

# الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED SEDDIK BENYAHIA JIJEL

Faculté des sciences et de la technologie

Département d'électronique

## **MEMOIRE DE MASTER**

**DOMAINE:** Sciences et Technique

**FILIERE:** Electronique

**SPECIALITE:** Electronique des Systèmes embarqués

## **Thème**

**Le Filtre De Kalman Polynomiale Etude, Analyse Et Application**

**Présenté Par :**

- Ghelima Fouad
- Bouraoui Aissam

**Encadré Par :**

**M.R Yahia Moussa**

**Date de soutenance: 11/11/2022**

### **Jury de Soutenance**

**Président : M.R Kaeha Abdellah**

**Examineur : M.R Aissous Kamal**

**Promotion :2021 /2022**

## ***Remerciement***

*En premier lieu, **notre Dieu** le très miséricordieux qui a bien voulu nous donner la force et le courage pour effectuer ce modeste travail.*

*Notre plus vif remerciement s'exprime pour nos **trop chers** parents, pour leur soutien, leur encouragement et leur patience.*

*Nous tenons à remercier notre encadreur **Mr. Yahia Moussa** sa disponibilité et sa patience.*

*Mon remerciement s'adresse également à tous nos enseignants durant toutes les étapes d'éducation à l'Université **Mohamed Seddiki Benyehia de Jijel** (**Département d électronique**) qui ont enrichi nos connaissances et notre Savoir pendant les cinq ans de formation.*

***Merci***

## Sommaire

<b>Introduction générale.....</b>	<b>X</b>
<b>Chapitre1: Systèmes dynamiques chaotiques.</b>	
1.1 Introduction.....	1
1.2 Le chaos : définition et propriétés.....	1
1.2.1 Définition des systèmes dynamiques .....	1
1.3 Synchronisation du chaos.....	4
1.3.1 Synchronisation identique... ..	4
1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendu.....	6
1.4 Concluions.....	11
<b>Chapitre 2 : Filtres de Kalman non-linéaires.</b>	
2.1 Introduction.....	13
2.2 Filtre de Kalman Étendu(EKF).....	15
2.2.1 Modèle général de filtrage.....	15
2.2.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF).....	16
2.3 Filtre de Kalman Unscented .....	16
2.3.1 Transformation Unscented .....	16
2.3.2 Transformation scaled-Unscented.....	19
2.3.3 Construction du modèle de filtrage récursif UKF.....	21
2.4 Filtre à particules.....	24
2.5 Conclusions.....	26
<b>Chapitre 3 : Le Filtre de Kalman modélisé par les polynômes de chebsheev.</b>	
3.1 Introduction.....	28
3.2 Problème de formulation.....	29
3.3 Les polynômes de Chebyshev. ....	30
3.3.1 Propriétés.....	30
3.3.2 Série Chebyshev.....	31
3.3.3 Développement en séries approximatif.....	31
3.4 Propagation sous forme fermé des moments.....	32
3.4.1 Moments non centraux d'une gaussienne.....	33
3.4.2 Propagation de la moyenne.....	34

## Sommaire

---

3.4.3 Propagation de la variance.....	35
3.5 L'estimateur gaussien.....	36
3.5.1 Intervalle d'approximation.....	36
3.5.2 Prédiction .....	37
3.5.3 Correction.....	37
3.5.3.1 Moyenne et variance de mesure.....	38
3.5.3.2 Covariance de l'état et de la mesure.....	38
3.6 Résultats et simulation.....	39
3.6.1 Exemple I : Moments d'ordre supérieur.....	39
3.6.2 Exemple II : Application au monde réel .....	39
3.6.3 Exemple III : Série chronologique.....	42
3.7 Limitations et extensions potentielles .....	46
3.8 Conclusion .....	47
<b>Conclusions générale.....</b>	<b>48</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>50</b>

## Liste des figures

<b>Fig.1.1</b> : Exemple trajectoire pour le système Lorenz .....	2
<b>Fig.1.2</b> :Synchronisation Maître-Esclave en utilisant la décomposition en sous-systèmes .....	6
<b>Fig.1.3</b> :Évolution des états du système maître et de l’esclave avant et après Synchronisation.....	7
<b>Fig.1.4</b> : Structure de l’estimateur récurent EKF .....	8
<b>Fig.1.5</b> :Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendue .....	10
<b>Fig.2.1</b> :Utilisation récursive de l’algorithme Kalman Etendue .....	16
<b>Fig.2.2</b> :Le principe de la transformation Unscented.....	17
<b>Fig.2.3</b> :Un exemple de distribution de sigma points pour un v. a. gaussienne Bidimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented.....	18
<b>Fig.2.4</b> :Effets de la transformation Unscented sur l’estimation de la statistique de la v.a. Transformée (avec une non-linéarité de type $\cos x$ - figures a, b).....	21
<b>Fig.2.5</b> :Evolution de la distribution de probabilité et exemple de 10 particules pour le Système non- linéaire.....	26
<b>Fig.3.1</b> : Mesures hebdomadaires de TVR formant l’entrée $\mathbf{u}_k$ .....	40
<b>Fig.3.2</b> : Proportions de sensibilisation prédites par le CPKF.....	40
<b>Fig.3.3</b> : Médiane (ligne rouge), quantiles inférieurs et supérieurs (boîte bleue) et dispersion (Lignes noires) de la rmse (ligne de gauche) et de la log-vraisemblance négative (Ligne de droite) de tous les estimateurs. Les croix rouges indiquent les valeurs aberrantes Les résultats de l’EKF sont identiques pour (a), (b), et (c)....	44
<b>Fig.3.4</b> :Temps d’exécution moyen de tous les estimateurs pour différents nombres deCoefficients de série, de points sigma et de particules, respectivement.....	45

## Liste des tableaux

<b>Tab.2.1</b> :Performances des transformations EKF et Unscented pour Différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité.....	22
<b>Tab.3.1</b> :Calcul des moments de la variable aléatoire .....	39

# Glossaire

EQM=MSE	ErrorQuadratiqueMoyenne
ExPKF	ExactPolynomialKalmanFilter
FSK	FrequencyShiftKeying
FH	FrequencyHopping
GPS	GlobalPositioningSystem
IS-95	InterimStandard95
KF	KalmanFilter
LMMSE	LinearMinimumMeanSquareError
PSK	PhaseShiftKeying
SNR	SignaltoNoiseRatio
UKF	UnscentedKalmanFilter
v.a.	VariableAléatoire
BER	BitErrorRate
BPSK	BinaryPhaseShift Keying
C/S	Récepteur à filtrage de Kalman parallèle <i>Code/Symbol</i>
CD3S	ChaoticDirect-SequenceSpreadSpectrum
CDMA	CodeDivisionMultipleAccess
CI	ConditionsInitiates
COOK	ChaosOn-OffKeying
CSK	ChaosShiftKeying
DCSK	DifferentialChaosShiftKeying
DD2	DividedDifference-2nd order
DLL	DelayLockedLoop
DS	DirectSequence
DSP	DensitéSpectral dePuissance
EKF	ExtendedKalmanFilter

## Notations mathématiques

$\mathbb{R}$	Ensemble des réels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbf{X}$	Dérivée du vecteur d'état $x$
$\Delta_{x^F}$	Gradient de la fonction $f$ par rapport au vecteur $x$
$F^{-1}(\cdot)$	Inverse de la fonction $f(\cdot)$
$A^T$	Opérateur de transposition pour la matrice $A$
$I_N$	Matrice identité de dimension $N$
$N(\mu, \sigma^2)$	Distribution normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$
$\hat{X}$	Vecteur $x$ estimé
$N_x$	Dimension du vecteur $x$
$E[.]$	Esperance mathématique
$P(x/Y)$	Densité de probabilité de la v. a. $x$ conditionnée au vecteur D'observation $Y$
$v_k$	Etat associé au bruit de processus
$n_k$	Etat associé au bruit d'observation
$\mathbf{Q}$	Covariance du bruit de processus
$\mathbf{R}$	Covariance du bruit d'observation
$\bar{X}$	Valeur moyenne de la v.a. $x$
$P_{xx}$	Matrice de covariance pour la v.a. $x$
$P_{xy}$	Matrice de transe-covariance entre les v.a. $x$ et $y$
$\hat{X}_{k/K}$	Etat estimé à l'instant $k$

## Notations mathématiques

---

$P_{k/K}$	Covariance des erreurs à l'instant $k$
$\hat{X}_{k+1/K}$	Etat prédit à l'instant $k + 1$ , en sachant la statistique à l'instant $k$
$P_{k+1/K}$	Covariance des erreurs prédite à l'instant $k + 1$ , en sachant La statistique à l'instant $k$
$K_k$	Gain de Kalman à l'instant $k$
$(i)$	Point sigma de rang $i$ (transformation Unscented)
$(i)$	Pondération associée au point $x^{(i)}$ (transformation Unscented)
$\bar{D}_z F$	Opérateur d'accroissement centré de premier ordre associé à la fonction $f(z)$
$\bar{D}_\Delta F$	Opérateurs d'accroissement centré de deuxième ordre Associé à la fonction $f(z)$
$C_i^n$	Coefficient binomial
$m_{i,j}^x$	Vecteur de moments centrés de la v.a. $x$ avec les ordres Compris entre $i$ et $j$
$0_{i \times j}$	Matrice de dimension $i \times j$ avec tous les éléments nuls
$1_N$	Vecteur colonne de dimension $N$ avec tous les éléments égaux à 1
$P(x)$	Densité de probabilité limite
$T_p(x)$	Polynôme de Chebyshev d'ordre $p$
$(i)_k$	NEES à l'instant $k$ , en considérant une simulation Monte Carlo Particulière (de rang $i$ )
$\chi^2(\alpha)$	Loi de chi-deux évaluée en $\alpha$
$b_k$	Variable associée aux symboles informationnels à l'instant $k$
$F_b$	Fréquences symbole
$c_k$	Variable associée au code d'étalement (chip) dans un

## Notations mathématiques

---

	Système CD3S, à l'instant $k$
$F_c$	Fréquence chip
$[\times]$	Partie entière du nombre $x$
$[\vartheta_k \mathbf{c}]^T$	Variabes associées à l'estimation de phase, à l'instant $k$
$\text{Diag}[\mathbf{X}]$	Matrice diagonale avec les éléments du vecteur $\mathbf{x}$ sur la diagonale
$T_{cc}(\cdot)$	Matrice d'autocorrélation
$H$	Entropie d'un alphabet source
$S$	Alphabet des symboles disponibles $\{n\}$
$P_n$	Probabilité d'apparition du symbole $\{n\}$
$\text{Card}\{\cdot\}$	Cardinal d'un ensemble

## Résumé

Nous présentons dans cette mémoire une contribution à l'élaboration d'un Algorithme de masquage chaotique, en se basant sur une estimation polynomiale exacte via le filtre de Kalman considéré comme un observateur non-linéaire. Cet Algorithme est très utilisé dans le domaine de la télécommunication pour la qualité de son comportement en régime transitoire, plusieurs méthode de modélisations non-linéaires ont été proposées dans la littérature, les premiers travaux de recherche sur ce sujet de synchronisation chaotique n'ont pas pris en considération le bruit (bruits dynamique et de mesure). Quelques années plus tard l'idée d'utiliser deux oscillateurs chaotiques est introduite, et par conséquent le problème de la synchronisation en présence du bruit dans la théorie des systèmes de commandes peut être vu comme l'estimation de l'état , en premier temps le filtrage de Kalman peut être appelé pour pallier à ce problème, mais il est uniquement optimale pour les systèmes linéaires, pour le cas non-linéaire la majorité des méthodes font des approximations du modèle.

Chronologiquement la première approche a été le Filtre de Kalman Étendu (EKF) qui repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation pour calculer les approximations linéaire de la moyenne et la covariance de l'état estimé. Cette solution demeure acceptable si le degré de la non linéarité est faible, ainsi on peut conclure que plus le système est fortement non-linéaire, comme la dynamique chaotique, les approximations présentent des erreurs importantes d'estimation qui limite l'utilisation du filtre (EKF). Une autre méthode plus correcte d'approximation a été développée par Julier à la fin des années 90 du dernier siècle (le filtre UKF) et qui est défini à l'aide d'une transformation non-linéaire de statistique appelée Unscented. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points (sigma points), distribués dans l'espace d'état initiale pour approximer sa statistique. plus récemment une nouvelle méthode proposée par Luca (ExPKF), exploite toute la série de Taylor pour exprimer d'une façon exacte jusqu'à l'ordre deux, les statistiques de la variable aléatoire (v.a) résulte de cette transformation polynômiale, l'inconvénient de cette méthode et que d'un coté les expressions formant l'algorithme récursif de filtrage de Kalman sous une forme matricielle compacte. simulation . En fait l'efficacité de L'algorithme ExPKF réside dans l'effet qu'il est estime d'une manière exacte les statistiques, pour ce faire nous avons élargi cette exactitude à l'approximation des modèles non linéaire non polynomial par l'approche de Tchebychev. Les performances de ce nouvelle méthode (algorithme) sont comparé avec des filtre classiques tels que le EKF et UKF

. Mots clés : Chaotique, Synchronisation, Estimation, Bruit, Filtre de Kalman , polynômes de Chebyshev. .

## Abstract

We present in this paper a contribution to the development of a chaotic masking algorithm, based on an exact polynomial estimation via the Kalman filter considered as a nonlinear observer. This algorithm is widely used in the telecommunication field for the quality of its behavior in transient regime, several nonlinear modeling methods have been proposed in the literature, the first research works on this subject of chaotic synchronization did not take into account the noise (dynamic and measurement noise). A few years later the idea of using two chaotic oscillators is introduced, and consequently the problem of synchronization in the presence of noise in the theory of control systems can be seen as the estimation of the state, at first Kalman filtering can be called to overcome this problem, but it is only optimal for linear systems, for the nonlinear case the majority of methods make approximations of the model. Chronologically the first approach was the Extended Kalman Filter (EKF) which relies on a Taylor series development of the process and observation equations to compute linear approximations of the mean and covariance of the estimated state. This solution remains acceptable if the degree of nonlinearity is low, so we can conclude that the more the system is strongly nonlinear, such as chaotic dynamics, the approximations present large estimation errors that limit the use of the filter (EKF). Another more correct method of approximation was developed by Julier at the end of the 90's of the last century (the UKF filter) and which is defined using a nonlinear transformation of statistics called Unscented. Thus this approach is based on a constellation of points (sigma points), distributed in the initial state space to approximate its statistics. More recently a new method proposed by Luca (ExPKF), exploits the whole Taylor series to express in an exact way up to order two, the statistics of the random variable (v. a) results from this polynomial transformation, the disadvantage of this method is that on the one hand the expressions forming the recursive Kalman filtering algorithm in a compact matrix form. simulation . In fact the effectiveness of the ExPKF algorithm lies in the fact that it is estimated in an exact way the statistics, to do this we have extended this accuracy to the approximation of nonlinear nonpolynomial models by the Chebyshev approach. The performance of this new method (algorithm) is compared with classical filters such as the EKF and UKF

. Keywords: chaotic ,Masking, Synchronization, Estimation, Noise, Kalman filter, Chebyshev polynomials,

تقدم في هذه الأطروحة مساهمة في تطوير خوارزمية إخفاء فوضوية ، بناءً على تقدير متعدد الحدود دقيق غير مرشح كالمان الذي يعتبر مراقبًا غير خطي. تُستخدم هذه الخوارزمية على نطاق واسع في مجال الاتصالات السلكية واللاسلكية لجودة سلوكها في حالة عبء ، وقد تم اقتراح العديد من طرق النمذجة غير الخطية في الأدبيات ، وأعمال البحث الأولى حول هذا الموضوع من التزامن الفوضوي لم تأخذ في الاعتبار الضوضاء

بعد سنوات قليلة تم تقديم فكرة استخدام اثنين من المذبذبات الفوضوية ، وبالتالي يمكن اعتبار مشكلة التزامن في وجود ضوضاء في نظرية أنظمة التحكم على أنها تقدير للحالة ، في المقام الأول يمكن اعتبار ترشيح كالمان يتم استدعاؤها للتغلب على هذه المشكلة ، ولكنها مثالية فقط للأنظمة الخطية ، بالنسبة للحالة غير الخطية ، فإن غالبية الطرق تقوم بتقريب الذي يعتمد على توسع تايلور في معادلات العملية (EKF) النموذج. كان النهج الأول ترتيبًا زمنيًا هو مرشح كالمان الممتد والملاحظة لحساب التقريبات الخطية للمتوسط والتغاير للحالة المقدرة

يظل هذا الحل مقبولاً إذا كانت درجة اللاخطية منخفضة ، لذلك يمكننا أن نستنتج أنه كلما كان النظام غير خطي بقوة ، مثل تم تطوير (EKF) الديناميكيات الفوضوية ، فإن التقريبات تقدم أخطاء كبيرة في التقدير مما يحد من استخدام المرشح والتي تم تعريفها (UKF) في نهاية التسعينيات من القرن الماضي (مرشح Julier طريقة أخرى أكثر دقة للتقريب بواسطة وبالتالي ، يعتمد هذا النهج على مجموعة من النقاط (نقاط Unscented باستخدام تحويل إحصائي غير خطي يسمى Luca سيجما) ، موزعة في مساحة الحالة الأولية لتقريب إحصاءاتها. في الأونة الأخيرة ، هناك طريقة جديدة اقترحها بأكملها للتعبير بطريقة دقيقة حتى الترتيب الثاني ، إحصائيات المتغير العشوائي Taylor ، تستغل سلسلة (ExpKF) الناتج عن هذا التحويل متعدد الحدود ، وعيوب هذه الطريقة وذاك من ناحية ، فإن التعبيرات التي تشكل خوارزمية (v.a) في حقيقة أنها ExpKF ترشيح كالمان العمودية في شكل مصفوفة مضغوطة. محاكاة في الواقع ، تكمن كفاءة خوارزمية تقدر الإحصائيات بطريقة دقيقة ، للقيام بذلك فمننا بتوسيع هذه الدقة لتقريب النماذج غير الخطية غير متعددة الحدود من و EKF تتم مقارنة أداء هذه الطريقة الجديدة (الخوارزمية) مع المرشحات الكلاسيكية مثل Chebyshev خلال نهج UKF

الكلمات الرئيسية: الفوضى ، والتزامن ، والتقدير ، والضوضاء ، ومرشح كالمان

و متعدد الحدود Chebyshev

## **Introduction générale**

Au cours des dernières décennies, les applications des systèmes de transmission sécurisée de l'information ont été considérées comme une augmentation des performances des systèmes de transmission actuels. Dans ce travail de mémoire nous nous sommes concentrés sur une solution de synchronisation à estimation d'état, susceptible d'offrir effectivement les meilleures performances possibles. Ainsi le document est organisé sous la forme suivante.

Le premier chapitre est destiné à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général et en particulier aux systèmes chaotiques. Les modèles généraux qui définissent les systèmes dynamiques en temps continu et en temps discret seront présentés en même temps avec les notions d'espace des phases et de trajectoire.

Un sujet qui a reçu beaucoup d'attention dans notre étude est la synchronisation des systèmes chaotiques en général et en particulier dans le cas des dynamiques en temps discret. La notion de synchronisation chaotique sera évoquée et les idées principales de la méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman seront présentées [1].

