag{1.15}$$

Lemme 1.4.4 *$A > 0$ (resp. $A \geq 0$) si et seulement si la matrice A est hermitienne, et toutes les valeurs propres de A sont strictement positives (resp. positive).*

Corollaire 1.4.5 *La matrice $A^H A$ est définie positive.(Il suffit d'utiliser Lemme 1.3.4 et le fait que $A^H A$ est hermitienne)*

Lemme 1.4.6
(a) Toute matrice définie positive est régulière.
(b)

$$A > 0 \Leftrightarrow A^{-1} > 0.$$

(c) Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ alors

$$A > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0 \text{ et } A \geq 0 \Rightarrow a_{ii} \geq 0 \quad i = 1 \cdots N. \tag{1.16}$$

Par conséquent, $\operatorname{diag}\{a_{ii}\}$ *est définie positive (semi-définie positive)*

Lemme 1.4.7
(a) $0 \leq A \leq B$ implique que $\|A\|_2 \leq \|B\|_2$ et $\rho(A) \leq \rho(B)$.
(b) $0 \leq A < B$ implique que $\|A\|_2 < \|B\|_2$ et $\rho(A) < \rho(B)$.

Remarque 1.4.8 *Si les matrices A et B sont définies positives (semi-définie positive), le produit AB n'a que des valeurs propres strictement positives (positives).*

Théorème 1.4.9 *(voir Théorème 1.7 [17])*
(a) Pour toute matrice(semi) définie positive A, il existe une et une seule matrice B qui soit (semi) définie postive et qui vérifie $B^2 = A$. On l'appelle la racine carrée de A et on la note $A^{\frac{1}{2}}$. Pour son inverse on utilise la notation $A^{-\frac{1}{2}} = (A^{-1})^{\frac{1}{2}}$.
(b) $A^{\frac{1}{2}}$ commute avec A et tout polynôme de A.
(c) $A^{\frac{1}{2}}$ est l'unique solution (semi) définie positive de l'équation matricielle $X^2 = A$ où A est (semi) définie positive.

Définition 1.4.10 *Soit A une matrice définie positive, on définit le produit scalaire associé à A par*

$$\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle. \tag{1.17}$$

La norme associée à $\langle \cdot, \cdot\rangle_A$ est

$$\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x\rangle} = \sqrt{\langle A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x\rangle} = \|A^{\frac{1}{2}}x\|_2. \tag{1.18}$$

La norme matricielle induite par $\|\cdot\|_A$ est

$$\|B\|_A = \|A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}\|. \quad B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}). \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Méthodes itératives

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés fondamentales des méthodes itératives notamment la consistance et la convergence. Une étude détaillée a été établie sur les quatre itérations de base : Richardson, Jacobi, Gausse-Seidel et la relaxation.

2.1 Notations et définitions

Au cours de ce travail, on cherche à résoudre le système

$$Ax = b \tag{2.1}$$

où $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ est une matrice supposée régulière afin de garantir la solvabilité de (2.1) pour tout $b \in \mathbb{K}^N$.

Définition 2.1.1 *Une méthode itérative (non nécessairement linéaire) est une application*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^{N\times N} &\to \mathbb{K}^N \\ (x, b, A) &\to \Phi(x, b, A). \end{aligned}$$

On note $x_m = x_m(x_0, b, A), m \in \mathbb{N}$, les itérés générés par la méthode Φ à partir d'une condition (valeur) initiale $x_0 \in \mathbb{K}^N$. La suite générée se donne par

$$\begin{cases} x_0(y, b, A) := y, \\ x_{m+1}(y, b, A) := \Phi(x_m(y, b, A), b, A), m \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Parfois, on écrit

$$x_{m+1} := \Phi(x_m, b, A), \quad m \geq 0 \tag{2.3}$$

Remarque 2.1.2 *L'écriture $\Phi(x, b, A)$ signifie que la méthode Φ est dépendante et applicable aux données (data) A et b. Ici, le mot "applicable" dit que l'itération Φ est bien* *définie (même si la suite (x_m) est divergente). Comme la matrice A est supposée fixée dans la plus part des cas, on écrit souvent $x_{m+1}(y,b) := \Phi(x_m(y,b),b)$. Par $\Phi(\cdot,\cdot,A)$, on exprime le fait que l'itération (2.2) est appliquée exclusivement à la matrice A.*

Définition 2.1.3

(a) $\mathcal{D}(\Phi) := \{A : \Phi(\cdot,\cdot,A)$ est bien définie$\}$ est le domaine de définition de Φ.

(b) Une itération est dite "algébrique" si la définition de $\Phi(\cdot,\cdot,A)$ est basée seulement sur les données de $A \in \mathcal{D}(\Phi)$.

2.1.1 Point fixe

Les méthodes itératives de la résolution du système $Ax = b$ s'écrivent en générales sous la forme $x = \Phi(x)$, ce qui représente une méthode de point fixe.

Définition 2.1.4 *Un point $x^* = x^*(b,A)$ est dit point fixe de l'itération Φ correspondant à $b \in \mathbb{K}^N$ et $A \in \mathcal{D}(\Phi)$ si : $x^* = \Phi(x^*,b,A)$.*

Le lemme suivant donne une relation entre le point fixe de Φ et la suite générée par (2.2).

Lemme 2.1.5 *supposons que Φ soit continue par rapport à la première variable. Si $lim_{m\longrightarrow\infty} x_m(y,b,A) =: x^*$ existe, alors $x^* = \Phi(x^*,b,A)$.*

Preuve.
On a
$$x_{m+1} = \Phi(x_m,b,A)$$
si
$$x_m \to x^* \Rightarrow x_{m+1} \to x^*$$
alors
$$\lim_{m\to+\infty} x_{m+1} = \lim_{m\to+\infty} \Phi(x_m,b,A)$$
Φ est continue, donc
$$\lim_{m\to+\infty} x_{m+1} = \Phi(\lim_{m\to+\infty} x_m,b,A)$$
d'où
$$x^* = \Phi(x^*,b,A)$$
donc x^* est un point fixe de $\Phi(\cdot,b,A)$. ■

2.1.2 la consistance

Le Lemme 2.1.5 dit que les résultats possibles d'une méthode itérative doivent être cherchées dans l'ensemble des points fixes. En effet, les approximations x_m de la solution x sont consistantes de façon qu'elles convergent vers une limite x^* qui se considère (sous certaines conditions) comme la solution du système. Ce point x^*, d'après le dernier lemme, appartient à l'ensemble des points fixes. Cette relation entre la solution et le point fixe fait l'objet de la définition suivante.

Définition 2.1.6 *On dit qu'une méthode itérative Φ est consistante si pour tous $b \in \mathbb{K}^N$ et $A \in \mathcal{D}(\Phi)$: toute solution du système $Ax = b$ est un point fixe de $\Phi(\cdot, b, A)$.*

Remarque 2.1.7 *Selon la Définition 2.1.6, la consistance signifie que pour tous $b, x \in \mathbb{K}^N$ et toute matrice $A \in \mathcal{D}(\Phi)$, l'implication suivante est satisfaite*

$$Ax = b \Rightarrow x = \Phi(x, b, A).$$

L'implication inverse donne une forme alternative (non équivalente) de la consistance, et répond à la question : est-ce-que chaque point fixe est une solution ?, c'est-à-dire :

$$\forall x \quad \text{un point fixe de } \Phi \Rightarrow \forall b \in \mathbb{K}^N, \forall A \in \mathcal{D}(\Phi) : Ax = b. \tag{2.4}$$

Notons que les deux variantes de consistantes ci-dessus, n'exigent pas la régularité de A. Même si la matrice A n'est pas régulière (singulière), le système $Ax = b$ peut avoir une solution pour certain $b \in \mathbb{K}^N$. Alors, la Définition 2.1.6 implique l'existence d'un point fixe de $\Phi(\cdot, b, A)$. Vice versa, (2.4) assure l'existence d'une solution dés que $\Phi(\cdot, b, A)$ admet un point fixe.

2.1.3 La convergence

Une définition naturelle de la convergence d'une méthode itérative Φ semble d'être

$$\lim_{m \to +\infty} x_m(y, b, A) \quad \text{existe pour tous } y, b \in \mathbb{K}^N. \tag{2.5}$$

Où $x_m(y, b, A)$ est la suite générée par (2.3) et liée à la valeur initiale $x_0 := y$, tandis que $A \in \mathcal{D}(\Phi)$ est une matrice fixée. D'après cette définition, la méthode itérative peut converger vers des limites différentes selon la valeur initiale y qu'est choisie arbitrairement dans $\mathbb{K}^N$. Il est donc intéressant de donner une définition plus forte rendant la convergence indépendante de la condition initiale.

Définition 2.1.8 *Soit $A \in \mathcal{D}(\Phi)$ fixée.*
La méthode itérative $\Phi(\cdot, \cdot, A)$ est dite convergente si pour tout $b \in \mathbb{K}^N$, il existe une limite $x^*(b, A)$ de (2.3) indépendamment de la première variable (condition initiale).

Remarque 2.1.9 *Dans tout ce qui suit, on suppose souvent que la méthode itérative est consistante et convergente dans le sens :* Φ *consistante pour toute matrice* $A \in \mathcal{D}(\Phi)$ *et l'itération particulière* $\Phi(\cdot, \cdot, A)$ *associée à* A *est convergente.*

Théorème 2.1.10 *On suppose que* Φ *soit continue par rapport à la première variable, alors*
Φ *est consistante et convergente si et seulement si* A *régulière et* Φ *vérifie (2.4) et (2.5).*

Preuve.
(i) La propriété (2.5) découle de la Définition 2.1.8. Supposons que A soit singulière, alors l'équation $Ax = 0$ admet une autre solution $y^* \neq 0$ avec la solution trivial $x^* = 0$. La consistance implique que x^* et y^* sont des points fixes de Φ par rapport à $b = 0$. On définit les deux suites constantes

$$x_m(x^*, 0, A) = \Phi(x^*, 0, A) = x^*$$

$$x_m(y^*, 0, A) = \Phi(y^*, 0, A) = y^*$$

d'après la définition de la convergence on obtient $x^* = y^*$, ce qui contredit l'hypothèse $x^* \neq y^*$. Il nous reste qu'à montrer (2.4). La définition de la convergence montre que Φ ne peut avoir qu'un seul point fixe par rapport à b (il suffit de prendre deux suites avec deux valeurs initiales différentes). La régularité de A assure l'existence et l'unicité de la solution de $Ax = b$, il découle de la consistance que cette solution est le seul point fixe de Φ par rapport à b, ce qui traduit (2.4).
(ii) Soit $x_m(y, b)$ la suite générée par l'itération Φ. D'après le Lemme 2.1.5

$$x^* := \lim_{m \to +\infty} x_m(y, b) \text{ est un point fixe de } \Phi \text{ par rapport à } b,$$

la propriété (2.4) implique que ce point fixe est une solution de système $Ax = b$. De plus cette solution est unique selon la régularité de A. Comme ce point est la limite de $x_m(y, b)$, alors cette suite possède seulement une limite indépendante de y, ce qui traduit la convergente au sens de la Définition 2.1.8.
La convergence implique l'unicité du point fixe par rapport à b selon la première implication (i), et par (2.4) ce point fixe est l'unique solution de $Ax = b$, ce qui établit la consistance de Φ. ∎

Remarque 2.1.11 *La consistance n'est pas suffisante pour assurer la convergence.*

Exemple 2.1.12 *considérons le système*

$$2Ix = b \quad (A = 2I).$$

On veut résoudre ce système avec la méthode itérative

$$\begin{cases} x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = -x_m + b \\ x_0 = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Soit $\overline{x}$ la solution de $Ax = b$, est-ce que $\Phi(\overline{x}, b, A) = \overline{x}$?

$$\Phi(\overline{x}, b, A) = -\overline{x} + b = -\overline{x} + A\overline{x} = -\overline{x} + 2\overline{x} = \overline{x},$$

donc (2.6) est consistante.

D'autre part

$$x_{2m+1} = -x_{2m} + b = x_{2m-1} - b + b, \forall m = 1, 2, 3, \dots$$
$$\Rightarrow x_{2m+1} = x_{2m-1}, m = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$x_{2(m+1)} = x_{2m+2} = -x_{2m+1} + b = x_{2m} - b + b$$
$$\Rightarrow x_{2(m+1)} = x_{2m}, m = 0, 1, 2, \dots$$

ce qui implique

$$\begin{cases} x_{2m+1} = x_{2m-1} = x_1 = b \\ x_{2m+2} = x_{2m} = x_0 = 0 \end{cases}$$

alors

$$x_m = \begin{cases} b \text{ si } m \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } m \text{ est pair,} \end{cases}$$

d'où (x_m) est divergente.

2.2 Méthodes itératives linéaires

2.2.1 Trois formes normales

Première forme normale

Définition 2.2.1 ***(L'itération linéaire, la matrice d'itération)***

Une méthode itérative Φ est dite linéaire si $\Phi(x, b)$ est linéaire par rapport à (x, b), de façon plus précise, s'il existe deux matrices M et N telle que

$$\Phi(x, b, A) = M[A]x + N[A]b. \tag{2.7}$$

Dans la plupart des cas, A est supposée fixée, on écrit alors

$$\Phi(x, b) = Mx + Nb. \tag{2.8}$$

La matrice $M = M[A]$ est appelée la matrice d'itération de Φ.

Φ est linéaire en (x, b), en effet, on prend (x, b) et $(y, c) \in \mathbb{k}^{2N}$ associés aux systèmes $Ax = b$ et $Ay = c$, alors

$$\begin{aligned}\Phi((x, b) + (y, c)) &= \Phi(x + y, b + c) = M(x + y) + N(b + c) \\ &= (Mx + Nb) + (My + Nc) = \Phi(x, b) + \Phi(y, c).\end{aligned}$$

De plus, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha(x, y)) &= \Phi(\alpha x, \alpha y) = M(\alpha x) + N(\alpha y) \\ &= \alpha Mx + \alpha Ny = \alpha(Mx + Ny) = \alpha\Phi(x, y).\end{aligned}$$

L'itération (2.3) s'écrit sous la forme (2.9) qui représente la première forme normale de la méthode Φ.

$$x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = Mx_m + Nb, \quad m \geq 0. \tag{2.9}$$

Notation 2.2.2 *On note M^{XY} la matrice d'itération d'une méthode itérative appelée $'XY'$. Lorsque Φ doit être préciser, on note M_Φ.*

Remarque 2.2.3 *L'itération $\Phi(\cdot, \cdot, A)$ est algébrique au sens (b) de la Définition 2.1.3 si et seulement si les matrices M et N sont des fonctions explicites de A.*

Consistance et deuxième forme normale

Pour une méthode itérative linéaire et consistante Φ, toute solution du système $Ax = b$ est un point fixe par rapport à b, avec $x = Mx + Nb$. Chaque $x \in \mathbb{K}^N$ peut être une solution du système $Ax = b$ (en prenant $b := Ax$), alors

$$x = Mx + Nb = Mx + NAx = (M + NA)x, \forall x \in \mathbb{K}^N, \tag{2.10}$$

ce qui conduit à

$$M[A] + N[A]A = I, \tag{2.11}$$

où, brièvement

$$M + NA = I. \tag{2.12}$$

Théorème 2.2.4 ***(La consistance)***
Une itération linéaire Φ est consistante si et seulement si la matrice d'itération M peut être déterminée à partir de N par

$$M[A] = I - N[A]A \quad, \forall A \in \mathcal{D}(\Phi), \tag{2.13}$$

de plus, si A est régulière alors N se représente en fonction de M

$$N[A] = (I - M[A])A^{-1}. \tag{2.14}$$

Preuve
$\Rightarrow$) Évident(d'après la définition (2.11)).
$\Leftarrow$) Soit $x \in \mathbb{K}^N : Ax = b$. Supposons que la matrice d'itération M s'écrive sous la forme

$$M[A] = I - N[A]A \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{D}(\Phi).$$

On a

$$\begin{aligned} M[A] = I - N[A]A &\Rightarrow M[A]x = x - N[A]Ax, \forall x \in \mathbb{K}^N \\ &\Rightarrow x = M[A]x + N[A]b \\ &\Rightarrow x = \Phi(x, b). \end{aligned}$$

■

La combinaison de (2.13) dans (2.9) donne

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= M[A]x_m + N[A]b \\ &= (I - N[A]A)x_m + N[A]b \end{aligned}$$

d'où

$$x_{m+1} = x_m - N[A](Ax_m - b), \quad m \geqslant 0. \tag{2.15}$$

L'itération (2.15) s'appelle la deuxième forme normale de Φ dont la matrice de la deuxième forme normale est

$$N = N[A] = N_\Phi = N_\Phi[A].$$

Remarque 2.2.5 *La deuxième forme normale associée au système $Ax = b$ se détermine seulement via la matrice $N[A]$. Ce qui permet à l'itération (2.15), avec N choisie arbitrairement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de représenter toutes les itérations linéaires et consistantes. On note*

$$\mathcal{L} = \{\Phi : \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^{N\times N} \to \mathbb{K}^N \textit{ linéaire et consistance}\} \tag{2.16}$$

Troisième forme normale

La troisième forme normale d'une itération linéaire s'écrit comme suit

$$W[A](x_m - x_{m+1}) = Ax_m - b, \quad m \geq 0. \tag{2.17}$$

$W = W[A] = W_\Phi = W_\Phi[A]$ est appelée la matrice de la troisième forme normale de Φ. L'itération (2.17) donne une forme implicite de x_{m+1}, elle peut s'écrire sous la forme du problème

$$\begin{cases} \text{résoudre } W\delta = Ax_m - b \\ \quad \text{avec } \delta = x_m - x_{m+1} \end{cases} \tag{2.18}$$

cela, représente une définition de x_{m+1} sous une condition de régularité de W.

Remarque 2.2.6 *Si la matrice W est régulière, alors*

$$x_m - x_{m+1} = W[A]^{-1}(Ax_m - b) \Rightarrow x_{m+1} = x_m - W[A]^{-1}(Ax_m - b),$$

une comparaison avec la deuxième forme normale donne $N = W^{-1}$. D'autre part, (2.15) avec N régulière peut s'écrire sous la forme de (2.17) avec $W = N^{-1}$. Dans ce cas

$$M[A] = I - N[A] = I - W[A]^{-1}A. \tag{2.19}$$

L'itération linéaire $x_{m+1}(x_0, b, A) = \Phi(x_m(x_0, b, A), b, A)$ donne une relation récurrente entre x_{m+1} et x_m, cela nous oblige à passer par tous les itérés x_m, $i = \overline{0, m}$, afin que l'on puisse calculer x_{m+1}. La représentation suivante donne une formule explicite de la suite (x_m) permettant de calculer chaque itéré x_m directement à partir de x_0 et b.

Théorème 2.2.7 *L'itération linéaire (2.9) se donne par*

$$x_m(x_0, b, A) = M[A]^m x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} M[A]^k N[A]b \qquad \text{pour } m \geq 0 \text{ et } A \in \mathcal{D}(\Phi). \tag{2.20}$$

Preuve
On procède par récurrence.
Pour $m = 0$, on a

$$M[A]^0 x_0 + \sum_{k=0}^{0-1} M[A]^k N[A]b = x_0 = x_0(x_0, b, A).$$

Supposons que (2.20) soit vraie pour $m - 1$. D'après la formule (2.8)

$$\begin{aligned} x_m(x_0, b, A) &= M[A]x_{m-1} + N[A]b \\ &= M[A]\big(M[A]^{m-1}x_0 + \sum_{k=0}^{m-2} M[A]^k N[A]b\big) + N[A]b \\ &= M[A]^m x_0 + \sum_{k=1}^{m-1} M[A]^k N[A]b + N[A]b \\ &= M[A]^m x_0 + \sum_{k=0}^{m-1} M[A]^k N[A]b. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Résultats de convergence

L'idée de base des méthodes itératives est de construire une suite (x_m) telle que

$$\lim_m x_m = x \tag{2.21}$$

où x est la solution du système $Ax = b$. Comme la solution exacte n'est évidemment pas connue, on est obligé de calculer une valeur approximative x_m de x déterminée par un critère d'arrêt plus commode (par exemple $|x - x_m| < \varepsilon$, où ε est une tolérance fixée). Cela conduit à des erreurs dans le calcul de la solution. Dans la suit, on note

$$e_m = x_m - x \quad \text{où } x \text{ est la solution de } Ax = b \tag{2.22}$$

l'erreur à l'itération m.
La condition (2.21) revient à $\lim_m e_m = 0$ pour toute valeur initiale x_0.
On suppose que la méthode soit consistante, alors $x = Mx + Nb$ où x défini dans (2.22).
En combinant avec (2.9), on obtient

$$x_{m+1} - x = Mx_m - Mx = M(x_m - x),$$

donc

$$e_{m+1} = Me_m, \quad m \geq 0. \tag{2.23}$$

Par conséquent

$$e_m = M^m e_0, \quad m \geq 0. \tag{2.24}$$

La quantité $r_m := Ax - b$ (ou $r_m = b - Ax_m$) représente le résidu à l'itération m.

Le théorème suivant donne le critère fondamental de convergence des méthodes itératives linéaires (condition nécessaire et suffisante).