Étant donné les performances supérieures et la généralité prouvées par les méthodes de synchronisation chaotiques à filtrage de Kalman, une présentation de ces estimateurs adaptés aux cas non-linéaires devient importante. Ainsi le deuxième chapitre devient un état de l'art sur le filtrage de Kalman non-linéaire, limité aux techniques les plus utilisées dans la pratique.

## Introduction générale

---

Dans ce contexte et depuis l'émergence de processeurs numériques, les systèmes d'estimation de l'information ont été de plus en plus utilisés car ils contribuent à la robustesse de réception et à la variation des modèle proposés comme émetteur du signal ou information utile noyé dans le bruit.

Rudolf Emil Kalman a présenté, en 1960, une solution récursive au problème du filtrage linéaire discret à partir du modèle dans l'espace des états ainsi que des parcelles stochastiques se référant aux bruits de mesure et aux erreurs de modélisation. Toutefois, la version initiale du filtre Kalman (KF – Kalman Filter) comporte des limites par rapport aux caractéristiques non linaires telles que synchronisation chaotique en présence du bruit que ce soit dynamique ou de mesure. Une alternative à KF est le filtre Kalman étendu (EKF) dont la structure peut être appliquée aux systèmes linéarisés autour d'un point de fonctionnement spécifique.

Dans ces deux dernières décennies plusieurs nouvelles solutions de filtrage de Kalman qui essayent d'augmenter sensiblement les performances d'estimation en limitant de même au maximum le coût de calcul. Une telle solution est représentée par le filtrage de Kalman *Unscented*, et sa version d'ordre supérieur qui proposent la propagation d'un ensemble de points de dimension bien établie à travers le modèle non-linéaire. Cet ensemble de points permet par la suite l'estimation de la statistique d'ordre deux de la v.a. transformée à une précision bien limitée en ce qui concerne les moments d'ordre supérieur pris en compte. Une approche similaire est suivie par le filtrage Kalman de type Central Difference [2], qui peut être vu comme une généralisation du filtre *Unscented*, mais pour les positions de points la formule d'interpolation de Stirling est utilisée.

## Introduction générale

---

Finalelement dans le dernier chapitre une solution proposé Yahia. M et al A [3] et par la suite généralisé par Marco F. H [4] sera étudiée en montrant sa performance quasi-optimale. Le point de départ représente le fait que la classe des fonctions non linéaires sont largement utilisée pour modéliser beaucoup de processus dont une estimation d'état est recherchée. dans un premier temps la fonction est développé en une série de polynômes de Chebyshev. Ainsi avec ces hypothèses du modèle polynomial on va démontrer que la statistique d'une v. a. qui subit une transformation non- linéaire peut être calculée analytiquement d'une manière exacte comme une expression de ces moments et des coefficients du polynôme qui représente la fonction. En plus de cette démonstration on va déduire aussi un ensemble de relations matricielles qui rendent l'application de cette transformation exacte très facile en pratique. A partir des expressions déduites la mise en forme d'un algorithme récursif de Kalman Exact devient immédiate. On va appliquer cette formulation à la synchronisation chaotique, en comparant avec d'autres estimateurs. Ainsi en utilisant ce modèle de synchronisation on va démontrer que la solution proposée offre les meilleures performances du point de vue de la stabilité et de la consistance du filtre, ainsi qu'implicitement de l'erreur de synchronisation. Soulignons que la synchronisation chaotique n'est qu'un problème particulier pouvant bénéficier des performances du filtre de Kalman modélisé par les polynômes de Chebyshev, beaucoup d'autres applications pourraient en fait profiter de cette approche.

# *Chapitre I: Systèmes dynamiques chaotiques.*

1.1 Introduction

1.2 Le chaos : définition et propriétés

1.3 Synchronisation du chaos

1.4 Conclusion

### 1.1 Introduction

L'Étrange (chaotique) systèmes dynamiques ont été connus pendant une longue période dans le domaine des mathématiques, mais ce n'est que dans la dernière décennie que les applications concrètes sont multipliés Notre étude se focalise sur l'usage du chaos pour transmettre de l'information.

Ce chapitre est une synthèse bibliographique compacte sur les transmissions chaotiques, dont l'objectif principal est de mieux souligner l'originalité des résultats que nous proposerons plus tard.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, nous présentons les aspects généraux des systèmes dynamiques chaotiques et dans la deuxième section, nous poursuivons avec la présentation des deux méthodes de synchronisation connexes à ce type de systèmes. À ce type de systèmes. Les aspects des communications numériques utilisant des méthodes de diffusion spectrale seront abordés dans la dernière partie des solutions "conventionnelles" pour les systèmes de communication porteurs chaotiques.

### 1.2 Le chaos : définition et propriétés

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique déterministe non-linéaire. Du point de vue mathématique la notion générale de système dynamique est défini à partir d'un ensemble de variables qui forment le vecteur d'état :

$\mathbf{x} = \{x_i \in \mathbb{R}\}, i = 1 \dots n$  où  $n$  représente la dimension du vecteur. Ce jeu de variables a la propriété de caractériser complètement l'état instantané du système dynamique générique. En associant en plus un système de coordonnées on obtient l'espace d'état qui est appelé également l'espace de phase. Conjointement avec l'espace d'état un système dynamique est défini aussi par une loi d'évolution, généralement désignée par dynamique, qui caractérise l'évolution de l'état du système en temps.

La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique.

#### 1.2.1 Définitions des systèmes dynamique

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles, alors Qu'en temps discret nous parlons d'un système d'équations à différences

Finies [1, 2, 3]:

– **temps continu**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t) \tag{1.1}$$

Où  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ , pour chaque couple chois( $\mathbf{x}_0, t_0$ )

On peut identifier une solution unique  $\Phi (; x_0, t_0) \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Phi_F(t_0; x_0, t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \Phi_F(t; x_0, t_0) = F(\Phi_F(t; x_0, t_0)) \quad (1.2)$$

Cette solution unique déterminée avec l'aide des équations (1.2), et qui fournit l'ensemble d'états successifs occupés par le système à chaque instant  $t$ , s'appelle généralement trajectoire.

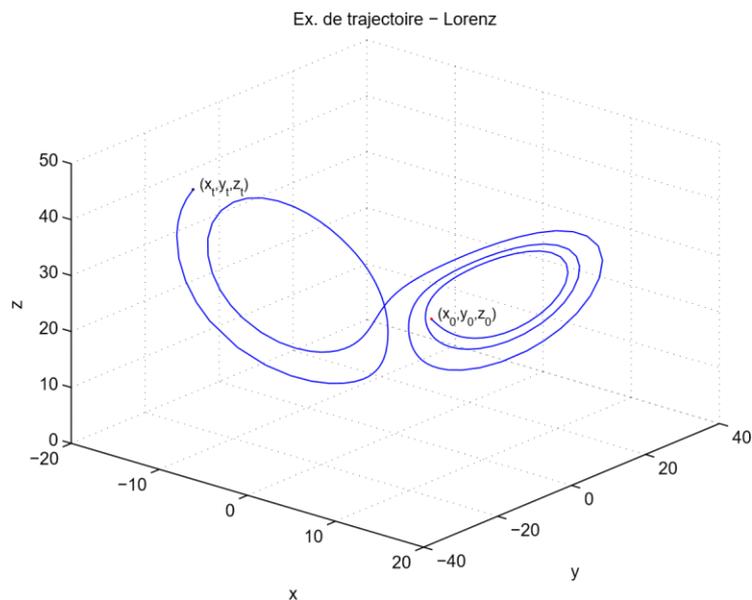
On considère l'exemple du célèbre système de Lorenz donné par les équations suivantes [4] :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - b \end{aligned} \quad (1.3)$$

Les paramètres pour l'exemple de trajectoire donné dans la figure 1.1 ont été choisis de la manière suivante :  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $b = 8/3$  avec la condition initiale  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 5, 20)$

On observe que la dynamique du système de Lorenz donnée par les équations est indépendante de l'instant  $t$  considéré, et généralement ce type de système est qualifié d'autonome.

La dynamique dans ce cas particulier à la forme suivante:



**Fig. 1.1** – Exemple de trajectoire pour le système Lorenz

$$\dot{x}(t)=F(x(t)) \tag{1.4}$$

– temps discret

Comme il a été déjà précisé le système dynamique est dans ce cas représenté par des équations aux différences finies, avec le modèle général suivant:

$$x(k+1)=G(x(k),k) \tag{1.5}$$

Où  $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système en temps discret.

De même qu'en temps continu, si on associe à cette dynamique un état initial

$x_0 = x(k_0)$ , pour chaque couple choisi  $(x_0, k_0)$  on peut identifier une solution unique  $\Phi_G(\cdot; x_0, k_0): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que:

$$\Phi_G(k_0; x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \Phi_G(k+1; x_0, k_0) = G(\Phi_G(k; x_0, k_0), k) \tag{1.6}$$

En temps discret on définit aussi le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant  $k$

$$x(k+1)=G(x(k)) \tag{1.7}$$

### 1.3 Synchronisation du chaos

L'emploi d'un signal chaotique dans le domaine des télécommunications pose directement le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique employé à l'émetteur. Dans la section précédente nous avons montré la sensibilité très importante aux CI des systèmes chaotiques, et à première vue la synchronisation chaotique paraît difficile à réaliser. A la différence de la synchronisation classique employée dans les systèmes de télécommunication où l'on cherche à reproduire juste une période d'oscillation, la synchronisation chaotique présente plus de contraintes.

Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés tout d'abord avec les travaux de Yamada et Fujisaka [5, 6] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite Afraimovich et al. [7] ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement Pecora et Carroll [8] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave; Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications.

Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rulkov et al. ont posé les bases [9, 10, 11] et qui a ensuite été étudiée dans [12] et [13]; Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité. En parallèle avec ces études se développent les notions de synchronisation de phase entre deux circuits chaotiques couplés, dans ce cas la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phase entre les variables d'état des systèmes considérés [14, 15]. Finalement, plus récemment, une nouvelle technique est apparue avec l'emploi des méthodes d'estimation non-linéaire de type filtrage de Kalman, vues comme une généralisation du couplage des systèmes chaotiques; Sous certaines conditions sur le bruit d'observation, cette approche garantit un caractère optimal de la synchronisation au sens de l'EQM [16,17].

#### 1.3.1 Synchronization Identique

Pour illustrer la méthode de synchronisation par couplage entre deux systèmes chaotiques on a choisi de présenter la synchronisation identique proposée par Pecora et Carroll [8]. Celle-ci a l'avantage de représenter une solution simple et performante de synchronisation dont l'objectif est que l'esclave reproduise le plus fidèlement possible l'état du maître, après un régime transitoire.

Considérons un système dynamique autonome, en temps continu, de dimension  $n$ , représenté par la relation suivante :

$$S_1 : \dot{X}^{(1)} = F^{(1)}(X^{(1)}, X^{(2)})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{1.8}$$

où  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ .

Par la suite on divise le système initial en deux sous-systèmes  $\{S_1, S_2\}$  :

$$S_1 : \dot{X}^{(1)} = F^{(1)}(X^{(1)}, X^{(2)})$$

$$S_2 : \dot{X}^{(2)} = F^{(2)}(X^{(1)}, X^{(2)}) \tag{1.9}$$

Avec les états et les dynamiques définis conformément aux relations suivantes:

$$\mathbf{x} = [X^{(1)}, X^{(2)}]^T$$

$$X^{(1)} = [x_1, \dots, x_m]^T$$

$$X^{(2)} = [x_{m+1}, \dots, x_n]^T \tag{1.10}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [F^{(1)}(\mathbf{x}); F^{(2)}(\mathbf{x})] \tag{1.11}$$

Bien sûr, cette opération peut être réalisée de manière arbitraire avec une réorganisation des variables d'état dans une ordre quelconque. On considère maintenant un deuxième

Sous-système  $S'$  caractérisé par une dynamique identique  $\{2\}$ , et un vecteur d'état  $\hat{X}^{(2)}$

$$S'_2 : \dot{\hat{X}}^{(2)} = F^{(2)}(\hat{X}^{(1)}, \hat{X}^{(2)}) \tag{1.12}$$

On peut dire que ce sous-système réplique  $S'_2$  est un candidat susceptible de se synchroniser avec la dynamique complète initiale. Pecora et Carroll ont démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que cette proposition soit vraie est que le sous-système

$S'_2$  soit stable [8] ; Hypothèse qui est équivalente avec la condition que l'ensemble des coefficients Lyapunov du sous-système  $S'_2$  soient négatifs. Une synchronisation parfaite peut alors être accomplie; les trajectoires étant asymptotiquement convergentes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\hat{X}}^{(2)}(t) - \dot{X}^{(2)}(t)\| = 0 \tag{1.13}$$

des méthodes de synchronisation à couplage unidirectionnel telles que la synchronisation identique.

L'estimation récursive des états pour un système chaotique a été proposée pour la première fois par Fowler Dans la figure 1.4 on représente graphiquement le processus de décomposition en sous-systèmes, cette fois avec la notation  $y = x^{*1+} + n$  de la variable d'état qui commande le système  $S'_2$  où  $\mathbf{n}$  est un éventuel bruit additif associé au canal de communication. Dans le cas pratique où la variance de ce bruit d'observation est significative, l'équation 1.13 qui traduit la convergence asymptotique ne reste plus valable. Dans ce cas on doit utiliser une approche de synchronisation généralisée [10].

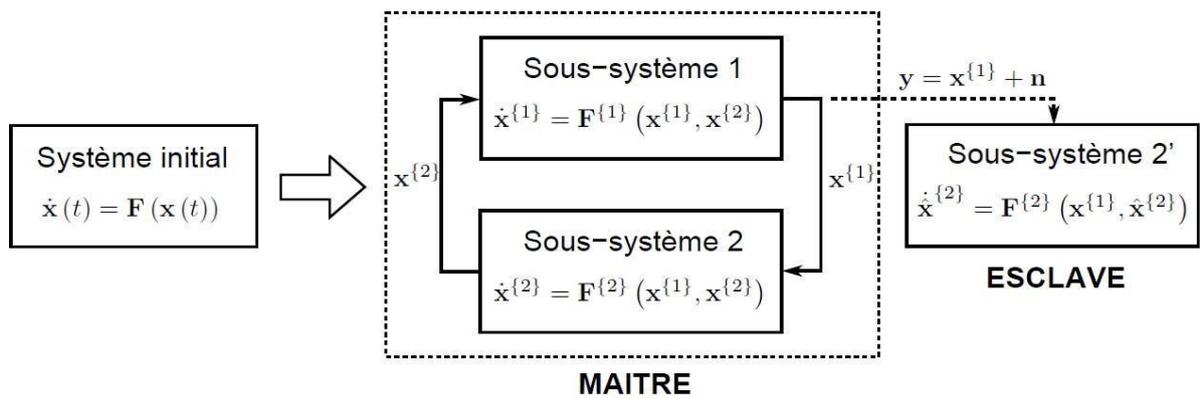


Fig. 1.2 – Synchronisation Maître-Esclave

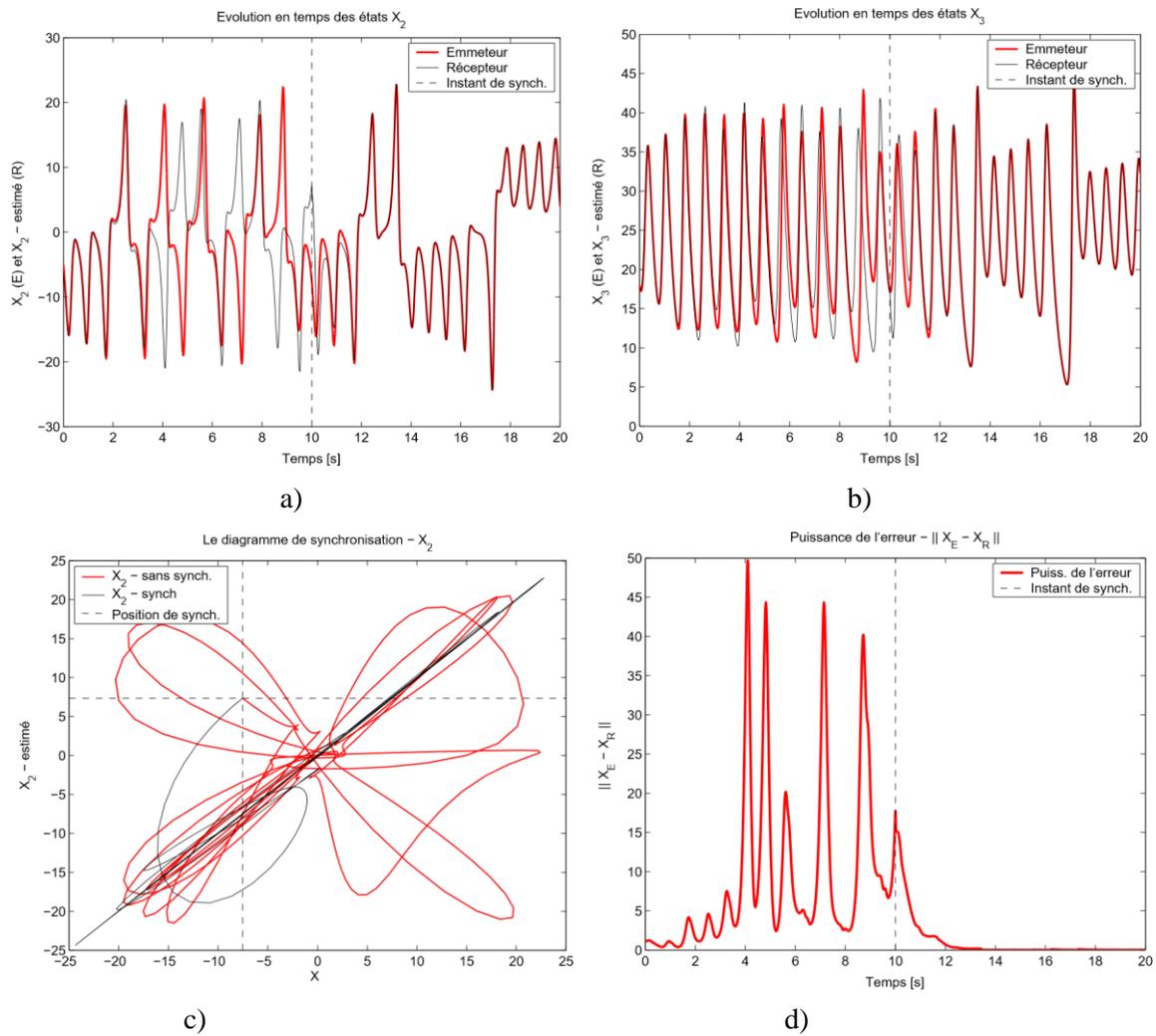
en utilisant la décomposition en sous-systèmes Dans les figures 1.5 ce comportement est démontré graphiquement par les représentations des états  $y = X_2$  et  $z = X_3$ . Le diagramme de synchronisation montré pour l'état  $y = X_2$  ainsi que la puissance de l'erreur nous confirment encore une fois qu'après une période de transition, le système esclave converge asymptotiquement vers l'état de l'émetteur (maître).

### 1.3.2 Synchronisation par filtrage de Kalman Étendue

La méthode de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Étendu a été introduite comme une généralisation

Avec des aspects sur l'optimalité et la stabilité d'une telle synchronisation [16, 17, 18]. Plusieurs applications ont été développées par la suite pour des structures de systèmes de communication avec l'emploi dans la démodulation et même l'égalisation du canal [19]. L'objet de cette étude est de proposer des structures de filtrage non-linéaire innovantes, dans la continuité des travaux précités.

Par exemple on considère un système en temps discret, autonome défini par la relation générale :



**Fig.1.3** – Évolution des états du système maître et de l’esclave avant et après synchronisation

- a)  $y = X_2$ ;
- b)  $z = X_3$ ;
- c) Diagramme de synchronisation pour l’état  $y = X_2$ ;
- d) Puissance de l’erreur de synchronisation

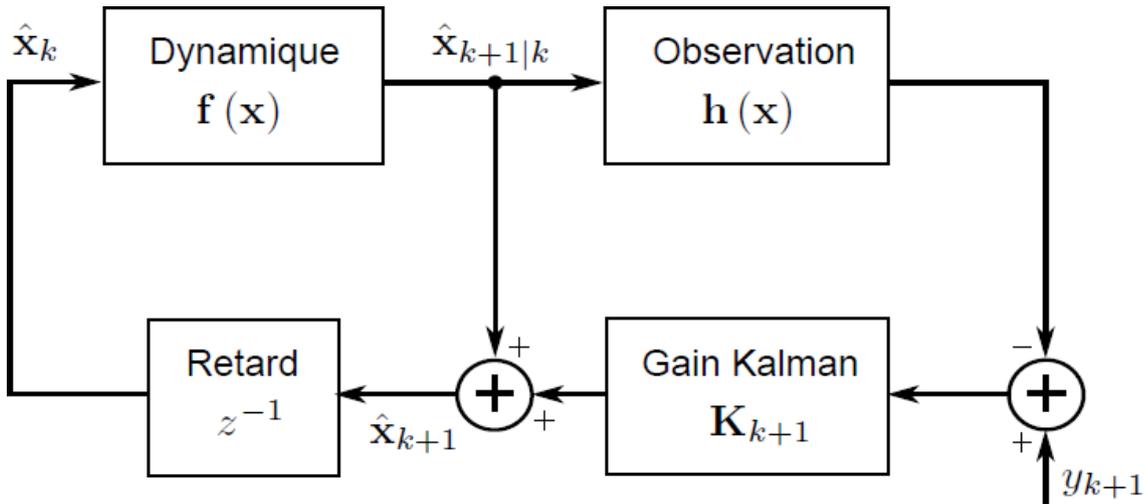


Fig.1.4 –Structure de l’estimateur récursif EKF

$$x_{k+1}=f(x_k) \tag{1.14}$$

Où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d’état et  $f(\cdot)$  est la dynamique non-linéaire associée.

D’habitude, pour une efficacité maximale, l’on a intérêt à transmettre entre l’émetteur et le récepteur un nombre d’états le plus réduit possible; nous supposons que le signal de contrôle est un scalaire donné par l’équation suivante :

$$y_k = h^T x_k + n_k \tag{1.15}$$

Où  $h = [h_1, \dots, h_n]^T$ , et  $n_k = N(0, R)$  représente l’éventuel bruit supposé gaussien centré, de variance  $R$ , associé aux imperfections du canal de communication. Généralement, dans le cadre d’un filtrage récursif de Kalman les équations (1.14) et (1.15) sont appelées modèle de processus et modèle d’observation. Nous n’insisterons pas ici sur les aspects de la théorie du filtrage non-linéaire de Kalman car le chapitre suivant sera dédié à ce sujet.

L’interprétation dans le cas général d’un tel modèle est donnée dans la figure 1.6 comme une structure à rétroaction qui permet l’estimation de l’état à partir des observations bruitées [17].

On note que le modèle d’observation dans ce cas ne doit pas respecter forcément une fonction linéaire. Ainsi dans la partie gauche du schéma on effectue une projection de l’estimation courante  $\hat{x}_k$  pour obtenir la valeur a priori du nouvel état estimé  $\hat{x}_{k+1|k}$ . Dans la partie droite ce nouvel état va incorporer l’information apportée par la nouvelle mesure  $y_{k+1}$  pour obtenir la valeur estimée a posteriori  $\hat{x}_{k+1}$ . Le coefficient de pondération  $K_{k+1}$ , appelé aussi gain de Kalman, est calculé par rapport à la dynamique du système; Il donne une évaluation de la confiance accordée aux observations à chaque étape de filtrage.

Cette dualité présentée par la structure de l'algorithme de filtrage se retrouve dans le développement des équations employées :

– équations de mise à jour temporelle, destinées à évaluer la statistique d'ordre deux de l'état prédit

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= f(\hat{x}_k) \\ P_{k+1|k} &= F_k P_k F_k^T \end{aligned} \quad (1.16)$$

Où  $F_k \triangleq \nabla f|_{\hat{x}_k}$  et  $P_{k+1|k}$  représente la covariance des erreurs prédite.

– équations de mise à jour par des observations, donnant la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} (y_k - h^T \hat{x}_{k+1|k}) \\ P_{k+1} &= (I_n - K_{k+1} h) P_{k+1|k} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Où  $I_n$  est la matrice unité  $n \times n$ ,  $P_{k+1}$  représente la covariance des erreurs, et  $K_{k+1}$  désigne le gain de Kalman s'exprimant comme :

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} h (h P_{k+1|k} h^T + R)^{-1} \quad (1.18)$$

Ainsi par l'unification des relations 1.18 et 1.19 on obtient la solution récursive suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k) + K_{k+1} (y_k - h^T f(\hat{x}_k)) \quad (1.19)$$

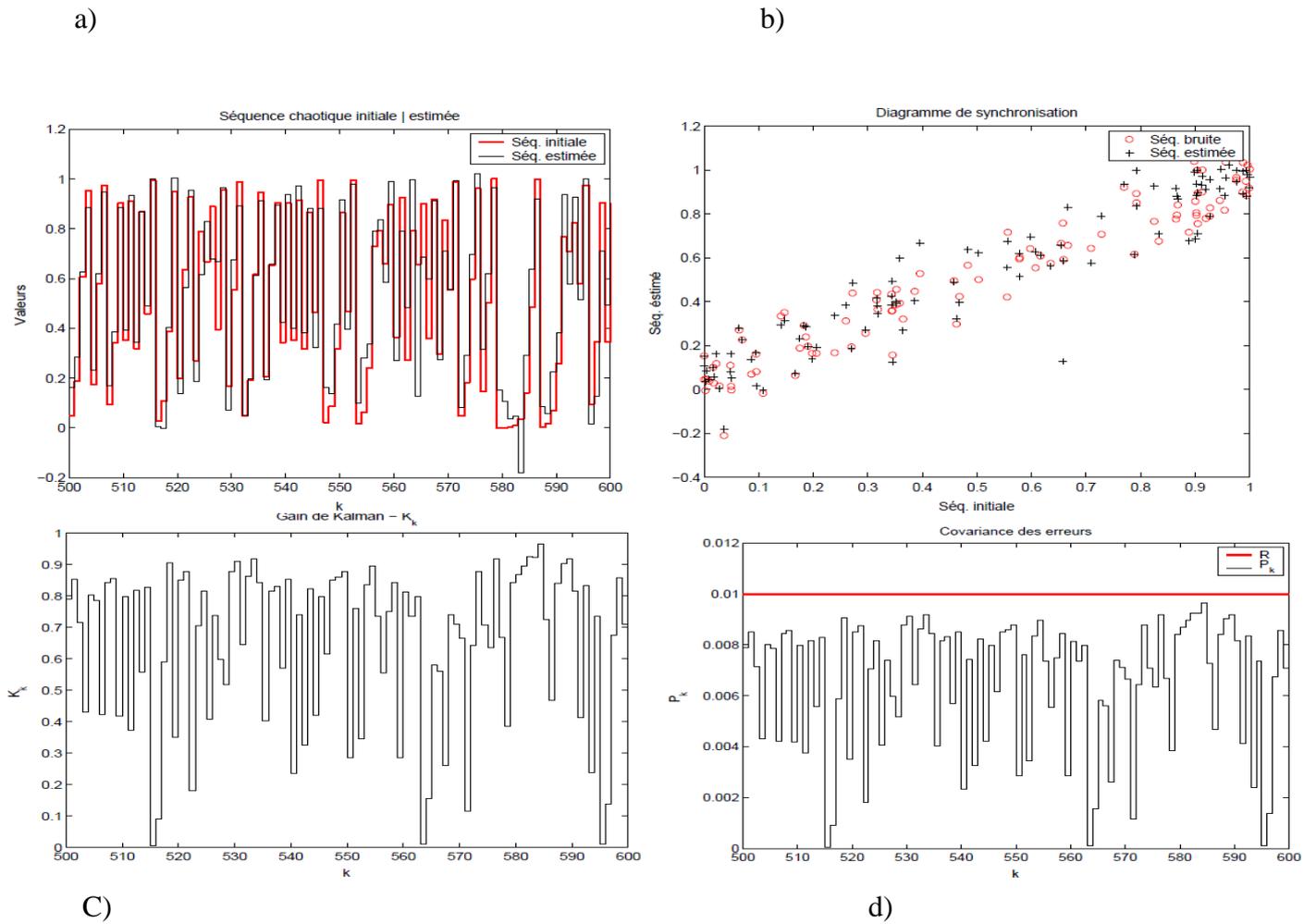
Utilisant la décomposition du vecteur d'état sous la forme  $X_k = [x_k^{(1)}, X_k^{(2)}]$  comme en synchronisation identique, on peut écrire la dynamique du système sous la forme :

$$f(X_k) = [f^{(1)}(x_k^{(1)}, X_k^{(2)}), f^{(2)}(x_k^{(1)}, X_k^{(2)})]^T \quad (1.20)$$

Avec cette relation le parallèle avec la synchronisation identique est immédiat. En considérant le système Esclave caractérisé par la dynamique  $\{y_k, \hat{x}_k^{(2)}\}$  est le signal de synchronisation, et avec  $h = [1, 0, \dots, 0]^T$ ,  $K_k = [1, 0, \dots, 0]^T$  nous obtenons :  $\hat{x}_{k+1}^{(2)} = y_{k+1}$

$$\hat{x}_{k+1}^{(2)} = f^{(2)}(\hat{x}_k, \hat{x}_k^{(2)}) \quad (1.21)$$

Nous voyons ainsi que la méthode de synchronisation en utilisant le filtrage de Kalman est une généralisation de la méthode de synchronisation identique présentée antérieurement. En ce qui concerne le fonctionnement du filtre de Kalman dans le cadre de la synchronisation chaotique, il est intéressant de mentionner que si généralement on est habitué à une convergence du gain de Kalman vers une valeur fixe, dans le cas de systèmes chaotiques, des oscillations a périodiques du gain seront obtenues [16]. Le même phénomène est constaté au niveau de la covariance des erreurs  $P_k$ .



**Fig. 1.5** –Exemple de synchronisation chaotique par filtrage de Kalman Etendu

a) séquence initiale vs séquence estimée ;b) diagramme de synchronisation;

c) évolution du gain Kalman  $K_k$ ;

d) évolution de la covariance des erreurs  $P_k$

par rapport à la variance du bruit d'observation  $R$

Dans les figures 1.7 on considère le cas de synchronisation chaotique appliquée à une dynamique non-linéaire monodimensionnelle représentée par la fonction logistique.

Si on parle qualitativement de performances de synchronisation, on observe que l'introduction du bruit de mesure dans le modèle va entraîner l'impossibilité d'obtenir une synchronisation parfaite. Cela signifie que le vecteur d'état du système maître et le vecteur d'état du système esclave ne seront jamais égaux ; Dans ce cas la synchronisation chaotique peut être définie au sens d'une erreur d'estimation bornée. Une autre remarque peut être faite par rapport à l'évolution comparative entre le gain de Kalman et la covariance des erreurs, qui suivent une relation de proportionnalité. Analytiquement il est facile de prouver que dans le cas monodimensionnel cette relation est valide [17], avec un coefficient de proportionnalité égal à la variance du bruit d'observation considéré:

$$P_K = RK_k \quad (1.22)$$

Le modèle d'estimation employé reste assez sensible aux perturbations introduites par le bruit de canal ainsi qu'aux approximations fait par le filtre de Kalman Étendu. Une solution généralement utilisée pour compenser ces approximations est de considérer la présence d'un bruit de processus associé au système dynamique chaotique mais un paramétrage optimal de la valeur de ce bruit est difficile à faire. Dans les chapitres qui suivent nous démontrerons que le filtrage de type Kalman Étendu n'est pas la meilleure solution d'estimation à employer, d'autre variantes étant proposées pour améliorer les performances globales de synchronisation.

### 1.4 Conclusion

Ce chapitre avait comme objectif l'introduction de quelques notions élémentaires concernant les systèmes dynamiques chaotiques et leur application dans le domaine des télécommunications. Dans la première section les définitions de systèmes dynamiques non-linéaires en temps continu et discret, ainsi que leurs particularisations pour le cas de systèmes chaotiques ont été données. Par la suite on a présenté les méthodes envisageables pour établir éventuellement une synchronisation entre deux systèmes chaotiques dans le but de transmettre un signal informationnel. La troisième section était destinée à la présentation générale des solutions classiques d'étalement de spectre ainsi que des inconvénients associés, et finalement dans la dernière partie les méthodes les plus connues de transmission à porteuse chaotique ont été introduites.

## *Chapitre II: Filtres de Kalman non-linéaires.*

2.1 Introduction

2.2 Filtre de Kalman Étendu(EKF)

2.3 Filtre de Kalman Unscented

2.4 Filtre à particules

2.5 Conclusion

### 2.1 Introduction

Le filtre Kalman (KF - filtre Kalman) est considéré comme une technique de référence pour les problèmes d'estimation linéaire, conduisant à la solution MMSE (erreur quadratique moyenne minimale), de manière récursive grâce aux modèles d'état du système dynamique [20, 21, 22]. Dans le cas d'une dynamique non-linéaire le problème d'estimation récursive devient difficile. Comme dans ce contexte une connaissance complète de la densité de probabilité est exigée, l'estimateur optimal conforme aux règles de Bayes, n'est pas d'habitude utilisé en pratique. Pour quelques cas particuliers de dynamiques non-linéaires une solution optimale peut être développée, sous des hypothèses contraignantes [23, 24]. Parmi les nombreuses solutions non-optimales disponibles, le filtre de Kalman Étendu (EKF – Extende de Kalman Filtre) reste une solution populaire car elle évite le coût de calcul élevé habituellement requis par des approches quasi optimales telles que le filtre à particules [25]. L'EKF est basé sur la propagation de la répartition des états, par linéarisation dans le premier ordre du système non linéaire, en maintenant la même structure que le filtre de Kalmen Classique. Bien que l'EKF puisse faire face à des systèmes faiblement non linéaires, des erreurs importantes peuvent être commises à des moments postérieurs (moyenne et covariance) en présence de non-linéarités importantes. Cette limite de la linéarisation peut être résolue à l'aide d'un filtre IEKF (Iterated - EKF) mais avec une augmentation du coût de calcul.

Plusieurs méthodes de filtrage de Kalman non-linéaires ont été proposées récemment pour éviter les limitations imposées par le EKF, sans un coût de calcul additionnel significatif. Le UKF, introduit par Julier et al. [26], dans le contexte de la commande non-linéaire et davantage développé par Wan et van der Merwe [27], aborde le problème d'approximation d'une manière bien différente du EKF. Ainsi, même s'il utilise une hypothèse gaussienne pour les états, cette fois la statistique est représentée par un ensemble minimal de points judicieusement choisis (sigma points). A chaque étape d'estimation, ces points sont propagés à travers La non linéarité du modèle (transformation sans parfum), évitant ainsi le calcul des Jacobines. Avec cette méthode, la moyenne et la covariance de la distribution a posteriori sont saisies. Jusqu'au 3ème ou 2ème ordre dans la série Taylor, indépendamment de la non-linéarité considérée. UKF est une solution intéressante pour.

Applications en temps réel, car il atteint un bon compromis entre la performance d'estimation (toujours meilleure cohérence que EKF), le coût de calcul et la facilité d'exécution.

Noorgard et al. [28] ont proposé une autre solution de filtrage Kalman non-linéaire, basée sur une approximation polynomiale des fonctions qui forment le modèle. Pour l'approximation polynomiale ils ont utilisé la relation de Stirling et en fonction de l'ordre de l'approximation faite, deux variantes de filtrage sont proposées : La première (DD1 – Davide Différence 1er ordre) est définie comme une

généralisation du filtre proposé par Schei [29], dénommé CDKF (CDKF - Central Différence Kalman Filtre), qui utilise une approximation au premier ordre de la non-linéarité; La deuxième solution (DD2) considère une approximation au deuxième ordre dans la relation de Stirling, et par conséquent offre de meilleures performances d'estimation. Lefebvre et al. ont proposé dans [30] une présentation unifiée de l'ensemble des méthodes (UKF, CDKF, DD1) en utilisant une approche de régression statistique linéaire.

En complément des "transformations" non-linéaires évoquées ci-dessus, un autre moyen d'augmenter les performances des méthodes de filtrage non-linéaire est de sortir de l'hypothèse gaussienne des distributions de probabilité. Ainsi dans les années 1970 Alspach et Sorensen [31] ont introduit l'idée d'approximer les distributions de probabilité qui caractérisent les états par des sommes de gaussiennes. Avec cette hypothèse l'application du processus de filtrage est simple, et l'approche est compatible avec tous les filtres décrits auparavant. Alspach et Sorensen ont utilisé initialement le EKF et plus récemment van der Merwe et Wan et al. [32] ont proposé des solutions s'appuyant sur la propagation de particules (UKF, filtrage particulaire). La dernière méthode d'estimation non-linéaire récurrente décrite dans ce chapitre est le filtre à particules. Si dans le cas de la transformation Unscented on avait un ensemble limité de points placés de manière déterministe, dans le cas particulaire le nombre de points est plus important et cette fois ils sont choisis aléatoirement dans l'espace de phase conformément à l'hypothèse de distribution initiale. Développée initialement au LAAS de Toulouse [33, 34], cette méthode se base sur la loi des grands nombres pour approximer les distributions de probabilité des états. Ce type de filtre est aussi connu sous le nom de filtre Monte-Carlo séquentiel (SMC - Séquentiel Monte Carlo).

Dans ce chapitre nous proposons une présentation synthétique des diverses solutions de filtrage Kalman non-linéaires, avec une description des avantages et inconvénients de chaque solution. Plusieurs versions de ces filtres (EKF, UKF) seront utilisées dans la suite de notre étude soit dans un objectif de comparaison soit comme un outil d'estimation lorsque nous proposerons des structures de récepteurs.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. La première section est destinée à la présentation des méthodes de filtrage basées sur la linéarisation au premier ordre (EKF, IEKF). Le second paragraphe considère les implémentations basées sur la transformation Unscented (UKF, HOUF). Les aspects unifiés de filtres s'appuyant sur la formule de Stirling sont présentés dans la section III. Dans la quatrième section, l'approximation des distributions par somme de gaussiennes est considérée, et dans la dernière partie de chapitre quelques aspects sur le filtrage particulaire sont évoqués.