Théorème 2.2.8 ***(Théorème de convergence)***
L'itération linéaire (2.9) est convergente si et seulement si

$$\rho(M[A]) < 1. \tag{2.25}$$

Preuve
Supposons que l'itération (2.9) soit convergente. Dans la formule (2.20), on prend $b = 0$, alors $x_m(x_0, 0, A) = M[A]^m x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{K}^N$. En particulier $x_m(0, 0, A) = 0$, ce qui entraine la convergence de $x_m(0, 0, A)$ vers 0. En tenant compte de la définition de la convergence, on obtient

$$\lim_m x_m(x_0, 0, A) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{K}^N. \tag{2.26}$$

Supposons que $\rho(M[A]) \geq 1$, alors, il existe $\lambda \in spec(M)$: $|\lambda| \geq 1$ et $x \in \mathbb{K}^N - \{0\}$: $Mx = \lambda x$.
Le choix $x_0 = x$ donne $x_m(x_0, 0, A) = \lambda^m x_0$ qui ne peut pas converger vers 0 (car $|\lambda| \geq 1$).
Ce qui contredit (2.26).
Réciproquement, supposons que $\rho(M[A]) < 1$. Il résulte du Théorème 1.3.9 que

$$\lim_{m \to \infty} M^m x_0 = 0,$$

tandis que le Théorème 1.3.9 implique

$$\sum_{m\geq 0} M^m = (I - M[A])^{-1},$$

grâce à la représentation (2.20), $(x_m)_m$ converge vers

$$x^* = (I - M[A])^{-1} N[A] b. \tag{2.27}$$

Par conséquent, l'itération (2.9) est convergente grâce à l'indépendance de sa limite x^* de la valeur initiale x_0. ∎

Lemme 2.2.9 *Soit $\Phi \in \mathcal{L}$ définie par $\Phi(x, b, A) = x - N_\Phi(Ax - b)$, avec A régulière. Si* $\ker(N_\Phi) \neq \{0\}$*, alors Φ est divergente.*

Preuve
Soit $x \neq 0$ tel que $N_\Phi x = 0$ (c'est-à-dire $x \in \ker(N_\Phi)$). Comme A est régulière, alors $Ax \neq 0$. Posons $0 \neq y := A^{-1}x$, donc

$$M_\Phi y = (I - N_\Phi A)(y) = y - N_\Phi A y = y - N_\Phi x = y,$$

alors $\lambda = 1$ est une valeur propre de M_Φ, par conséquent $\rho(M_\Phi) \geq 1$. Il résulte du Théorème 2.2.8 que Φ est divergente. ∎

Corollaire 2.2.10

(a) Si la méthode itérative $\Phi(x, b) = M[A]x + N[A]b$ est convergente, alors la suite générée (x_m) converge vers $(I - M)^{-1} N b$.

(b) Si l'itération est consistante et convergente, alors A et $N = N[A]$ sont réguliers, de plus, la suite générée x_m converge vers l'unique solution $x = A^{-1}b$.

Preuve
(b) Montrons par l'absurde. Supposons que A ou N soit singulière, le produit NA l'est aussi. Alors, il existe $x \neq 0$ tel que $NAx = 0$. Comme $M = I - NA$ (grâce à la consistance), x est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1$. Donc $\rho(M) \geq 1$ ce qui contredit la convergence.
D'autre part, on a $x_{m+1} = x_m - N(Ax_m - b)$ avec A et N inversibles, de plus (x_m) converge vers $(I - M)^{-1} N b$, donc

$$(I - M)^{-1} N b = (I - M)^{-1} N b - N\big(A(I - M)^{-1} N b - b\big)$$

$$\Rightarrow NA(I - M)^{-1} N b = N b$$

$$\Rightarrow (I - M)^{-1} N b = A^{-1} b$$

c'est-à-dire, (x_m) converge vers l'unique solution de $Ax = b$. ∎

Définition 2.2.11 *On dit que la convergence d'une méthode itérative Φ est monotone par rapport à une norme (induite) $\|\cdot\|$ si $\|M_\Phi\| < 1$.*

Le critère de convergence $\rho(M) < 1$ donné par le Théorème 2.2.8 ne fournit aucune conclusion ou estimation concernant l'erreur $e_m = x_m - x$ pour certain m fixé. La formule de l'erreur (2.24) est donnée via la norme matricielle $\|M\|$, ce qui rend cette norme un critère alternatif de convergence. L'inégalité (1.4) permet d'établir une condition suffisante de convergence.

Théorème 2.2.12 *Soit $\|\cdot\|$ une norme matricielle consistante. Une condition suffisante de la convergence d'une itération est*

$$\|M\| < 1. \tag{2.28}$$

De plus

$$\|e_{m+1}\| \leq \|M\|\|e_m\| \quad et \quad \|e_m\| \leq \|M\|^m\|e_0\|. \tag{2.29}$$

Preuve

D'après (1.2), on a $\rho(M) \leq \|M\|$, alors comme $\|M\| < 1$, on obtient $\rho(M) < 1$, ce qui implique la convergence d'après le Théorème 2.2.8. D'après (2.23), on a

$$e_{m+1} = Me_m,$$

donc

$$\|e_{m+1}\| = \|Me_m\| \leq \|M\|\|e_m\|.$$

D'autre part, on a

$$e_m = M^m e_0.$$

Alors

$$\|e_m\| = \|M^m e_0\| \leq \|M^m\|\|e_0\| \leq \|M\|\|M\|...\|M\|\|e_0\| = \|M\|^m\|e_0\|.$$

■

Remarque 2.2.13 *D'après l'inégalité (2.29), il est important que $\|M\|$ soit assez petit pour assurer une vitesse de convergence très rapide de e_m vers 0. L'inégalité (1.4) montre que l'on peut remplacer la petitesse de $\|M\|$ par celle de $\rho(M)$, c'est-à-dire, la convergence est d'autant plus rapide que $\rho(M)$ est petit. Alors, une estimation de $\rho(M)$ peut fournir une bonne indication sur la convergence. La définition suivant introduit d'autres quantités utiles à l'étude de la convergence.*

Définition 2.2.14 *Soit $M = M[A]$ la matrice d'itération, on appelle*

(a) $\|M\|$ le facteur de convergence à l'itération m.

(b) $\|M^m\|^{\frac{1}{m}}$ le facteur moyen de convergence à l'itération m

(c) $R_m(M) = \frac{-1}{m}\log\|M^m\|$ le taux moyen de convergence à l'itération m.

Le calcul de ces quantités est très coûteux car il requiert l'évolution de M^m. On préfère donc en général estimer le taux de convergence asymptotique défini par

$$R(M) = \lim_{k\to\infty} R_k(M) = -\log \rho(M)$$

où on a utilisé (1.3).

2.2.3 Choix d'un test d'arrêt

Les méthode directes donnent la solution du système dans un nombre fini des itérations, tandis que les méthodes itératives génèrent une suite de solutions approchées. Ce processus itératif doit avoir un critère permettant d'estimer si on est proche de la solution désirée. Cela nous conduit à définir ce que l'on appelle le test d'arrêt. Le test naturel consiste à arrêter le processus lorsque l'erreur est assez petite avec une certaine tolérance $\varepsilon > 0$, c-à-d $\|x - x_m\| < \varepsilon$ où x est la solution. Comme la solution est inconnue, on va définir deux type de tests : un test basé sur l'incrément

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leq \varepsilon$$

et un autre basé sur le résidu

$$\|Ax_m - b\| \leq \varepsilon$$

La proposition suivante donne le comportement de l'erreur selon le test choisi.

Proposition 2.2.15 *Soit $x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = Mx_m + Nb$ une méthode itérative consistante, alors*

(a) Si $\|Ax_m - b\| \leq \varepsilon$ alors

$$\|x_m - x\| \leq \|A^{-1}\|\varepsilon \quad \textit{et} \quad \frac{\|x_m - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}\,(A)\frac{\varepsilon}{\|b\|}.$$

(a) Si $\|x_m - x_{m-1}\| \leq \varepsilon$ alors

$$\|x_m - x\| \leq \|(I-M)^{-1}\|\varepsilon \quad \textit{et} \quad \frac{\|x_m - x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{Cond}\,(I-M)\frac{\varepsilon}{\|Nb\|}.$$

Preuve.
(a) On a

$$\|x_m - x\| = \|A^{-1}(Ax_m - b)\| \leq \|A^{-1}\|\|Ax_m - b\| \leq \|A^{-1}\|\varepsilon$$

de plus

$$\begin{aligned}\|x_m - x\| &\leq \|A^{-1}\|\varepsilon = \frac{\|A^{-1}\|\|b\|}{\|b\|}\varepsilon \overset{Ax=b}{\leq} \frac{\|A^{-1}\|\|A\|}{\|b\|}\|x\|\varepsilon \\ &= \frac{\mathrm{Cond}\,(A)}{\|b\|}\|x\|\varepsilon\end{aligned}$$

(b) La méthode étant consistante alors, selon (2.13)

$$Mx = x - NAx = x - Nb \Rightarrow Nb = x - Mx. \tag{2.30}$$

On a

$$\begin{aligned} x_m - x &= (I - M^{-1})(I - M)(x_m - x) = (I - M)^{-1}(x_m - Mx_m + Mx - x) \\ &\overset{(2.30)}{=} (I - M)^{-1}(x_m - Mx_m - Nb) = (I - M)^{-1}(x_m - x_{m+1}) \end{aligned}$$

donc

$$\|x_m - x\| \leq \|(I - M)^{-1}\|\|x_{m+1} - x_m\| \leq \|(I - M)^{-1}\|\varepsilon.$$

■

Remarque 2.2.16 *Il est clair que le test d'arrêt basé sur le résidu dépend du conditionnement de A, alors il est déconseillé de l'utiliser si la matrice A est mal conditionnée.*

L'absence d'accumulation des erreurs d'arrondi se considère comme un avantage pour les méthodes linéaires, où on peut utiliser l'itéré x_m ou une valeur voisine $\widetilde{x}_m$ dans l'itération Φ. Ce résultat est justifié par la proposition suivante

Proposition 2.2.17 *On considère l'itération $\Phi(x_m, b, A) = Mx_m + Nb$ avec $\|M\| \leq \lambda < 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et toute suite $(\widetilde{x}_m)$ vérifiant $\|\widetilde{x}_{m+1} - (Mx_m + Nb)\| \leq \varepsilon$ on a*

$$\|\widetilde{x}_{m+1} - x\| \leq \lambda^{m+1}\|x_0 - x\| + \frac{\varepsilon}{1 - \lambda} \tag{2.31}$$

Preuve.
Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i = \frac{1 - \lambda^m}{1 - \lambda} \\ \Rightarrow &\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i \leq \frac{1}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

On utilise la récurrence sur m pour démontrer que

$$\|x_m - x\| \leq \lambda^m\|x_0 - x\| + \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i$$

l'inégalité est clair pour $m = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour m, alors

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x\| &\overset{(2.30)}{=} \|Mx_m + Nb - Mx - Nb\| = \|M(x_m - x)\| \\ &\leq \|M\|\|x_m - x\| \leq \lambda\|x_m - x\| \\ &\leq \lambda^{m+1}\|x_0 - x\| + \varepsilon\sum_{i=1}^{m} \lambda^i \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{x}_{m+1} - x\| &\leq \|\widetilde{x}_{m+1} - (Mx_m + Nb)\| + \|(Mx_m + Nb) - x\| \\
&\leq \varepsilon + \|x_{m+1} - x\| \\
&\leq \varepsilon + \lambda^{m+1}\|x_0 - x\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \\
&= \lambda^{m+1}\|x_0 - x\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \\
&\leq \lambda^{m+1}\|x_0 - x\| + \frac{\varepsilon}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

■

2.2.4 Itérations à deux termes

Une méthode itérative est dite une itération à un pas (à un terme) si le calcul de l'itéré x_{m+1} exige seulement la connaissance de l'itéré x_m, on trouve parfois des méthodes itératives dont l'itéré x_{m+1} se donne en fonction de x_m et x_{m-1}, ces méthodes se représentent par

$$x_{m+1} = M_0 x_m + M_1 x_{m-1} + N_0 b, \quad m \geq 1. \tag{2.32}$$

Dans ce cas, on a besoin de donner deux valeurs initiales x_0 et x_1. Une telle méthode itérative s'appelle méthode itérative à deux termes (deux pas) ou bien une récurrence à deux termes. L'équation (2.32) peut s'écrire sous la forme d'une méthode itérative à un seul terme, en effet

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_m \\ x_{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_0 b \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

En prenant $Z_m = (x_m \quad x_{m-1})^t \in \mathbb{C}^{2N}$, on obtient

$$(2.33) \Leftrightarrow Z_{m+1} = MZ_m + \begin{pmatrix} N_0 b \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} N_0 b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors, en posant

$$N' := \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b' := \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

on trouve

$$Z_{m+1} = MZ_m + N'b', \tag{2.34}$$

ce qui représente une itération linéaire à un terme.
Si Φ est l'itération linéaire définie dans (2.34), c.à.d $Z_{m+1} = \Phi(Z_m, b') = MZ_m + N'b'$, alors la condition $\rho(M) < 1$ assure la convergence de (Z_m) vers un point fixe de Φ. En effet, si $Z = \lim_m Z_m$ alors

$$\begin{aligned} Z = \lim_m Z_{m+1} &= \lim_m \Phi(Z_m, b') = \lim_m (MZ_m + N'b') \\ &= MZ + N'b' = \Phi(Z, b'). \end{aligned}$$

Si de plus la méthode itérative Φ est consistante alors (en suivant la même méthode dans (2.11))

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} := Z = MZ + N'b' = \begin{pmatrix} M_1x + M_0x + N_0b \\ x \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{C}^N,$$

donc

$$I - M_1 - M_0 = N_0A.$$

2.3 Méthodes itératives classiques

Cette section donne un aperçu détaillé des méthodes itératives très couramment employées dans la résolution du système linéaire $Ax = b$, pour lesquelles nous nous sommes limités à quatre itérations exemplaires et fondamentales. Trois méthodes se construisent en décomposant la matrice A sous la forme

$$A = W - R \tag{2.35}$$

où W est une matrice inversible. Le système $Ax = b$ est équivalent au système $Wx = Rx + b$, dans ce cas, la méthode itérative prend la forme suivante

$$Wx_{m+1} = Rx_m + b \Leftrightarrow x_{m+1} = W^{-1}Rx_m + W^{-1}b \Leftrightarrow W(x_m - x_{m+1}) = Ax_m - b.$$

Ce qui justifie la notation $'W'$ dans (2.35) grâce à la troisième forme obtenue dans la dernière équivalente. Il y a une infinité de choix possible pour les matrices W et R, l'idée consiste à choisir une matrice W facile à inverser (diagonale, triangulaire, etc..).

2.3.1 Itération de Richardson

Cette méthode se donne via la deuxième forme normale (donc la méthode itérative doit être consistante), en prenant $N = \theta I, \theta \in \mathbb{C}($ ou $\mathbb{R})$. L'itération obtenue, que l'on note $\Phi_\theta^{\text{Rich}}$ s'appelle la méthode de Richardson et se donne par

$$x_{m+1} = x_m - \theta(Ax_m - b). \tag{2.36}$$

Dans son papier [4], Richardson a donné une autre variante de (2.36) en variant la constante θ qui s'appelle l'itération semi-itérative (non-stationnaire) de Richardson.

Proposition 2.3.1

(a) La matrice d'itération de Richardson $\Phi_\theta^{\text{Rich}}$ est $M_\theta^{\text{Rich}} := I - \theta A$, de plus les matrices de deuxième et troisième forme normale sont $N_\theta^{\text{Rich}} := \theta I$ et $W_\theta^{\text{Rich}} := \frac{1}{\theta} I$.

(b) $\Phi_\theta^{\text{Rich}} \in \mathcal{L}$ est algébrique et $\mathcal{D}(\Phi^{\text{Rich}}) = \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$.

Preuve
(a) On a d'après (2.36)

$$\begin{aligned} x_{m+1} = x_m - \theta(Ax_m - b) &= x_m - \theta A x_m + \theta b \\ &= (I - \theta A)x_m + \theta b \\ &= M_\theta^{\text{Rich}} x_m + N_\theta^{\text{Rich}} b \end{aligned}$$

d'où

$$M_\theta^{\text{Rich}} = (I - \theta A) \quad \text{et} \quad N_\theta^{\text{Rich}} = \theta I.$$

D'autre part

$$x_{m+1} = x_m - \theta(Ax_m - b) \Rightarrow (x_m - x_{m+1}) = \theta(Ax_m - b) \Rightarrow \frac{1}{\theta}(x_m - x_{m+1}) = (Ax_m - b).$$

La comparaison avec la troisième forme normale, donne $W_\theta^{\text{Rich}} = \frac{1}{\theta} I$.
(b) La matrice d'itération de la méthode de Richardson se donne par $M_\theta^{\text{Rich}} := I - \theta A$, de plus $N_\theta^{\text{Rich}} := \theta I = (I - M^{\text{Rich}})A^{-1} = (I - I + \theta A)A^{-1}$, donc il est clair que M et N sont des fonctions explicites de A, et comme la méthode est linéaire alors $\Phi_\theta^{\text{Rich}}$ est algébrique. ■

Remarque 2.3.2 *La méthode de Richardson semble être la plus simple possible, cette méthode avec $\theta = 1$ est le prototype de toute itération linéaire. En effet, toute itération linéaire s'écrit sous la forme*

$$\Phi(x, b, A) = x - N[A](Ax - b) = x - (N[A]Ax - N[A]b) = \Phi_1^{\text{Rich}}(x, N[A]b, N[A]A).$$

Alors Φ n'est que l'itération de Richardson appliquée au système $N[A]Ax = N[A]b$.

Remarque 2.3.3 *La méthode de Richardson est une itération définie par un paramètre $\theta \in \mathbb{C}$, Une telle méthode demande à l'utilisateur de choisir un paramètre optimal, ce qui peut causer des problèmes dans la pratique, même si le paramètre optimal est connu, car le calcul de ce paramètre peut dépendre des données inconnues (comme le spectre d'une matrice), ou il est plus couteux que le paramètre original. La difficulté s'augmente dans la présence de deux paramètre ou plus.*

Convergence de l'itération de Richardson

La matrice d'itération de la méthode de Richardson est $M_\theta^{\text{Rich}} = I - \theta A$, alors (voir ($b$) du Théorème 1.2.2)

$$\operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}}) = \{1 - \theta\alpha : \alpha \in \operatorname{spec}(A)\}.$$

Il est claire que si $\operatorname{spec}(A)$ est réel, alors $\operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}})$ l'est aussi pour $\theta \in \mathbb{R}$. L'étude de convergence dans cette section se limite aux cas où θ est réel.

Théorème 2.3.4 (***convergence de l'itération de Richardson***)
Soit A une matrice dont les valeurs propres sont $0 < \lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
(a)

$$\Phi_\theta^{\text{Rich}} \textit{ converge } \Leftrightarrow 0 < \theta < 2/\lambda_{\max}. \tag{2.37}$$

(b) Le paramètre optimal θ_{opt} minimisant $\rho(M_\theta^{\text{Rich}})$ est

$$\theta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \qquad \textit{avec} \qquad \rho(M_{\theta_{\text{opt}}}^{Rich}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \tag{2.38}$$

(c) Si de plus, A est hermitienne et inversible, alors

$$\|e_{m+1}\|_2 \leq \frac{\operatorname{Cond}_2(A) - 1}{\operatorname{Cond}_2(A) + 1}\|e_m\|_2. \tag{2.39}$$

Preuve.
(a)

$$\begin{aligned}
\text{La méthode de Richardson converge } &\Leftrightarrow \rho(M_\theta^{Rich}) < 1 \Leftrightarrow \rho(I - \theta A) < 1 \\
&\Leftrightarrow \max_{0 \leq i \leq n} |1 - \theta\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow |1 - \theta\lambda_{\max}| < 1 \\
&\Leftrightarrow -1 < 1 - \theta\lambda_{\max} < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < \theta < 2/\lambda_{\max}.
\end{aligned}$$

(b) Comme $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, i = \overline{1, n}$, alors ($\theta > 0$)

$$\begin{aligned}
&1 - \theta\lambda_{\max} \leq 1 - \theta\lambda_i \leq 1 - \theta\lambda_{\min} \\
&\Rightarrow |1 - \theta\lambda_i| \leq |1 - \theta\lambda_{\max}| \text{ ou } |1 - \theta\lambda_{\min}| \\
&\Rightarrow |1 - \theta\lambda_i| \leq \max\big\{|1 - \theta\lambda_{\min}|, |1 - \theta\lambda_{\max}|\big\}, \forall i = \overline{1, n}
\end{aligned}$$

donc

$$\rho(M_\theta^{Rich}) = \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \theta\lambda_i| = \max\left\{\big|1 - \theta\lambda_{\min}\big|, \big|1 - \theta\lambda_{\max}\big|\right\}. \tag{2.40}$$

Considérons la fonction

$$0 < \theta \mapsto \varphi(\theta) = \rho(M_\theta^{\text{Rich}}).$$

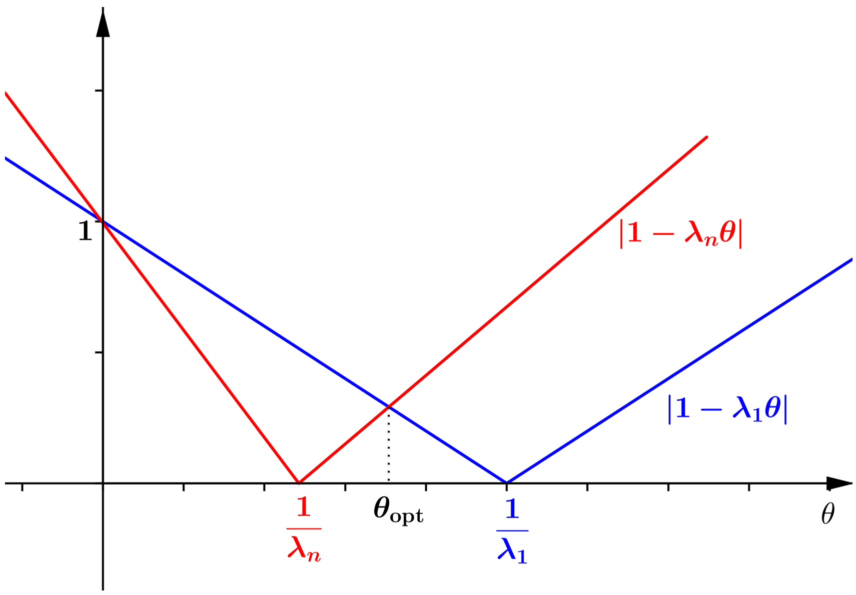

FIGURE 2.1 – $\rho(M_\theta^{\text{Rich}})$ et θ_{opt}.

Le paramètre optimal θ_{opt} qui rend $\rho(M_\theta^{\text{Rich}})$ minimal doit vérifie

$$\varphi(\theta_{\text{opt}}) = \min_{\theta>0} \varphi(\theta) = \min_{\theta>0} \big(\max\{|1-\theta\lambda_{\min}|, |1-\theta\lambda_{\max}|\}\big).$$

D'après le graphe représenté par la Figure 2.1, la fonction $\varphi(\cdot)$ atteint son minimum au point θ_{opt} tel que

$$\theta\lambda_{\max} - 1 = 1 - \theta\lambda_{\min}$$

alors

$$\theta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}\rho(M_{\theta_{\text{opt}}}^{\text{Rich}}) = \varphi(\theta_{\text{opt}}) &= \theta_{\text{opt}}\,\lambda_{\max} - 1 \\ &= \frac{2\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} - 1 \\ &= \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}.\end{aligned}$$

(c) Comme A est hermitienne alors $\rho(A) = \|A\|_2 = \lambda_{\max}$. De plus, on a

$$\text{spec}\,(A^{-1}) = \Big\{\frac{1}{\lambda_i}, \lambda_i \in \text{spec}\,(A)\Big\},$$

donc

$$\|A^{-1}\|_2 = \rho(A^{-1}) = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_{\min}}. \tag{2.41}$$

Ce qui implique

$$\text{Cond}\,_2(A) = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \tag{2.42}$$

d'autre part (on prend $\theta = \theta_{\text{opt}}$)

$$\begin{aligned}
\|e_{m+1}\|_2 &\leq \|M_{\theta_{\text{opt}}}^{\text{Rich}}\|_2\|e_m\|_2 \\
&\overset{A=A^H}{=} \rho(M_{\theta_{\text{opt}}}^{\text{Rich}})\|e_m\|_2 \\
&= \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}\|e_m\|_2 \\
&\overset{(2.42)}{=} \frac{\text{Cond}_2(A) - 1}{\text{Cond}_2(A) + 1}\|e_m\|_2.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.5 *Supposons que la matrice A soit définie positive et $\theta \in \mathbb{R}$, alors*
(a)

$$\Phi_\theta^{\text{Rich}} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{2}{\|A\|_2}. \tag{2.43}$$

(b) La convergence est monotone par rapport à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ et à la norme $\|\cdot\|_A$. De plus

$$\rho(M_\theta^{Rich}) = \|M_\theta^{Rich}\|_2 = \|M_\theta^{Rich}\|_A. \tag{2.44}$$

$$\rho(M_{\theta_{\text{opt}}}^{Rich}) = \frac{\text{Cond}_2(A) - 1}{\text{Cond}_2(A) + 1} \qquad \textit{pour } \theta_{opt} = \frac{2\|A^{-1}\|_2}{\text{Cond}_2(A) + 1}. \tag{2.45}$$

Preuve.
(a) Il suffit d'utiliser l'égalité $\lambda_{\max} = \rho(A) = \|A\|_2$ (car A hermitienne) et le Théorème 2.3.4.
(b) La matrice $M_\theta^{\text{Rich}} = I - \theta A$ est hermitienne car A l'est aussi. Alors

$$\rho(M_\theta^{\text{Rich}}) = \|M_\theta^{\text{Rich}}\|_2.$$

De plus, M_θ^{Rich} est un polynôme de A, donc $M_\theta^{\text{Rich}} A^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} M_\theta^{\text{Rich}}$ d'après (b) de le Théorème 1.4.9. On déduit que

$$\|M_\theta^{\text{Rich}}\|_A = \|A^{\frac{1}{2}} M_\theta^{\text{Rich}} A^{\frac{-1}{2}}\|_2 = \|M_\theta^{\text{Rich}} A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{-1}{2}}\|_2 = \|M_\theta^{\text{Rich}}\|_2.$$

ce qui établit (2.44). D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\rho(M_{\theta_{\text{opt}}}^{\text{Rich}}) &= \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \\
&= \frac{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - 1}{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + 1} \\
&\overset{(2.42)}{=} \frac{\text{Cond}_2(A) - 1}{\text{Cond}_2(A) + 1}.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{opt}} &= \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \\
&= \frac{2\frac{1}{\lambda_{\min}}}{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} + 1} \underset{(2.41)}{\overset{(2.42)}{=}} \frac{2\|A^{-1}\|_2}{\text{Cond}_2(A) + 1}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.6 *L'inégalité (2.39) montre que la convergence de la méthode de Richardson peut devenir lente si la matrice A est mal conditionnée.*

Le théorème suivant donne un résultat de convergence plus général sans aucune hypothèse sur la matrice A. Cependant, ce critère peut être difficile en pratique, car il utilise un terme géométrique (convexité).

Théorème 2.3.7 *Soit $\Sigma(A)$ l'enveloppe convexe de* spec (A) *définie par*

$$\Sigma(A) = \left\{ \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda \lambda : \alpha_\lambda \geq 0, \text{ avec } \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda = 1, A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \right\}.$$

Alors

$$\Phi_\theta^{\text{Rich}} \text{ converge pour un } \theta \in \mathbb{C} \text{ approprié } \Leftrightarrow 0 \notin \Sigma(A).$$

Preuve.
On suppose que $\theta = 0$, alors $\rho(M_\theta^{\text{Rich}}) = \rho(I) = 1$, donc la méthode de Richardson est divergent. Dans ce qui suit, on suppose que $\theta \neq 0$. D'autre part

$$\Sigma(M_\theta^{\text{Rich}}) = \{1\} - \theta\Sigma(A), \tag{2.46}$$

en effet, il est clair que

$$\operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}}) = \{1\} - \theta \operatorname{spec}(A) = \{1 - \theta\lambda / \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}.$$

on a

$$\begin{aligned}
\mu \in \Sigma(M_\theta^{\text{Rich}}) &\Leftrightarrow \mu = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}})} \alpha_\lambda \lambda, \quad \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}})} \alpha_\lambda = 1 \\
&\Leftrightarrow \mu = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda (1 - \theta\lambda) = \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda - \theta \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda \lambda \\
&\Leftrightarrow \mu = 1 - \theta \sum_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} \alpha_\lambda \lambda \\
&\Leftrightarrow \mu \in \{1\} - \theta\Sigma(A).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Par l'absurde, on suppose que $0 \in \Sigma(A)$, alors d'après (2.46), on trouve $1 \in \Sigma(M_\theta^{\text{Rich}})$. Sans perdre la généralité, on peut trouve un $\lambda \in \operatorname{spec}(M_\theta^{\text{Rich}})$ tel que $|\lambda| = 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \rho(M_\theta^{\text{Rich}}) \geq 1 \\
&\Rightarrow \Phi_\theta^{\text{Rich}} \text{ divergent pour tout } \theta \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse "$\Phi_\theta^{\text{Rich}}$ convergente pour certain $\theta \in \mathbb{C}$".
$\Leftarrow$) Supposons que $0 \notin \Sigma(A)$, L'exercice 3.36(b) de [5] assure la convergence pour un θ approprié. ■

Dans le cas général, la matrice A peut être non hermitienne. L'étude de l'itération de Richardson dans ce cas consiste à diviser la matrice A afin d'avoir des matrices hermitiennes. Cette opération s'appelle la décomposition hermitienne de A et se donne par

$$A = A_0 + iA_1 \quad \text{avec } A_0 = \frac{1}{2}(A + A^H), A_1 = \frac{1}{2i}(A - A^H). \tag{2.47}$$

Nous allons donner quelques résultats de convergence avec des estimations appropriées sur les matrices A_0 et A_1. Pour plus de détails on se réfère à [3].

Théorème 2.3.8 *On suppose qu'il existe deux réels* $0 < \alpha \leq \beta$, *tel que*

$$0 < \alpha I \leq A_0, \tag{2.48}$$

$$A^H A \leq \beta A_0. \tag{2.49}$$

Alors pour tout θ *satisfaisant*

$$0 < \theta < 2/\beta, \tag{2.50}$$

l'itération de Richardson converge de façon monotone par rapport à la norme euclidienne

$$\rho(M_\theta^{Rich}) \leq \|M_\theta^{Rich}\|_2 \leq \sqrt{1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)} < 1. \tag{2.51}$$

Le terme à droit est minimale pour $\theta' := 1/\beta$, *dans ce cas*

$$\rho(M_{\theta'}^{Rich}) \leq \|M_{\theta'}^{Rich}\|_2 \leq \sqrt{1 - \alpha/\beta}. \tag{2.52}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
(M_\theta^{Rich})^H M_\theta^{Rich} &= (I - \theta A)^H (I - \theta A) \overset{\theta\in\mathbb{R}}{=} (I - \theta A^H)(I - \theta A) \\
&= I - \theta(A^H + A) + \theta^2 A^H A \\
&\overset{(2.49)}{\leq} I - 2\theta A_0 + \theta^2 \beta A_0 \\
&= I - \theta\underbrace{(2 - \theta\beta)}_{>0} A_0 \\
&\overset{(2.48)}{\leq} I - \theta\alpha(2 - \theta\beta)I = [1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)]I,
\end{aligned}$$

donc

$$\|(M_\theta^{Rich})^H (M_\theta^{Rich})\|_2 = \|M_\theta^{Rich}\|_2^2 \overset{(1.14)}{\leq} 1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta),$$

d'où

$$\rho(M_\theta^{Rich}) \leq \|M_\theta^{Rich}\|_2 \leq \sqrt{1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)},$$

d'autre part, on a d'après (2.50)

$$\begin{aligned}
0 < \theta < 2/\beta \Rightarrow 0 < 2 - \theta\beta < 2 &\Rightarrow 0 < \theta\alpha(2 - \theta\beta) < 2\theta\alpha \\
&\Rightarrow 0 < 1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta) < 1 \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)} < 1,
\end{aligned}$$

ce qui établit (2.51).
Considérons la fonction

$$]0, \frac{2}{\beta}[\ni \theta \mapsto \varphi(\theta) = \sqrt{1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)},$$

donc

$$\varphi^{'}(\theta) = \frac{-\alpha + \theta\alpha\beta}{\sqrt{1 - \theta\alpha(2 - \theta\beta)}}.$$

d'où

$$\varphi^{'}(\theta) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \theta\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{\beta}.$$

Donc, la fonction φ admet un minimum en $\theta^{'} := \frac{1}{\beta}$. Il résulte de (2.51) que

$$\rho(M_{\theta'}^{Rich}) \leq \|M_{\theta'}^{Rich}\|_2 \leq \sqrt{1 - \theta'\alpha(2 - \theta'\beta)} \leq \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\beta}}.$$

■

Remarque 2.3.9
(a) Le Théorème 2.3.8 donne un exemple typique où l'optimisation de $\rho(M_\theta^{Rich})$ a été remplacée par celle de sa borne supérieure dans (2.51). Parfois, le paramètre optimal d'un problème auxiliaire est plus facile à calculer que le problème original.
(b) La condition (2.49) peut être s'écrire également comme suit

$$\langle Ax, Ax\rangle \leq \beta\langle A_0x, x\rangle, \forall x \in \mathbb{C}^N.$$

En effet

$$\begin{aligned} A^HA \leq \beta A_0 &\Leftrightarrow \beta A_0 - A^HA \textit{ semi-définie positive} \\ &\Leftrightarrow \langle(\beta A_0 - A^HA)x, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{C}^N \\ &\Leftrightarrow \langle A^HAx, x\rangle \leq \beta\langle A_0x, x\rangle, \forall x \in \mathbb{C}^N. \end{aligned}$$

(c) Si A est définie positive, alors les inégalités (2.48) et (2.49) sont satisfaites avec $\alpha = \lambda_{\min}(A)$ et $\beta = \lambda_{\max}(A)$ respectivement. En effet, la positivité de A implique

$$A^H = A, A_0 = A, A_1 = 0 \quad \textit{et} \quad \operatorname{spec}(A) \subset [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)] \subset \mathbb{R}_+^*$$

donc, d'après (1.13)

$$0 < \lambda_{\min}(A)I \leq A_0 = A \leq \lambda_{\max}(A)I \tag{2.53}$$

ce qui traduit (2.48). D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
\langle(\lambda_{\max}(A)A_0 - A^H A)x, x\rangle &= \langle(\lambda_{\max}(A)A - A^2)x, x\rangle \\
&= \langle(\lambda_{\max}(A)I - A)Ax, x\rangle \\
&= \langle(\lambda_{\max}(A)I - A)A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}x, x\rangle \\
&\underset{(c)}{\overset{Theo1.4.9}{=}} \langle A^{\frac{1}{2}}(\lambda_{\max}(A)I - A)A^{\frac{1}{2}}x, x\rangle \\
&= \langle(\lambda_{\max}(A)I - A)A^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x\rangle \overset{(2.53)}{\geq} 0 \\
&\Leftrightarrow A^H A \leq \lambda_{\max}(A)A_0.
\end{aligned}$$

Ce qui établit (2.49).

On peut également avoir un résultat de convergence en utilisant une certaine estimation sur la matrice A_1.

Théorème 2.3.10 *On suppose qu'il existe des constantes $0 < \alpha < \beta$ et $\tau \geq 0$ telles que*

$$\alpha I \leq A_0 \leq \beta I, \tag{2.54}$$

$$\|A_1\|_2 < \tau. \tag{2.55}$$

Alors la méthode de Richardson converge pour

$$0 < \theta < \frac{2\alpha}{\alpha\beta + \tau^2} \tag{2.56}$$

de façon monotone par rapport à la norme euclidienne

$$\rho(M_\theta^{\text{Rich}}) \leq \|M_\theta^{Rich}\|_2 \leq \frac{1}{2}\theta(\beta - \alpha) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\theta(\beta + \alpha)\right)^2 + \theta^2\tau^2} < 1. \tag{2.57}$$

Preuve.
Soit $\vartheta \in]0, 1[$ arbitraire, d'après (2.40), on a

$$\begin{aligned}
\|M_\theta^{Rich}\|_2 = \|I - \theta A\|_2 &= \|I - \theta A_0 - i\theta A_1\|_2 \\
&= \left\|\left(\vartheta I - \theta A_0\right) + \left((1 - \vartheta)I - i\theta A_1\right)\right\|_2 \\
&\leq \left\|\vartheta I - \theta A_0\right\|_2 + \left\|(1 - \vartheta)I - i\theta A_1\right\|_2.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

D'autre part, (2.54) implique

$$(\vartheta - \theta\alpha)I \geq \vartheta I - \theta A_0 \geq (\vartheta - \theta\beta)I$$

mais

$$(\vartheta - \theta\alpha), (\vartheta - \theta\beta) \leq \gamma_\vartheta := \max\{|\vartheta - \theta\alpha|, |\vartheta - \theta\beta|\}$$

donc

$$\gamma_\vartheta I \geq \vartheta I - \theta A_0 \geq -\gamma_\vartheta I.$$

L'utilisation de (1.14) donne

$$\|\vartheta I - \theta A_0\|_2 \leq \gamma_\vartheta.$$

De plus, la matrice $C := (1-\vartheta)I - i\theta A_1$ est normale, donc $\|C\|_2 = \rho(C)$. Il est clair que

$$\mathrm{spec}\,(C) = \{1 - \vartheta - i\theta\mu, \mu \in \mathrm{spec}\,(A_1)\}.$$

De plus, comme A_1 est hermitienne alors, d'après (2.55) on obtient $\rho(A_1) = \|A_1\|_2 \leq \tau$. On déduit que $\mathrm{spec}\,(A_1) \subset [-\tau, \tau]$. En tenant compte de cette dernière inclusion

$$\begin{aligned}\rho(C) &= \max_{\mu\in\mathrm{spec}\,(A_1)} |1-\vartheta - i\theta\mu| = \max_{\mu\in\mathrm{spec}\,(A_1)} \sqrt{(1-\vartheta)^2 + \theta^2\mu^2} \\ &\leq \sqrt{(1-\vartheta)^2 + \theta^2\tau^2}.\end{aligned}$$

il résulte de (2.58)

$$\begin{aligned}\|M_\theta^{\mathrm{Rich}}\|_2 &\leq \gamma_\vartheta + \rho(C) \\ &\leq \gamma_\vartheta + \sqrt{(1-\vartheta)^2 + \theta^2\tau^2}.\end{aligned}$$

Afin de majorer $\|M_\theta^{\mathrm{Rich}}\|_2$ par une quantité minimale, on choisit un $\vartheta_{\mathrm{opt}} \in]0,1[$ tel que

$$\gamma_{\vartheta_{\mathrm{opt}}} = \min_{\vartheta\in]0,1[} \gamma_\vartheta.$$

c'est-à-dire

$$\gamma_{\vartheta_{\mathrm{opt}}} = \min_{\vartheta\in]0,1[} (\max\{|\vartheta - \theta\alpha|, |\vartheta - \theta\beta|\}).$$

De façon similaire à celle utilisée dans (2.43) du Théorème 2.3.4, on trouve

$$\vartheta_{\mathrm{opt}} = \frac{1}{2}\theta(\beta+\alpha) \quad \text{et} \quad \gamma_{\mathrm{opt}} = \frac{1}{2}\theta(\beta-\alpha),$$

alors

$$\|M_\theta^{\mathrm{Rich}}\|_2 \leq \gamma_{\mathrm{opt}} + \sqrt{(1-\vartheta_{\mathrm{opt}})^2 + \theta^2\tau^2}.$$

■

2.3.2 Itération de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

Les trois méthodes restantes se base sur la décomposition suivante de la matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$

$$A = D - E - F = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

où

$$D = \mathrm{diag}\,(a_{ii}) \quad , E = -\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad , F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.60}$$

Méthode de Jacobi

Dans (2.35), on prend $W = D$ et $R = E + F$. La deuxième forme normale donne l'itération de Jacobi notée Φ^{Jac}

$$x_{m+1} = \Phi^{\text{Jac}}(x_m, b) = x_m - D^{-1}(Ax_m - b). \tag{2.61}$$

Proposition 2.3.11

(a) Les matrices associées à $\Phi^{\text{Jac}} \in \mathcal{L}$ sont

$$x_{m+1} = M^{\text{Jac}} x_m + N^{\text{Jac}} b \tag{2.62}$$

avec

$$M^{\text{Jac}} = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A, \tag{2.63}$$

$$N^{\text{Jac}} = D^{-1}, W^{\text{Jac}} = D. \tag{2.64}$$

(b) Φ^{Jac} est algébrique.

Preuve
(a) On a d'après (2.61)

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= x_m - D^{-1}(Ax_m - b) = (I - D^{-1}A)x_m + D^{-1}b \\ &= M^{\text{Jac}} x_m + N^{\text{Jac}} b \end{aligned}$$

donc

$$M^{\text{Jac}} = I - D^{-1}A = D^{-1}(D - A) \quad \text{et} \quad N^{\text{Jac}} = D^{-1}.$$

(b) Les matrices d'itérations de Jacobi sont $M^{\text{Jac}} = I - D^{-1}A$ et $N^{\text{Jac}} = D^{-1} = (A + F + E)^{-1}$, alors M et N sont des fonctions explicites de A, ce qui implique que Φ^{Jac} est algébrique. ■

Remarque 2.3.12 *Si $D = cI, c \in \mathbb{C}$, alors la méthode de Jacobi coïncide avec l'itération de Richardson pour $\theta := \frac{1}{c}$, en effet,*

$$x_{m+1} = \Phi^{\text{Jac}}(x_m, b) = x_m - D^{-1}(Ax_m - b) = x_m - \frac{1}{c}(Ax_m - b) = \Phi^{\text{Rich}}_{\frac{1}{c}}(x_m, b).$$

En utilisant les définitions de M^{Jac} et N^{Jac}, on trouve que la composante x^i_{k+1} du vecteur x_{m+1} est

$$x^i_{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x^j_m). \tag{2.65}$$

Il résulte de (2.65) que

$$\mathcal{D}(\Phi^{\text{Jac}}) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) : a_{ii} \neq 0 \text{ pour } i = 1, .., N\}. \tag{2.66}$$

Méthode de Gauss-Seidel

Elle est basée sur la décomposition $A = W - R$, en prenant $W = D - E$ et $R = F$. On note Φ^{GS} l'itération de Gauss-Seidel, ses matrices sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.3.13

(a) Les matrices des formes normales de l'itération $\Phi^{\text{GS}}(x, b) = M^{\text{GS}}x + N^{\text{GS}}b$ *sont*

$$M^{\text{GS}} = (D - E)^{-1}F \quad , N^{\text{GS}} = (D - E)^{-1} \quad , W^{\text{GS}} = D - E. \tag{2.67}$$

(b) $\Phi^{\text{GS}} \in \mathcal{L}$ *est algébrique et* $\mathcal{D}(\Phi^{\text{GS}}) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) : a_{ii} \neq 0 \text{ pour } i = 1, .., N\}$.

Preuve

(a) D'après la deuxième forme

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \Phi^{\text{GS}}(x_m, b, A) = x_m - (D - E)^{-1}(Ax_m - b) \\ &= (I - (D - E)^{-1}A)x_m - (D - E)^{-1}b = (D - E)^{-1}(D - E - A)x_m - (D - E)^{-1}b \\ &= (D - E)^{-1}Fx_m - (D - E)^{-1}b. \end{aligned}$$

Ce qui traduit (a).

(b) Il est claire que M^{GS} et N^{GS} sont des fonctions explicites de A, d'où Φ^{GS} est algébrique. De plus selon (2.68), il faut que $a_{ii} \neq 0$, pour que la méthode Φ^{GS} soit bien définie. ∎

Les composantes de la suite générée par Gauss-Seidel se donnent par

$$x^i_{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}\Big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x^j_{m+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x^j_m\Big], \quad i = \overline{1, N}. \tag{2.68}$$

Remarque 2.3.14 *La méthode de Gauss-Seidel diffère de celle de Jacobi par le fait qu'à l'itération* $(m+1)$ *les valeurs* $x^j_{m+1}, j = \overline{1, i-1}$ *(déjà calculées) sont utilisées pour mettre à jour la solution. Par contre la méthode de Jacobi doit stocker en mémoire toutes les composantes des vecteurs* x_m *et* x_{m+1}*, ce qui rend l'itération de Gauss-Seidel plus avantageuse.*

Théorème 2.3.15 *Si* A *est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi et de Gauss-siedel est convergente pour tout* x_0

Méthode de relaxation

L'itération de relaxation que l'on note Φ^{SOR} (successive-Over-Relaxation) est une méthode basée sur celle de Gauss-Seidel, en considérant la décomposition $A = (\frac{D}{\omega} - E) + (D - \frac{D}{\omega} - F)$, où $\omega \neq 0$ est le paramètre de relaxation, alors le système $Ax - b$ s'écrit

$$x = \big(\frac{D}{\omega} - E\big)^{-1}\big(F + (\frac{1}{\omega} - 1)D\big)x + \big(\frac{D}{\omega} - E\big)^{-1}b \tag{2.69}$$

L'algorithme de relaxation est

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_{k+1}^i = (1-\omega)x_k^i + \frac{\omega}{a_{ii}}\big[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_{k+1}^j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_k^j\big]. \end{cases} \tag{2.70}$$

Remarque 2.3.16

(1) Les itérés x_{k+1}^i générés par (2.70) s'écrivent également sous la forme

$$x_{k+1}^i = (1-\omega)x_k^i + \omega x_{k+1}^i,$$

où x_{k+1}^i (à droit) est donnée par la méthode de Gauss-seidel.