### 2.2 filtre de kalman Étendu (EKF)

Comme il a été mentionné dans l'introduction de ce chapitre, le calcul récursif de la statistique d'ordre deux dans le cas d'un modèle linéaire avec des hypothèses de gaussait des états, a trouvé une solution sous la forme du filtre de Kalman [20]. Son principal intérêt réside dans l'implémentation récursive, qui répartit le coût de calcul Sur 'ensemble des observations, réalisant en même temps une minimisation de l'erreur par rapport à un critère d'EQM (Erreur Quadratique Moyenne).

La plupart des méthodes d'estimation récursives proposées à ce jour, pour résoudre le problème de filtrage dans le cas non linéaire, se rapprochent du modèle ou du niveau des hypothèses statistiques initiales. La première solution proposée a été l'Extended Kalman Filtre (EKF - Extended Kalman Filtre). Cette solution est fondée sur une série de Taylor développement du processus et des équations d'observation qui composent le modèle. Ainsi, le filtre Kalman étendu est défini à partir des deux idées suivantes. [22] :

- une linéarisation du premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités corrélées aux équations de processus et/ou d'observation.
- une estimation du type de LMMSE

#### 2.2.1 Général de filtrage Modèle

Prenons par exemple le modèle d'estimation suivant.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= f(X_k) + V_k \\ Y_k &= h(v_k) + n_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où  $\{f(\cdot), h(\cdot)\}$  désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs  $\{V_k, n_k\}$  sont considérés centrés, Gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$\begin{aligned} E[v_k] &= E[n_k] \\ E[v_k v_k^T] &= Q \delta_{ij} \\ E[n_k n_k^T] &= R \delta_{ij} \\ E[v_k n_k^T] &= 0 \\ E[v_k x_k^T] &= E[n_k x_k^T] = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Comme dans le cas du filtre Kalman standard (modèles linéaires), l'estimation actuellement k sera faite par approximation à l'ordre de deux des statistiques des états :

- état estimé  $\hat{X}_{k/k} \approx [x_k / Y^k]$
- matrice de covariance  $P_{k/k}$

### 2.2.2 Principe du filtre de kalman Étendu (EKF)

Le diagramme général qui montre la structure récursive de l'algorithme de Kalman étendu est proposé dans la figure.

Ainsi, de la même manière que le filtre classique de Kalman, le mécanisme d'estimation est divisé en deux parties:

- L'étape de mise à jour de l'heure qui effectue l'évaluation statistique de deux ordres de l'état prédit.
- l'étape de mise à jour de l'observation qui fournit la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé.

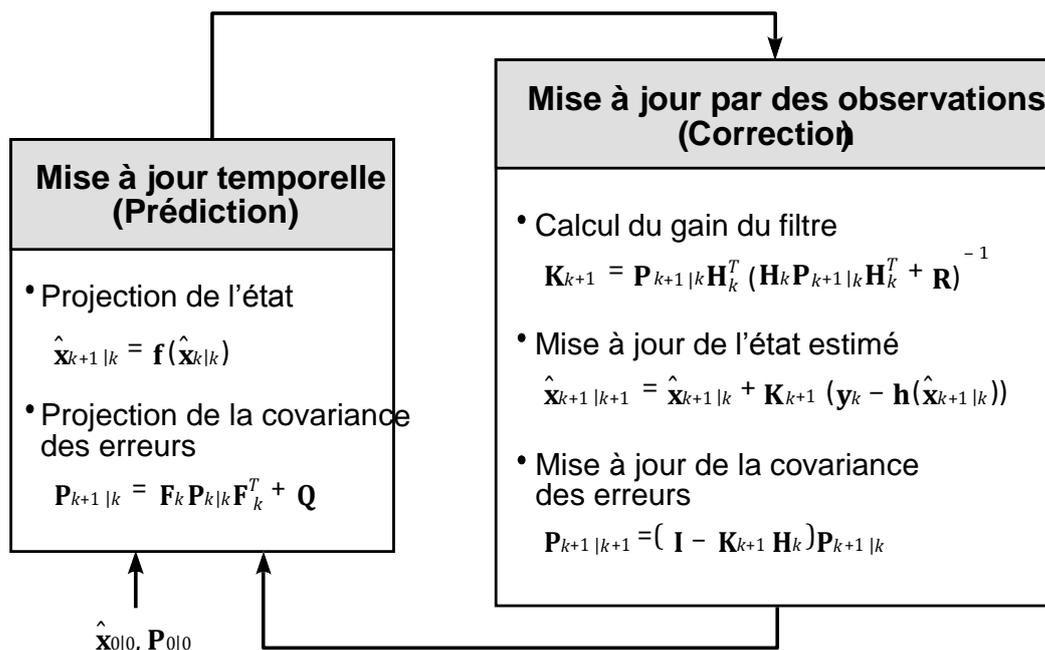


Fig. 2.1 – Utilisation récursive de l'algorithme Kalman Extended.

## 2.3 filtre de kalman Unscented

### 2.3.1 Transformation Unscented

Le filtre de Kalman Unscented est défini en même temps que la EKF en utilisant une transformation non linéaire de statistiques appelée dans ce cas Unscented. La transformation Unscented a été introduite par Julier [26], avec l'idée d'estimer la distribution de probabilité de la statistique transformée tout en évitant de la comparer.

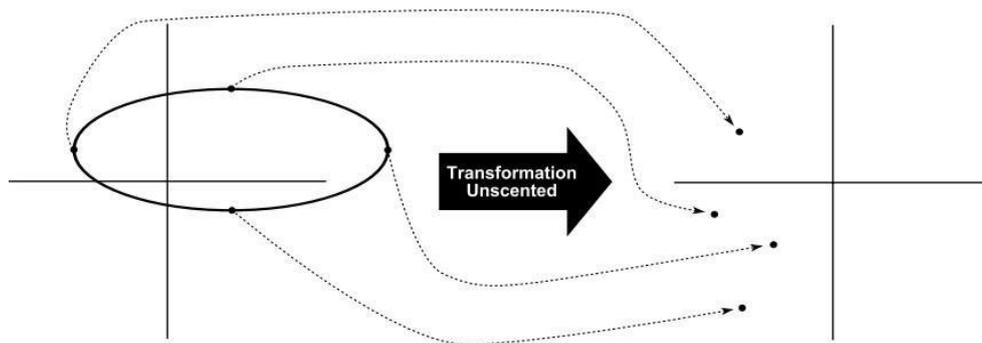


Fig. 2.2 – Le principe de la transformation Unscented.

Fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points (appelés sigma points) et respectivement leurs pondérations, distribués dans l'espace d'état de la v.a. initiale pour approximer sa statistique. Comme on peut l'observer sur la figure (2.2) ces points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale

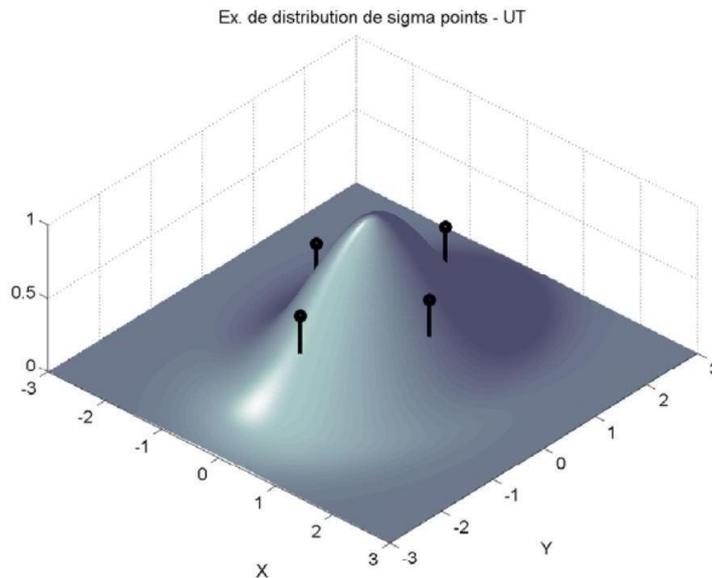
L'ensemble de points choisi  $\{\mathcal{X}^{(i)}\}$ , auquel on associe les coefficients de pondération  $W^{(i)}$  calculés d'une manière déterministe forme l'ensemble de sigma points  $S=\{\mathcal{X}^{(i)}, w^{(i)}\}$ , qui caractérise complètement les vraies moyenne et covariance. Cet ensemble de points subit ensuite la propagation à travers la fonction non-linéaire, comme dans le cas de l'EKF (eq. 2.2).

Cette méthode de propagation ponctuelle présente une similitude avec le filtrage des particules que nous présenterons plus loin dans ce chapitre, mais contrairement à celui-ci, le choix des points est déterministe et les poids associés sont choisis d'une autre façon, sans être basés sur la répartition.

Dans son article [27] Juliers démontre qu'un tel ensemble de points, permettant le calcul de la moyenne et covariance du v.a. transformée, est donné par un nombre de  $2N_x$  points, où  $N_x$  est la dimension du vecteur état  $\mathbf{x}$ . Les points sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}^{(i)} &= \bar{\mathbf{x}} + (\sqrt{N_x P_{xx}}) \\
 w^{(i)} &= 1/2N_x \\
 \mathcal{X}^{(i+N_x)} &= \bar{\mathbf{x}} - (\sqrt{N_x P_{xx}}) \\
 w^{(i+N_x)} &= 1/2N_x
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Où  $i = 1 \dots N_x$ ,  $(X)$  représente la  $i$ -ième ligne ou colonne de la matrice  $\sqrt{N_x P_{xx}}$  et où  $W^{(i)}$  est la pondération associée. Dans la figure 2.4 on donne un exemple pour le choix de points sigma avec l'hypothèse d'une



**Fig. 2.3 :** Un exemple de distribution de sigma points pour un v. a. gaussienne bidimensionnelle dans le cas de la transformation Unscented

Répartition initiale gaussienne en deux dimensions. Les points sont situés par rapport à la surface gaussienne à une distance correspondant au coefficient de pondération.

Étant donné cet ensemble de points, la moyenne et la variance sont calculées de la manière suivante :

1. par propagation par la fonction non-linéaire on obtient l'ensemble de points transformés

$$x^{(i)} = f[x^{(i)}] \quad (2.4)$$

2. la moyenne est calculée par la somme des points transformés, pondérés par les coefficients  $\{W^{(i)}\}$  :

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{2N_x} W^{(i)} Y^{(i)} \quad (2.5)$$

3. la covariance est alors calculée comme :

$$P_{yy} = \sum_{i=1}^{2N_x} W^{(i)} \{y^{(i)} - \bar{y}\} \{y^{(i)} - \bar{y}\}^T \quad (2.6)$$

L'ensemble de points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre offre une estimation biaisée au niveau de la covariance.

Ce biais découle de l'impossibilité de l'ensemble de points à traduire l'influence des plus simple est de compléter l'ensemble de points choisi avec un ou plusieurs points.

Moments supérieurs de la statistique. Pour corriger ce problème la solution la plus simple est de compléter l'ensemble de points choisi avec un ou plusieurs points .

Les mêmes auteurs [35,36] ont alors proposé d'ajouter un point correspondant à la moyenne et avec son coefficient de pondération de permettre le réglage de l'influence des moments supérieurs. Ainsi le nouvel ensemble de *sigma points* proposé est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 x^{(0)} &= \bar{x} \\
 w^{(0)} &= k / (N_x + k) \\
 x^{(i)} &= \bar{x} + (\sqrt{(N_x + k) p_{yy}})_i \\
 w^{(i)} &= 1 / \{2 (N_x + k)\} \\
 x^{(i+N_x)} &= \bar{x} + (\sqrt{(N_x + k) p_{yy}})_i \\
 w^{(i+N_x)} &= 1 / \{2 (N_x + k)\}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Où  $i = 1 \dots N_x$ . Le choix original des points sigma, défini par les équations (2.3), a la propriété que l'ellipsoïde qui limite le positionnement des points augmente avec la dimension  $N_x$  de l'espace d'état. Ainsi le choix du nouveau paramètre introduit  $\kappa$ , en plus de capturer l'influence des moments supérieurs, doit être utilisé aussi pour limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en présence de forte non-linéarité.

Avec la définition du nouvel ensemble de points sigma on observe que la distance de l' $i$ -ième point par rapport à  $\bar{x}$  est proportionnelle à la valeur  $\sqrt{(N_x + k)}$ . Ainsi le choix du paramètre  $k=0$ , nous place dans le cas des équations (2.3), tandis qu'une valeur  $\kappa > 0$  éloigne les points de la moyenne, et avec une valeur négative de  $\kappa$ , on trouve l'effet inverse avec un rapprochement des points. Il existe un cas spécial avec la solution de  $k=3-N_x$ , correspondant à l'annulation de la dimension  $N_x$  sur la distribution de points. Par contre avec le choix  $k=3-N_x < 0$  on va se retrouver dans un cas où le coefficient de pondération du point situé sur la moyenne est négatif et la covariance obtenue après propagation peut devenir semi-définie négative.

### 2.3.2 Transformation scaled-Unscented

Enfin il existe une solution proposée dans [35] où un nouvel ensemble de points est proposé avec un paramètre de décalage :

$$x_s^{(i)} = X^{(0)} + \alpha (X^{(i)} - X^{(0)}), \quad i=0, \dots, 2N_x \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2.8}$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation à l'échelle non senteur. Les auteurs ont montré que le nouveau paramètre de décalage  $\alpha$  introduit n'aura aucun effet négatif l'estimation de la statistique de la variable transformée  $(y_{yy})$ , avec une expression exacte jusqu'au deuxième ordre des moments de la v. a. initiale, et une pondération des autres moments supérieurs grâce à  $\alpha$ . Enfin les auteurs ont proposé un ensemble de points qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées :

$$x^{(0)} = \bar{x} \quad w_{(m)}^{(0)} = \frac{\lambda}{N_x + \lambda}$$

$$x^{(i)} = \bar{x} + \left( \sqrt{\frac{N_x + \lambda}{N_x}} \right) p_{yy} \quad i=1, \dots, N_x \quad w_{(c)}^{(0)} = \frac{\lambda}{N_x + \lambda} (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$x^{(i)} = \bar{x} + \left( \sqrt{\frac{N_x + \lambda}{N_x}} \right) p_{yy} \quad i=N_x + 1, \dots, 2N_x \quad w_{(m)}^{(0)} = w_{(c)}^{(0)} = \frac{1}{2(N_x + \lambda)} \quad i=1, \dots, 2N_x \quad (2.9)$$

Où  $\lambda = \alpha^2 (N_x + \kappa) - N_x$  et les pondérations désignées par  $w_{(m)}^{(0)}$  et  $w_{(c)}^{(0)}$  sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement.

L'expression du point central  $x^{(0)}$  garantit une matrice de covariance définie semi-positive. Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante :

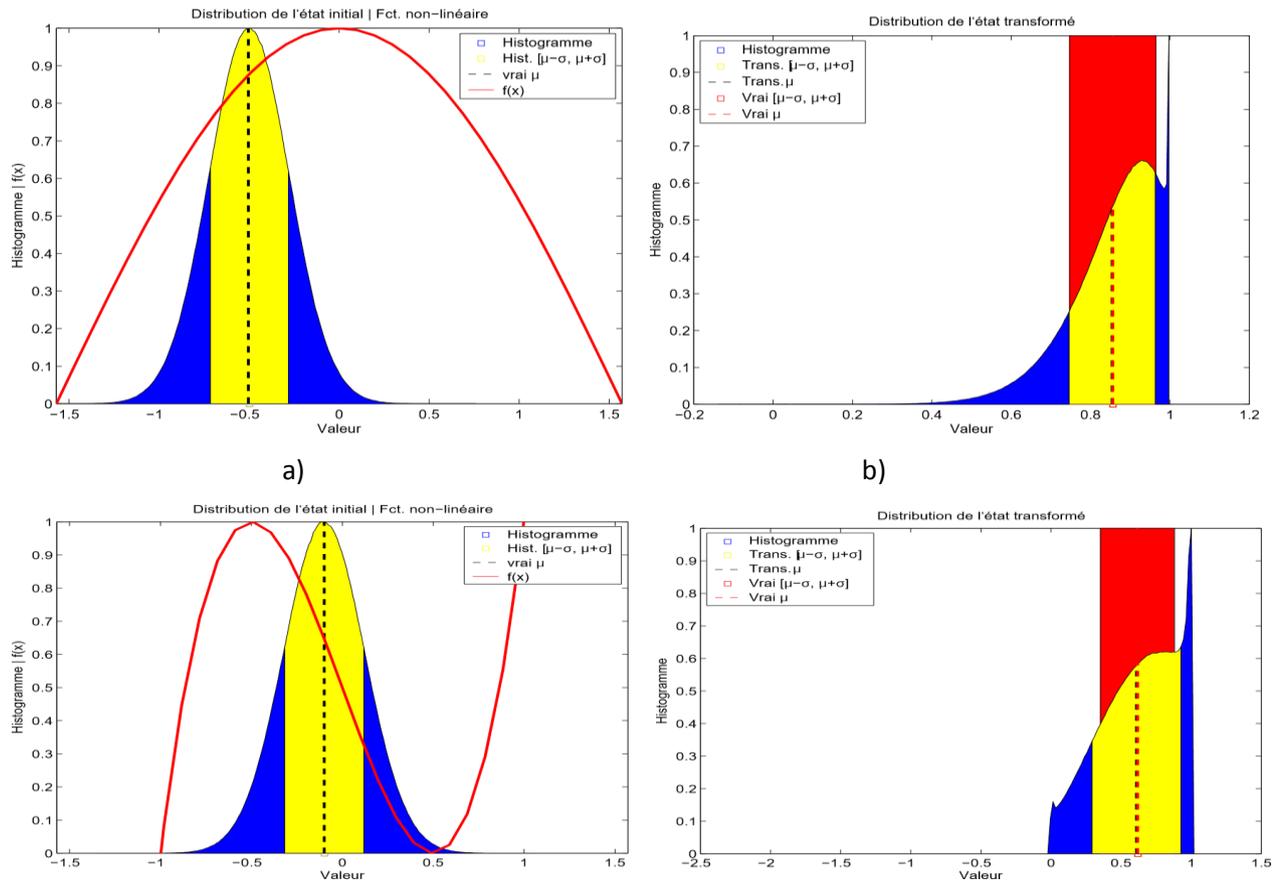
- afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra  $\kappa \geq 0$ . Il s'avère que la valeur de  $\kappa$  n'est pas critique, de telle sorte que  $\kappa = 0$  correspond généralement à tous les cas d'estimation;
- le paramètre  $0 < \alpha < 1$  considéré antérieurement va jouer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution des sigmas points. Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite pour limiter l'influence de certains effets de non-linéarité dans les régions éloignées de la valeur estimée;
- le dernier paramètre introduit  $\beta$ , est choisi positif pour avoir une certaine connaissance des moments d'ordre supérieur de la statistique initiale dans le modèle. Par exemple pour une hypothèse de distribution initiale gaussienne nous prendrons  $\beta = 2$ . Pour étudier les performances de cette nouvelle transformation nous allons considérer de nouveau la propagation d'une distribution initiale gaussienne à travers certaines fonctions non-linéaires. Ainsi dans les figures 2.4 a) et b) on va reprendre la fonction non-linéaire  $f(x) = \cos x$ , avec pour paramètres de la distribution initiale  $\mu = -0.5, \sigma^2 = 0.05$ ; On ajoute aussi que pour transformation Unscented considérée les paramètres suivants ont été choisi :  $\kappa = 0, \alpha = 10^{-3}, \beta = 2$ .

Comment on peut l'observer, la transformation Unscented arrive à mieux estimer les deux moments dans le cas d'une fonction non-linéaire de type *cosinus*, mais par contre avec l'augmentation de l'ordre de la non-linéarité ce type de transformation présente des erreurs. Ces conclusions sont reflétées numériquement dans le tableau 2.1 où la linéarisation et la transformation Unscented sont comparées.

Les résultats sont issus d'une simulation de type Monte-Carlo avec la propagation d'une séquence aléatoire de  $10^6$  échantillons.

### 2.3.3 Construction du modèle filtrage récursif UKF

Avec la définition de la transformation Unscented donnée ci-dessus la forme récursive du filtrage de Kalman peut être facilement déduite. Ainsi Julier et al. [35, 36] proposent une formulation générale dont le vecteur d'état est modifié en ajoutant à l'état original les vecteur associés aux bruits de processus



**Fig. 2.4** – Effets de la transformation Unscented sur l'estimation de la statistique de la v.a. transformée (avec une non-linéarité de type  $\cos x$ - figures a, b

Fonction non-linéaire $f(x)$	$x = \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$		$y = f(x) - \text{EKF}$		$y = f(x) - \text{UKF}$		$y = f(x) - \text{MC}$	
	$\mu_x$	$\sigma_x^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$	$\mu_y$	$\sigma_y^2$
$f(x) = \cos x$	- 0.7	0.0125	0.76484	0.005187	0.76006	0.005233	0.97044	0.005172
$f(x) = \cos x$	-0.6	0.025	0.82534	0.007970	0.81502	0.008183	0.8151	0.007980
$f(x) = \cos x$	-0.5	0.05	0.87758	0.011492	0.85564	0.012455	0.85592	0.011855
$f(x) = 2x^2 - 1.5x + 0.5$	-0.1	0.05	0.648	0.10368	0.618	0.10548	0.61804	0.069748

**TAB. 2.1**—Performances des transformations EKF et Unscented pour différentes configurations de la distribution initiale et de non-linéarité

D’observation. Le vecteur final obtenu, en utilisant un modèle de filtrage similaire à celui donné par l’équation (2.1), est écrit sous la forme suivante :

$$X_k^\alpha = \begin{pmatrix} x_k \\ v_k \\ n_k \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

La dimension du nouveau vecteur d’état augmenté est  $N_a = N_x + N_v + N_n$ , où  $N_x$ ,  $N_v$  et  $N_n$  représentent les dimensions des vecteurs  $x_k, v_k$  et  $n_k$  respectivement. Étant données les nouvelles notations, le modèle d’estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante

$$\begin{aligned} x_{k+1}^\alpha &= f^a(x_k^\alpha) \\ y_k &= h^a(x_k^\alpha) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Avec la transformation Unscented qui calcule les points *sigma* à partir des expressions suivantes des moments :

$$\begin{aligned} \mu_k^\alpha &= \begin{pmatrix} \mu_k \\ 0_{N_v \times 1} \\ 0_{N_n \times 1} \end{pmatrix} \\ P_{k/k}^\alpha &= \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bien sûr un modèle plus général peut être écrit avec la prise en compte de certaines corrélations entre les bruits et les états ou entre les bruits eux-mêmes, mais pour tous les cas considérés par la suite un tel développement n’est pas nécessaire. Finalement les notations introduites nous permettent d’écrire l’algorithme récursif de filtrage pour un instant  $k$  quelconque, en utilisant la succession d’étapes suivantes :

1. Construction de l'ensemble de points sigma en utilisant les relations (2.9) :

$$\{^{(i)}_{k/k}, W^{(i)}\}_{i=0 \dots N_\alpha}$$

2. Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus :

$$^{(i)}_{k+1/k} = f^\alpha \left( ^{(i)}_{k/k} \right) \quad i=0 \dots N_\alpha \quad (2.13)$$

3. Calcul de la valeur estimée et de la covariance des erreurs prédites:

$$\begin{aligned} \check{x}_{k+1/k} &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} W_{(m)}^{(i)} x_{k+1/k}^{(i)} \\ P_{x_{k+1/k} x_{k+1/k}} &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} W_{(c)}^{(i)} \{x_{k+1/k}^{(i)} - \check{x}_{k+1/k}\} \{x_{k+1/k}^{(i)} - \check{x}_{k+1/k}\}^T \end{aligned} \quad (2.14)$$

4. Propagation des points *sigma* à travers le modèle d'observation:

$$^{(i)}_{k+1/k} = h^\alpha \left( ^{(i)}_{k+1/k} \right) \quad i=0 \dots N_\alpha \quad (2.15)$$

5. Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de cross-covariance:

$$\begin{aligned} \check{y}_{k+1/k} &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} W_{(m)}^{(i)} y_{k+1/k}^{(i)} \\ P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}} &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} W_{(c)}^{(i)} \{y_{k+1/k}^{(i)} - \check{y}_{k+1/k}\} \{y_{k+1/k}^{(i)} - \check{y}_{k+1/k}\}^T \\ P_{x_{k+1/k} y_{k+1/k}} &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} W_{(c)}^{(i)} \{x_{k+1/k}^{(i)} - \check{x}_{k+1/k}\} \{y_{k+1/k}^{(i)} - \check{y}_{k+1/k}\}^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

6. Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs:

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{x_{k+1/k} y_{k+1/k}} + P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}}^{-1} \\ \check{x}_{k+1/k+1} &= \check{x}_{k+1/k} + K_{k+1} (y_{k+1} - \check{y}_{k+1/k}) \\ P_{k+1/k+1} &= P_{x_{k+1/k} x_{k+1/k}} - K_{k+1} P_{y_{k+1/k} y_{k+1/k}} K_{k+1}^T \end{aligned} \quad (2.17)$$

Avec les expressions qui caractérisent l'implémentation récursive du filtrage de Kalman, le développement de la structure classique du filtrage de type scaled-Unscented est accompli. On souligne encore une fois que la solution choisie pour former l'ensemble de points sigma n'est pas unique; Dans le paragraphe qui suit nous évoquons une méthode associée à la transformation Unscented qui grâce à un nombre plus grand de points réussit une meilleure approximation des moments supérieurs.

## 2.4 Filtre à particules

Nous achevons ce chapitre par une présentation succincte d'un algorithme créé spécifiquement pour garantir un fonctionnement quasi-optimal de la structure réursive développée par Kalman, indépendamment de la non-linéarité du modèle. A la différence de toutes les méthodes présentées jusqu'ici, le filtre à particules ne considère aucune approximation du modèle et aucune hypothèse au niveau des distributions des états et des bruits.

Développé initialement au LAAS de Toulouse [33, 34] et repris plus tard par Gordon et al. [37] sous la forme de filtre boot strap, le filtre particulaire s'est imposé comme un outil d'estimation très performant, au prix d'un coût de calcul beaucoup plus important que les solutions EKF et UKF. L'idée de base est d'utiliser un nombre important de particules (points) choisis aléatoirement pour représenter les distributions de probabilité. Cet ensemble de particules est par la suite propagé dans le temps en utilisant une combinaison de méthodes d'échantillonnage séquentiel et d'étapes de ré-échantillonnage. Cet emploi d'un grand nombre de particules tirées aléatoirement a fait que ce filtre soit aussi désigné sous le nom de méthode Monte-Carlo séquentielle (SMC - Séquentiel Monte Carlo). Pour développer les relations qui forment la base de filtrage particulaire on va partir du même modèle général donné par les équations (2.1). En plus on va utiliser la notation  $D_{k+1}$  pour l'ensemble des observations disponibles à l'instant  $k + 1$  :  $D_{k+1} = \{y_i, i = 1, \dots, k+1\}$ . Avec ces notations on définit l'objectif de l'application qui est de construire la distribution de probabilité de l'état  $x_{k+1}$ , en tenant compte de l'ensemble des observations :  $(x_{k+1}/D_{k+1})$ . En utilisant l'hypothèse que à l'instant  $k$  la distribution de probabilité  $(x_k/D_k)$  est connue, on peut écrire [37] :

$$P(x_{k+1}/D_k) = \int P(x_{k+1}/x_k)P(x_k/D_k)dx_k \quad (2.18)$$

En utilisant par la suite l'expression de l'évolution réursive de l'état, la statistique connue du bruit de processus et la relation de Bayes, on obtient la distribution de probabilité de l'état  $x_{k+1}$

$$(x_{k+1} / D_{k+1}) = \frac{(y_{k+1}/x_{k+1})P(x_{k+1}/D_k)}{(x_{k+1}/D_k)} \quad (2.19)$$

Où le dénominateur est donné par :

$$(x_{k+1}/D_k) = \int P(y_{k+1}/x_{k+1})P(x_{k+1}/D_k)dx_{k+1} \quad (2.20)$$

Les relations récurrentes (2.18) et (2.19) forment la solution pour le problème d'estimation réursive de Bayes. Dans les méthodes déjà présentées dans ce chapitre plusieurs approximations et hypothèses simplificatrices ont été considérées, risquant de conduire à de médiocres performances

pour certaines applications. En présence de conditions difficiles (statistique non-gaussienne) le filtre à particules reste une solution de référence, pouvant garantir une convergence asymptotique [38].

Avant de passer à l'implémentation des expressions récursives on va initialiser l'algorithme par l'échantillonnage de la distribution initiale  $(x_0/D_0)$ : l'ensemble de points choisi aléatoirement  $\{x_0^{(i)}, w_0^{(i)}\}_{i=1 \dots N_p}$  représentera le vecteur d'état  $^{(i)}_0$  de loi  $P(x_0/D_0)$ , les pondérations  $w_0^{(i)} = \frac{1}{N_p}$  respectant

$$\sum_{i=1}^{N_p} w_0^{(i)} = 1$$

Une loi uniforme.

L'implémentation de l'algorithme de filtrage est encore divisée en deux étapes, l'une de prédiction et l'autre de mise à jour par des observations :

- étape de prédiction : chaque point considéré est passé par la suite à travers la fonction de processus pour obtenir les échantillons  $^{(i)}_{k+1} = f(x_k^{(i)})$  qui caractérisent la probabilité prédite  $P(x_{k+1}/x_k)$
- étape de mise à jour par des observations : cette étape consiste en l'évaluation de la vraisemblance de chaque échantillon transformé, avec le calcul des pondérations  $^{(i)}_{k+1}$

$$W_{k+1}^{(i)} = \frac{P(y_{k+1}/x_{k+1}^{(i)})}{\sum_{j=1}^{N_p} P(y_{k+1}/x_{k+1}^{(j)})} \quad (2.21)$$

Avec l'expression des coefficients  $^{(i)}_{k+1}$  la valeur estimée est obtenue par la moyenne des états pondérés par leur probabilité normalisée :

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = \sum_{j=1}^{N_p} w_{k+1}^{(j)} x_{k+1}^{(j)} \quad (2.22)$$

Dans la figure 2.5 on montre un exemple de filtrage particulaire appliqué à la synchronisation chaotique pour le cas d'un polynôme Tchebychev d'ordre deux. Le modèle utilisé est donné par le système d'équations suivant :

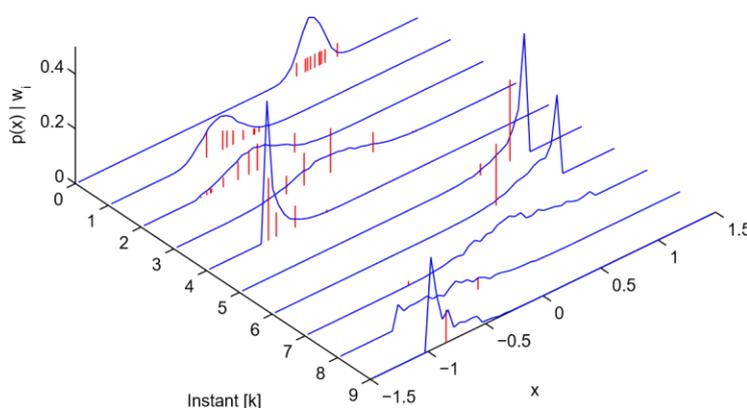
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k^2 - 1 + v_k \\ y_k &= x_k + n_k \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ainsi on observe la distribution de l'état estimé pour 9 étapes successives d'application de l'algorithme particulaire. Une conclusion évidente que l'on peut tirer est que la distribution ne conserve pas un aspect gaussien, avec une forte asymétrie. En ce qui concerne l'évolution dans l'espace de phase des particules, nous montrons comment évoluent 10 particules issues de l'échantillonnage initial. L'amplitude de chaque pic reflète le coefficient de pondération associé à chacune d'entre-elles.

On peut observer l'échantillonnage initial correspondant à une distribution gaussienne, avec des pondérations égales pour tous les points. Pour les étapes successives de filtrage la pondération de

chaque particule va changer conformément à la fonction de vraisemblance déterminée à partir de l'observation courante. De même, on observe une dispersion progressive des particules, conséquence d'une réduction d'effectif si aucune procédure de redistribution n'est employée.

Pour résoudre ce problème de dégénérescence en pratique une nouvelle étape est introduite dans le processus de filtrage (re-échantillonnage) : cela consiste à redistribuer les points après chaque étape d'estimation, si nécessaire. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature [38]. L'idée de base est de modifier l'ensemble de points déterminé pour qu'il respecte un critère d'approximation non-pondéré de la distribution a priori, qui soit utilisé à l'étape suivante.



**Fig. 2.5** – Evolution de la distribution de probabilité et exemple de 10 particules pour le système non-linéaire donné par les équations (2.23)

Même si ce type d'estimateur d'état offre théoriquement les meilleures performances possibles par rapport à un critère d'EQM, le coût de calcul nécessaire est beaucoup plus important que toute autre solution exposée antérieurement. De même les performances sont directement liées à son paramétrage qui consiste essentiellement dans le nombre de points choisis et l'étape de re-échantillonnage considérée. La formulation générique du filtre doit donc être adaptée au problème considéré pour réduire le plus possible le coût de Calcul.

Le filtre à particules est évoqué dans ce chapitre pour ses performances de référence concernant la précision d'estimation. Cependant, comme notre objectif sera par la suite de développer des solutions de récepteur à faible coût de calcul nous n'avons pas retenu cette approche.

## 2.5 Conclusions

Ce chapitre était dédié à la présentation générale des méthodes d'estimation récursive non-linéaire les plus populaires. Ainsi dans la première partie les solutions EKF et IEKF ont été présentées. Ces solutions basées sur une linéarisation au premier ordre du modèle d'estimation ont l'avantage d'un

coût de calcul réduit ainsi qu'une simplification de l'implémentation. Par contre, elles souffrent au niveau de la consistance de l'estimateur et des performances d'estimation. Une deuxième variante présentée, utilise la transformation Unscented pour l'estimation récursive de la statistique des états. Basées sur cette transformation les solutions de filtrage UKF et HOUF sont ensuite développées. La troisième section était destinée à la présentation d'une structure générale du filtre CDKF construit à partir d'une approximation polynomiale du modèle par la relation de Stirling. En ce qui concerne l'approximation non-gaussienne de la distribution des états nous avons évoqué en fin de chapitre la solution d'approximation par somme de gaussiennes ainsi que la méthode de filtrage particulière. Dans le prochain chapitre une nouvelle transformation non-linéaire sera introduite et par la suite un nouveau filtre de Kalman sera développé.

## ***Chapitre III: Le Filtre de Kalman modélisé par les polynômes de Chebyshev.***

3.1 Introduction

3.2 Problème de formulation

3.3 Les polynômes de Chebyshev

3.4 Propagation sous forme fermée des moments

3.5 L'estimateur gaussien

3.6 Résultats et simulation

3.7 Conclusion

### 3.1 Introduction

Les solutions exactes ou solutions sous forme finie pour l'estimation bayésienne récursive de l'état ne sont disponibles que dans certains cas particuliers. Pour les systèmes linéaires affectés par un bruit gaussien, le filtre de Kalman [39] est optimal et permet une estimation de manière très efficace. Dans le cas d'un espace d'états discret avec un nombre fini d'états, les filtres à particules sont aussi optimaux [40]. Pour les problèmes d'estimation non linéaires non gaussiens qui sont typiques dans de nombreux domaines techniques, par exemple la localisation, la robotique ou le traitement du signal, l'estimation bayésienne récursive exacte sous forme fermée n'est pas possible et donc, les approximations sont inévitables, cependant l'approximation est effectuée de telle manière que la moyenne et la variance exactes de la distribution d'états sont préservées via l'appariement des moments. Cela nécessite cependant la solution des intégrales d'espérance, qui ne sont pas disponibles sous forme fermée en général. Outre l'intégration numérique coûteuse en calculs, de nombreux filtres de densité gaussiens approximatifs rapides utilisant les équations de filtre de Kalman ont été déjà développées. Le filtre de Kalman étendu (EKF, [42, 43]) utilise la linéarisation via le développement en série de Taylor du premier ordre, tandis que l'EKF du second ordre considère la Hessienne pour une meilleure performance d'estimation [43]. Le filtre de Kalman unscented (UKF, [44, 45]) qui repose sur le principe de propagation d'un ensemble fini de «sigma points» choisi autour de la moyenne et la variance de la densité précédente.

Une autre alternative pour résoudre les problèmes d'estimation non linéaire est la discrétisation de l'espace d'état comme cela se fait dans les filtres à particules [40].

Un nouvel estimateur gaussien sera étudié dans ce chapitre nommé « Chebyshev Polynomial kalman filtre » .Repose sur un algorithme récente, selon lequel pour les non-linéarités polynomiales, la moyenne et la variance peuvent être déterminées d'une manière exacte [50,51] .Afin d'appliquer cet algorithme, un système non linéaire donné est dans un premier temps développé en une série de polynômes de Chebyshev. Ce type spécifique de polynômes orthogonaux est bien adapté à des fins d'approximation pour deux raisons.

- Tout d'abord, les coefficients de la série peuvent être déterminés efficacement au moyen de la transformée en cosinus discrète.
- Deuxièmement, une approximation en série de Chebyshev est généralement très proche du meilleur polynôme d'approximation, alors que le meilleur polynôme est difficile à trouver en général.

Compte tenu de développements en série de Chebyshev, des solutions sous forme fermée pour la propagation des moments sont dérivés et exprimées en notation de matrice, ce qui permet une mise en œuvre efficace en termes de calcul En terms de calcul .Ces expressions de propagation de

moment sont ensuite employées dans la construction du de filtre de Kalman afin d'obtenir un estimateur gaussien récursif.

Ainsi, les contributions de cette nouvelle méthode étudiée dans ce chapitre sont triples :

- 1- Approximation précise de modèles arbitraires non linéaires au moyen du développement de séries de polynômes de Chebyshev.
- 2- Calcul exact des moments non centraux d'une distribution gaussienne propagée à travers des polynômes
- 3- propagation efficace de la moyenne et de la variance sur le plan informatique pour la série de polynôme de Chebyshev en exploitant la structure récursive des polynômes de Chebyshev

### 3.2 Problème de formulation

Le système non linéaire à temps discret est représenté par l'équation dynamique

$$x_{k+1} = a_k(x_k, u_k) \quad (3.1)$$

Et l'équation de mesure

$$z_k = h_k(x_k) + v_k \quad (3.2)$$

Est considéré, où  $a_k(\cdot)$  et  $h_k(\cdot)$  sont la fonction système et la fonction de mesure, respectivement.