(2) $\mathcal{D}(\Phi_\omega^{\mathrm{SOR}}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : a_{ii} \neq 0 \text{ pour } i = 1,..,N\}$.

(3) $\Phi_\omega^{\mathrm{SOR}}$ est appelée "Sous-Relaxation" si $0 < \omega < 1$, et "Sur-Relaxation" si $\omega > 1$.

(4) Si $\omega = 1$, $\Phi_\omega^{\mathrm{SOR}}$ coïncide avec Φ^{GS}.

Proposition 2.3.17 *(a) Soit $A = D - E - F$ décomposée selon (2.60), les matrices associées à la première et la deuxième forme normale de $\Phi_\omega^{SOR}(x,b)$ sont*

$$x_{m+1} = M_\omega^{SOR} x_m + N_\omega^{SOR} b \tag{2.71}$$

$$M_\omega^{SOR} = (D-\omega E)^{-1}\{(1-\omega)D + \omega F\} = (I-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)I + \omega U)\} \tag{2.72}$$

$$N_\omega^{SOR} = \omega(D-\omega E)^{-1} = \omega(I-\omega L)^{-1}D^{-1} \tag{2.73}$$

où

$$L := D^{-1}E, \quad U := D^{-1}F \tag{2.74}$$

et la matrice de la troisième forme normale est

$$W_\omega^{SOR} = \omega^{-1}(D-\omega E) = \omega^{-1}D - E. \tag{2.75}$$

(b)Pour tout ω, l'itération $\Phi_\omega^{SOR}(x,b) \in \mathcal{L}$ est algébrique.

Preuve

(a) On a

$$\begin{aligned} \Phi_\omega^{SOR} = x_{m+1} &= (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}D)x_m + (\frac{D}{\omega} - E)^{-1}b, \\ &= (\frac{1}{\omega}(D-E))^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}D)x_m + (\frac{1}{\omega}(D-\omega E))^{-1}b, \\ &= \omega(D-E)^{-1}(F + \frac{1-\omega}{\omega}D)x_m + \omega(D-\omega E)^{-1}b, \\ &= (D-E)^{-1}(\omega F + (1-\omega)D)x_m + \omega(D-\omega E)^{-1}b, \end{aligned}$$

donc, d'après (2.71)

$$M_\omega^{SOR} = (D-E)^{-1}\{\omega F + (1-\omega)D\} \quad \text{et} \quad N_\omega^{SOR} = \omega(D-\omega E)^{-1}.$$

D'autre part, on a

$$W_\omega^{SOR} = (N_\omega^{SOR})^{-1} = (\omega(D-\omega E)^{-1})^{-1} = \omega^{-1}(D-\omega E) = \omega^{-1}D - E.$$

(b) Il est clair que M et N sont des fonctions explicites de A et comme la méthode est linéaire alors Φ_ω^{SOR} est algébrique. ■

2.3.3 Convergence de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation

Le résultat principale de convergence des itérations linéaires est donné par le Théorème 2.2.8. Ce résultat est valable pour toute matrice quelconque A. Dans cette section, on s'intéresse à étudier la convergence des trois ces méthodes avec quelques hypothèses sur la matrice A.

Itération de Jacobi

Théorème 2.3.18 *Une condition suffisante de convergence de l'itération de Jacobi est*

$$A \text{ et } 2D - A \text{ sont définies positives , c'est-à-dire } 2D > A > 0. \tag{2.76}$$

Dans ce cas, la convergence est monotone par rapport à $\|\cdot\|_A$ *et* $\|\cdot\|_D$

$$\rho(M^{\mathrm{Jac}}) = \|M^{\mathrm{Jac}}\|_A = \|M^{\mathrm{Jac}}\|_D < 1. \tag{2.77}$$

Preuve.
On sait que $W^{\mathrm{Jac}} = D$, donc il suffit d'utiliser le Théorème 4.1.5. ■

Itération de Gauss-Seidel

Théorème 2.3.19 *L'itération de Gauss-Seidel converge pour les matrices définies positives. La convergence est monotone par rapport à la norme* $\|.\|_A$ *:*

$$\rho(M^{\mathrm{GS}}) \leq \|M^{\mathrm{GS}}\|_A < 1. \tag{2.78}$$

Preuve.
Comme $A > 0$ alors, les entrées diagonales de A sont strictement positives (car $\langle Ae_i, e_i\rangle = a_{ii} > 0$ où $(e_i)_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$), donc $D > 0$. De plus, $E^H = F$ puisque A est hermitienne. Il s'ensuit que

$$W^{\mathrm{GS}} + (W^{\mathrm{GS}})^H = D - E + (D-E)^H = 2D - E - F = D + A > A > 0,$$

par conséquent, la condition (4.25) est satisfaite, donc l'itération de Gauss-Seidel est convergente selon le Théorème 4.2.3. ■

Comme l'itération de Gauss-Seidel est un cas particulier ($\omega = 1$) de l'itération de la méthode de relaxation, nous allons établir d'autres critères de convergence et des estimations seulement pour la méthode de relaxation.

Méthode de relaxation

Lemme 2.3.20 (Kahan [2])
Pour toute matrice $A \in \mathcal{D}(\Phi_\omega^{\mathrm{SOR}})$*, l'inégalité suivante a lieu :*

$$\rho(M_\omega^{SOR}) \geq |\omega - 1| \qquad \textit{pour tout } \omega \in \mathbb{K}. \tag{2.79}$$

Par conséquent, $|\omega - 1| < 1$ *est une condition nécessaire pour la convergence de relaxation. Si* ω *est réel, cette condition est équivalente à* $0 < \omega < 2$*.*

Preuve.
Soient $\lambda_1 \dots \lambda_n$, les valeurs propre de M_ω^{SOR}, alors

$$\big|\det(M_\omega^{SOR})\big| = \big|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\big| = \big|det(\frac{D}{\omega} - E)^{-1}(F + \frac{1}{\omega}D)\big| = \big|det(\frac{D}{\omega} - E)^{-1}det(F + (\frac{1-\omega}{\omega})D)\big|$$

Il est clair que les matrices $(\frac{1}{\omega} - E)^{-1}$ et $F + \frac{1-\omega}{\omega}D$ sont triangulaires dont les entrées diagonales sont respectivement $\dfrac{\omega}{a_{ii}}$ et $\frac{1-\omega}{\omega}a_{ii}$, donc

$$\Big|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\Big| = \Big|\prod_{i=1}^{n} \frac{\omega}{a_{ii}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\omega}{\omega} a_{ii}\Big| = \Big|\prod_{i=1}^{n} \frac{\omega}{a_{ii}} \frac{1-\omega}{\omega} a_{ii}\Big|$$
$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{n} |\lambda i| = \prod_{i=1}^{n} |1-\omega| = |1-\omega|^n$$

donc

$$\prod_{i=1}^{n} \rho(M_\omega^{SOR}) \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| = |1-\omega|^n \Rightarrow \rho^n(M_\omega^{SOR}) \geq |1-\omega|^n$$

d'où

$$\rho(M_\omega^{SOR}) \geq |1-\omega|.$$

On sait que SOR est convergente si et seulement si $\rho(M_\omega^{\mathrm{SOR}}) < 1$, la dernière inégalité demande à $|1-\omega|$ qu'il soit inférieure strictement à 1. Il est clair que si $\omega \in \mathbb{R}$, alors

$$|1-\omega| < 1 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2.$$

■

L'inégalité $|1-\omega| < 1$ est une condition nécessaire de convergence de SOR. Cette condition devient suffisante sous certains hypothèses.

Théorème 2.3.21 (Ostrowski[6]) *Supposons que* A *soit définie positive divisée sous la forme*

$$A = D - E - E^H \tag{2.80}$$

Supposons aussi que

$$0 < \omega < 2, \tag{2.81}$$

alors l'itération de relaxation (2.71) est convergente de façon monotone par rapport à $\|\cdot\|_A$

$$\rho(M_\omega^{SOR}) \leq \|M_\omega^{SOR}\|_A < 1. \tag{2.82}$$

Au lieu du Théorème 2.3.21, nous allons donner un résultat similaire mais plus général. L'idée consiste à affaiblir les conditions (2.60).

Corollaire 2.3.22 *Soit* $A > 0$ *se décompose sous la forme (2.80) avec*

$$E \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \text{ arbitraire}$$

$$D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) \text{ définie positive .}$$

On suppose que (2.81) soit vérifiée, alors, la méthode de relaxation est convergente. De plus (2.82) est satisfaite et $(D - \omega E)$ *est régulière.*

preuve.
On a $W_\omega^{\mathrm{SOR}} = \frac{1}{\omega}D - E$, donc

$$W_\omega^{\mathrm{SOR}} + (W_\omega^{\mathrm{SOR}})^H = \frac{2}{\omega}D - E - E^H \overset{(2.80)}{=} A + (\frac{2}{\omega} - 1)D.$$

La condition (2.81) assure que $\dfrac{2}{\omega} - 1 > 0$, par suit $(\dfrac{2}{\omega} - 1)D > 0$, donc

$$W_\omega^{\mathrm{SOR}} + (W_\omega^{\mathrm{SOR}})^H = A + (\frac{2}{\omega} - 1)D > A > 0,$$

ce qui traduit la convergence de SOR et l'inégalité (2.82) selon le Théorème 4.2.3. La définition de l'itération de SOR exige la régularité de $D - \omega E$ (voir (2.69). Cette régularité a été établie dans la preuve du Théorème 4.2.3.

Remarque 2.3.23 *La vitesse de convergence de la méthode de relaxation est liée au choix du paramètre de relaxation* w. *On ne peut pas donner des réponses satisfaisantes à la question du choix du paramètre optimal* w_{opt} *(c'est à dire, pour lequel le rayon spectral est le plus petit) seulement dans des cas particuliers (par exemple la matrice* A *est tridiagonale [7]). On se réfère à [8, 9] pour plus de détails.*

Chapitre 3

Algèbre des itérations linéaires.

La plus part des méthodes itératives intéressantes et connues sont construites à partir des itérations simple par des opérations algébriques élémentaires. Cette construction est justifiée par le fait que l'ensemble des itérations linéaires $\mathcal{L}$ forme un algèbre, c-à-d, il y a quelques opérations définies sur $\mathcal{L}$. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier les opérations majeures sur $\mathcal{L}$: addition, produit, ... etc. On étudie également d'autres concepts comme la symétrie, damping en donnent les propriétés et les matrices définissant chaque opération. En utilisant ces opérations, on peut construire des nouvelles itérations (méthode semi-itératives, méthode de gradient conjugué,... etc).

3.1 Itération adjointe, symétrique et définie positive

Dans cette section on donne les définitions des trois itérations : adjointe, symétrique et définie positive), avec quelques exemples. Donc il sera important d'exprimer la dépendance des matrices M, N, W avec la matrice principale du système $Ax = b$. Par conséquent, nous utilisons les notations explicites $M_\Phi[A]$, $N_\Phi[A]$, et $W_\Phi[A]$ introduites dans le deuxième chapitre.

3.1.1 Itération adjointe

Définition 3.1.1 *Soit $\Phi \in \mathcal{L}$ définie par ses matrices $M_\Phi[A]$, $N_\Phi[A]$, et $W_\Phi[A]$*

$$\Phi(x, b, A) = x - N_\Phi[A](Ax - b).$$

L'itération adjointe $\Phi^* \in \mathcal{L}$ de Φ est définie par :

$$\Phi^*(x, b, A) := x - \left(N_\Phi[A^H]\right)^H (Ax - b). \tag{3.1}$$

La matrice de la deuxième forme normale de Φ^* est :

$$N_{\Phi^*}[A] = \left(N_\Phi[A^H]\right)^H, \tag{3.2}$$

et la matrice d'itération de Φ^* *est*

$$M_{\Phi^*}[A] = I - N_{\Phi^*}[A]A = I - N_\Phi[A^H]^H A = \big(I - A^H N_\Phi[A^H]\big)^H.$$

Si N_{Φ^*} *est régulière, sa matrice de la troisième forme normale est*

$$W_{\Phi^*}[A] = \big(W_\Phi[A^H]\big)^H.$$

Il est clair que

$$\mathcal{D}(\Phi^*) := \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : A^H \in \mathcal{D}(\Phi)\}.$$

Remarque 3.1.2
L'itération Φ^* *est appliquée au système* $Ax = b$*, ce qui justifie les notations* $M_{\Phi^*}[A], N_{\Phi^*}[A]$ *et* $W_{\Phi^*}[A]$*.*

La définition de Φ^* implique les égalités suivantes

$$\Phi^{**} = \Phi, \tag{3.3}$$

$$M_{\Phi^*}[A] = A^{-1}\big(M_\Phi[A^H]\big)^H A, \tag{3.4}$$

$$\rho\big(M_{\Phi^*}[A]\big) = \rho\big(M_\Phi[A^H]\big). \tag{3.5}$$

En effet, on a d'après (3.1)

$$\Phi^*(x, b, A) := x - \big(N_\Phi[A^H]\big)^H (Ax - b).$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi^{**}(x, b, A) &= x - (N_{\Phi^*}[A^H])^H(Ax - b) = x - \big((N_\Phi[(A^H)^H])^H\big)^H\big(Ax - b\big)\\ &= x - N_\Phi[A](Ax - b) = \Phi(x, b, A).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}M_{\Phi^*}[A] &= \big(I - A^H N_\Phi[A^H]\big)^H = \Big(I - A^H\big((I - M_\Phi[A^H])A^{-H}\big)\Big)^H\\ &= \big(I - I + A^H M_\Phi[A^H]A^{-H}\big)^H = A^{-1}\big(M_\Phi[A^H]\big)^H A.\end{aligned}$$

D'après (3.4), les matrices $M_{\Phi^*}[A]$ et $(M_\Phi[A^H])^H$ sont semblables, donc

$$\rho(M_{\Phi^*}[A]) = \rho(M_\Phi[A^H]^H) = \rho(M_\Phi[A^H]),$$

alors, la convergence de $\Phi^*(\cdot, \cdot, A)$ n'a pas besoin d'être analysée si la convergence de $\Phi(\cdot, \cdot, A^H)$ est connue.

Itération adjointe de Gauss-Seidel et SOR

On suppose que la matrice A^H soit décomposée sous la forme

$$A^H = D[A^H] - E[A^H] - F[A^H],$$

où $D[A^H], E[A^H]$ et $F[A^H]$ sont celles dans (2.59) mais lié à A^H. La décomposition (2.59) implique

$$A^H = (D[A] - E[A] - F[A])^H = D[A]^H - E[A]^H - F[A]^H,$$

ce qui justifie

$$D[A^H] = D[A]^H, E[A^H] = F[A]^H, F[A^H] = E[A]^H.$$

Si la partie diagonale $D[A]$ est réelle, l'itération adjointe de Gauss-Seidel est

$$\begin{aligned}\Phi^{GS^*}(x, b, A) &= x - (N^{\mathrm{GS}}[A^H])^H(Ax - b) \overset{(2.67)}{=} x - (D[A^H] - E[A^H])^{-H}(Ax - b)\\ &= x - (D[A]^H - F[A]^H)^{-H}(Ax - b) = x - (D[A] - F[A])^{-1}(Ax - b),\end{aligned}$$

par conséquent

$$N^{GS^*} = (D - F)^{-1} = (D[A] - F[A])^{-1}$$

la matrice d'itération est

$$\begin{aligned}M^{GS^*}[A] &= I - N^{GS^*}A = I - (D - F)^{-1}A\\ &= (D - F)^{-1}(D - F - A) = (D - F)^{-1}E.\end{aligned}$$

On déduit que Φ^{GS^*} s'obtient par celle de Gauss-siedel Φ^{GS} en échangeant simplement les rôles de E et F . Les définitions de E et F montrent que les composantes $x_k^i, i = \overline{1, N}$ calculées par Φ^{GS^*} se donnent par l'ordre inverse de celles calculées par Φ^{GS}, c-à-d , x_k^n, x_k^{n-1}, x_k^1 . Cette itération s'appelle l'itération backward

$$\Phi^{\mathrm{GS}^*} = \Phi^{\mathrm{GS}}_{\mathrm{backw}}. \tag{3.6}$$

Remarque 3.1.3 *De façon similaire à celle utilisée dans Φ^{GS^*}, on trouve que*

$$M_\omega^{SOR^*} = (D - \omega F)^{-1}\{(1 - \omega)D + \omega E\} \quad \text{et} \quad \Phi_\omega^{\mathrm{backw\,SOR}} = \Phi_\omega^{\mathrm{SOR}^*}. \tag{3.7}$$

En effet,

$$\begin{aligned}M_\omega^{SOR^*}[A] &= I - N_\omega^{\mathrm{SOR}^*}[A]A = (I - A^H N_\omega^{\mathrm{SOR}}[A^H])^H = (I - A^H\omega(D[A^H] - \omega E[A^H])^{-1})^H\\ &= (I - \omega A^H(D[A]^H - \omega F[A]^H)^{-1})^H = (I - \omega A^H(D - \omega F)^{-H})^H\\ &= (I - \omega((D - \omega F)^{-1}A)^H)^H = I - \omega(D - \omega F)^{-1}A\\ &= (D - \omega F)^{-1}(D - \omega F - \omega A) = (D - \omega F)^{-1}((1 - \omega)D + \omega E).\end{aligned}$$

3.1.2 Itérations symétriques

Définition 3.1.4 ($\mathcal{L}_{\text{sym}}$)
$\Phi \in \mathcal{L}$ est dite symétrique si

$$\Phi = \Phi^*.$$

L'ensemble des itérations symétriques est notée par $\mathcal{L}_{\text{sym}}$.
En utilisant la définition de Φ^*, on obtient la caractérisation

$$\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}} \Leftrightarrow N[A] = N[A^H]^H (\Leftrightarrow N_{\Phi^*} = N_\Phi) \quad \textit{pour toute } A \in \mathcal{D}(\Phi), \tag{3.8}$$

en effet

$$\begin{aligned}\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}} &\Leftrightarrow \Phi = \Phi^* \\ &\Leftrightarrow x - N[A](Ax-b) = x - N[A^H]^H(Ax-b), \forall x, b, A \\ &\Leftrightarrow N[A] = N[A^H]^H.\end{aligned}$$

Remarque 3.1.5 *Si $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}}$ et $A \in \mathcal{D}(\Phi)$, alors*

$$A = A^H \Rightarrow N[A] = N[A]^H. \tag{3.9}$$

Lemme 3.1.6 *Supposons que $\mathcal{D}(\Phi)$ ne contient que les matrices régulières, alors*

$$\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}} \Leftrightarrow \left(M[A]A^{-1}\right)^H = M[A^H]A^{-H}.$$

Une conséquence particulière est

$$A = A^H \Rightarrow M[A]A^{-1} = \left(M[A]A^{-1}\right)^H.$$

Preuve
On a

$$\begin{aligned}(M[A]A^{-1})^H = M[A^H]A^{-H} &\Leftrightarrow A^{-H}M[A]^H = M[A^H]A^{-H} \\ &\Leftrightarrow A^{-H}(I - N[A]A)^H = (I - N[A^H]A^H)A^{-H} \\ &\Leftrightarrow A^{-H} - N[A]^H = A^{-H} - N[A^H] \\ &\Leftrightarrow N[A]^H = N[A^H] \\ &\Leftrightarrow N[A] = N[A^H]^H \\ &\overset{(3.8)}{\Leftrightarrow} \Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}}.\end{aligned}$$

Exemple 3.1.7

(a) L'itération de Richardson avec θ réel et Jacobi sont symétriques. En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\Phi_\theta^{\text{Rich}}(x,b,A) = x - \theta(Ax-b)\\
&\Rightarrow \Phi_\theta^{\text{Rich}}(x,b,A^H) = x - \theta(A^Hx-b)\\
&\Rightarrow N_\theta^{\text{Rich}}[A^H] = \theta I\\
&\Rightarrow (N_\theta^{\text{Rich}}[A^H])^H \overset{\theta\in\mathbb{R}}{=} \theta I = N_\theta^{\text{Rich}}[A]\\
&\Rightarrow \Phi_\theta^{\text{Rich}} \ \textit{symetrique}\ ,
\end{aligned}$$

aussi, on a

$$\begin{aligned}
\Phi^{\text{Jac}}(x,b,A^H) &= x - D^{-1}[A^H](A^Hx-b)\\
&\Rightarrow N^{\text{Jac}}[A^H] = D^{-1}[A^H] = \operatorname{diag}\{1/\overline{a_{ii}}\}\\
&\Rightarrow (N^{\text{Jac}}[A^H])^H = \operatorname{diag}\{1/a_{ii}\} = D^{-1}[A] = N^{\text{Jac}}[A]
\end{aligned}$$

(b) L'itération de Gauss-Seidel n'est pas symétrique.
Considérons le contre exemple suivant, on prend $A = \begin{pmatrix} i & 1\\ 0 & i\end{pmatrix}$, donc

$$A^H = \begin{pmatrix} -i & 0\\ 1 & -i\end{pmatrix}, D[A^H] = \begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, E[A^H] = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

alors

$$(N^{\text{GS}}[A^H])^H = (D[A^H]-E[A^H])^{-H} = \begin{pmatrix} -i & 1\\ 0 & -i\end{pmatrix},$$

$$N^{\text{GS}}[A] = (D[A]-E[A])^{-1} = \left[\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix},$$

ce qui traduit la non-symétrie de Φ^{GS}.