La variable aléatoire scalaire  $x_k$  est l'état du système à l'instant  $k$  et  $z_k$  est la mesure scalaire. Les termes  $w_k$  et  $v_k$  sont respectivement le bruit gaussien blanc à moyenne nulle du système et de mesure. L'entrée système  $u_k$  est supposée connue.

Dans l'estimation bayésienne, deux étapes alternées sont effectuées (la prédiction et la mise à jour des mesures), pour estimer l'état du système  $x$ . Au moment de l'étape de prédiction, l'estimation actuelle de  $x_k$  est propagée au moyen de l'équation dynamique (3.1).

Dans la mise à jour de mesure, une valeur de mesure donnée  $\hat{z}_k$  est incorporée pour mettre à jour en tenant compte de la relation de mesure (3.2). Pour les deux étapes, les solutions sous forme exacte ne sont pas disponibles pour les deux fonctions arbitraires  $a_k(\cdot)$ ,  $h_k(\cdot)$  ainsi pour des distributions arbitrairement aléatoire. Pour cela, des approximations appropriées doivent être appliquées pour une utilisation pratique. Afin de d'avoir un calcul d'approximation efficace, l'accent est mis dans ce chapitre sur le cas du filtre de Kalman. Pour cela, il suffit de considérer une transformation non linéaire.

$$Y = g(x) \quad (3.3)$$

Où le but est de trouver la moyenne et la variance du variable aléatoire  $y$  obtenue via de la propagation de la variable aléatoire gaussienne  $\mathbf{x} \approx N(\mathbf{x}; \mu_{\mathbf{x}}, \sigma_{\mathbf{x}}^2)$  de moyenne  $\mu_{\mathbf{x}}$  et de variance  $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ . Dans l'étape de prédiction  $y$  correspond à la prédiction  $x_{k+1}$ ,

Pour des transformations non linéaires arbitraires (3.3) avec  $x$  Gaussiennes, un calcul exact des moments de  $y$  n'est toujours pas possible en général. À l'exception des transformations polynomiales. Ainsi, l'idée clé est d'approximer une transformation non linéaire arbitraire (3.3) par une série de polynômes et ensuite, d'effectuer les calculs de moments de  $y$  sous forme exacts. A cet effet, une

Approximation très précise basée sur les polynômes de Chebyshev est considéré.

### 3.3 Les polynômes de Chebyshev

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur les polynômes de Chebyshev du premier type qui sont définis de manière compacte [52]

$$T_N(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \quad n=0, 1 \tag{3.4}$$

Ou de manière équivalente au moyen de la récursivité

$$T_N(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n=2, 3 \tag{3.5}$$

Avec les conditions initiales

$$T_0(x)=1, \quad T_1(x)=x. \tag{3.6}$$

Il est facile de déduire à partir de (3.5) que la fonction  $T_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$ . Si  $n$  est pair (impair), alors  $T_n(x)$  est une somme de pairs (impairs) monômes, c'est-à-dire que  $T_n(x)$  est de la forme

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_{n,i} \cdot x^i = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{n,n-2j} \cdot x^{n-2j} \tag{3.7}$$

Où  $(\alpha_{n,i})$  est le coefficient de Chebyshev du  $i^{\text{ème}}$  monôme du  $n^{\text{ème}}$  polynôme de Chebyshev. Le coefficient  $(\alpha_{n,i})$  est non nul seulement si  $i$  est pair (impair).

#### 3.3.1 Propriétés

De nombreuses propriétés importantes sont détaillées dans [52]), le produit de deux polynômes de Chebyshev  $T_i, j$  présente un intérêt particulier dans ce chapitre. Ce produit peut être exprimé au moyen de la somme de deux autres polynômes de Chebyshev selon

$$T_i(x) \cdot T_j(x) = 1/2(T_{i+j}(x) + T_{|i-j|}(x)) \tag{3.8}$$

De plus, les zéros pour  $x \in \Omega, [-1,1]$  de  $T_n(x)$  sont.

$$x = m \cdot \cos(\theta_m) \tag{3.9}$$

avec

$$\theta_m \triangleq \pi \frac{\pi(m-1)}{2n} \tag{3.10}$$

pour  $m = 1, \dots, n$ . Tous les polynômes de Chebyshev  $T_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots$  forment un système orthogonal complet sur l'intervalle  $\Omega$  par rapport au poids

$$W(x) = (1-x^2)^{-1/2} \tag{3.11}$$

Ainsi, ils satisfont

$$T_i(x), T_j(x) \int_{-1}^1 T_i(x) \cdot T_j(x) dx \tag{3.12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad i \neq j \\ \frac{1}{2}, \quad i = j \neq 0 \\ \pi, \quad i = j = 0 \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

Un système orthogonal de polynômes est particulièrement avantageux lorsqu'il est utilisé pour approximer une fonction non linéaire comme décrit ci-après.

### 3.3.2 Série de Chebyshev

Le développement d'une fonction donnée  $g(x)$  par une série de polynômes de Chebyshev sur  $\Omega$  est donné par

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot T_i(x), \forall x \in \Omega \tag{3.14}$$

Où les coefficients

$$c_i = \frac{\langle g(x), T_i(x) \rangle}{\langle T_i(x), T_i(x) \rangle} \tag{3.15}$$

Comme tout développement en série basé sur des polynômes orthogonaux, les coefficients de la série peuvent être calculés indépendamment les uns des autres.

### 3.3.3 Développement en série approximative

Pour les implémentations pratiques, il est seulement possible d'étendre une fonction donnée  $g(x)$  dans un nombre fini de composantes de la série  $n < \infty$ , ce qui se traduit par Une série tronquée de Chebyshev. Évidemment un développement tronqué fournit simplement une représentation approximative de la fonction  $g(x)$ . Heureusement, il peut être montré qu'une série de Chebyshev tronquée donne une approximation proche du minimax, c'est-à-dire une série Chebyshev tronquée de degré  $n$  est très proche de la meilleure approximation polynomiale possible du même degré. Par

rapport à d'autres systèmes de polynômes orthogonaux, un développement en série basé sur des polynômes de Chebyshev bénéficie du fait que tout  $T_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n$  sont compris entre  $\pm 1$  et sont fonctions oscillatoires en  $\Omega$ . Ainsi, l'erreur qui résulte de la négligence des composantes de degré supérieur à  $n$  se propage en douceur sur l'intervalle  $\Omega$ . Par exemple, si la fonction  $g(x)$  a  $r + 1$  dérivées continues sur  $\Omega$ , alors l'erreur d'approximation est Avec  $(n-r)$  pour tout  $x \in \Omega$  et donc, l'erreur diminue rapidement avec le degré  $n$ . Ici,  $O(\cdot)$  est le grand O en notation Landau.

De plus, si  $g(x)$  est une fonction polynomiale de degré  $r$ , alors une série de Chebyshev tronquée est optimale, c'est-à-dire sans erreur d'approximation, si  $n = r$ .

Pour de nombreuses fonctions  $g(x)$ , les coefficients de série (3.15) ne peuvent pas être calculés sous forme fermée en raison de l'intégration dans le numérateur. Dans tels cas, on peut exploiter que les polynômes de Chebyshev  $T_i(x)$ ,  $j = 0, \dots, n - 1$  sont aussi orthogonaux dans un sens discret sur les zéros  $X_m$ ,  $m = 1, \dots, n$  de  $T_n(x)$

$$\sum_{m=1}^n T_i(x_m) \cdot T_j(x_m) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{2}, & i = j \neq 0 \\ n, & i = j = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Cette propriété d'orthogonalité discrète conduit à un calcul numérique très efficace de (3.15) au moyen de

$$c_i \approx \frac{2-\delta_{i0}}{n} \sum_{m=1}^n g(x_m) \cdot T_i(x_m) \quad (3.17)$$

pour  $j = 0, 1, \dots, n$ , où  $\delta_{ij}$  est le Delta de Kronecker qui vaut un seulement si  $i = j$  et zéro sinon. On peut montrer qu'une série tronquée de degrés de Chebyshev avec des coefficients de série approchés (3.17) interpole exactement  $g(x)$  dans les zéros (3.9) de  $T_n(x)$ . De plus, il satisfait toujours la propriété quasi minimax.

Alors quel meilleure représentation polynomiale de  $g(x)$  est généralement difficile obtenir, la série approchée de Chebyshev est très proche de la meilleure solution et grâce à (3.17) très facile à calculer.

### 3.4 Propagation sous forme fermé des moments

Le calcul numérique (3.17) des coefficients de la série facilite la représentation polynomiale (3.14) d'une fonction non linéaire donnée  $g(x)$  sur l'intervalle  $\Omega$ . La restriction sur l'intervalle  $\Omega$  est Non critique. Par le biais de la transformation affine

$$x' = \frac{2}{b-a} \cdot x - \frac{a+b}{b-a} \quad , \quad (3.18)$$

Toute fonction  $g(x)$  définie sur un intervalle arbitraire  $[a, b]$  peut être représentée sur l'intervalle  $\Omega$ . La variable aléatoire  $x$  doit également être transformée, ce qui donne la moyenne et la variance transformées

$$u_{x'} = \frac{2}{b-a} \cdot u_x - \frac{a+b}{b-a} \quad (3.19)$$

$$\sigma_{x'}^2 = \left(\frac{2}{b-a}\right)^2 \cdot \sigma_x^2, \quad (3.20)$$

Respectivement. De plus, pour le calcul des coefficients de série au moyen de la transformée discrète en cosinus (3.17), les zéros  $x_m$  définis sur  $\Omega$  (voir (3.9)) doivent être mis en correspondance avec l'intervalle  $[a, b]$ . Ceci peut être réalisé en inversant (3.18), ce qui donne

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot x' + \frac{a+b}{2} \quad (3.21)$$

Ainsi, dans ce qui suit, il suffit de supposer que  $g(x)$  est défini sur  $\Omega$  et une représentation en série de Chebyshev de  $g(x)$  est donnée. La prochaine étape vers un estimateur de type filtre de Kalman est la dérivation de calculs sous forme fermée de la moyenne  $\mu_y$  et la variance  $\sigma_y^2$  de la variable aléatoire  $y$  étant donné une variable aléatoire gaussien  $x$ .

### 3.4.1 Moments non centraux d'une gaussienne

Lors de la propagation d'une variable gaussien  $x$  à travers une série de Chebyshev représentant la fonction  $y = g(x)$ , le calcul de la moyenne  $\mu_y$  peut être formulé comme

$$\begin{aligned} \mu_y &= E \{g(x)\} \\ &= \int g(x) \cdot (x; u_x, \sigma_x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \int T_i(x) \cdot \tilde{N}(x; u_x, \sigma_x^2) dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=0}^i a_{i,j} \int x^j \cdot \tilde{N}(x; u_x, \sigma_x^2) dx, \quad (3.23)$$

C'est-à-dire qu'il nécessite un calcul sous forme fermée de tous les moments non centraux  $E_j$  d'une variable aléatoire gaussienne jusqu'à l'ordre  $n$ . Il est important de noter que l'intégration sur toute la ligne réelle à la place d'intégrer sur  $\Omega$  dans l'équation ci-dessus n'est valable que, si  $\Omega$  contient presque le support complet de la variable gaussienne  $x$ . Cela peut être assuré si l'intervalle  $[a, b]$  utilisé dans la transformation (3.21) est choisie suffisamment large (pour une discussion détaillée voir section (4.1)).

Pour le  $j^{\text{ième}}$  moment non central, on a la récurrence suivante



Où  $E_n \triangleq [E_{0,1}, \dots, E_n]^T$  est le vecteur des moments non centraux jusqu'à l'ordre  $n$  et  $C_n \triangleq [C_0, C_1, \dots, C_n]$  est le vecteur des coefficients de la série. De plus,  $A_n$  est la matrice  $(n+1) \times (n+1)$  des coefficients de Chebyshev définie par

$$A_n \triangleq [\alpha_{0,n} \alpha_{1,n} \dots \alpha_{n,n}]^T \quad (3.28)$$

Avec,  $\alpha_{i,n}, [\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}]^T \in \mathbb{N}^{n+1}, i = 0, 1, \dots, n$  comprend tous les coefficients du  $i^{\text{ème}}$  polynôme de Chebyshev jusqu'à le  $n^{\text{ème}}$  monôme. Il est calculé par la récursivité

$$\alpha_{i,2} = [0 \ \alpha_{i-1,-1}^T \ 0 \ \dots \ 0]^T + [\alpha_{i-2,i-2}^T \ 0 \ \dots] \quad (3.29)$$

Qui commence à partir de

$$\alpha_0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T, \alpha_{1,n} = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.30)$$

Et en exploitant la définition des polynômes de Chebyshev (3.5). Il résulte d'après (3.6), les coefficients  $\alpha_{i,j}$  sont nuls pour  $j > i$ . Ainsi,  $A_n$  est une matrice triangulaire inférieure creuse, ce qui réduit significativement les calculs des produits matrice-vecteur dans (3.27).

### 3.4.3 Propagation de la variance

Afin de déterminer la variance  $\sigma_y^2$  de la variable aléatoire propagée  $y$ , la relation

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E \{ (y - \mu_y)^2 \} = E \{ (g(x) - \mu_y)^2 \} \\ &= E \{ g(x)^2 \} - \mu_y^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Est exploitée, où la moyenne propagée  $\mu_y$  est déjà connue de la section précédente. Il reste à évaluer le premier terme de (3.31). En supposant à nouveau que  $g(x)$  est approché au moyen d'une série de Chebyshev selon (3.14), l'évaluation de l'espérance peut se résumer à calculer plusieurs valeurs attendues sur les produits des polynômes de Chebyshev. Pour un calcul efficace, la relation (3.8) est utilisée. Dans ce cadre, l'espérance  $E[g^2(x)]$  peut être déterminé selon

$$\begin{aligned} E \{ g(x)^2 \} &= \int_{-1}^1 g(x) \cdot g(x) \cdot p(x; u_x, \sigma_x^2) dx \\ &\approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_i \cdot c_j \cdot \int_{-1}^1 T_i(x) \cdot T_j(x) \cdot p(x; u_x, \sigma_x^2) dx \\ &= (C_n \otimes C_n)^T \cdot p_{2n} \cdot E_{2n} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Avec  $\otimes$  étant le produit de Kronecker,  $E_{2n}$  comprenant tous les moments non centraux jusqu'à l'ordre  $2n$  calculés selon (3.25), et  $p_{2n}$  étant une matrice  $(n+1)^2 \times (2n+1)$

$$p_{2n} \triangleq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\alpha_{0,2n} + \alpha_{0,2n})^T & 1 \\ (\alpha_{1,2n} + \alpha_{1,2n}) & 1 \\ \cdot & 1 \\ \cdot & 1 \\ (\alpha_{i+j,2n} + \alpha_{|i-j|,2n})^T & 1 \\ \cdot & 1 \\ \cdot & 1 \\ \cdot & 1 \\ (\alpha_{2n,2n} + \alpha_{0,2n}) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

comprenant les coefficients résultant de tous les produits possibles  $T_i(x) \cdot T_j(x)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, n$  du développement en série de Chebyshev de  $g(x)$ .

### 3.5 L'estimateur Gaussian

Sur la base des dérivations précédentes, l'étape suivante consiste à présenter un filtre gaussien basé sur les développements en série de Chebyshev du modèle dynamique (3.1) et modèle de mesure (3.2).

#### 3.5.1 Intervalle d'approximation

Une fois que la fonction système et la fonction de mesure sont défini sur des intervalles arbitraires, il est nécessaire de transformer sur l'intervalle  $\Omega$  via (3.18) avant d'effectuer le développement en série de Chebyshev de la prédiction et la mise à jour de la mesure. A cet effet, l'intervalle  $[a, b]$  doit être déterminé. Une première suggestion est de traiter le fait que cet intervalle est fixe pour tous le temps.

Ce ci par exemple est raisonnable s'il est connu a priori que l'état du système  $x_k$  restera à l'intérieur de  $[a, b]$  pour tous les instants. Dans ce cas-là pour les systèmes invariants dans le temps, les coefficients de série  $C_i$  doivent être déterminés initialement une seule fois et restent constants pour tous les instants. Certes, l'intervalle  $[a, b]$  et donc le nombre de séries  $n$  des composantes peuvent être grandes, ce qui peut entraîner des charges de calcul élevées pour l'estimation d'état. Une autre solution consiste à déterminer dynamiquement l'intervalle  $[a, b]$  à chaque pas de temps en fonction du résultat courant de la prédiction  $x^p_k$  et de mise à jour des mesures  $x^e_k$  respectivement.

Vu l'estimation  $x_k^{\bullet} \sim N(x_k; \mu_k^{\bullet}, (\sigma_k^{\bullet})^2)$ , les limites de l'intervalle peuvent être déterminées selon

$$a_k^{\bullet} = \mu_k^{\bullet} - l \cdot \sigma_k^{\bullet}, b_k^{\bullet} = \mu_k^{\bullet} + l \cdot \sigma_k^{\bullet}, \quad (3.34)$$

Avec  $l \in \mathbb{N}^+$  et  $\bullet \in \{e, p\}$ . Cela garantit que plus de 99,7 % de la masse de probabilité de l'estimation  $x_k^{\bullet}$  sont à l'intérieur  $[a_k^{\bullet}, b_k^{\bullet}]$ . L'intervalle dynamique permet d'effectuer un développement en série de Chebyshev sur le support de l'estimation gaussienne qui permet de réduire le nombre de composants de la série par rapport à l'intervalle statique. Pour la simulation, le calcul d'intervalle dynamique est utilisé, où l'est fixé à quatre

### 3.5.2 Prédiction

Dans l'étape de prédiction, du pas de temps  $k$  à  $k + 1$ , le calcul de la moyenne et de la variance prédites est effectué selon

$$w_{k+1}^p = E\{a_k(x_k, u_k)\} \quad (3.35)$$

$$(\sigma_{k+1}^p)^2 = E\{a_k(x_k, u_k) - w_{k+1}^p\}^2 + (\sigma_k^w)^2, \quad (3.36)$$

Où  $(\sigma_k^w)^2$  est la variance du bruit du système  $w_k$ . En supposant que la fonction système  $a(\cdot, u_k)$  pour une entrée système donnée  $u_k$  est représenté au moyen d'une série de Chebyshev à  $n$  composants, la moyenne et la variance peuvent être calculées via

$$w_{k+1}^p = (c_{k,n}^a)^T \cdot A_n \cdot E_{k,n}^e, \quad (3.37)$$

$$(\sigma_{k+1}^p)^2 = (c_{k,n}^a \otimes c_{k,n}^a)^T P_{2n} \cdot E_{k,2n}^e - (w_{k+1}^p)^2 + (\sigma_k^w)^2, \quad (3.38)$$

Respectivement, où, (3.37) coïncide avec (3.27), où  $E_{k,n}^e$  est le vecteur des moments non centraux de l'estimation courante  $x_k$  transformée dans l'intervalle  $\Omega$  (voir (3.22)) et  $C_{k,n}^a$  est le vecteur de la série coefficients résultant de l'approximation de  $a_k(\cdot, u_k)$  au pas de temps  $k$ . En revanche, la matrice des coefficients de Chebyshev  $A_n$  reste constante pour tous les pas de temps sauf si le nombre de composants  $n$  est varié dans le temps. De même, (3.38) découle directement de (3.31) et (3.32), la matrice  $P_{2n}$  étant constante à tout instant.