Lemme 3.1.8 *Si $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}}$ et $A > 0$, alors*

$$\Phi \ \textit{converge}\ \Rightarrow N > 0.$$

Preuve

On suppose que Φ soit convergente, alors $\rho(M) < 1$. On sait que

$$N > 0 \Leftrightarrow N = N^H \text{ et } \operatorname{spec}(N) \subset \mathbb{R}_+^*$$

donc

$$N \text{ n'est pas définie positive } \Leftrightarrow N \neq N^H \text{ ou } \operatorname{spec}(N) \not\subset \mathbb{R}_+^*$$

On suppose que N ne soit pas définie positive, comme $A^H = A$ donc $N^H = N$ (selon (3.9)). Alors N a au moins une valeur propre négative. On pose

$$\widehat{M} := A^{\frac{1}{2}} M A^{\frac{-1}{2}} = A^{\frac{1}{2}}(I - NA)A^{\frac{-1}{2}} = I - A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}}$$

alors, $\widehat{M}$ et M sont semblables, de plus ,$A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}}$ a au moins une valeur propre négative. En combinant avec le fait $\operatorname{spec}(M) = \operatorname{spec}(\widehat{M}) = \{1\} - \operatorname{spec}\{A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}}\}$, on déduit que $\rho(M) \geq 1$. Ce qui contredit $\rho(M) < 1$, donc $N > 0$.

Remarque 3.1.9

Soit $A > 0$, $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}}$ implique que $\langle Mx, y\rangle_A = \langle x, My\rangle_A$, pour tous $x, y \in \mathbb{K}^N$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ est le produit scalaire défini dans (1.17), en effet

$$\begin{aligned}
\langle Mx, y\rangle_A &= \langle AMx, y\rangle = \langle A(I - N[A]A)x, y\rangle \\
&= \langle Ax, y\rangle - \langle AN[A]Ax, y\rangle \\
&\underset{A>0}{\overset{\Phi\in\mathcal{L}_{\text{sym}}}{=}} \langle Ax, y\rangle - \langle AN[A]^H Ax, y\rangle \\
&= \langle Ax, y\rangle - \langle N[A]^H Ax, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, N[A]Ay\rangle \\
&= \langle Ax, (I - N[A]A)y\rangle = \langle x, My\rangle_A.
\end{aligned}$$

3.1.3 Itérations définies positives

Cette classe des itérations exige des conditions supplémentaires plus fortes. Ce qui la rend une classe particulières de celle des itérations symétriques.

Définition 3.1.10 ($\mathcal{L}_{\text{pos}}$)

$\Phi \in \mathcal{L}$ est définie positive si elle est symétrique et vérifie

$$A > 0 \Rightarrow N[A] > 0 \quad \textit{pour toute } A \in \mathcal{D}(\Phi).$$

l'ensemble des itérations définies positives est noté par $\mathcal{L}_{\text{pos}} \subset \mathcal{L}_{\text{sym}}$.

L'équivalence entre la positivité de N et celle de W (car $W = N^{-1}$) nous permet de remplacer l'implication ci-dessus par

$$A > 0 \Rightarrow W[A] > 0 \quad \text{pour toute } A \in \mathcal{D}(\Phi).$$

Exemple 3.1.11

(a) L'itération de Richardson avec $\theta > 0$ est définie positive ($N_\theta^{\text{Rich}}[A] = \theta I > 0$ si $\theta > 0$).

(b) L'itération de Jacobi est définie positive. En effet

$$A > 0 \Rightarrow D > 0 \Leftrightarrow N^{\text{Jac}} = D^{-1} > 0$$

(c) Si $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{sym}}$ est converge pour toutes les matrices définies positives $A \in \mathcal{D}(\Phi)$, alors $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$ (il suffit d'utiliser le Lemme 3.1.8).

Définition 3.1.12 ($\mathcal{L}_{\text{semi}}$)
Une itération $\Phi \in \mathcal{L}$ est dite semi-définie positive et on note $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{semi}}$ si

$$A \geq 0 \Rightarrow N[A] \geq 0 \quad \textit{pour toute } A \in \mathcal{D}(\Phi).$$

Notons que : $\mathcal{L}_{\text{pos}} \subset \mathcal{L}_{\text{semi}} \subset \mathcal{L}_{\text{sym}} \subset \mathcal{L}$.

La définition d'une itération (semi) définie positive se donne avec une condition qui semble un peut fort sur la matrice A ($A > 0$). En affaiblissant cette condition, on va introduire la définition suivante

Définition 3.1.13 ($\mathcal{L}_{>0}$)
Une matrice $A \in \mathcal{D}(\Phi)$ est dite directement définie positive si

$$A \textit{ régulière } \Rightarrow N[A]A > 0. \tag{3.10}$$

Cette classe des itération est notée par $\mathcal{L}_{>0}$.

Remarque 3.1.14
(a) L'un des ensembles $\mathcal{L}_{\text{pos}}$ et $\mathcal{L}_{>0}$ ne contient pas l'autre. Si $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$ et $\mathcal{D}(\Phi) \ni A > 0$, alors

$$N[A]A = AN[A] \Rightarrow N[A]A > 0,$$

Il suffit de justifier l'inclusion $\operatorname{spec}(N[A]A) \subset \mathbb{R}_+^*$*.Comme $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$ et $A > 0$ alors*$N[A] > 0$. *De plus $N[A]$ et A commutent, donc d'après le Théorème 1.2.4 assure l'existence d'une matrice unitaire Q telle que*

$$Q^H N[A] Q = \operatorname{diag}(\lambda(N[A])) = T, \quad Q^H A Q = \operatorname{diag}(\lambda(A)) = S,$$

alors

$$N[A]A = (QTQ^H)(QSQ^H) = QTSQ^H.$$

Les valeurs propres de $N[A]A$ sont celles de TS qu'est une matrice diagonale, dont la diagonale est formée par le produit des valeurs propres de A et $N[A]$. Comme $N[A] > 0$ et $A > 0$, alors ces valeurs propres sont strictement positives, et par conséquent $N[A]A > 0$.
(b) Si $A > 0$ et $\theta > 0$, alors $\Phi_\theta^{\text{Rich}} \in \mathcal{L}_{>0}$ car $(NA)^H = (\theta A)^H = \theta A = NA$

$$N \overset{\theta>0}{>} 0 \textit{ et } A > 0 \Rightarrow \operatorname{spec}(NA) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

(c) Si N et A commutent avec $A > 0$, alors $\Phi^{\text{Jac}} \in \mathcal{L}_{>0}$. En effet, on a $\Phi^{\text{Jac}} \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$ alors, d'après (a) $\Phi^{\text{Jac}} \in \mathcal{L}_{>0}$.

Exemple 3.1.15 *Un exemple d'une itération directement définie positive est due de choix* $N[A] = A^H$*, c'est-à-dire*

$$\Phi(x, b, A) = x - A^H(Ax - b), \quad \forall A \in \mathcal{D}(\Phi) = \{A \text{ règulière }\}. \tag{3.11}$$

Si A *est régulière, alors* $N[A]A = A^H A$*. La matrice* $A^H A$ *est définie positive (voir Corollaire 1.4.5).*

Remarque 3.1.16 *Soit* Φ *l'itération associée au système* $Ax = b$*, donnée par*

$$x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = x - A^H(Ax - b). \tag{3.12}$$

L'itération damped Φ_ϑ *(appelée itération de Landweber [14]) est*

$$x_{m+1} = \Phi_\vartheta(x_m, b, A) = x_m - \vartheta A^H(Ax - b) = x_m - \vartheta(A^H Ax - A^H b),$$

alors

$$\Phi_\vartheta(\cdot, b, A) = \Phi_\vartheta^{\text{Rich}}(\cdot, A^H b, A^H A).$$

3.2 Itérations linéaires damped

Définition 3.2.1 *Soit* $\Phi \in \mathcal{L}$ *une itération définie par sa deuxième forme normale*

$$x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = x_m - N(Ax_m - b),$$

et soit $\vartheta \in \mathbb{K}$*, l'itération damped de* Φ *que l'on note* Φ_ϑ *ou* $(\vartheta \cdot \Phi)$ *est définie par*

$$x_{m+1} = \Phi_\vartheta(x_m, b, A) = x_m - \vartheta N(Ax_m - b). \tag{3.13}$$

Les matrices de Φ_ϑ *sont notées par*

$$M_{\Phi_\vartheta}[A] = I - \vartheta N_\Phi[A]A, \quad N_{\Phi_\vartheta}[A] = \vartheta N_\Phi[A], \quad W_{\Phi_\vartheta}[A] = \frac{1}{\vartheta} W_\Phi[A].$$

L'opération qui à chaque Φ*, associé* Φ_ϑ *est appelée damping.*

Proposition 3.2.2
(a) Damping est associatif : $\vartheta_1 \cdot (\vartheta_2 \cdot \Phi) = (\vartheta_1 \vartheta_2) \cdot \Phi$ *pour tous* $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{K}$*.*
(b) $(\vartheta \cdot \Phi)^* = \overline{\vartheta} \cdot \Phi^*$ *pour tout* $\vartheta \in \mathbb{K}$*.*
(c) $[(\Phi^* = \Phi \Rightarrow (\vartheta \cdot \Phi)^* = \vartheta \cdot \Phi)] \Leftrightarrow \vartheta \in \mathbb{R}$*.*
(d) Si $\Phi \in \mathcal{L}_{pos}$ *et* $\vartheta > 0$*, alors* $\vartheta \cdot \Phi \in \mathcal{L}_{pos}$ *.*
(e) Si $\vartheta \in \mathcal{L}_{semi}$ *et* $\vartheta \geq 0$ *alors* $\vartheta \cdot \Phi \in \mathcal{L}_{semi}$ *.*

Preuve
(a) On a
$$\vartheta_1 \cdot (\vartheta_2 \cdot \Phi) = \vartheta_1 \cdot \Phi_{\vartheta_2} = \vartheta_1 \cdot \Psi = \Psi_{\vartheta_1},$$
avec $\Psi = \Phi_{\vartheta_2}$, alors
$$\Psi(x, b, A) = \Phi_{\vartheta_2}(x, b, A) = x - \vartheta_2 N(Ax - b),$$
donc
$$\begin{aligned}\vartheta_1 \cdot (\vartheta_2 \cdot \Phi)(x, b, A) = \Psi_{\vartheta_1}(x, b, A) &= x - \vartheta_1(\vartheta_2 N)(Ax - b) = x - (\vartheta_1\vartheta_2 N)(Ax - b).\\ &= \Phi_{\vartheta_1\vartheta_2}(x, b, A) = (\vartheta_1\vartheta_2) \cdot \Phi(x, b, A).\end{aligned}$$
(b) On a
$$\begin{aligned}(\vartheta \cdot \Phi)^*(x, b, A) &= \Phi^*_\vartheta(x, b, A) = x - N_{\Phi_\vartheta}[A^H]^H(Ax - b)\\ &= x - \big(\vartheta N_\Phi[A^H]\big)^H(Ax - b) = x - \overline{\vartheta}\big(N_\Phi[A]^H\big)^H(Ax - b)\\ &= \overline{\vartheta} \cdot \Phi^*(x, b, A).\end{aligned}$$
(c)
$\Leftarrow$) Supposons $\vartheta \in \mathbb{R}$, donc $\vartheta = \overline{\vartheta}$. Si $\Phi^* = \Phi$, alors
$$(\vartheta \cdot \Phi)^* = \overline{\vartheta} \cdot \Phi^* = \vartheta \cdot \Phi.$$
$\Rightarrow$) On a
$$\Phi^* = \Phi \Rightarrow (\vartheta \cdot \Phi)^* = \vartheta \cdot \Phi \Rightarrow \overline{\vartheta} \cdot \Phi^* = \vartheta \cdot \Phi \Rightarrow \overline{\vartheta} \cdot \Phi = \vartheta \cdot \Phi.$$
Alors, pour tous $x, b \in \mathbb{K}^N, A \in \mathcal{M}_\mathcal{N}(\mathbb{K})$
$$\begin{aligned}\overline{\vartheta} \cdot \Phi(x, b, A) = \vartheta \cdot \Phi(x, b, A) &\Rightarrow x - \overline{\vartheta} N_\Phi(x, b, A) = x - \vartheta N_\Phi(Ax - b)\\ &\Rightarrow (\overline{\vartheta} - \vartheta)N(Ax - b) = 0\\ &\Rightarrow \overline{\vartheta} = \vartheta \Leftrightarrow \vartheta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
(d) On doit montrer que Φ_ϑ est symétrique et
$$A > 0 \Rightarrow N_{\Phi_\vartheta}[A] > 0.$$
On a $\vartheta > 0$, donc $\vartheta \in \mathbb{R}$, alors d'après (c), la symétrie de Φ implique la symétrie de Φ_ϑ. Si $A > 0$, alors $N_\Phi[A] > 0$ (car Φ est définie positive), mais $N_{\Phi_\vartheta}[A] = \vartheta N_\Phi[A]$ et $\vartheta > 0$, donc $N_{\Phi_\vartheta}[A] > 0$. ■

Remarque 3.2.3 *L'itération Φ_ϑ est définie également par*
$$\Phi_\vartheta(x, b, A) = (1 - \vartheta)x + \vartheta\Phi(x, b, A).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\Phi_\vartheta(x,b,A) &= x-\vartheta N(Ax-b) = x-\vartheta N(Ax-b)-\vartheta x+\vartheta x\\ &= (1-\vartheta)x+\vartheta(x-N(Ax-b))\\ &= (1-\vartheta)x+\vartheta\Phi(x,b,A).\end{aligned}$$

L'expression $\vartheta\Phi(x,b,A)$ est différente de celle qui définit l'itération damped $\vartheta\cdot\Phi$.

L'itération damped se voit comme une méthode qui dépend d'un paramètre $\vartheta\in\mathbb{K}$. Le choix de paramètre optimal ϑ_{opt} se fait selon les critères suivants :
• Le rayon spectral : ϑ_{opt} doit minimiser $\rho(M_\vartheta)$.
• ϑ_{opt} minimise une certaine norme $\|M_\vartheta\|$.
• Si $\rho(M_\vartheta)$ et $\|M_\vartheta\|$ sont bornées supérieurement par une fonction $\varphi(\vartheta)$, on cherche un ϑ_{opt} tel que $\varphi(\vartheta_{\text{opt}})$ soit le plus petit possible. Une réponse est donnée dans le Théorème 2.3.8.

3.2.1 L'itération damped de Jacobi

D'après ce qui procède, $N^{\text{Jac}}[A]=D^{-1}$, alors l'itération damped de Jacobi notée $\Phi_\vartheta^{\text{Jac}}$ se donne par

$$x_{m+1}=\Phi_\vartheta^{\text{Jac}}(x_m,b,A)=x_m-\vartheta D^{-1}(Ax-b)\quad(\vartheta\in\mathbb{K}). \tag{3.14}$$

On verra dans le dernier chapitre que chaque itération damped n'est que l'itération de Richardson associée au système $NAx=Nb$. Une condition de positivité ($\operatorname{spec}(NA)\subset\mathbb{R}_+$) sera nécessaire pour appliqué le résultat de convergence de Richardson. Dans ce cas, la condition suffisante de convergence de Jacobi $2D-A>0$, établie dans le Théorème 4.2.3 sera remplacée par un paramètre ϑ bien choisi. Ce paramètre vérifie (voir Théorème 4.2.2)

$$0<\vartheta<2/\lambda_{\max}(D^{-1}A). \tag{3.15}$$

Remarque 3.2.4 *L'itération damped de la méthode de relaxation que l'on note $\vartheta\cdot\Phi_\omega^{\text{SOR}}$ s'appelle la relaxation accélérée AOR (Accelerated Over-Relaxation). Il est clair que $\vartheta\cdot\Phi_\omega^{\text{SOR}}$ dépend de deux paramètres ϑ et ω. Pour plus de détails sur cette itération, on se réfère à [1].*

3.3 Addition des itérations linéaires

Définition 3.3.1 *Soient $\Phi,\Psi\in\mathcal{L}$ deux itérations définies par leurs matrices N_Φ et N_Ψ. La somme $\Phi+\Psi$ est définie par*

$$(\Phi+\Psi)(x,b):=x-(N_\Phi+N_\Psi)(Ax-b).$$

Notons que $(\Phi + \Psi)(x, b) \neq \Phi(x, b) + \Psi(x, b)$, *en effet*

$$\begin{aligned}(\Phi + \Psi)(x, b) &= x - (N_\Phi + N_\Psi)(Ax - b)\\ &= x - N_\Phi(Ax - b) - N_\Psi(Ax - b) + x - x\\ &= (x - N_\Phi(Ax - b)) + (x - N_\Psi(Ax - b)) - x\\ &= \Phi(x, b) + \Psi(x, b) - x.\end{aligned}$$

L'idée principale est que les termes $N_\Phi(Ax-b)$ *et* $N_\Psi(Ax-b)$ *peuvent avoir des propriétés différentes, mais complémentaires, cela rend leur somme meilleure que chaque terme à côté.*

Lemme 3.3.2 *Les propriétés suivantes ont lieu :*
(a) $(\vartheta_1 \cdot \Phi) + (\vartheta_2 \cdot \Phi) = (\vartheta_1 + \vartheta_2) \cdot \Phi$.
(b) $\vartheta \cdot (\Phi + \Psi) = (\vartheta \cdot \Phi) + (\vartheta \cdot \Psi)$.
(c) $(\Phi + \Psi)^* = \Phi^* + \Psi^*$.
(d) L'élément neutre de l'addition des itérations est l'itération identité $\Phi^\circ(x, b, A) = x$.
(e) $M_{\Phi+\Psi}[A] = M_\Phi[A] + M_\Psi[A] - I$.

Preuve.
(a)

$$\begin{aligned}\big(\vartheta_1 \cdot \Phi + \vartheta_2 \cdot \Phi\big)(x, b, A) &= \big(\Phi_{\vartheta 1} + \Phi_{\vartheta 2}\big)(x, b, A)\\ &= x - [N_{\Phi_{\vartheta_1}} + N_{\Phi_{\vartheta_2}}](Ax - b)\\ &= x - [\vartheta_1 N_\Phi + \vartheta_2 N_\Phi](Ax - b)]\\ &= x - \vartheta_1 N_\Phi(Ax - b) - \vartheta_2 N_\Phi(Ax - b)\\ &= x - (\vartheta_1 + \vartheta_2)N_\Phi(Ax - b)\\ &= (\vartheta_1 + \vartheta_2) \cdot \Phi(x, b, A).\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vartheta \cdot (\Phi + \Psi)(x, b, A) = (\Phi + \Psi)_\vartheta(x, b, A) &= x - \vartheta[N_\Phi + N_\Psi](Ax - b)\\ &= x - [\vartheta N_\Phi + \vartheta N_\Psi](Ax - b)\\ &= x - [N_{\Phi_\vartheta} + N_{\Psi_\vartheta}](Ax - b)\\ &= \big(\Phi_\vartheta + \Psi_\vartheta\big)(x, b, A) = (\vartheta \cdot \Phi)(x, b, A) + (\vartheta \cdot \Psi)(x, b, A).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(\Phi + \Psi)^*(x, b, A) &= x - (N_\Phi[A^H] + N_\Psi[A^H])^H(Ax - b)\\ &= x - (N_\Phi[A^H]^H + N_\Psi[A^H]^H)(Ax - b)\\ &= x - (N_{\Phi^*} + N_{\Psi^*})(Ax - b) = (\Phi^* + \Psi^*)(x, b, A).\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
M_{\Phi+\Psi}[A] &= I - N_{\Phi+\Psi}[A]A = I - \big(N_\Phi[A] + N_\Psi[A]\big)A \\
&= \big(I - N_\Phi[A]\big) + \big(I - N_\Psi[A]\big) - I \\
&= M_\Phi[A] + M_\Psi[A] - I.
\end{aligned}$$

■

Il résulte de (e) que

$$\text{spec}\,(M_{\Phi+\Psi}) = \text{spec}\,(M_\Phi + M_\Psi) - \{1\}.$$

Alors

$$\rho(M_{\Phi+\Psi}) = \max_{\lambda \in \text{spec}\,(M_\Phi + M_\Psi)} |\lambda - 1|,$$

d'où, la convergence de Φ et Ψ n'est, ni suffisante ni nécessaire pour la convergence de $\Phi + \Psi$.
La somme des itérations convergentes peut devenir divergente, puisque le paramètre de damping ϑ peut quitter l'intervalle de convergence (voir par exemple (3.15)). D'autre part, la somme des itérations divergentes peut être convergente. La proposition suivante montre que certaines sommes sont convergentes.

Proposition 3.3.3 *Soit $A > 0$ et soit $\Phi_i, i = \overline{1,n}$ une famille des itérations linéaires telles que*

$$\Phi_i(x, b, A) = x - N_i(Ax - b) \quad \textit{avec } N_i \geq 0, i = \overline{1,n}.$$

Pour $w_i \in]0, 2/\rho(N_iA)[$, on définit l'itération

$$\Phi := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \Phi_i.$$

C'est-à-dire

$$\Phi(x, b, A) = x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i N_i(Ax - b).$$

Alors, l'itération Φ est convergente si et seulement si

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(N_i) = \{0\}. \tag{3.16}$$

Preuve.
$\Rightarrow$) Par l'absurde, supposons que Φ soit convergente et (3.16) soit fausse, alors

$$\exists x \neq 0 : x \in \ker(N_i), \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \ker(N_i) \neq \{0\}, \forall i = \overline{1,n} \overset{(3.17)}{\Rightarrow} \ker(N_\Phi) \neq \{0\}.$$

Le Lemme 2.2.9 implique que Φ est divergent, ce qui contredit l'hypothèse.
$\Leftarrow$) On applique le Lemme 1.4.3 sur $N_i \geq 0$ et $A > 0$, on obtient

$$0 \leq N_i \leq \rho(N_iA)A^{-1}, i = \overline{1,n}.$$

Par la somme on trouve

$$0 \leq N_\Phi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i N_i \leq \big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \rho(N_i A)\big)A^{-1} \overset{\omega_i<2/\rho(N_iA)}{<} 2A^{-1}. \tag{3.17}$$

Il suffit de montrer que $N_\Phi > 0$, afin qu'on puisse utiliser le Théorème 4.1.5. Comme (3.16) est vraie, alors

$$\forall x \neq 0, \exists i_0 \in \overline{1,n} : N_{i_0}x \neq 0,$$

donc, pour tout $x \in \mathbb{K}^N$

$$\langle N_\Phi x, x\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\omega_i \underbrace{\langle N_i x, x\rangle}_{\geq 0} \geq \frac{\omega_{i_0}}{n}\langle N_{i_0}x, x\rangle > 0,$$

alors $N_\Phi > 0$. L'inégalité (3.17) devient

$$\begin{aligned} 0 < N_\Phi < 2A^{-1} &\Rightarrow \frac{1}{2}N_\Phi^{-1} > A > 0 \\ &\Rightarrow 2W_\Phi > A > 0. \end{aligned}$$

■

3.4 Produit (composée) des itérations

Les opérations que l'on a vu précédemment (damping et l'addition) sont définies via les matrices N_Φ et N_Ψ. Par contre, on va voir que le produit sera défini par les matrices M_Φ et M_Ψ.

3.4.1 Définitions et propriétés

Définition 3.4.1 *Soient $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}$, le produit (la composée) de Φ et Ψ noté $\Phi \circ \Psi$ est défini par*

$$x_{m+1} = (\Phi \circ \Psi)(x_m, b) := \Phi(\Psi(x_m, b), b). \tag{3.18}$$

D'après cette définition, le produit peut se voir comme la composée de Φ et Ψ.

Proposition 3.4.2
(a) Si Φ et Ψ sont consistantes, alors $\Phi \circ \Psi$ l'est aussi.
(b) Les matrices des itérations de Φ, Ψ et $\Phi \circ \Psi$ sont liées par

$$M_{\Phi\circ\Psi} = M_\Phi M_\Psi, \tag{3.19}$$

et par suite

$$\rho(M_{\Phi\circ\Psi}) = \rho(M_{\Psi\circ\Phi}).$$

(c) Si Φ est consistante, alors la matrice de la deuxième forme normale $N_{\Phi\circ\Psi}$ se donne par

$$N_{\Phi\circ\Psi} = M_\Phi N_\Psi + N_\Phi = N_\Phi + N_\Psi - N_\Phi A N_\Psi. \tag{3.20}$$

(d) Soient W_Φ, W_Ψ et $W_{\Phi\circ\Psi}$ les matrices de la troisième forme normale de Φ, Ψ et $\Phi \circ \Psi$ respectivement. Supposons que N_Φ et N_Φ et N_Ψ soient réguliers, si $W_\Phi - W_\Psi - A$ est singulière, alors $\Phi \circ \Psi$ est divergente, sinon

$$W_{\Phi\circ\Psi} = W_\Psi(W_\Phi + W_\Psi - A)^{-1}W_\Phi. \tag{3.21}$$

Preuve.
(a) Supposons que Φ et Ψ soient consistantes, c'est-à-dire pour toute solution x^* du système $Ax = b$, on a $\Phi(x^*, b) = x^*$ et $\Psi(x^*, b) = x^*$, alors

$$(\Phi \circ \Psi)(x^*) = \Phi(\Psi(x^*, b), b) = \Phi(x^*, b) = x^*.$$

(b) on a

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \Psi)(x, b) &= M_{\Phi\circ\Psi}x + N_{\Phi\circ\Psi}b = \Phi(\Psi(x, b), b) = \Phi(M_\Psi x + N_\Psi b, b)\\ &= M_\Phi(M_\Psi x + N_\Psi b) + N_\Phi b\\ &= M_\Phi M_\Psi x + (M_\Phi N_\Psi + N_\Phi)b, \quad \forall x \in \mathbb{K}^N,\end{aligned}$$

donc

$$M_\Phi M_\Psi = M_{\Phi\circ\Psi}.$$

(c) La partie (b) montre que $N_{\Phi\circ\Psi} = M_\Phi N_\Psi + N_\Phi$. La consistance de Φ implique

$$M_\Phi = I - N_\Phi A \text{ (voir Théorème 2.2.4) },$$

donc

$$N_{\Phi\circ\Psi} = M_\Phi N_\Psi + N_\Phi = N_\Psi - N_\Phi A N_\Psi + N_\Phi.$$

(d) La régularité de N_Φ et N_Ψ garantit l'existence de $W_\Phi = N_\Phi^{-1}$ et $W_\Psi = N_\Psi^{-1}$. En tenant compte de (3.20) on obtient

$$N_{\Phi\circ\Psi} = W_\Phi^{-1} + W_\Psi^{-1} - W_\Psi^{-1}AW_\Phi^{-1} = W_\Phi^{-1}(W_\Phi + W_\Psi - A)W_\Psi^{-1}.$$

La singularité de $W_\Phi + W_\Psi - A$ implique la singularité de $N_{\Phi\circ\Psi}$ (parce qu'elles sont semblables et $0 \in \operatorname{spec}(W_\Phi + W_\Psi - A)$), par conséquent $\ker(N_{\Phi\circ\Psi}) \neq \{0\}$. On conclut, d'après le Lemme 2.2.9 que $\Phi \circ \Psi$ est divergente. Si $\big(W_\Phi + W_\Psi - A\big)$ est régulière, alors $N_{\Phi\circ\Psi}$ l'est aussi, et

$$W_{\Phi\circ\Psi} = N_{\Phi\circ\Psi}^{-1} = W_\Psi(W_\Phi + W_\Psi - A)^{-1}W_\Phi.$$

■

Remarque 3.4.3

(a) La convergence de Φ *et* Ψ *n'est ni suffisante ni nécessaire pour la convergence de* $\Phi\circ\Psi$.

(b) Une condition suffisante pour la convergence de $\Phi\circ\Psi$ *est*

$$\|M_\Phi\| < 1, \quad \text{et} \quad \|M_\Psi\| < 1,$$

où l'une des inégalités strictes $'<'$ *peut être remplacée par* $'\leq'$.

L'utilisation du Théorème 2.2.12 et l'inégalité $\|M_\Phi M_\Psi\| \leq \|M_\Phi\|\|M_\Psi\|$ garantit (a). La partie (a) est démontrée par des contres exemples.
Le premier exemple montre que $\Phi\circ\Psi$ peut diverger, malgré la convergence de Φ et Ψ.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la première itération Φ est définie via $W_\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matrice d'itération est $M_\Phi = I - W_\Phi^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Puisque les valeurs propres sont $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{2}}$, alors $\rho(M_\Phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ d'où la convergence de Φ.
La deuxième itération Ψ utilise $W_\Psi = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice d'itération est $M_\Psi = I - W_\Psi^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de M_Ψ sont 0 et $\frac{1}{2}$, alors $\rho(M_\Psi) = \frac{1}{2}$, d'où Ψ est convergente.
La matrice d'itération du produit $\Phi\circ\Psi$ est $M_\Phi M_\Psi = \frac{5}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont 0 et $\frac{5}{2}$ donc $\rho(M_\Phi M_\Psi) = \frac{5}{2} > 1$, c'est-à-dire l'itération composée est divergente.
Le deuxième exemple est l'itération de Kaczmarz Φ^{Kac} [15]. Cette itération est le produit de plusieurs itérations divergentes. L'itération de Kaczmarz est toujours convergente pour toute matrice A régulière. Une étude détaillée de cette itération est donnée aussi dans [5].

Les propriétés algébriques du produit font l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.4.4

(a) L'élément neutre du produit est l'itération identité Φ^0 *donnée dans le Lemme 3.3.2 :* $\Phi = \Phi\circ\Phi^0 = \Phi^0\circ\Phi$.

(b) Le produit est associatif

$$(\Phi\circ\Psi)\circ\Omega = \Phi\circ(\Psi\circ\Omega) \quad \text{pour } \Phi,\Psi,\Omega\in\mathcal{L}.$$

(c) Le produit n'est pas distributif par rapport à l'addition mais, on a

$$(\Phi' + \Phi'')\circ\Psi = (\Phi'\circ\Psi) + (\Phi''\circ\Psi) - \Psi, \quad \Phi',\Phi'',\Psi\in\mathcal{L},$$
$$\Phi\circ(\Psi' + \Psi'') = (\Phi\circ\Psi') + (\Phi\circ\Psi'') - \Phi, \quad \Phi,\Psi',\Psi''\in\mathcal{L}.$$

Preuve.
(a) On a

$$\Phi \circ \Phi^0(x,b) = \Phi(\Phi^0(x,b),b) = \Phi(x,b),$$

et

$$\Phi^0 \circ \Phi(x,b) = \Phi^0(\Phi(x,b),b) = \Phi(x,b).$$

(b)

$$\begin{aligned}\big((\Phi \circ \Psi) \circ \Omega\big)(x,b) &= (\Phi \circ \Psi)(\Omega(x,b),b) = \Phi(\Psi(\Omega(x,b),b),b) \\ &= \Phi\big(\Psi \circ \Omega(x,b),b\big) = \big(\Phi \circ (\Psi \circ \Omega)\big)(x,b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big((\Phi' + \Phi'') \circ \Psi\big)(x,b) &= (\Phi' + \Phi'')(\Psi(x,b),b) \\ &= \Phi'(\Psi(x,b),b) + \Phi''(\Psi(x,b),b) - \Psi(x,b) \\ &= (\Phi' \circ \Psi)(x,b) + (\Phi'' \circ \Psi)(x,b) - \Psi(x,b) \\ &= \big((\Phi' \circ \Psi) + (\Phi'' \circ \Psi) - \Psi\big)(x,b).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi \circ (\Psi' + \Psi'')(x,b) &= \Phi((\Psi' + \Psi'')(x,b),b) \\ &= \Phi(\Psi'(x,b) + \Psi''(x,b) - x,b) \\ &\overset{\Phi\in\mathcal{L}}{=} \Phi(\Psi'(x,b),b) + \Phi(\Psi''(x,b),b) - \Phi(x,b) \\ &= (\Phi \circ \Psi')(x,b) + (\Phi \circ \Psi'')(x,b) - \Phi(x,b) \\ &= \big((\Phi \circ \Psi') + (\Phi \circ \Psi'' - \Phi\big)(x,b).\end{aligned}$$

3.4.2 Construction d'itérations symétriques

Définition de Φ^{sym}

Beaucoup des itérations importantes comme Gauss-Seidel et relaxation ne sont pas symétriques. Le produit des itérations s'impose comme un outil important qui ne permet de symétriser ces itérations. L'importance de la symétrie est due du fait que plusieurs itérations connues et efficaces sont construites à partir des itérations symétriques (la méthode semi-itérative de Chebychev, ...).

Lemme 3.4.5 *Le produit $\Phi \circ \Psi$ satisfait $(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$.*

Preuve.
La définition (3.1) et (3.2) dit que $(\Phi \circ \Psi)^*$ est caractérisée par

$$N_{(\Phi\circ\Psi)^*}[A] = (N_{(\Phi\circ\Psi)}[A^H])^H.$$

D'autre part, la définition de $N_{\Phi\circ\Psi}[A]$ dans (3.20) implique que

$$\begin{aligned}(N_{\Phi\circ\Psi}[A^H])^H &= \big(N_\Phi[A^H] + N_\Psi[A^H] - N_\Phi[A^H]A^H N_\Psi[A^H]\big)^H \\ &= (N_\Phi[A^H])^H + (N_\Psi[A^H])^H - N_\Psi[A^H]^H A (N_\Phi[A^H])^H,\end{aligned}$$

en utilisant (3.1), (3.2) et (3.20), on obtient

$$(N_{\Phi\circ\Psi}[A^H])^H = N_{\Phi^*}[A] + N_{\Psi^*}[A] - N_{\Psi^*}[A]AN_{\Phi^*}[A] = N_{\Psi^*\circ\Phi^*}[A].$$

d'où

$$N_{(\Phi\circ\Psi)^*}[A] = N_{\Psi^*\circ\Phi^*}[A],$$

par conséquent

$$(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*.$$

■

Pour symétriser une itération $\Phi \in \mathcal{L}$, on considère l'itération

$$\Phi^{\mathrm{sym}} := \Phi^* \circ \Phi. \tag{3.22}$$

Théorème 3.4.6

(a) Φ^{sym} est une itération symétrique, $\Phi^{\mathrm{sym}} \in \mathcal{L}_{\,sym}$ et s'appelle l'itération symétrisée de Φ.

(b) Soit $\Phi \in \mathcal{L}$ associée à $N[A]$ et $W[A]$, on utilise les notations

$$N := N[A], N^{'} := N[A^H]^H \text{ et } W := W[A], W^{'} := W[A^H]^H,$$

en supposant que les inverses $W = N^{-1}, W^{'} = N^{'-1}$ et $(W + W^{'} - A)^{-1}$ existent, alors les matrices associées à Φ^{sym} sont

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{sym}} &= (I - N^{'}A)(I - NA) = I - N^{\mathrm{sym}}A, \\ N^{\mathrm{sym}} &= N + N^{'} - N^{'}AN, \\ W^{\mathrm{sym}} &= W(W + W^{'} - A)^{-1}W^{'}. \end{aligned}$$

(c) Si $A = A^H$, alors

$$N^{'} = N^H, W' = W^H, N^{\mathrm{sym}} = (N^{\mathrm{sym}})^H, W^{\mathrm{sym}} = (W^{\mathrm{sym}})^H,$$

tandis que

$$AM^{\mathrm{sym}} = (M^{\mathrm{sym}})^H A.$$

Preuve.

(a) Selon le Lemme 3.4.5

$$(\Phi^{\mathrm{sym}})^* = (\Phi^* \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Phi^{**},$$

et d'après (3.3), on trouve

$$\Phi^* \circ \Phi^{**} = \Phi^* \circ \Phi = \Phi^{\mathrm{sym}}.$$

(b)

$$\begin{aligned} N^{\mathrm{sym}} = N_{\Phi^{\mathrm{sym}}} &= N_{\Phi^*\circ\Phi} = N_{\Phi^*} + N - N_{\Phi^*}AN \\ &= N[A^H]^H + N - N[A^H]^H AN \\ &= N' + N - N'AN. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{\mathrm{sym}} = M_{\Phi^{\mathrm{sym}}} &= M_{\Phi^*\circ\Phi} = M_{\Phi^*}M_{\Phi} \\ &= (I - N[A^H]^H A)(I - N[A]A) = (I - N'A)(I - NA) \\ &= I - NA - N'A + N'ANA = I - (N + N' - N'AN)A \\ &= I - N^{\mathrm{sym}} A. \end{aligned}$$

On a $W' = N'^{-1}$ alors

$$\begin{aligned} N^{\mathrm{sym}} &= W^{-1} + W'^{-1} - W'^{-1}AW^{-1} = W'^{-1}(W + W' - A)W^{-1} \\ &= (W(W + W' - A)W')^{-1} \end{aligned}$$

d'où

$$W^{\mathrm{sym}} = (N^{\mathrm{sym}})^{-1} = W(W + W' - A)W'.$$

■

Combinaison avec le damping

Pour relier le damping à l'itération symétrisée :

- On construit $\Phi^{\mathrm{sym}} = \Phi^* \circ \Phi$ et ensuite on applique un damping sur Φ^{sym}, le résultat est $(\Phi^{\mathrm{sym}})_\vartheta := \vartheta \cdot \Phi_{\mathrm{sym}}$.
- Au lieu de $\Phi^* \circ \Phi$, nous appliquons le produit à l'itération damped Φ_ϑ, c'est-à-dire $(\Phi_\vartheta)^{\mathrm{sym}} := \Phi_\vartheta^* \circ \Phi_\vartheta$.
- Nous pouvons même combiner les deux approches, on obtient $(\Phi_{\vartheta_1})_{\vartheta_2}^{\mathrm{sym}} = \vartheta_2 \cdot (\vartheta_1 \cdot \Phi)^{\mathrm{sym}}$.

Notons qu'en général $(\Phi^{\mathrm{sym}})_\vartheta \neq (\Phi_\vartheta)^{\mathrm{sym}}$. Dans le cas où $A = A^H$ (voir Théorème 3.4.6), les matrices correspondantes à la deuxième et troisième forme normale sont

$$\begin{aligned} (N^{\mathrm{sym}})_\vartheta &= \vartheta(N + N^H - N^H AN), \\ (W^{\mathrm{sym}})_\vartheta &= \frac{1}{\vartheta} W(W + W^H - A)^{-1} W^H, \\ (N_\vartheta)^{\mathrm{sym}} &= = \vartheta(N + N^H - \vartheta N^H AN), \\ (W_\vartheta)^{\mathrm{sym}} &= \frac{1}{\vartheta} W(W + W^H - \vartheta A)^{-1} W^H. \end{aligned}$$

où N et $W = N^{-1}$ sont celle qui définissent Φ (sans damping).

Implémentation

La définition de N^{sym} ne signifie pas que l'itération Φ^{sym} doit être implémentée via

$$x_{m+1} = x_m + N^{\text{sym}}(Ax_m - b).$$

Parce qu'elle est couteuse. Alors, pour implémenter Φ^{sym}, on suit la définition du produit en tant que la composée de Φ^* et Φ

$$x_m \mapsto x_{m+\frac{1}{2}} := \Phi(x_m, b) \mapsto x_{m+1} := \Phi^*(x_{m+\frac{1}{2}}, b).$$

Remarque 3.4.7 *Comme les itération de Gauss-Seidel et SOR ne sont symétriques, alors leur versions symétrisées sont intéressantes et données par*

$$\Phi_{GS}^{\text{sym}} := \Phi_{\text{backw}}^{\text{GS}} \circ \Phi^{\text{GS}}, \Phi_{\omega}^{\text{sym}} := \Phi_{\omega}^{\text{backw}\,SOR} \circ \Phi_{w}^{SOR},$$

cela revient à (3.22),(3.6) et (3.7). Donc d'après (3.22), on obtient

$$\Phi_{\text{backw GS}} = \Phi^{\text{GS}^*} \; et \; \Phi_{w}^{\text{backw}\,SOR} = \Phi_{\omega}^{\text{SOR}^*}$$

3.5 Transformation (préconditionnement)

On a vu, dans le premier chapitre que la méthode de Richardson se considère comme un prototype de toutes les méthodes linéaires et consistantes. Cette propriété s'obtient par une transformation appropriée en passant à un autre système équivalent. La vitesse de convergence des méthodes itératives dépend de certaines propriétés de la matrice du système. Une façon d'accélérer la convergence est de transformer le problème originale en le préconditionnement à l'aide d'une matrice connue supposée inversible. Cette transformation agissant sur le rayon spectral de la matrice d'itération de sorte que le spectre du la nouvelle matrice d'itération du nouveau système soit contenu dans une région suffisamment petite. Alors, le nouveau système à résoudre est équivalent mais l'objectif est que la nouvelle itération soit plus rapide. On s'intéresse dans cette partie à définir les différentes types de transformations en donnant les propriétés majeures de cette opération sans passer par l'étude de la convergence (ainsi que la vitesse de convergence) du système transformé.

3.5.1 Transformation à gauche

Définition 3.5.1 *La transformation à gauche consiste à multiplier les deux cotés du système*

$$Ax = b$$

par une matrice régulière T_g afin d'avoir un système équivalent

$$T_g A x = T_g b. \tag{3.23}$$

que l'on note $\hat{A}$.

Pour étudier le nouveau système transformé, on utilise deux approches. L'approche naïf consiste à calculer $\hat{A}$ et $\hat{b}$ puis étudier les systèmes (3.23) indépendamment de (2.1). Le deuxième tient compte au système originale en essayant de trouver une méthode itérative du deuxième forme appliquer au système $Ax = b$ dont les matrices sont définies en fonction des matrices du système transformé. Pour cela on note

$$\Phi(x, b, A), N[A], M[A], \text{ etc },$$

la méthode itérative et les matrices du système (2.1), donc

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \Phi(x_m, b, A) \\ &= x_m - N[A](Ax_m - b) \\ &= x_m - W[A]^{-1}(Ax_m - b). \end{aligned}$$

On applique la même méthode Φ, en remplaçant (b, A) par $(\hat{b}, \hat{A})$, on obtient

$$x_{m+1} = x_m - N[\hat{A}](\hat{A}x_m - \hat{b}) = x_m - N[T_gA]T_g(Ax_m - b)$$

cela conduit à définir une nouvelle itération $\hat{\Phi}$ appliquée au système $Ax = b$ définie par

$$x_{m+1} = \hat{\Phi}(x_m, b, A) = x_m - N[T_gA]T_g(Ax_m - b) \tag{3.24}$$

Il est clair d'après (3.24) que l'itération $\hat{\Phi}$ n'a plus besoin de $\hat{A}$, néanmoins, $\hat{A}$ apparait de façon implicite seulement dans $N[T_gA]$.
On définit les matrices

$$\hat{N}[A] := N[T_gA]T_g, \hat{W}[A] := \hat{N}[A]^{-1} = T_g^{-1}W[T_gA] \tag{3.25}$$

l'itération $\hat{\Phi}$ se donne par

$$x_{m+1} = \hat{\Phi}(x_m, b, A) = x_m - \hat{N}[A](Ax_m - b)$$

Notation 3.5.2 *La transformation à gauche par une matrice T_g permet de construit une nouvelle itération $\hat{\Phi}$ à partir de l'itération originale Φ, ce qui justifie la notation suivante*

$$\hat{\Phi} = \Phi \circ T_g \tag{3.26}$$

ce qui exprime l'utilisation de la même itération Φ mais après une transformation par T_g.