### 3.5.3 Correction

Pour les mises à jour des mesures, le but est de corriger la prédiction  $x_k^p$  en connaissant la dernière valeur de mesure  $z_k$ . De ce fait, c'est supposé que  $x_k^p$  et  $z_k$  sont conjointement gaussiens, ce qui nécessite de calculer le vecteur moyen conjoint et la matrice de covariance conjointe

$$u_k^{xz} = \begin{bmatrix} u_k^p \\ \tilde{u}_k \end{bmatrix}, C_k^{xz} \begin{bmatrix} (\sigma_k^x)^2 & \sigma_k^{xz} \\ \sigma_k^{xz} & (\sigma_k^z)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

Respectivement. Compte tenu de (3.39) les corrections (moyenne et la variance) sont données par

$$\begin{aligned} u_k^e &= u_k^p + K_k \cdot (\hat{z}_k - u_k^z), \\ (\sigma_k^e)^2 &= (\sigma_k^p)^2 - K_k \cdot \sigma_k^x, \end{aligned} \quad (3.40)$$

Qui coïncide avec l'étape bien connue de mise à jour du filtre de Kalman

### 3.5.3.1 Moyenne et variance de mesure

Le calcul de  $u_k^z$  et  $(\sigma_k^z)^2$  nécessite une prédiction basée sur modèle de mesure (3.2). De manière analogue à la prédiction de la l'état du système décrit dans la section 5.2, les moments souhaités résultent de

$$\begin{aligned} u_{k,n}^z &= (c_{k,n}^h) \cdot A_n \cdot E_{k,n}^p, \\ (\sigma_{k,n}^z)^2 &= (c_{k,n}^h \otimes c_{k,n}^h)^T P_{2n} \cdot E_{k,n}^p - (u_k^p)^2 - (\sigma_k^z)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Où  $E_{k,n}^p$  comprend tous les moments non centraux jusqu'à l'ordre n de la prédiction  $x_k^p$  transformé en intervalle  $\Omega$  et  $c_{k,n}^h$  est le vecteur des coefficients en série du développement en série de Chebyshev de  $h_k(\cdot)$ .

Les deux matrices  $A_n$  et  $P_{2n}$  sont indépendantes de la mesure fonction  $h_k(\cdot)$  et donc, peut être utilisée à la fois dans la prédiction et la mise à jour des mesures.

### 3.5.1.2 Covariance de l'état et de la mesure

Le paramètre inconnu restant est la covariance  $\sigma_k^{x|z}$  de l'état et mesure. Semblable à (3.31), la covariance peut être formulée pour

$$\sigma_k^{xz} = \{(x_k - u_k^p)(z_k - u_k^z)\} \quad (3.42)$$

$$= E \{x_k \cdot h_k(\cdot)\} - u_k^p \cdot u_k^z. \quad (3.43)$$

Le premier terme ne peut pas être évalué sous forme fermée pour des fonctions de mesure arbitraires, mais étant donné l'approximation de Chebyshev de  $h_k(\cdot)$ , évaluer l'espérance revient à calculer l'espérance d'un produit d'une fonction linéaire( $x_k$ ) avec une série Chebyshev. Cela peut à nouveau être facilement calculé dans mode matrice-vecteur selon

$$\sigma_{k,n}^{xz} = (c_{k,n}^h) \cdot A_{k,n} \cdot E_{k,n}^p - u_k^p \cdot u_k^z, \quad (3.44)$$

Où la matrice  $(n + 1) \times (n + 2)$  est donné par

$$A_{k,n} \triangleq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (b^p - a^p) \cdot A_k \\ (a^p + b^p) \cdot A_k & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Cette matrice comprend les coefficients de Chebyshev résultant de la multiplication de la série de Chebyshev avec  $x_k$  et transforme simultanément le résultat de cette multiplication en retour à l'intervalle  $[a_k^p, b_k^p]$  au moyen de la transformée inverse variable (3.21). Cela peut être facilement visible en posant  $a_k^p = -1$  et  $b_k^p = 1$ , où (3.45) devient  $A_{K,n} = [0 \ A_n]$ .

### 3.6 Résultats et simulation

#### 3.6.1 Exemple I : Moments d'ordre supérieur

Dans ce premier exemple de simulation, la transformation

$$y=|x| \tag{3.46}$$

Est considéré, où  $x$  a une moyenne  $\mu_x = 0,5$  et une variance  $\sigma_x^2 = 1$ .

La variable aléatoire résultante  $y$  est non gaussienne et les moments impairs sont non nuls. La méthode de Monte Carlo (MC) avec 10 millions d'échantillons est effectuée pour déterminer les vrais moments (non centraux) de  $y$ . Les résultats sont présentés dans le tableau (3.1).

	Moments				
	1	2	3	4	5
MC	0.896	1.25	2.206	4.562	10.619
UKF	0.983	1.25	1.879	3.063	5.165
CPKF, $n=2$	0.747	1.25	3.795	13.563	50.348
CPKF, $n=5$	0.997	1.25	1.987	4.563	15.775
CPKF, $n=10$	0.932	1.25	2.198	4.563	10.630
CPKF, $n=15$	0.882	1.25	2.209	4.563	10.623

**Tab (3.1) :** Calcul des moments de la variable aléatoire

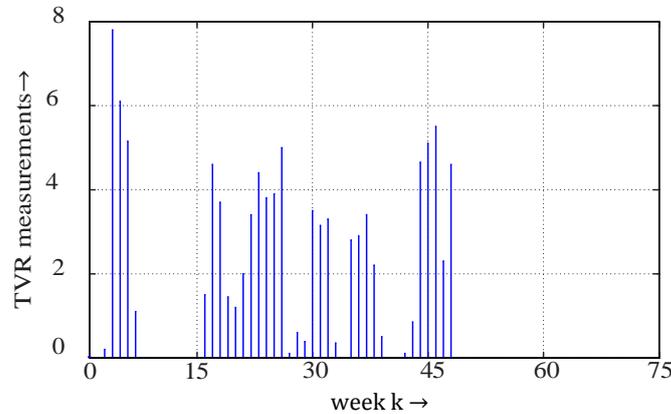
Avec les estimations calculées avec le filtre de Kalman de type (UKF), et l'estimateur proposé (noté CPKF). Pour la CPKF, le nombre de séries composants  $n$  est varié. Pour  $n = 2$ , le nombre de composantes de la série est de trois et donc identique au nombre de points sigma de l'UKF. Dans ce cas, le moment de  $y$  données par UKF est plus proche de celles calculés par le CPKF. Mais avec un nombre croissant

Des composantes  $n$ , CPKF approxime les moments de  $y$  avec précision croissante. En outre, le CPKF est désormais également capable de capturer avec précision des moments d'ordre trois et plus, tandis que le L'UKF ne peut pas fournir d'estimations précises de ces moments.

#### 3.6.2 Exemple II : Application au monde réel

Dans cet exemple, les données réel provenant de la surveillance de l'efficacité d'une campagne publicitaire télévisée pour un seul produit sont considérées [56, 57]. Ces données sont obtenues par

moyen d'enquêtes hebdomadaires, où un nombre donné d'individus de la population de téléspectateurs au Royaume-Uni est échantillonné afin pour compter le nombre de personnes au courant des publicités télévisées en cours ou récentes pour le produit. Le résultat de chaque enquête est mesuré dans des unités standardisées appelées classifications de télévision (TVR).



**Fig3.1** : Mesures hebdomadaires de TVR formant l'entrée  $u_k$ .

Soit  $u_k$  la mesure TVR pour la semaine  $k$ . Dans la Fig. (3.1), les mesures TVR pendant 75 semaines sont représentées. Les mesures TVR pilotent le modèle non linéaire à cinq dimensions modélisé par l'équation dynamique suivante.

$$x_{k+1} = (x_k + w_k, u_k), \quad w_k \sim N(w_k; \underline{0}, 0.03 \cdot C_k^x) \quad (3.47)$$

Avec  $C_k^x$  étant la matrice de covariance de  $x_k$  et la fonction système

Le vecteur d'état  $x$  comprend le niveau minimal de conscience  $x_1$ , le niveau maximal de conscience  $x_2$ , le maximum de conscience  $x_2$ , le taux de dégradation de la mémoire  $x_3$ , la pénétration  $x_4$  et l'effet de la TVR sur la conscience  $x_5$  (pour plus de détails, voir [59]).

Conscience  $x_5$  (pour plus de détails, voir [59]). L'équation de mesure est donnée par

$$z_k = x_1 + x_{5,k} + v_k = H \cdot x_k + v_k \quad (3.48)$$

Avec  $H \triangleq [1, 0, 0, 0, 1]$ , où  $z_k$  correspond à la proportion de conscience et le bruit  $v_k$  a un écart type  $\sigma_k^v = 0.05$ . L'estimation de l'état initial est donnée par

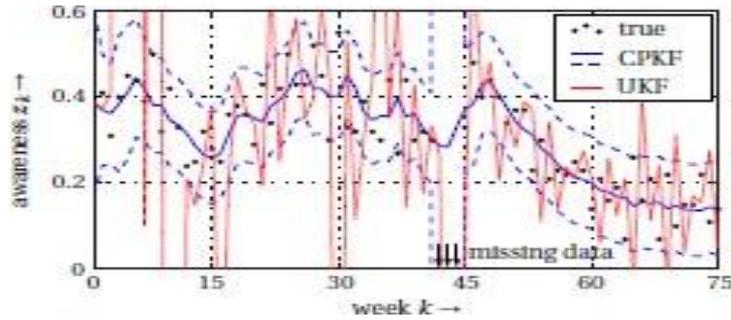


Fig. 3.2 : Proportions de sensibilisation prédites par le CPKF

(Ligne bleue continue) avec la région de confiance de 95% (tirets bleus), ainsi que les prédictions de l'UKF (pointillés rouges). Les valeurs réelles de la proportion de sensibilisation sont indiquées par les points noirs. Pour les semaines  $k=42, 43, 44$  aucune mesure de sensibilisation n'est disponible.  $\underline{x}_0 \sim (\underline{x}_0; u^x; C^x)$  Avec un vecteur moyen et une matrice de covariance

$$\underline{u}_\delta = 0.90 \text{ est } C_\delta = \begin{bmatrix} 0.10 & 6.25 & 6.25 & 0 & 0 & 0 \\ 6.25 & 406.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10.021 & 0 & 0 & 0 & 2.25 & 0 \\ [0.30] & [0 & 0 & 0 & 0 & 100] \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Respectivement.

Comme l'état du système est de dimension cinq, le CPKF proposé est simplement appliqué à la cartographie non linéaire unidimensionnelle  $\exp(-x_4 - u)$  dans (3.47). Les quatre états du système sont traités au moyen de l'UKF. Une dérivation plus détaillée de cette décomposition de l'état se trouve dans l'annexe A. Le CPKF est comparé à l'UKF, où la transformation non centrée est appliquée aux cinq dimensions de l'état. Pour les deux estimateurs, l'étape de mise à jour de la mesure est effectuée via un filtre de Kalman, car l'équation de mesure (3.48) est linéaire. Les valeurs de la proportion de conscience réelle pour l'étape de mise à jour sont tirées de [59] et sont représentées sur la figure 3. Il est important de noter que pour les semaines 42, 43 et 44, aucune mesure de la conscience ne sont disponibles. Dans ce qui suit, les prédictions de la proportion de conscience  $\hat{z}_k$  CPKF et de l'UKF sont comparées avant la mise à jour des estimations d'état avec la véritable conscience.

UKF sont comparées avant la mise à jour des estimations d'état avec la valeur réelle de la conscience  $\hat{z}_k$ . Ces prédictions sont calculées comme un sous-produit de l'étape de mise à jour des mesures (voir (3.45)). La figure 3 présente les proportions de conscience prédites. Sont

représentées. Il est évident que l'UKF se comporte de manière très instable et fluctue fortement. Ainsi, les prédictions de sensibilisation qui en résultent sont très imprécises. Cet effet peut être expliqué par des estimations trop confiantes, c'est-à-dire que la matrice de covariance de l'état du système contient des variances trop faibles. Etat du système contient des variances trop petites.

Le comportement du CPKF est différent, ce qui est surprenant car le CPKF est simplement appliqué sur  $\exp(-x_4 - u)$ , tandis que les autres parties de l'équation du système sont traitées. Appliqué à  $\exp(-x_4 - u)$ , tandis que les autres parties de l'équation du système sont traitées par l'UKF. Ainsi, le CPKF a un effet stabilisateur sur l'UKF, ce qui permet d'obtenir des prédictions d'éveil qui suivent avec précision l'évolution du système des prédictions de conscience qui suivent précisément la vérité de terrain. De plus, le CPKF n'est pas trop confiant car les variances de mesure prédites  $(\sigma_k^z)^2$  Suffisamment grandes pour capturer les véritables proportions de sensibilisation. Même pour les semaines avec des données manquantes, les prédictions du CPKF sont significatives car les variances augmentent et donc, indiquent une incertitude croissante. Cependant, la tendance est toujours correcte.

### 3.6.3 Exemple III : Série chronologique

Dans l'exemple de simulation numérique suivant, le modèle de croissance non stationnaire avec une équation de dynamique non linéaire

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + .25 \frac{x_k}{1+x_k^2} + 8 \cdot \cos(1.2 \cdot k) + w_k \quad (3.50)$$

Et l'équation de mesure non linéaire

$$z_k = \frac{(x_k)^2}{20} + V_k \quad (3.51)$$

Est considéré. En raison de sa nature hautement non linéaire et bimodale, cet exemple a souvent été utilisé auparavant pour comparer les performances des estimateurs d'état. Souvent été utilisé auparavant pour comparer les performances des estimateurs d'état [47, 54, 55].

La bi modalité découle de l'équation de mesure quadratique, qui possède une vraisemblance bimodale en cas de valeurs de mesure positives, C'est-à-dire pour  $z_k > 0$  Pour les besoins de la simulation, les paramètres des termes de bruit et de l'état initial du système sont choisis comme suit. Initial du système sont choisis comme suit. Le bruit du système  $w_k$  a une variance  $(\sigma_k^w)^2=10$  et la variance du bruit de mesure  $V_k$  est  $(\sigma_k^z)^2=1$ . L'estimation initiale de l'état au pas de temps  $k = 0$  est  $x_0 \sim N(x_0; 0,10)$ , l'état réel du système  $x_0$  est échantillonné à partir de  $x_0$ .

Outre le CPKF proposé, les estimateurs suivants sont considérés pour la comparaison :

**UKF** Filtre de Kalman non parfumé avec deux et trois points sigma.

**GHKF** Le filtre de Kalman de Gauss-Hermite [42, 49] permet un nombre arbitraire de points sigma.

**CKF** Le filtre Kalman à cubature [41] fonctionne avec deux points sigma.

**EKF** Le filtre de Kalman étendu est basé sur une expansion en série de Taylor du premier ordre.

**PF** Filtre particulaire avec ré échantillonnage résiduel[46].

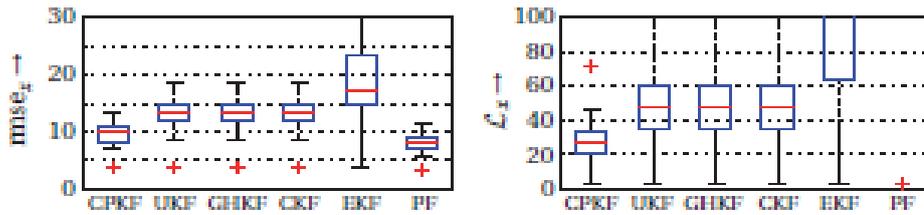
La CPKF est appliquée avec deux ( $n = 1$ ), trois ( $n = 2$ ) et dix ( $n = 9$ ) composants de la série. Ce faisant, les performances de la CPKF peuvent être comparées Avec l'UKF et CKF avec un nombre correspondant de points sigma. Les deux nombre de points sigma sont également utilisés pour le GHKF<sup>4</sup>, mais en outre unGHKF avec dix points sigma est également utilisé. Le PF est le seul non-Gaussien estimateur d'état et donc, idéalement adapté pour les non linéarités considérées dans cet exemple de simulation. Le nombre de particules est choisi de manière à ce que l'exécution du PF est proche de l'exécution du CPKF. Sur ce compte, les PF avec 10, 20, et 100 particules sont appliquées. Leurs temps d'exécution correspondent à CPKFs avec deux, trois et dix composants de série, respectivement.

La simulation est réalisée pour 100 runs de Monte Carlo, où chaque run comprend 50 étapes de temps avec des prédictions et des mises à jour de mesure. La performance de tous les estimateurs est évaluée au moyen de deux mesures :

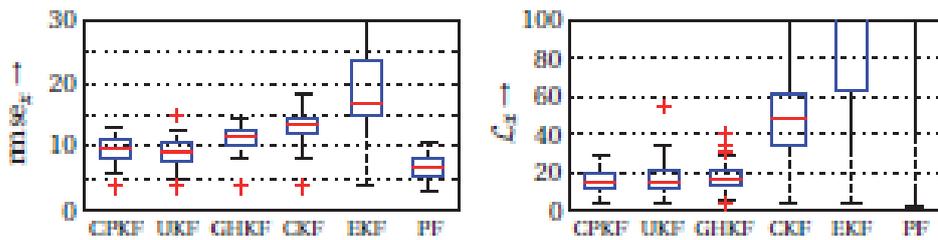
L'erreur quadratique moyenne (rmse) et la log-vraisemblance négative de l'estimation de l'état (voir par exemple [56])

$$f_x = \triangleq \text{Log} \left( \sqrt{\frac{2\pi\sigma_k^e}{k}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x_k - u_k}{\sigma_k^e} \right)^2 \quad (3.52)$$

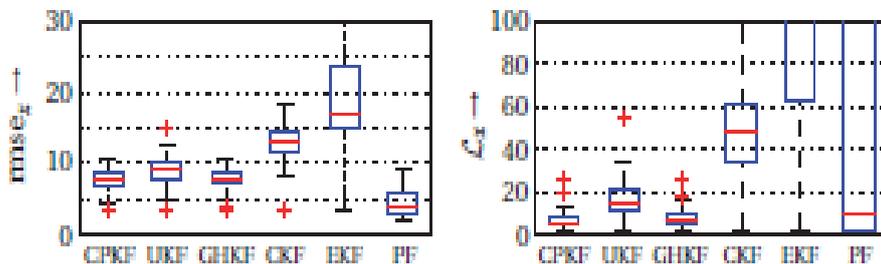
Pour les deux, des valeurs inférieures indiquent une meilleure performance. Alors que la rmse simplement pénalise l'écart de l'état estimé  $x_k^e$  à partir de l'état vrai  $x$ , le log vraisemblance pénalise à la fois l'incohérence et l'incertitude. Les valeurs élevées en cas d'erreur forte entre l'état et l'estimation ainsi qu'en cas D'une surestimation (variance  $(\sigma_k^e)^2$  est trop élevé) ou sous-estimé (variance  $(\sigma_k^e)^2$  est trop faible) de l'erreur.



(a) Deux composantes de série/points sigma pour CPKF, UKF, GHKF, CKF ainsi que dix particules pour PF.