Exemple 3.5.3
(a) Toutes méthode itérative Φ se voit comme une méthode de Richardson appliquée au système transformé $\hat{A}x = \hat{b}$ avec $\hat{A} := N_\Phi[A]A, \hat{b} := N_\Phi[A]b$, c'est-à-dire $\Phi = \Phi^{\text{Rich}} \circ N_\Phi[A]$.
(b) Considérons la transformation suivante avec $T_g = A^H$

$$x_{m+1} = x_m - N[A^HA]A^H(Ax_m - b) \tag{3.27}$$

l'itération de Richardson associée à (3.27) se caractérise par $N_\theta^{\text{Rich}}[A^H A] = \theta I$*. En prenant* $\theta = \theta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}+\lambda_{max}}$*, on obtient l'itération de Landweber* $\Phi_{\theta_{opt}}^{Land}$ *définie par* $\Phi_{\theta_{opt}}^{Land} = \Phi_{\theta_{opt}}^{\text{Rich}} \circ A^H$ *avec* $x_{m+1} = x_m - \theta_{opt} A^H(Ax_m - b)$*.*

Proposition 3.5.4 *Les assertion suivantes sont faciles à démontrer.La régularité de* T_g *est la seule hypothèse considérée, néanmoins, certaines propriétés reste vraies même si* T_g *est singulière.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\Phi^*) = \mathcal{D}(\Phi \circ T_g) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : T_g A \in \mathcal{D}(\Phi)\},\\
N_{\Phi \circ T_g}[A] = N_\Phi[T_g A] T_g,\\
W_{\Phi \circ T_g}[A] = T_g^{-1} W_\Phi[T_g A],\\
M_{\Phi \circ T_g}[A] = I - N_{\Phi \circ T_g}[A]A = M_\Phi[T_g A],\\
\rho(M_{\Phi \circ T_g}[A]) = \rho(M_\Phi[T_g A]),\\
(\Phi \circ T_1) \circ T_2 = \Phi \circ (T_1 T_2),\\
\Psi = \Phi \circ T_g \Leftrightarrow \Phi = \Psi \circ T_g^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

L'élément neutre est la matrice d'identité $T_g = I$*.*

Preuve.
(a) $\Phi \in \mathcal{L} \Rightarrow \hat{\Phi} \in \mathcal{L}$,
$\hat{\Phi}$ est la même itération Φ mais appliquée au système $T_g Ax = T_g b$, comme Φ linéaire pour $Ax = b$, donc Φ reste linéaire pour $T_g Ax = T_g b$, alors $\hat{\Phi}$ est linéaire.
(b) On a par définition, appliquer $\hat{\Phi}$ à $Ax = b$ revient à appliquer Φ sur $(T_g A)x = T_g b$, donc $\mathcal{D}(\hat{\Phi}) = \Phi \circ T_g) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : T_g A \in \mathcal{D}(\Phi)\}$.
(c) On a d'après (3.24) : $N_{\hat{\Phi}}[A] = N_{\Phi \circ T_g}[A] = N_\Phi[T_g A] T_g$.
(d) $(\Phi \circ T_1) \circ T_2 = \Phi \circ (T_1 T_2)$

$$\begin{aligned}
\Phi \circ (T_1 T_2)(x, b, A) &= x - N_\Phi[T_1 T_2 A] T_1 T_2 (Ax - b) = x - N_\Phi[T_1(T_2 A)] T_1 (T_2 Ax - T_2 b)\\
&= x - N_\Phi[T_1 \hat{A}] T_1 (\hat{A}x - \hat{b}), (\hat{A} = T_2 A, \hat{b} = T_1 b)\\
&= \Phi \circ T_1(x, \hat{A}, \hat{b}).
\end{aligned}$$

posons $\Psi = (\Phi \circ T_1)$, donc

$$\begin{aligned}
\Phi \circ (T_1 T_2)(x, b, A) &= \Psi(x, \hat{A}, \hat{b}) = x - N_\Psi[\hat{A}](\hat{A}x - \hat{b})\\
&= x - N_\Psi[T_2 A] T_2 (Ax - b) = \Psi \circ T_2(x, b, A)\\
&= (\Phi \circ T_1) \circ T_2(x, b, A)
\end{aligned}$$

donc

$$\Phi \circ (T_1 T_2) = (\Phi \circ T_1) \circ T_2.$$

■

Remarque 3.5.5 *La convergence de $\hat{\Phi}$ se base sur la valeur de $\rho(M_{\hat{\Phi}})$, et d'après (3.28), on déduit que l'on a plus besoin d'analyser $\hat{\Phi}$ (appliquée au $Ax = b$) si la convergence de $\Phi(\cdot, \cdot, T_g A)$ est déjà connue.*

3.5.2 Transformation à droite

Considérons le système $Ax = b$, pour une matrice régulière T_d, on pose

$$x = T_d \hat{x}, \quad \hat{x} \in \mathbb{K}^N.$$

Cela conduit à définir la transformation à droite suivante

$$AT_d \hat{x} = b \tag{3.29}$$

dont l'inconnue est $\hat{x}$.
Il est clair que cette transformation donne un autre système différent est non équivalent au premier système, au contraire de la transformation à gauche.
Résoudre le système (3.29) peut se faire de deux manière. La première consiste à calculer $\hat{A}$ dans

$$\hat{A}\hat{x} = b \quad \text{avec} \quad \hat{A} := AT_d.$$

Puis appliquer une méthode itérative non nécessairement celle appliquée au premier système.
La deuxième est d'appliquer la même itération Φ sur le nouveau système. Alors $\Phi(\cdot, \cdot, \hat{A})$ s'écrit

$$\hat{x}_{m+1} = \Phi(\hat{x}_m, b, \hat{A}) = \hat{x}_m - N_\Phi[\hat{A}](\hat{A}\hat{x}_m - b) = \hat{x}_m - N_\Phi[AT_d](AT_d\hat{x}_m - b).$$

Posons $x_m := T_d \hat{x}_m$, on obtient

$$x_{m+1} = x_m - T_d N_\Phi[AT_d](Ax_m - b).$$

Cette nouvelle itération que l'on note $\hat{\Phi}$ appliquée au système $Ax = b$ est donnée par ses matrices

$$\hat{N}[A] := T_d N_\Phi[AT_d],$$
$$\hat{W}[A] := W_\Phi[AT_d]T_d^{-1}.$$

De façon analogue à (3.26), on note

$$\hat{\Phi} = T_d \circ \Phi.$$

Remarque 3.5.6 *On note $e_m = x_m - x$ l'erreur à l'itération m du système $Ax = b$, associé à la méthode $\hat{\Phi}(x_m, b, A)$.*
On a

$$\hat{x}_m = T_d^{-1} x_m \quad \textit{et} \quad \hat{x} = T_d^{-1} x,$$

alors

$$e_m = x_m - x = T_d(\hat{x}_m - \hat{x}) = T_d\hat{e}_m$$

où $\hat{e}_m = \hat{x}_m - \hat{x}$ *est l'erreur à l'itération* m *du système* $AT_d\hat{x} = b$ *associée à la méthode* $\Phi(\hat{x}_m, b, AT_d$.

Citons deux exemples de la transformation à droite :

(a) $T_d = A^H$ *: l'itération transformée se donne par*

$$x_{m+1} = A^H \circ \Phi(x_m, b, A) = x_m - A^H N_\Phi[AA^H](Ax - b)$$

(b) On choisie $T_d = A^H$ *et* $\Phi = \Phi_\theta^{\text{Rich}}$, *alors* $N_\Phi[A^H A] = N_\theta^{\text{Rich}}[A^H A] = \theta I$. *Dans ce cas* $\hat{\Phi} = A^H \circ \Phi$ *est donnée par*

$$x_{m+1} = x_m - \theta A^H(Ax_m - b).$$

Remarque 3.5.7 *On suppose que* A *soit régulière, on choisit* $T_d = A^H$ *et on pose* $\hat{\Phi} = T_d \circ \Phi$, *alors*

(a) Si $\Phi \in \mathcal{L}_{sym}$ *alors* $M_{\hat{\Phi}}^H = M_{\hat{\Phi}}$. *En effet, on a*

$$\Phi \in \mathcal{L}_{sym} \Leftrightarrow N[S] = N[(S)^H]^H \text{ pour } S \in \mathcal{D}(\Phi).$$

$$\begin{aligned}
M_{\hat{\Phi}} &= I - N_{\hat{\Phi}}[A]A = I - A^H N_\Phi[AA^H]A \\
&\underset{S=AA^H}{\overset{\Phi\in\mathcal{L}_{sym}}{=}} I - A^H N_\Phi[(AA^H)^H]^H A = \big(I - A^H N_\Phi[(AA^H)^H]A\big)^H \\
&= \big(I - A^H N_\Phi[AA^H]A\big)^H = M_{\hat{\Phi}}^H.
\end{aligned}$$

(b) Si $\Phi \in \mathcal{L}_{pos}$ *alors* $\hat{\Phi} \in \mathcal{L}_{>0}$. *En effet, puisque* A *est régulière* AA^H *est définie positive*

$$\Phi \in \mathcal{L}_{pos} \Leftrightarrow \big(\Phi \in \mathcal{L}_{sym} \text{ et } S > 0 \Rightarrow N_\Phi[S] > 0, \text{ pour toute } S \in \mathcal{D}(\Phi)\big),$$

pour $S = AA^H$, *on obtient*

$$N_\Phi[AA^H] > 0 \overset{(1.5)}{\Leftrightarrow} A^H N_\Phi[AA^H]A > 0 \Leftrightarrow N_{\hat{\Phi}}[A]A > 0,$$

donc

$$\hat{\Phi} \in \mathcal{L}_{>0}.$$

Proposition 3.5.8 *Soient* $\Phi \in \mathcal{L}$ *et* $T_d \circ \Phi \in \mathcal{L}$. *Les assertions suivantes ont lieu*

$$\mathcal{D}(T_d \circ \Phi) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : AT_d \in \mathcal{D}(\Phi)\},$$

$$N_{T_d\circ\Phi}[A] = T_d N_\Phi[AT_d],$$

$$W_{T_d \circ \Phi}[A] = W_\Phi[AT_d]T_d^{-1},$$

$$M_{T_d \circ \Phi}[A] = I - N_{T_d \circ \Phi}[A]A = T_d M_\Phi[AT_d]T_d^{-1},$$

$$\rho(M_{T_d \circ \Phi}[A]) = \rho(M_\Phi[AT_d]),$$

$$T_2 \circ (T_1 \circ \Phi) = (T_2 T_1) \circ \Phi, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}).$$

$$\Psi = T_d \circ \Phi \Leftrightarrow \Phi = T_d^{-1} \circ \Psi.$$

3.5.3 Transformation centrée

Cette transformation consiste à appliquer à la fois, une transformation à gauche et à droite sur le système

$$Ax = b$$

ça donne $x = T_d \hat{x}$ et $T_g Ax = T_g b$. Le nouveau système transformé est

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b} \quad \text{avec} \quad \hat{A} = T_g A T_d \quad \text{et} \quad \hat{b} = T_g b.$$

De façon analogue à ce qu'est fait précédemment, on obtient

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{\Phi}(\hat{x}, \hat{b}, \hat{A}) = \hat{x}_m - N_\Phi[\hat{A}](\hat{A}\hat{x}_m - \hat{b}) \Rightarrow T_d \hat{x}_{m+1} = T_d \hat{x}_m - T_d N_\Phi[T_g A T_d] T_g (A T_d \hat{x} - b),$$

ce qui conduit à définir la nouvelle itération $\hat{\Phi}$ appliquée au système $Ax = b$ par

$$x_{m+1} = \hat{\Phi}(x_m, b, A) = x_m - T_d N_\Phi[T_g A T_d] T_g (Ax - b),$$

avec

$$N_{\hat{\Phi}}[A] = T_d N_\Phi[T_g A T_d] T_g,$$

de façon similaire à (3.26), on note $\hat{\Phi} = T_d \circ \Phi \circ T_g$.

Remarque 3.5.9 *Généralement, la transformation à un seul coté (unilatérale) n'hérite pas la symétrie de* Φ *, par contre, pour* $T_d = T_g^H$*, la transformation centrée la garde. En effet,* $\hat{\Phi}$ *est symétrique si et seulement si* $N_{\hat{\Phi}}[A] = N_{\hat{\Phi}}[A^H]^H$*, supposons que* Φ *soit symétrique, on a*

$$\begin{aligned}
N_{\hat{\Phi}}[A^H]^H &= (T_d N_\Phi[T_g A^H T_d] T_g)^H = T_g^H N_\Phi[T_g A^H T_d]^H T_g \\
&= T_g^H N_\Phi[T_g A^H T_g^H]^H T_g = T_g^H N_\Phi[(T_g A T_g^H)^H] T_g \\
&\underset{N[S^H]^H = N[S]}{\overset{\Phi^{\text{sym}}}{=}} T_g^H N_\Phi[T_g A T_g^H] T_g = T_d N_\Phi[T_g A T_d] T_g \\
&= N_{\hat{\Phi}}[A].
\end{aligned}$$

Proposition 3.5.10 *Si $\Phi \in \mathcal{L}$, et $\hat{\Phi} := T_d \circ \Phi \circ T_g \in \mathcal{L}$. Les assertions suivantes ont lieu*

$$\mathcal{D}(T_d \circ \Phi \circ T_g) = \{A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}) : T_g A T_d \in \mathcal{D}(\Phi)\},$$

$$N_{\hat{\Phi}}[A] = T_d N_\Phi [T_g A T_d] T_g,$$

$$W_{\hat{\Phi}}[A] = T_g^{-1} W_\Phi [T_g A T_d] T_d^{-1},$$

$$M_{\hat{\Phi}}[A] = I - N_{\hat{\Phi}}[A]A = T_d M_\Phi [T_g A T_d] T_d^{-1},$$

$$\rho(M_{\hat{\Phi}}[A]) = \rho(M_\Phi [T_g A T_d]),$$

$$T_2^{'} \circ (T_1^{'} \circ \Phi \circ T_1^{''}) \circ T_2^{''} = (T_2^{'} T_1^{'}) \circ \Phi \circ (T_1^{''} T_2^{''}) \quad T_1^{'}, T_1^{''}, T_2^{'}, T_2^{''} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K}),$$

$$\Psi = T_d \circ \Phi \circ T_g \Leftrightarrow \Phi = T_d^{-1} \circ \Psi \circ T_g^{-1}.$$

Chapitre 4

Analyse des itérations définies positives

La positivité peut se représenter dans plusieurs sens selon la propriété supposée sur les matrices définissant la méthode itérative (les trois formes normales). Ce chapitre donne quelques critères de convergence sur les itérations linéaires qui possèdent certaines propriétés de positivité. Plusieurs résultats de convergence concernant ces cas sont obtenus par un damping approprié tout en bénéficiant des résultats établis dans les chapitres précédents.

4.1 Différents cas de positivité

Dans cette section, on présente les cas possibles de positivité liés à une méthode itérative linéaire Φ définie par ses matrices $M = M[A], N = N[A]$ et $W = W[A]$. Les différents sens de positivité se classent en six cas

• **Cas 1 :** spectre positive de NA.

La condition la plus faible considérée dans ce chapitre est

$$\operatorname{spec}(NA) \subset]0, +\infty[. \tag{4.1}$$

• **Cas 2 :** $\Phi \in \mathcal{L}_{>0}$: directement définie positive.

La positivité dans ce cas est représenté par

$$NA > 0. \tag{4.2}$$

Cette propriété n'exige aucune hypothèse sauf la régularité de A.

• **Cas 3 :** $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$: définie positive.

Ce cas représente le sens usuel de positivité d'une méthode itérative appliquée à une matrice définie positive. Cela donne

$$A > 0, \quad N > 0, \quad W > 0. \tag{4.3}$$

Lemme 4.1.1 *Supposons que (4.1) soit vérifiée, alors chacune des conditions suivantes assure la propriété (4.1)*
(a) $\Phi \in \mathcal{L}_{>0}$ *(cas 2).*
(b) $A > 0$ *et* $N > 0$.
(c) $\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}}$ *(cas 3).*

Preuve
(a) Φ est directement définie positive si

$$\begin{aligned} A \text{ régulière } &\Rightarrow NA > 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{spec}(NA) \subset \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

(b) Si $A > 0$ et $N > 0$, donc d'après la Remarque 1.4.8, le produit NA n'a que des valeurs propres strictement positives, c'est-à-dire $\operatorname{spec}(NA) \subset \mathbb{R}_+^*$.
(c)

$$\Phi \in \mathcal{L}_{\text{pos}} \Rightarrow N > 0, A > 0 \overset{(b)}{\Rightarrow} \operatorname{spec}(NA) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

■

Remarque 4.1.2
(a) Les conditions (4.2) et (4.3) implique que $\operatorname{spec}(M) \subset]-\infty, 1[$. *En effet, on a* $M = I - NA$ *donc* $\operatorname{spec}(M) = \{1\} - \operatorname{spec}(NA)$, *mais* $\operatorname{spec}(NA) \subset \mathbb{R}_+^*$, *donc l'inclusion est vérifiée.*
(b) (4.2) implique que M *est hermitienne et* $M < I$. *En effet, on a*

$$M^H = (I - NA)^H = I - (NA)^H = I - NA = M.$$

De plus

$$I - M = I - I + NA = NA > 0.$$

Proposition 4.1.3 *Supposons que* Φ *soit convergente (c-à-d* $\rho(M) < 1$*), alors*
(a) Sous la condition (4.2) la convergence est monotone par rapport à $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_{NA}$ *et* $\|\cdot\|_{(NA)^{-1}}$, *de plus*

$$\rho(M) = \|M\|_2 = \|M\|_{NA} = \|M\|_{(NA)^{-1}}.$$

(b) Sous la condition (4.3) est vérifie, la convergence est monotone par rapport à $\|\cdot\|_A$ *et* $\|\cdot\|_W$, *de plus*

$$\rho(M) = \|M\|_A = \|M\|_W.$$

preuve.
(a) On a $NA > 0$ et $(NA)^{-1} > 0$ alors les normes $\|\cdot\|_{NA}$ et $\|\cdot\|_{(NA)^{-1}}$ sont bien définies. De plus

$$\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^H M)} = \sqrt{\rho^2(M)} = \rho(M) < 1$$

et

$$\begin{aligned}\|M\|_{NA} &= \|(NA)^{\frac{1}{2}}M(NA)^{\frac{-1}{2}}\|_2 = \|(NA)^{\frac{1}{2}}(I-NA)(NA)^{\frac{-1}{2}}\|_2 \\ &= \|I-NA\|_2 = \|M\|_2\end{aligned}$$

ce qui établit (a).
(b) De façon similaire à (a). ■

Dans ce qui suit, pour une matrice $A>0$, on note

$$\widehat{M} := A^{\frac{1}{2}}MA^{\frac{-1}{2}} = I - A^{\frac{1}{2}}NA^{\frac{1}{2}} = I - A^{\frac{1}{2}}W^{-1}A^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Et pour $W>0$, on note

$$\widetilde{M} := W^{\frac{1}{2}}MW^{\frac{-1}{2}} = I - W^{\frac{-1}{2}}AW^{\frac{-1}{2}} = I - N^{\frac{1}{2}}AN^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Les matrices $M, \widehat{M}$ et $\widetilde{M}$ sont semblables, elles ont alors le même rayon spectral. De plus $\widehat{M}$ et $\widetilde{M}$ sont hermitiennes, alors les égalités dans (b) de la Proposition 4.1.3 peut être exprimées par

$$\rho(M) = \rho(\widehat{M}) = \|\widehat{M}\|_2 = \|M\|_A, \tag{4.6}$$

$$\rho(M) = \rho(\widetilde{M}) = \|\widetilde{M}\|_2 = \|M\|_W. \tag{4.7}$$

• **Cas 4 :** $W+W^H>0$.
les propriétés $N+N^H>0$ et $W+W^H>0$ sont équivalentes. En effet

$$N+N^H>0 \overset{(1.5)}{\Longleftrightarrow} W^H(N+N^H)W>0 \overset{W=N^{-1}}{\Longleftrightarrow} W+W^H>0.$$

• **Cas 5 :** Itération symétrisée $\Phi^{\text{sym}} \in \mathcal{L}_{\text{sym}}$.
L'itération $\Phi^{\text{sym}} = \Phi^* \circ \Phi$ est celle définie dans la section 3.4.2. Si $A=A^H$, le Théorème 3.4.6 implique

$$\begin{aligned} M^{\text{sym}} &= \big(I-N^HA\big)\big(I-NA\big) = I - N^{\text{sym}}A, \\ N^{\text{sym}} &= N + N^H - N^HAN, \\ W^{\text{sym}} &= W\big(W+W^H-A\big)^{-1}W^H. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Où N et W définissent l'itération Φ, tandis que $M^{\text{sym}}, N^{\text{sym}}$ et W^{sym} sont les matrices associées à Φ^{sym}.

• **Cas 6 :** décomposition hermitienne de A.
Une matrice non hermitienne A peut être divisée en $A=A_0+iA_1$, où A_1 et A_2 sont définies dans (2.47). Un résultat de convergence est établi sous certaines conditions de positivité sur A_0.

Le lemme suivant donne un outil auxiliaire permettant de démontrer quelques résultats de convergence ainsi que certaines estimations.

Lemme 4.1.4 *Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha \leq \beta$. On suppose que (4.8) soit vérifiée, alors*

$$0 < \alpha W \leq A \leq \beta W \Leftrightarrow \mathrm{spec}\,(M) \subset [1-\beta, 1-\alpha], \tag{4.9}$$

$$0 < \alpha W < A < \beta W \Leftrightarrow \mathrm{spec}\,(M) \subset]1-\beta, 1-\alpha[, \tag{4.10}$$

$$2W > A > 0 \Leftrightarrow \rho(M) < 1. \tag{4.11}$$

Preuve.
(a) On sait que les matrices $\widehat{M} = A^{\frac{1}{2}} M A^{\frac{-1}{2}} = I - A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}}$ et M sont semblable, alors $\mathrm{spec}\,(\widehat{M}) = \mathrm{spec}\,(M)$. Comme $\mathrm{spec}\,(M) \subset [1-\beta, 1-\alpha]$, alors d'après (1.13) et l'égalité $\widehat{M}^H = \widehat{M}$

$$(1-\beta) I \leq \widehat{M} = I - A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}} \leq (1-\alpha) I \overset{(1.8)}{\Rightarrow} (1-\beta) A^{-1} \leq A^{-1} - N \leq (1-\alpha) A^{-1}.$$

Par la définition de la relation " $\leq$ " on trouve que

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)A^{-1} - (A^{-1} - N) \quad \text{et} \quad A^{-1} - N - (1-\beta)A^{-1} &\ \text{sont semi-définies positives} \\
\Leftrightarrow N - \alpha A^{-1} \quad \text{et} \quad \beta A^{-1} - N \quad &\text{sont semi-définies positives} \\
\Leftrightarrow N \geq \alpha A^{-1} > 0 \quad \text{et} \quad \beta A^{-1} &\geq N > 0 \\
\overset{(1.15)}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha W \leq A \text{ et } 0 &< A \leq \beta W \\
\Leftrightarrow 0 < \alpha W \leq A &\leq \beta W.
\end{aligned}$$

(b) Il suffit de remplacer " $\leq$ " par " $<$ " dans (a).
(c) Découle de (b) en prenant des valeurs appropriées de α et β ($\beta = 2$ et $0 < \alpha < 1$ assez petit). ∎

Théorème 4.1.5
(a) On suppose que

$$2W > A > 0, \tag{4.12}$$

alors, l'itération $x_{m+1} = x_m - W^{-1}(Ax_m - b)$ converge, de plus, la convergence est monotone par rapport à la norme $\|.\|_A$ et la norme $\|.\|_W$ c'est-à-dire

$$\rho(M) = \|M\|_A = \|M\|_W < 1. \tag{4.13}$$

(b) Pour α et β réel avec $0 < \alpha \leq \beta$, supposons que

$$0 < \alpha W \leq A \leq \beta W. \tag{4.14}$$

Alors le spectre de M est réel et

$$\mathrm{spec}\,(M) \subset [1-\beta, 1-\alpha]. \tag{4.15}$$

De plus

$$\rho(M) = \|M\|_A = \|M\|_W \leq \max\left\{|1-\alpha|, |1-\beta|\right\}. \tag{4.16}$$

Preuve.
(a) La convergence de l'itération $x_{m+1} = x_m - W^{-1}(Ax_m - b)$ est une conséquence directe de (4.11). La propriété (4.13) découle de (4.6) et (4.7).
(b) Il suffit d'utiliser (4.9) pour avoir (4.15). De plus, la condition (4.12) est un cas particulier de (4.14), donc selon (4.13)

$$\|M\|_A = \|M\|_W = \rho(M) \overset{(4.15)}{\leq} \max\{|1-\alpha|, |1-\beta|\}.$$

■

4.2 Analyse de convergence

4.2.1 Cas 1, Cas 2 et Cas 3

L'idée ou l'approche utilisée

Notre but consiste à résoudre le système $Ax = b$, en utilisant une méthode itérative Φ.
Les trois cas considérés impliquent (tous) que

$$spec(NA) \subset \mathbb{R}_+^* \quad \text{car } NA > 0.$$

La convergence de Richardson est établie pour les systèmes dont le spectre de la matrice est dans $\mathbb{R}_+^*$. Cela nous conduit à chercher une autre système équivalent à $Ax = b$ où on peut utiliser les résultats de convergence de Richardson. On considère l'itération damped Φ_ϑ de Φ donc

$$\begin{aligned} x_{m+1} = \Phi_v(x_m, b, A) &= x_m - \vartheta N[A](Ax_m - b) \\ &= x_m - \vartheta(N[A]Ax_m - N[A]b) \\ &= \Phi_\vartheta^{\text{Rich}}(x_m, Nb, NA). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Alors, Φ_v n'est que l'itération de Richardson appliquée au système $NAx = Nb$. En basant sur cette idée, on va analyser la convergence des situations considérés ci-dessus (cas 1-3).

Remarque 4.2.1 *Les systèmes $Ax = b$ et $NAx = Nb$ sont équivalents (car N est inversible), donc la solution fournie par Φ_ϑ est aussi une solution de $Ax = b$.*

Le théorème suivant donne les différents résultats de convergence de l'itération Φ_ϑ définie par (4.17) sous les hypothèses considérées dans les cas $1 - 3$.

Théorème 4.2.2 *Soit $\vartheta \in \mathbb{R}$ et soient $\lambda_{\max}$ (resp. $\lambda_{\min}$) la plus grande (resp. petite) valeur propre de NA.*
(a) Cas 1 : si $\text{spec}\,(NA) \subset]0, +\infty[$, *alors*

$$\Phi_\vartheta \textit{ converge } \Leftrightarrow 0 < \vartheta < 2/\lambda_{\max}. \tag{4.18}$$

Et on a

$$\vartheta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \qquad \textit{avec } \rho(M_{\vartheta_{\text{opt}}}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \tag{4.19}$$

(b) Cas 2 : si $NA > 0$, alors

$$\Phi_\vartheta \textit{ converge } \Leftrightarrow 0 < \vartheta < 2/\|NA\|_2. \tag{4.20}$$

La convergence est monotone par rapport à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, et à la norme $\|\cdot\|_{NA}$:

$$\rho(M_\vartheta) = \|M_\vartheta\|_2 = \|M_\vartheta\|_{NA} < 1. \tag{4.21}$$

(c) Cas 3 : supposons que (4.3) soit vérifiée, alors

$$\Phi_\vartheta \textit{ converge } \Leftrightarrow 0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{max}} \tag{4.22}$$

avec

$$\lambda_{max} := \|N^{\frac{1}{2}} A N^{\frac{1}{2}}\|_2 = \|A^{\frac{1}{2}} N A^{\frac{1}{2}}\|_2 = \rho(NA). \tag{4.23}$$

Une formulation équivalente de la condition (4.22) utilisant $W = N^{-1}$ est

$$0 < \vartheta A < 2W.$$

De plus

$$\rho(M_\vartheta) = \|M_\vartheta\|_A = \|M_\vartheta\|_W = max\{|1 - \vartheta\lambda_{min}|, |1 - \vartheta\lambda_{max}|\}. \tag{4.24}$$

La valeur optimale de ϑ_{opt} qui minimise $\rho(M_\vartheta)$ est dans (4.19).

Preuve.
(a) Il est clair que

$$\Phi_\vartheta(x, b, A) = \Phi_\vartheta^{\text{Rich}}(x, Nb, NA),$$

d'autre part, tous les cas $1 - 3$ impliquent que

$$\text{spec}\,(NA) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

En tenant compte du Théorème 2.3.4 (appliqué au système $NAx = Nb$) on déduit que chacun des cas $1 - 3$ justifie (4.18) et (4.19).
(b) on a

$$\begin{aligned} NA > 0 &\Rightarrow (NA)^H = NA \\ &\overset{\text{spec}\,(NA)\subset\mathbb{R}_+^*}{\Rightarrow} \rho(NA) = \lambda_{\max} = \|NA\|_2 \\ &\Rightarrow 0 < \vartheta < 2/\|NA\|_2. \end{aligned}$$

On a

$$M_\vartheta^H = (I - N_\vartheta A)^H = (I - \vartheta NA)^H \underset{NA>0}{\overset{\vartheta\in\mathbb{R}}{=}} I - \vartheta NA = M_\vartheta$$

donc $\rho(M_\vartheta) = \|M_\vartheta\|_2$. De plus, la norme $\|\cdot\|_{NA}$ est bien définie car $NA > 0$, alors

$$\begin{aligned}\|M_\vartheta\|_{NA} &= \|(NA)^{\frac{1}{2}} M_\vartheta (NA)^{\frac{-1}{2}}\|_2 \\ &= \|(NA)^{\frac{1}{2}}(I - \vartheta NA)(NA)^{\frac{-1}{2}}\|_2 \\ &= \|I - \vartheta NA\|_2 = \|M_\vartheta\|_2.\end{aligned}$$

(c) On pose $\widehat{NA} := A^{\frac{1}{2}} NAA^{\frac{-1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} NA^{\frac{1}{2}}$, donc $(\widehat{NA})^H = \widehat{NA}$ et par suite

$$\lambda_{\max} = \rho(\widehat{NA}) = \|\widehat{NA}\|_2 = \|A^{\frac{1}{2}} NA^{\frac{1}{2}}\|_2,$$

mais NA et $\widehat{NA}$ sont semblables, alors

$$\lambda_{\max} = \rho(NA) = \|A^{\frac{1}{2}} NA^{\frac{1}{2}}\|_2.$$

D'autre part, si on pose $\widetilde{NA} = W^{\frac{1}{2}} NAW^{\frac{-1}{2}}$, alors $\widetilde{NA}$ ressemble à NA de plus

$$\begin{aligned}\widetilde{NA} &\overset{N=W^{-1}}{=} W^{\frac{-1}{2}} AW^{\frac{-1}{2}} \\ &\Rightarrow \widetilde{NA}^H = \widetilde{NA}\end{aligned}$$

donc

$$\rho(NA) = \rho(\widetilde{NA}) = \|\widetilde{NA}\|_2 = \|W^{\frac{-1}{2}} AW^{\frac{-1}{2}}\|_2 = \|N^{\frac{1}{2}} AN^{\frac{1}{2}}\|_2.$$

On a

$$\begin{aligned}0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{\max}} &\underset{NA>0}{\overset{\rho(NA)=\lambda_{\max}}{\iff}} 0 < \rho(NA) < \frac{2}{\vartheta} \\ &\overset{(1.13)}{\iff} 0 < NA < \frac{2}{\vartheta} I \\ &\iff 0 < \vartheta A < 2N^{-1} \\ &\iff 0 < \vartheta A < 2W.\end{aligned}$$

Pour démontrer(4.24), on suit la même méthode utilisé dans (4.21) tout en bénéficiant de (4.10). ■

4.2.2 Cas 4 : $W + W^H$ ou $N + N^H$ définie positive

Tout d'abord, nous traitons le cas

$$W + W^H > A > 0. \tag{4.25}$$

Théorème 4.2.3 *Sous la condition (4.25), la matrice W est régulière et l'itération*

$$x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = x_m - N(Ax_m - b)$$

converge de façon monotone par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$

$$\rho(M) \leq \|M\|_A < 1.$$

Preuve.
Pour la singularité de W, on suppose qu'il existe $x \neq 0$ tel que $Wx = 0$, donc

$$\begin{aligned} 0 < \langle (W + W^H)x, x\rangle &= \langle Wx, x\rangle + \langle x, Wx\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle (W + W^H)x, x\rangle = 0 \\ &\Rightarrow W + W^H \text{ n'est pas définie positive} \end{aligned}$$

ce qui contredit (4.25).
Comme $\rho(M) \leq \|M\|_A$, il suffit de montrer $\|M\|_A < 1$ pour assurer la convergence (voir le Théorème 2.2.12). On a d'après (4.4)

$$\begin{aligned} (\widehat{M})^H\widehat{M} &= (I - A^{\frac{1}{2}}W^{-H}A^{\frac{1}{2}})(I - A^{\frac{1}{2}}W^{-1}A^{\frac{1}{2}}) \\ &= I - A^{\frac{1}{2}}W^{-H}(W + W^H)W^{-1}A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}W^{-H}AW^{-1}A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

on a

$$W + W^H > A \overset{(1.9)}{\Longrightarrow} W^{-H}(W + W^H)W^{-1} > W^{-H}AW^{-1}$$

donc

$$(\widehat{M})^H\widehat{M} < I - A^{\frac{1}{2}}W^{-H}AW^{-1}A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}W^{-H}AW^{-1}A^{\frac{1}{2}} = I$$

mais $(\widehat{M})^H\widehat{M} > 0$, donc

$$\begin{aligned} &0 < (\widehat{M})^H\widehat{M} < I \\ &\overset{(1.13)}{\Longrightarrow} \rho((\widehat{M})^H\widehat{M}) < 1 \end{aligned}$$

donc

$$\|M\|_A = \|\widehat{M}\|_2 = \rho((\widehat{M})^H\widehat{M})^{\frac{1}{2}} < 1.$$

■

Proposition 4.2.4 *La condition $W + W^H > A$ est nécessaire pour garantir $\|M\|_A < 1$.*

Preuve.
Supposons que $W + W^H - A$ n'est pas définie positive, alors $W + W^H - A$ possède au moins une valeur propre $\lambda \leq 0$. La matrice $(\widehat{M})^H\widehat{M}$ égale aussi à

$$(\widehat{M})^H\widehat{M} = I - A^{\frac{1}{2}}W^{-H}(W + W^H - A)W^{-1}A^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\operatorname{spec}\left((\widehat{M})^H\widehat{M}\right) = \{1\} - \operatorname{spec}\{A^{\frac{1}{2}}W^{-H}(W + W^H - A)W^{-1}A^{\frac{1}{2}}\}$$

comme $\lambda \leq 0$, alors

$$\exists \mu \in \operatorname{spec}((\widehat{M})^H\widehat{M}) : |\mu| \geq 1$$

donc

$$\|M\|_A = \|\widehat{M}\|_2 = \rho\big((\widehat{M})^H\widehat{M}\big)^{\frac{1}{2}} \geq 1$$

ce qui contredit l'hypothèse $\|M\|_A < 1$. ■

Corollaire 4.2.5 *On suppose que $W + W^H > 0$ et $A > 0$. On peut toujours avoir la condition (4.25) mais sur l'itération damped, c'est-à-dire, au lieu de (4.25) on obtient $W_\vartheta^H + W_\vartheta > A > 0$ pour un ϑ approprié.*

Preuve.
On choisit

$$\vartheta < \frac{\lambda_{\min}(W + W^H)}{\lambda_{\max}(A)}$$

où $\lambda_{\min}(W + W^H)$ est la plus petite valeur propre de $W + W^H$ et $\lambda_{\max}(A) = \rho(A)$. Alors

$$\begin{aligned}
\vartheta < \frac{\lambda_{\min}(W + W^H)}{\lambda_{\max}(A)} &\Leftrightarrow \frac{1}{\vartheta}\lambda_{\min}(W + W^H) - \lambda_{\max}(A) > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_{\min}(\frac{1}{\vartheta}W + \frac{1}{\vartheta}W^H) - \lambda_{\max}(A) > 0 \\
&\overset{W_\vartheta = \frac{1}{\vartheta}W}{\Longleftrightarrow} \lambda_{\min}(W_\vartheta + W_\vartheta^H) - \lambda_{\max}(A) > 0 \\
&\underset{\text{hermitienne}}{\overset{W_\vartheta + W_\vartheta^H - A}{\Longleftrightarrow}} W_\vartheta + W_\vartheta^H - A > 0 \\
&\Leftrightarrow W_\vartheta + W_\vartheta^H > A > 0.
\end{aligned}$$

■

4.2.3 Cas 5 :Itération symétrique Φ^{sym}

Dans l'étude du cas 5, on utilise les notations définies dans (4.8) pour l'itération $\Phi^{\text{sym}} = \Phi^* \circ \Phi$. L'itération Φ est définie par les matrices M et N.

Proposition 4.2.6 *Supposons que $A > 0$, alors*

$$\rho(M^{\text{sym}}) = \|\widehat{M^{\text{sym}}}\|_2 = \|M^{\text{sym}}\|_A \text{ et } \operatorname{spec}(M^{\text{sym}}) \subset [0, \infty[$$

où

$$\widehat{M^{\text{sym}}} = A^{\frac{1}{2}} M^{\text{sym}} A^{\frac{-1}{2}} = (\widehat{M})^H \widehat{M} \geq 0.$$

La relation entre M et M^{sym} se donne comme suit

$$\rho(M^{\text{sym}}) = \|M\|_A^2 = \|\widehat{M}\|_2^2 \qquad (\widehat{M} := A^{\frac{1}{2}} M A^{\frac{-1}{2}}). \tag{4.26}$$

Si Φ^{sym} est convergente, sa convergence est monotone par rapport à la norme $\|.\|_A$, de plus

$$\operatorname{spec}(M^{\text{sym}}) \subset [0, 1[.$$

Preuve.
On démontre d'abord que $\widehat{M^{\text{sym}}} = (\widehat{M})^H \widehat{M}$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{M^{\text{sym}}} &= A^{\frac{1}{2}} M^{\text{sym}} A^{\frac{-1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}} (I - N^H A)(I - NA) A^{\frac{-1}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\widehat{M})^H \widehat{M} &= A^{\frac{-1}{2}} M^H A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} M A^{\frac{-1}{2}} \\
&= A^{\frac{-1}{2}} M^H A M A^{\frac{-1}{2}} \\
&\overset{A^H=A}{=} A^{\frac{-1}{2}} (I - AN^H) A (I - NA) A^{\frac{-1}{2}} \\
&= (A^{\frac{1}{2}} - A^{\frac{1}{2}} N^H A)(I - NA) A^{\frac{-1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}} (I - N^H A)(I - NA) A^{\frac{-1}{2}} \\
&= \widehat{M^{\mathrm{sym}}}.
\end{aligned}$$

Comme $(\widehat{M})^H \widehat{M} \geq 0$ alors $\widehat{M^{\mathrm{sym}}}$ l'est aussi. Le fait que $\widehat{M^{\mathrm{sym}}}$ est hermitienne implique

$$\rho(\widehat{M^{\mathrm{sym}}}) = \|\widehat{M^{\mathrm{sym}}}\|_2 = \|(\widehat{M})^H \widehat{M}\|_2 = \|\widehat{M}\|_2^2 = \|M\|_A^2$$

de plus M^{sym} et $\widehat{M^{\mathrm{sym}}}$ sont semblables, donc

$$\rho(\widehat{M^{\mathrm{sym}}}) = \rho(M^{\mathrm{sym}}).$$

Si Φ^{sym} est convergente, alors $\rho(M^{\mathrm{sym}}) < 1$, d'après l'égalité (4.26) la convergence est monotone par rapport à $\|\cdot\|_A$. ■

Théorème 4.2.7 *L'égalité (4.26) implique que Φ^{sym} est convergente si et seulement si la convergence de Φ est monotone par rapport à $\|\cdot\|_A$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
\Phi^{\mathrm{sym}} \text{ converge } &\iff \rho(M^{\mathrm{sym}}) < 1 \\
&\overset{(4.26)}{\iff} \|M_\Phi\|_A^2 < 1 \\
&\iff \|M_\Phi\|_A < 1.
\end{aligned}$$

■

4.2.4 Cas 6 : décomposition hermitienne de A

Quelques résultats de convergence concernant la décomposition hermitienne sont donnés dans les Théorèmes 2.3.8 et 2.3.10. Dans le cas 6, la condition $A > 0$ est affaiblie par $A_0 > 0$. Afin d'éviter l'ambiguïté, l'itération Φ se donne par ces matrices $N = N[A], W = W[A]$ et $M = M[A]$

$$x_{m+1} = \Phi(x_m, b, A) = x_m - N(Ax_m - b)$$

alors l'itération damped Φ_ϑ est définie par N_ϑ, W_ϑ et M_ϑ.

Théorème 4.2.8 *Supposons que* $A = A_0 + iA_1$ *(voir 2.47) avec* $A_0 > 0$ *et* $W > 0$*, la matrice de la troisième forme normale de* $\Phi(\cdot,\cdot,A)$*. Les constantes optimales* $0 < \alpha \leq \beta$ *et* $\tau \geq 0$ *dans*

$$\alpha W \leq A_0 \leq \beta W, \qquad -\tau W \leq A_1 \leq \tau W \tag{4.27}$$

sont $\alpha = \lambda_{\min}(NA_0), \beta = \lambda_{\max}(NA_0)$ *et* $\tau = \rho(NA_1)$ *. Alors l'itération damped (3.13) converge pour*

$$0 < \vartheta < \frac{2\alpha}{\alpha\beta + \tau^2}$$

de façon monotone par rapport à la norme $\|\cdot\|_W$

$$\rho(M_\vartheta) \leq \|M_\vartheta\|_W \leq \frac{1}{2}\vartheta(\beta - \alpha) + \sqrt{[1 - \frac{1}{2}\vartheta(\beta + \alpha)]^2 + \vartheta^2\tau^2} < 1. \tag{4.28}$$

Preuve.
Soit $M := N^{\frac{-1}{2}} M_\vartheta N^{\frac{1}{2}} = I - \vartheta N^{\frac{1}{2}} A N^{\frac{1}{2}}$, alors M_ϑ ressemble à M. Par conséquent on peut considérer M comme la matrice d'itération de la méthode de Richardson avec $\theta := \vartheta$ et $A^{'} := N^{\frac{1}{2}} A N^{\frac{1}{2}}$ au lieu de A. La division $A = A_0 + iA_1$ implique la division $A^{'} = A_0^{'} + iA_1^{'}$ où

$$A_0^{'} = N^{\frac{1}{2}} A_0 N^{\frac{1}{2}}, \quad A_1^{'} = N^{\frac{1}{2}} A_1 N^{\frac{1}{2}}$$

Les inégalités (2.54),(2.55) appliquées à $A^{'}$ sont équivalentes à (4.27). L'estimation (2.57) due au Théorème 2.3.10 est équivalente à (4.28) car $\|M\|_2 = \|W^{\frac{1}{2}} M_\vartheta W^{\frac{-1}{2}}\| = \|M_\vartheta\|_W$.(On suit les mêmes étapes de la preuve du Théorème 2.3.10).

Bibliographie

[1] A.Hadjidimos, Successive overrelaxation (SOR) and related methods. J. Comput. Appl. Math.123, 177-199 (2000).

[2] W.M. Kahan, Gauss-Seidel methods of solving large systems of linear equations. Doctoral thesis, University of Toronto, Canada (1958).

[3] A.A. Samarskii, E.S. Nikolaev, Numerical Methods for Grid Equations, Vol. II, Iterative Methods. Birkhäuser, Basel (1989).

[4] L.F. Richardson, The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A210, 307-357 (1910).

[5] W. Hackbusch, Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations, Second Edition, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[6] A.M. Ostrowski, On the linear iteration procedures for symmetric matrices. Rend. Math. Appl.14, 140-163 (1954).

[7] O. Axelsson, Iterative Solution Methods. Cambridge Univ.Press 1994.

[8] D. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems. Academic Press, Orlando (1971).

[9] R. Varga, Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Englewood 1962. Cliffs, New York.

[10] C.F. Gauss, Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Vol 4, 55-93, 1826. Göttingen (1873). Reprint by Georg Olms, Hildesheim, 1981.

[11] 148. Gauss, C.F. Brief an Gerling [1823]. In : Werke, Vol. 9, pp. 278-281. K¨onigliche Gesellschaft der Wissenschaft, G¨ottingen (1903). Reprint by Georg Olms, Hildesheim, 1981.

[12] C.G.J. Jacobi, C.G.J. U¨ ber eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen. Astron. Nachr. 32, 297-306, 1845.

[13] P.L. Seidel, P.L. Uber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate fuhrt, 11, 81-108, 1874.

[14] L. Landweber, An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer.J. Math.73, 615-624, 1951.

[15] Kaczmarz, S. Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichungen. Bulletin de l'académie Polonaise des Sciences et Lettres, Classe des Sciences Mathématiques.

[16] Gauss, C.F. : Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae [1826]. In : Werke, Vol. 4, pp. 55-93.

[17] L. Amodei, J.P. Dedieu, Analyse numérique matricielle. Dunod, Paris 2008.

[18] A. Quarteroni,R. Sacco, F. Saleri, Méthodes numériques, algorithmes, analyse et applications, Springer-Verlag Italia, Milano 2004.