(b) Trois composantes de série/points sigma pour CPKF, UKF et GHKF ainsi que 20 particules pour PF. CKF est identique à (a) et (c), car il ne fonctionne qu'avec deux points sigma.



**Fig 3.3:** Médiane (ligne rouge), quantiles inférieurs et supérieurs (boîte bleue) et dispersion (lignes noires) de la rmse (ligne de gauche) et de la log-vraisemblance négative (ligne de droite) de tous les estimateurs.

Les croix rouges indiquent les valeurs aberrantes. (c) Dix composantes de série/points sigma pour CPKF et GHKF ainsi que 100 particules pour PF. UKF est identique à (b), car le nombre maximum de points sigma est de trois.

Les résultats de l'EKF sont identiques pour (a), (b), et (c). Dans la figure (3.4), le rmse et la log-vraisemblance négative sur ensemble des simulations pour différents nombres de composantes de séries/points sigma sont représentés. On peut voir que le CPKF, avec le GHKF, fournit la

log-vraisemblance la plus faible.

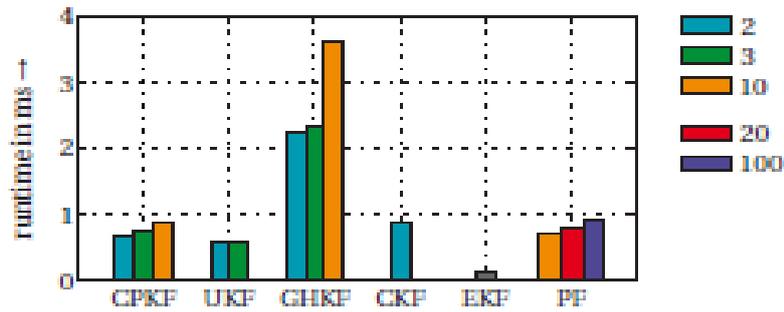


Fig.3.4 : Temps d'exécution moyen de tous les estimateurs

Les estimations du CPKF sont les plus cohérentes sans être trop incertaines. En termes de rmse, le CPKF surpasse clairement tous les autres estimateurs gaussiens pour deux composantes de série/points sigma (voir figure 4b). Ici, UKF, GHKF et CKF fournissent des résultats presque identiques, car les points sigma de CKF et GHKF sont identiques et très proches des points sigma de UKF. L'approche d'approximation du CPKF est complètement différente de ces estimateurs gaussiens, car elle repose sur une approximation de fonction au lieu d'une approximation ponctuelle de la distribution de l'état. Ainsi, le CPKF fournit des estimations différentes.

L'EKF perd souvent la trace de l'état réel sans en être conscient - l'EKF a en moyenne la rmse la plus basse et en même temps les variances les plus basses de tous les estimateurs gaussiens et est donc trop confiant.

Pour un nombre plus élevé de composantes, le rmse du CPKF est comparable à celui de l'UKF et du GHKF, mais en termes de log-vraisemblance simplement le GHKF est comparable au CPKF. Il y a un gain clair de performance d'estimation quand le nombre de composantes de série est augmenté, mais puisque CPKF est toujours un estimateur gaussien, cette amélioration de performance est limitée et dépenser trop de composantes n'aura aucun impact visible. Au lieu de cela, c'est simplement la demande de calcul qui augmentera. Ceci est valable pour tout filtre de densité supposé gaussien (approximatif).

Si le temps d'exécution (voir la figure (3.5)) est également pris en compte comme critère de performance, il devient évident que le CPKF a un bon rapport précision d'estimation/temps d'exécution. Le temps d'exécution est proche de celui des approches sigma-point les plus rapides.

Ce faible temps d'exécution est dû à la notation matrice-vecteur peu dense et efficace en termes de calcul de toutes les étapes d'estimation du CPKF. Le GHKF, par exemple, qui est très proche du CPKF en termes de temps d'exécution, peut être considéré comme une méthode d'estimation très efficace.

Du CPKF en termes de performances d'estimation, est de loin l'estimateur gaussien le plus lent. D'autre part, l'EKF est l'estimateur le plus rapide car la linéarisation est effectuée hors ligne, mais ses estimations sont imprécises.

Comme mentionné ci-dessus, le nombre de particules du PF est choisi de manière à ce que le temps d'exécution soit similaire à celui du CPKF. Comme le PF n'est pas un estimateur gaussien, il peut fournir des estimations qui sont beaucoup plus proches du véritable état que les estimateurs gaussiens. Cependant, le PF sous-estime son erreur et ainsi, les valeurs de log-vraisemblance sont les pires de tous les estimateurs car la variance des particules est de loin trop faible. Ce n'est qu'en dépensant beaucoup de particules - significativement plus de 100 - que les estimations de PF deviennent cohérentes. Mais cela se fait au prix d'une charge de calcul plus élevée.

### 3.7 Limitations et extensions potentielles

Tous les estimateurs gaussiens mentionnés ci-dessus, y compris le CPKF, reposent sur une approximation additionnelle pour l'étape de mise à jour de la mesure, qui est l'hypothèse gaussienne conjointe de la mesure et de l'état. Cette hypothèse n'est valable que pour une cartographie linéaire et constitue une bonne approximation pour les fonctions non linéaires tant que la densité de mesure est uni modale et proche d'une densité gaussienne.

Dans le cas de densités multimodales ou fortement asymétriques, l'hypothèse gaussienne conjointe est inappropriée et, par conséquent, un estimateur gaussien devrait fournir des résultats d'estimation inexacts, voire complètement divergents. Une solution potentielle à cette limitation est l'extension vers des estimateurs de mélange gaussien [40, 48]. Ici, au lieu d'une seule gaussienne, une somme de gaussiennes est propagée. Comme les mélanges gaussiens sont des approximations de fonctions universelles [58], la convergence vers l'estimation exacte est possible [39], mais au prix d'une charge de calcul accrue.

En augmentant le degré de la série de Chebyshev, la qualité de l'approximation de la fonction non linéaire réelle augmente également. Malheureusement, en raison d'instabilités numériques résultant du calcul des coefficients de Chebyshev et des coefficients de la série, les séries de degré élevé - typiquement  $n > 20$  - peuvent donner lieu à une erreur de calcul. Une

performance d'estimation moins bonne que celle d'une série de degré beaucoup plus faible. Pour éviter ce problème, il faut plutôt appliquer une approximation par morceaux de la fonction non linéaire avec un ensemble de séries de Chebyshev de faible degré.

Jusqu'à présent, le CPKF est simplement applicable à des états unidimensionnels.

L'extension vers le cas multidimensionnel nécessite une expansion de série polynomiale de Chebyshev multi-variée et un calcul de moment multi-varié pour les polynômes. La première étape est simple, car l'expansion de la série de Chebyshev peut être appliquée à toutes les dimensions. L'approximation polynomiale résultante consiste en un produit de séries de Chebyshev unidimensionnelles.

Le calcul des moments à plusieurs variables n'est cependant pas encore totalement résolu. Une solution prometteuse a été proposée dans [53], mais elle nécessite encore un nombre important de calculs. Une autre approche consiste à étendre le calcul du moment en forme fermée proposé dans la section 4.1 au cas multi-varié.

### 3.8 Conclusion

Le filtre de Kalman polynomial de Chebyshev proposé permet d'effectuer des prédictions analytiques et des mises à jour de mesures de façon "boîte noire". Ceci est réalisé d'abord par l'expansion des fonctions non linéaires en séries polynomiales de Chebyshev, où aucun dérivé n'est nécessaire et où la transformée en cosinus discrète, efficace en termes de calcul, peut être utilisée. Et deuxièmement, par le calcul et la propagation des moments en forme fermée, où toutes les opérations peuvent être formulées dans des expressions vectorielles-matricielle éparses et peu coûteuses en termes de calcul. Cela permet d'obtenir un temps d'exécution du même ordre de grandeur que celui des estimateurs gaussiens reposant sur des points sigma, comme le filtre de Kalman non centré ou le filtre de Kalman cubature. Mais contrairement à ces estimateurs, l'approche proposée exploite la distribution entière pour la propagation des moments, ce qui donne des résultats d'estimation plus précis.

### **Conclusion générale**

Dans ce notre modeste travail on a présenté l'aspect de l'estimation de l'information par le filtrage de Kalman et ses application dans le domaine de la communication et de contrôle des systèmes dynamiques.

Ainsi notre études apportées peuvent être classé en trois points principales:

- Études des systèmes dynamique chaotiques et la possibilité de la synchronisation identique par la mise en place de la méthode de filtrage de Kalman non linéaire.
- Principe d'estimation par le filtre de Kalman linéaire (KF) et sa projection au cas non linéaire (EKF, UKF, ExPKF)
- Étude du cas du filtre de Kalman optimal modélisé par les polynômes de Chebyshev et application au calcul des moment d'ordre supérieur et au monde réel .

Dans un système de communication chaotique, la synchronisation est l'élément le plus important qui doit être pris en compte pour assurer les meilleures performances de transmission. Ainsi l'information à transmettre est toujours affectée par le bruit du générateur d'états ou le bruit de canal ce qui rend la synchronisation impossible et peut être donc vue comme une estimation d'état par filtrage de Kalman, dans ce contexte le premier chapitre porte sur le thème des systèmes dynamiques non linéaires.

On présente par la suite (deuxième chapitre) de d'une manière détaillé chaque méthode d'estimation par les différents types du filtre Kalman, ainsi dans ce but, on a étudié la méthode d'estimation d'état, représentée par le filtre de Kalman Polynomial Exact (ExPKF).

Alors malgré l'importance de ce type de filtrage qui offre un calcule exacte des statistiques, il a ses limites, c'est pourquoi nous avons continué à étudier le cas générale des systèmes non linéaires qui ne sont pas des fonctions polynomiales; par conséquent une telle fonction devait avoir une représentation précise qui simule un polynôme, et il était donc nécessaire d'examiner les polynômes de Chebyshev et ses

## **Conclusion générale**

---

propriétés analytiques, on fait cela conduit à la réalisation du filtre de Kalman le plus optimal à ce jour. Ainsi par simulations numériques on démontre d'une part dans le paragraphe (VI.1) du chapitre trois que les performances ont atteint la limite souhaité en prenant comme critère le calcul des moment de la variable résultant par une transformation non polynomial, et d'autre part dans le paragraphe (VI.2) , la surveillance de l'efficacité d'une campagne publicitaire télévisée pour un seul produit est examiné et a montré à quel points la performance du filtre Polynomial de Chebyshev était bonne.

### Bibliographie

- [1]: M. P. Kennedy. Basic concepts of nonlinear dynamics and chaos. *Tutorials (IEEE)*, pages 289–313, 1994.
- [2]: A. Serbanescu. System de transmission intégrante vol. 1 Communication de Bandalargeaflorin et systemdynamiquechaotique. Ed. ATM, 2000.
- [3]: A. Serbanescu. Systems dynamique - Applications dans les communications. Ed. ATM, 2004.
- [4] E.N. Lorenz. Flux non périodique déterministe. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [5]: T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. ii. *Prog. Theor. Phys.*, 70:1240, 1983.
- [6]: T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. iii. *Prog. Theor. Phys.*, 72:885, 1984.
- [7]: V. S. Afraimovich, N. N. Veroychev, and M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems. *Radio Phys. and Quantum Electron.* 29:795–803, 1983.
- [8]: L. Pecora and T. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–823, 1990.
- [9]: N. F. Rulkov, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Tracking unstable orbits in chaos using dissipative feedback control. *Phys. Rev. E*, 50(1):314–324, July 1994.
- [10]: N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51(2):980–993, Feb. 1995.
- [11]: N. F. Rulkov. Images of synchronized chaos: Experiments with circuits. *Chaos*, 6(3):262–279, Sept. 1996.
- [12]: L. Kocarev and U. Parlitz. General approach for chaotic synchronization with application to communication. *Phys. Rev. Lett.*, 74(25):5028–5031, 1995.
- [13]: L. M. Pecora and T. L. Carroll. Detecting chaotic drive-response geometry in generalized synchronization. *Int. J. of Bifurcation & Chaos (IJBC)*, 10(4):875–889, 2000.
- [14]: M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):874–881, Oct. 1997.
- [15]: A. Volkovskii. Synchronization of chaotic systems using phase control. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 44(10):913–917, Oct. 1997.

## Bibliography

---

- [16]: H. Leung, Z. Zhu, and Z. Ding. An aperiodic phenomenon of the extended kalman filter in filtering noisy chaotic signals. *IEEE Trans. Signal Processing*, 48(6):1807–1810, June 2000.
- [17]: H. Leung and Z. Zhu. Performance evaluation of ekf-based chaotic synchronization. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48(9):1118–1125, Sept. 2001.
- [18]: M. B. Luca, S. Azou, G. Burel, and A. Serbanescu. On exact kalman filtering of polynomial systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 53(6):1329–1340, June 2006.
- [19]: H. Leung and J. Lam. Adaptive blind equalization for chaotic communication systems using extended kalman filter. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 48:979–989, Aug. 2001.
- [20]: R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME. Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [21]: A. Gelb. *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T. Press, 1980.
- [22]: Y. Bar-Shalom and X.-R. Li. *Estimation and Tracking - Principles, Techniques and Software*. Artech House, 1993.
- [23]: V. E. Benes. Filtres exacts de dimension finie pour certaines diffusions à derive nonlinéaire. *Stochastique*, 5:65–92, 1981.
- [24]: F. Daum. *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamical Models*, chapter new exact nonlinear filters, pages 199–226. Marcel Dekker, Inc., 1988.
- [25]: M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, ET T. Clapp. UN tutorial sur les Filtres à particules pour le suivi bayésien non-linéaire/non-gaussien en ligne. *IEEE Trans. Treatment designal*, 50(2):174–189, Fév. 2002
- [26]: S. J. Julier and J. K. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. *Proc. SPIE-Int. Soc. Opt. Eng.*, 3068:182–193, 1997.
- [27]: E. A. Wan et R. van der Merwe. *Filtrage de Kalman et réseaux de neurones*, chapter Le filtre de Kalman non parfumé. Éditions Wiley, 2001.
- [28]: M. Norgaard, N. Poulsen, et O. Ravn. Nouveaux developments dans l'estimation d'état pour les systems non linéaire. *Automatique*, 36(11):1627–1638, Nov. 2000.
- [29]: T. S. Schei. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms. *Automatica*, 33(11):2053–2058, Nov. 1997.
- [30]: T. Lefebvre, H. Bruyninckx, and J. De Schutter. Kalman filters for nonlinear systems: a comparison of performance. *The International Journal of Control*, 77(7):639–653, May 2004.
- [31]: D. L. Alspach and H. W. Sorenson. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 17(4):439–448, 1972.

## Bibliography

---

- [32]: R. van der Merwe and E. Wan. Gaussian mixture sigma-point particle filters for sequential
- [33]: G. Salut. Le thème non-linéaire en automatique et traitement du signal. In Journées nationales du G.d.R. "Traitement du signal et images" du C.N.R.S., Chantilly, France, Sept. 1989.
- [34]: P. Del Moral, G. Rigal, and G. Salut. Estimation et commande optimale non-linéaire : Un Cadre unifié pour la résolution particulière. Technical Report 91137, LAAS-CNRS, April 1991.
- [35]: S. Julier, J. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new method for the nonlinear transformation of means and covariance in filters and estimators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45(3):477–482, 2000.
- [36]: R. van der Merwe. Filtres de Kalman Sigma-Point pour l'inférence probabiliste dans les modèles de systèmes dynamiques. Thèse de doctorat, OGI School of Science & Engineering, 2004.
- [37]: N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *Proc. Inst. Elect. Eng. F*, 140:107–113, 1993.
- [38] D. Crisan and A. Doucet. A survey of convergence results on particle filtering methods for practitioners. *IEEE Trans. Signal Processing*, 50(3):736–746, Mar.
- [39] Simo Ali-Löytty. *Gaussian Mixture Filters in Hybrid Positioning*. PhD thesis, Tampere University of Technology, Tampere, Finland, August 2009.
- [40] Daniel L. Alspach and Harold W. Sorenson. Nonlinear Bayesian Estimation using Gaussian Sum Approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(4):439–448, August 1972.
- [41] Ienkar Anasaratnam and Simon Haykin. Cubature Kalman Filters. *IEEE Transactions on Aut.*, 54(6):1254–1269, June 2009.
- [42] Ienkar Anasaratnam, Simon Haykin, and Robert J. Elliott. Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms Using Gauss-Hermite Quadrature. *Proceedings of the IEEE*, 95(5):953–977, 2007.
- [43] M. Sanjeev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon, and Tim Clapp. A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2):174–188, February 2002.
- [44] Frederik Beutler, Marco F. Huber, and Uwe D. Hanebeck. Gaussian Filtering using State Decomposition Methods. In *Proceedings of the*

## Bibliography

---

- 12th International Conference on Information Fusion (Fusion)*, pages 579–586, Seattle, Washington, July 2009.
- [45] Vladimir Britanak, Patrick C. Yip, and Kamisetty R. Rao. *Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. Academic Press, 2006.
- [46] James Carpenter, Peter Clifford, and Paul Fearnhead. Improved particle filter for nonlinear problems. In *IEE Proceedings Radar, Sonar and Navigation*, volume 146, pages 2–7, February 1999.
- [47] Simon J. Godsill, Arnaud Doucet, and Mike West. Monte Carlo Smoothing for Nonlinear Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 99(465):156–168, March 2004.
- [48] Marco F. Huber. Adaptive Gaussian Mixture Filter Based on Statistical Linearization. In *Proceedings of the 14th International Conference on Information Fusion (Fusion)*, Chicago, Illinois, July 2011.
- [49] Kazufumi Ito and Kaiqi Xiong. Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):910–927, May 2000.
- [50] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Dover Publications, Inc., 2007.
- [51] Simon J. Julier and Jeffrey K. Uhlmann. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422, 2004.
- [52] Rudolf E. Kalman. A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, 82(Series D)(1):35–45, 1960.
- [53] Raymond Kan. From Moments of Sum to Moments of Product. *Journal of Multivariate Analysis*, 99(3):542–554, March 2008.
- [54] Genshiro Kitagawa. Monte Carlo filter and smoother for non-Gaussian nonlinear state space models. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(1):1–25, 1996.
- [55] Jayesh H. Kotecha and Petar M. Djurić. Gaussian Particle Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(10):2592–2601, 2003.
- [56] Miguel Lázaro-Gredilla, Joaquin Quiñonero-Candela, Carl Edward Rasmussen, and Aníbal R. Figueiras-Vidal. Sparse Spectrum Gaussian

## Bibliography

---

ProcessRegression. *Journal of Machine Learning Research*, 11:1865–1881, June 2010.

[57] Mihai Bogdan Luca, Stéphane Azou, Gilles Burel, and Alexandru Serbanescu. On Exact Kalman Filtering of Polynomial Systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 53(6):1329–1340, June 2006.

[58] Vladimir Maz'ya and Gunther Schmidt. On approximate approximations using gaussian kernels. *IMAJ Numer. Anal.*, 16:13–29, 1996.

[59] Mike West and Jeff Harrison. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, chapter 14: Exponential Family Dynamic Models, pages 534–555. Springer, 1997.

[60] Moussa Yahia, Pascal Acco, and Malek Benslama. Estimation of Nonlinear Systems via a Chebyshev Approximation Approach. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 9(6):1021–1027, 2011.